

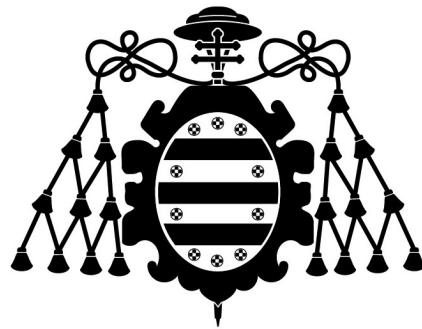
UNIVERSIDAD DE OVIEDO

---

# Simulación de un cohete

Métodos Numéricos Aplicados a la Física

---



*PL6*

*Miguel Durán Vera  
David Villa Blanco  
Ignacio González Álvarez*

5 de febrero de 2023

# Índice

<b>1. Motivación</b>	<b>2</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>3. Planteamiento y metodología de resolución</b>	<b>3</b>
<b>4. Simulación de la velocidad de combustión</b>	<b>3</b>
<b>5. Modelo de una etapa</b>	<b>5</b>
5.1. Modelo sin gravedad . . . . .	5
5.2. Modelo con gravedad constante . . . . .	5
5.3. Modelo con gravedad dependiente de la altura (Ampliación: dependiente además de la latitud del lanzamiento) . . . . .	7
5.4. Modelo con resistencia aerodinámica y densidad del aire dependiente de la altura . .	9
<b>6. Comparación diferentes métodos numéricos para resolver el problema</b>	<b>10</b>
<b>7. Modelo de varias etapas</b>	<b>12</b>
7.1. Cohete para llevar 1000 kg a órbita baja . . . . .	13
<b>8. Bibliografía</b>	<b>14</b>

# 1. Motivación

Hoy en día, gracias al desarrollo de los ordenadores modernos podemos realizar una gran cantidad de cálculos a gran velocidad, cosa impracticable hace apenas unos siglos. Esto es de gran ayuda en ramas de las matemáticas como los métodos numéricos, encargada de diseñar algoritmos para llegar a soluciones de modelos matemáticos cuyas soluciones analíticas son muy complejas o inexistentes, y de esta forma, lograr soluciones aplicables al mundo real.

Con este proyecto buscaremos aplicar los conocimientos obtenidos en las asignaturas de programación de la carrera (concretamente con ayuda del lenguaje Python y sus numerosas librerías) y MNAF (con ayuda de la cuál podremos resolver numéricamente los problemas matemáticos que nos encontremos así como lograr una modelación del mismo) para, conjuntamente, encontrar la solución a un modelo matemático, mejorar progresivamente el mismo (teniendo en cuenta cada vez más variables y situaciones realistas) y tratar de encontrar un método de resolución óptimo, buscando siempre la mayor fidelidad posible de las soluciones con los resultados físicos reales (buscando errores lo más pequeños posibles), sin olvidarnos de los costes computacionales de estos métodos, buscando siempre el mayor balance posible entre estos dos pilares.

Por último, trataremos de aplicar lo más rigurosamente posible nuestra 'intuición física' lograda durante nuestros estudios en ciencias físicas, para lograr discernir aquellas soluciones matemáticamente posibles pero físicamente ilógicas de las que cumplen ambos requisitos.

A lo largo de este informe se explicará detalladamente la modelación, implementación y los resultados de la simulación del lanzamiento de un cohete, empezando por modelos más sencillos para, poco a poco, implementar modelos más realistas y complejos.

# 2. Objetivos

Nuestro principal objetivo es estudiar la simulación del despegue de un cohete (calculando su velocidad y trayectoria) en función del tipo utilizado (una única etapa o varias etapas). Comenzaremos por el de una etapa, al cual progresivamente iremos modificando los diferentes modelos de forma que se incluirán a los anteriores una serie de mejoras o ampliaciones:

- Modelo sin gravedad.
- Modelo con gravedad constante.
- Modelo con gravedad dependiente de la altura (Ampliación: dependiente además de la latitud).
- Modelo con resistencia aerodinámica teniendo en cuenta una densidad del aire dependiente de la altura.

Una vez los tengamos, tomaremos el modelo más completo y pasaremos al tipo de cohete más realista, el cohete con etapas. Posteriormente veremos en qué secciones se pueden optimizar los

cálculos o que método de resolución funciona mejor. Por último, diseñaremos un cohete para llevar una carga de 1000 Kg a una órbita baja (entre 150 y 2000 km de altura respecto a la superficie de la Tierra).

### 3. Planteamiento y metodología de resolución

Nos encontramos ante un problema en el que tenemos un cohete con una masa inicial  $M$  tal que  $M = m(t) + \mu(t)$  con  $m$  la masa de combustible y en seco actual del cohete y  $\mu(t)$  la masa de gases del cohete. La expulsión de estos gases harán que se consiga impulsar por la tercera ley de Newton.

A partir de esto y en función de las fuerzas que intervengan en el modelo (que varían según su complejidad) obtendremos diferentes ecuaciones diferenciales que buscaremos resolver. Para los casos más sencillos podemos resolverlas directamente por integración (aunque finalmente las graficaremos sólo mediante resolución de EDOS pues son los temas en los que nos centramos en este proyecto) de forma que bastaría con calcular la integral de las soluciones obtenidas.

Sin embargo, en casos más complejos esto resulta complicado por lo que pediremos a nuestro programa que nos resuelva la ecuación diferencial. Aplicaremos este método en todos los casos, pero aprovecharemos el anterior para comparar los resultados obtenidos.

Teniendo en cuenta lo anterior, si nos paramos a pensar en que funciones o paquetes serán necesarios para llevar a cabo los cálculos bastaría con tomar:

- Paquete *scipy.integrate*. Será necesario debido a las funciones *solve\_ivp* y *simps*. El primero nos permitirá calcular la solución de una ODE en función de las condiciones iniciales que le demos, mientras que el segundo nos permitirá calcular integrales por la regla de simpson compuesta. Por otro lado, la función *solve\_ivp* nos permite calcular la solución utilizando distintos métodos. Ahí es donde probaremos que método de resolución resulta más óptimo.
- Paquete *numpy*. Debido a la gran cantidad de datos con los que trabajaremos utilizaremos matrices, algo que nos permite este paquete. Además contiene funciones con las que calcular funciones elementales que también vamos a necesitar.
- Paquete *matplotlib.pyplot*. Nos servirá para representar las soluciones obtenidas.

### 4. Simulación de la velocidad de combustión

Previamente a adentrarnos en profundidad con cada uno de los modelos, consideramos primordial destacar la influencia de la velocidad de quema del combustible en todos ellos.

Como vimos anteriormente, consideraremos las variables dependientes del tiempo  $m(t)$  y  $\mu(t)$  que describen la masa total del cohete en cada tiempo  $t$  (masa del cohete vacío más la masa del

combustible restante para ese tiempo en específico) y la masa de gases del cohete para cada tiempo t.

Si se denota por  $n$  la velocidad de combustión ( $n = 1$ , combustión constante,  $n > 1$  velocidad de combustión creciente y  $0 < n < 1$  velocidad de combustión decreciente),  $T$  el tiempo total de quema del combustible y  $\mu_0$  la masa de combustible inicialmente, podemos calcular  $\mu(t)$  y  $\frac{d}{dt}m(t)$  como:

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0(1 - \tau^n) & n \geq 1 \quad \tau = \frac{t}{T} \\ \left(1 + \frac{1}{(k+1)^n - 1}\right)\mu_0(1 - \tau^n) & 0 < n < 1 \quad \tau = \frac{kt+T}{kT+T}, k \gg 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}m(t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 n}{T} \tau^{n-1} & n \geq 1 \quad \tau = \frac{t}{T} \\ -(1 + \frac{1}{(k+1)^n - 1}) \frac{\mu_0 n}{T} \frac{k}{k+1} \tau^{n-1} & 0 < n < 1 \quad \tau = \frac{kt+T}{kT+T}, k \gg 1 \end{cases} \quad (2)$$

Una vez definidas las ecuaciones para el cálculo de dichas variables, si representamos  $\frac{\mu(t)}{\mu_0}$  y  $\frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dt}m(t)$  frente a  $\frac{t}{T}$  con  $\mu_0$  la masa del combustible total, para una serie de valores de n (=0.25, 0.5, 0.75, 1, 2 y 4) obtenemos las gráficas de la Figura 1.

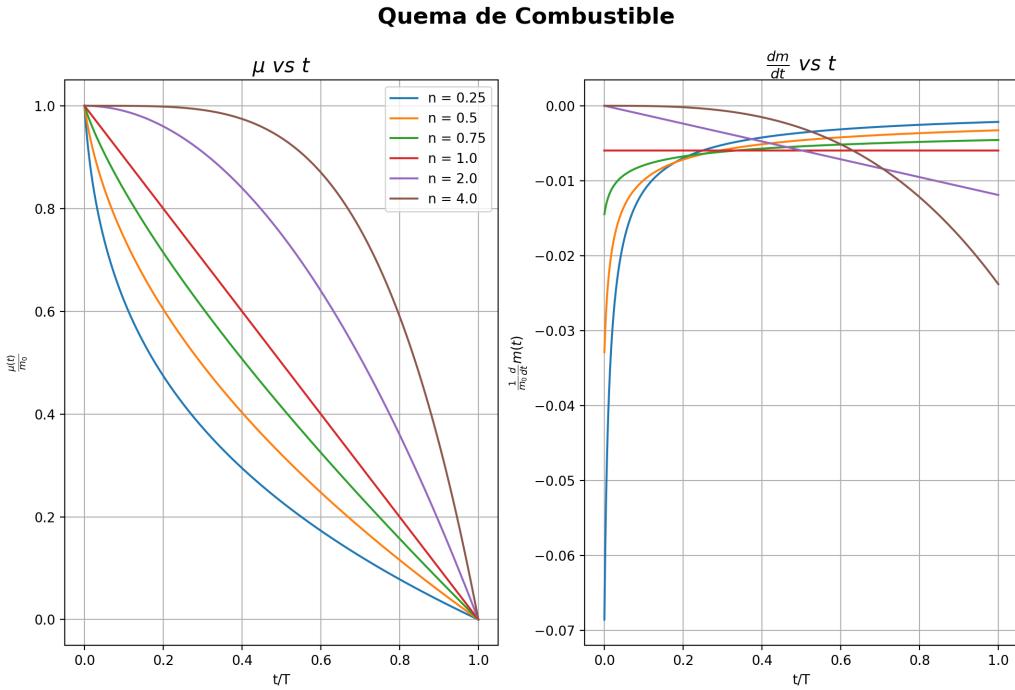


Figura 1: Diferentes modelos de velocidad de combustión

Si representamos la variación de la masas de gases en función del tiempo, podemos ver que estos se comportan como mencionamos anteriormente. Por otro lado, la variación de la masa en función del tiempo viene determinada por la velocidad de combustión, siendo visible que a velocidades

de combustión crecientes el cohete tiene que cargar con más masa durante mas tiempo que a velocidades decrecientes. Cabe destacar que este tipo de detalles nos afectarán a la hora de alcanzar más altura o velocidad.

## 5. Modelo de una etapa

En este modelo contamos con un cohete de una única fase. A la hora de calcular su ecuación del movimiento no podemos aplicar la segunda ley de Newton ya que la masa no es constante. Para obtenerlas consideraremos todo el sistema del cohete (masa y gases) y aplicaremos la segunda ley mediante el límite  $\sum \vec{F} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta t}$  con  $\delta P = P_\delta - P_0$  donde  $P_\delta = (m - \delta\mu)(\vec{v} + \delta\vec{v}) + \delta\mu\vec{v}_g$ . Por lo tanto obtenemos que  $\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u} \frac{dm}{dt} = 0$  donde  $\vec{u} = (\vec{v} - \vec{v}_g)$  es la velocidad relativa de los gases respecto al cohete.

### 5.1. Modelo sin gravedad

Comenzamos con el caso más sencillo, sin ningún tipo de fuerzas. Al no haber fuerzas exteriores la ecuación diferencial que describe el movimiento sería  $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u} \frac{dm}{dt} = 0$ . Si la resolvemos manualmente obtenemos las ecuaciones  $v(t) = v_0 + uln \frac{m_c + \mu_0}{m_c + \mu_t}$  y  $x - x_0 = \int_{t_0}^t (v_0 + uln \frac{m_c + \mu_0}{m_c + \mu(t)}) dt$  donde  $m_c$  es la masa del cohete en seco y  $\mu_0$  la masa de combustible inicial.

A partir de esto creamos el programa utilizando tanto las ecuaciones obtenidas de forma manual como pidiendo al programa que resuelva la EDO, obteniendo resultados casi idénticos.

Como podemos observar en la Figura 2 todos alcanzan velocidades muy similares, pero al igual que en el caso de la altura el valor del modelo de combustión decreciente es mayor que el de combustión creciente. Esto se debe a que una mayor quema de combustible al principio hace que tome más velocidad inicialmente y, debido a la falta de fuerzas que se opongan, recorra más distancia.

Una vez se termina el combustible el cohete este se mueve a la velocidad que alcanzó en dicho momento de forma constante y continua tomando más altura debido a la falta de fuerzas en su contra.

### 5.2. Modelo con gravedad constante

A continuación añadiremos una nueva fuerza, la gravedad. En primer lugar, suponiendo que esta no varía (cuando en realidad sí que lo hace) en función de la altura y la latitud.

Para este caso basta con tomar la solución del problema anterior, pero teniendo en cuenta que la ecuación diferencial que describe el movimiento se ve afectada por la nueva fuerza, por lo que  $\sum \vec{F} = \vec{F}_g = m\vec{g}$ . Si la resolvemos manualmente obtenemos las ecuaciones  $v(t) = v_0 + uln \frac{m_c + \mu_0}{m_c + \mu_t(1 - \frac{t}{T})}$  y  $x - x_0 = \int_{t_0}^t (v_0 - gt + uln \frac{m_c + \mu_0}{m_c + \mu(t)(1 - \frac{t}{T})})$ .

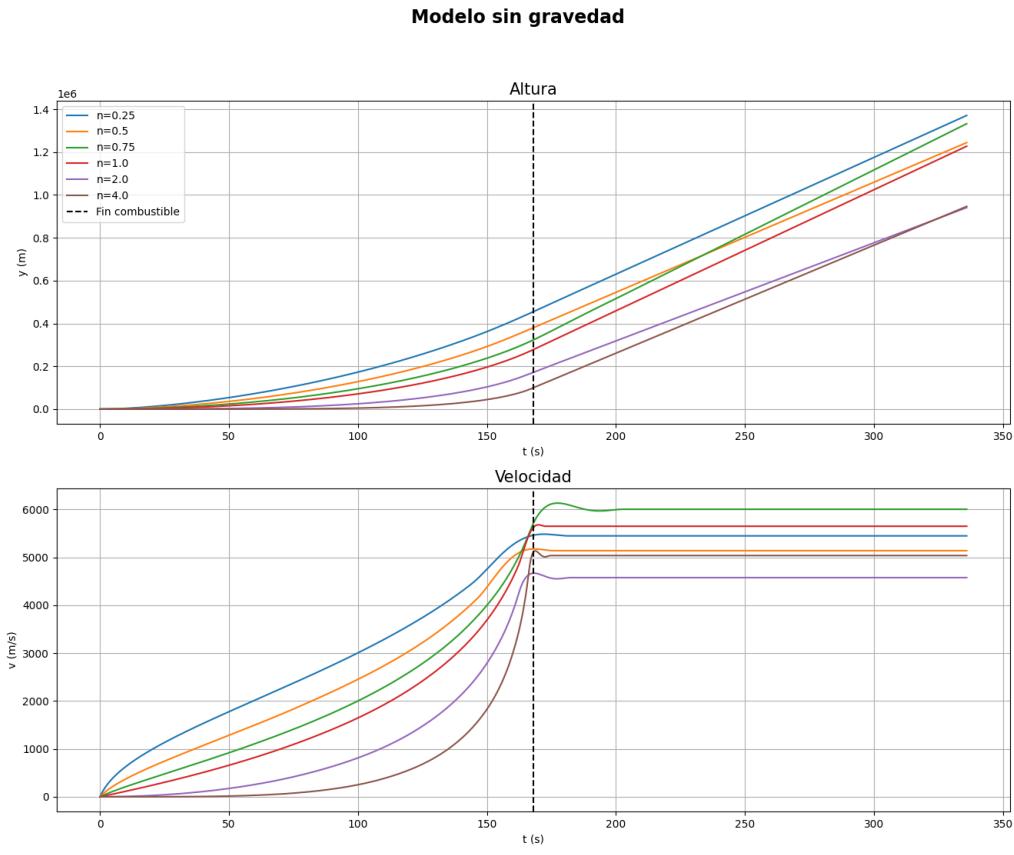


Figura 2: Simulación modelo de una etapa sin gravedad.

A partir de esto creamos el código utilizando las ecuaciones obtenidas tras resolver las EDOs de forma manual, así como pidiendo al programa que las resuelva también, obteniendo resultados casi idénticos.

En este caso, el resultado obtenido en la Figura 3 es similar al obtenido en el caso sin gravedad, a diferencia de que esta vez la velocidad máxima es menor debido a que la fuerza de la gravedad se opone al ascenso del cohete y, por tanto, la altura máxima alcanzada es menor. Cabe destacar que para modelos de quemado crecientes ( $n > 1$ ) tenemos velocidades y distancias negativas, algo que no es posible al estar apoyado en el suelo. Esto se debe a que por el tipo de quema de combustible el cohete tarda un cierto tiempo en vencer la fuerza de la gravedad para poder despegar.

Una vez se termina el combustible, este continua cogiendo altura aunque debido a la fuerza de la gravedad comienza a perder velocidad.

### Modelo con gravedad constante

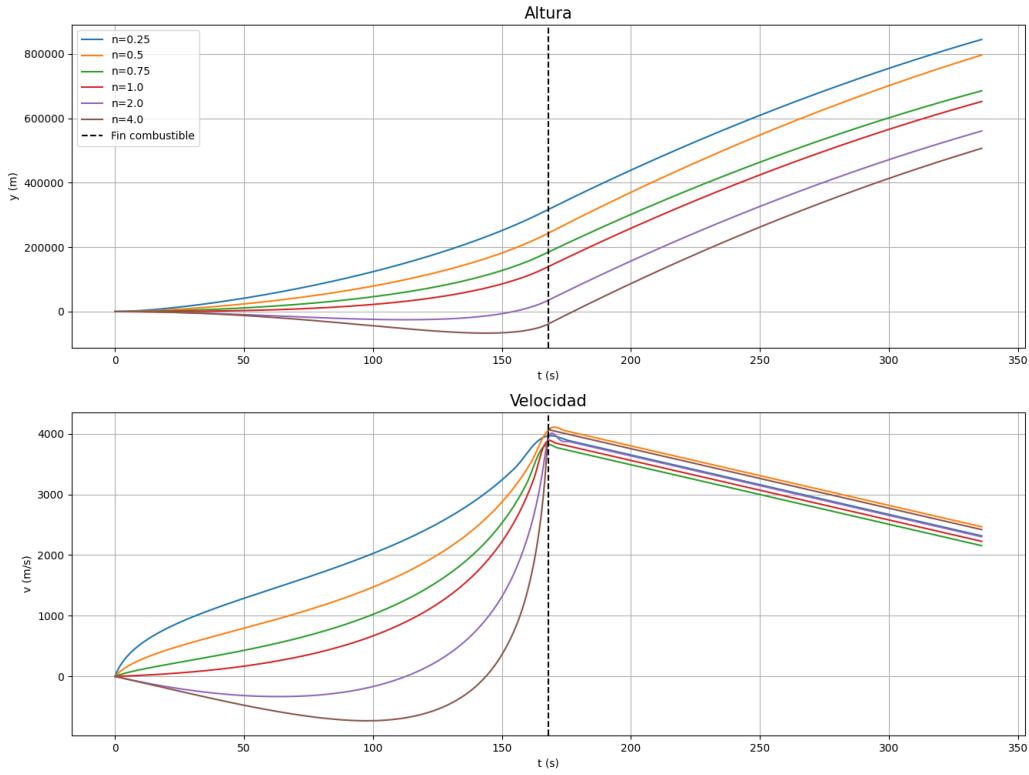


Figura 3: Simulación modelo de una etapa gravedad constante.

### 5.3. Modelo con gravedad dependiente de la altura (Ampliación: dependiente además de la latitud del lanzamiento)

Teniendo en cuenta el modelo anterior anterior, podemos mejorarlo debido a que la gravedad depende de la altura. Una buena aproximación de como varía la misma viene dada por  $g(h) = \frac{g_0}{(1+h/R_p)^2}$  con  $h$  la altura,  $g_0$  la gravedad en la superficie y  $R_p$  el radio del planeta en el que nos encontramos.

Para hallar un valor de  $g_0$  basta con tener en cuenta la fuerza de atracción entre dos cuerpos de forma que  $g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2}$ , con  $G$  la constante de gravitación universal. Con los datos de la tierra  $g_0 = 9.80665 \frac{m}{s^2}$ .

Como resultado obtenemos la Figura 4 donde, a diferencia del caso de gravedad constante, podemos observar que el cohete llega con algo más de velocidad cuando agota el combustible. Esto se debe a que la gravedad va disminuyendo según va ganando altura, y por tanto la oposición también.

Otra mejora que podemos añadir es la variación de la gravedad inicial en función del punto de

### Modelo con gravedad variable con la altura

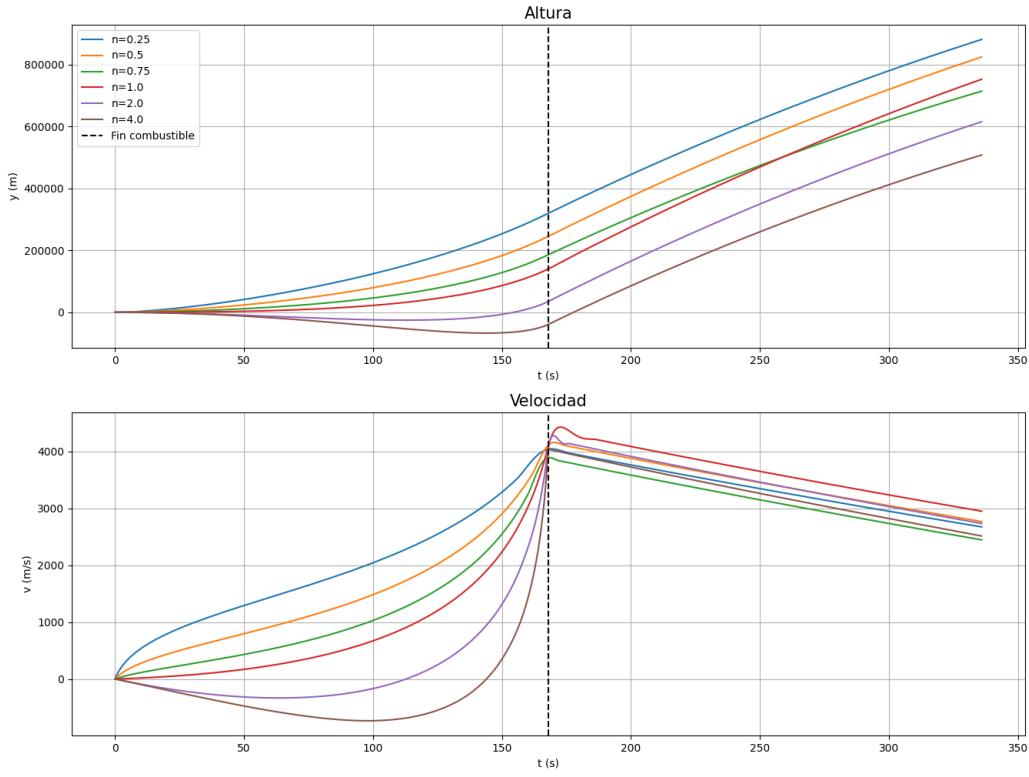


Figura 4: Simulación modelo de una etapa gravedad variable según la altura.

la superficie del que partamos. Para esto podemos aplicar diferentes modelos, entre los que se encuentra el modelo de la gravedad en función de la latitud, dado por la fórmula  $g(\phi) = g_0(1 + a \sin^2 \phi - b \sin^2 \phi)$ . Una variación al mismo es el modelo WGS que tiene en cuenta la forma elipsoidal de la tierra y viene dada por  $g(\phi) = g_0 \frac{1+a \sin^2 \phi}{\sqrt{1-b \sin^2 \phi}}$ .

Si comparamos la gravedad en algunos de los cosmódromos más conocidos como en la Figura 5 podemos observar que la diferencia de gravedad entre las distintas bases es inapreciable y tiene un valor muy cercano a nuestra aproximación inicial.

Por otro lado, la relación de la gravedad en la superficie y y el factor dependiente de  $h$  es lineal, por lo que si calculamos la gravedad en función de la altura para los distintos  $g_0$  hay una corrección minúscula entre las alturas. Es por ello que a la hora de simular el movimiento las diferencias entre las distintas bases o modelos serán inapreciables en función de si  $g_0$  es mayor o menor.

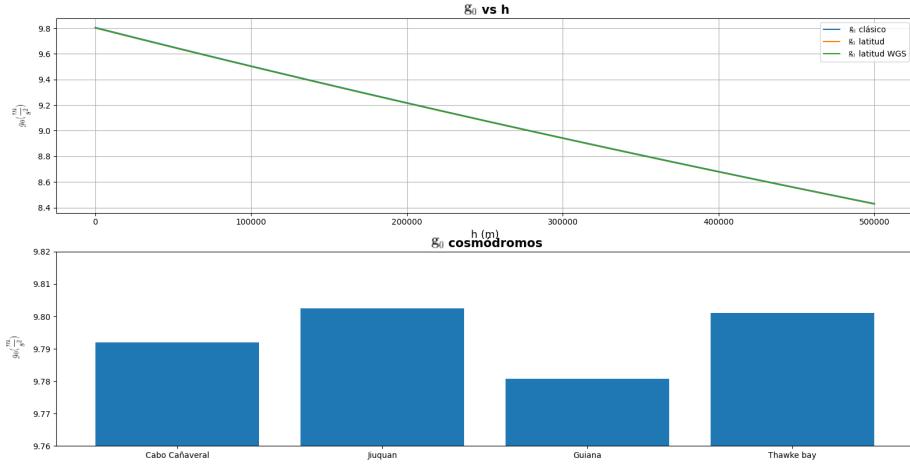


Figura 5: Variación de la gravedad en función de diferentes modelos.

#### 5.4. Modelo con resistencia aerodinámica y densidad del aire dependiente de la altura

Ahora introduciremos la resistencia aerodinámica. Como podemos imaginar nuestro cohete, al estar desplazándose por un fluido como el aire, se encontrará con una fuerza de fricción que se oponga a dicho desplazamiento. Esta varía en función del flujo que se oponga al movimiento, que es laminar si va a velocidad baja y turbulento si va a velocidades altas, siendo el segundo mayor al primero.

Al igual que en el caso de la gravedad, para encontrar la ecuación del movimiento bastaría tener en cuenta la nueva fuerza de forma que  $\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_r$ , tomando la fuerza de rozamiento como  $\vec{F}_r = -\frac{1}{2}\rho C_r A v^2$ . En esta aproximación  $\rho$  es la densidad del aire, que varía en función de la altura a la que nos encontramos (debido a los cambios en la presión y temperatura),  $A$  el área de la sección perpendicular del objeto respecto a la dirección de movimiento y  $C_r$  es el coeficiente de arrastre, que depende de la forma del objeto que va por el medio (en nuestro caso tomaremos el de un cono con ciertos grados de apertura). Si resolvemos manualmente la ecuación obtenemos las ecuaciones  $v - v_0 = -\sqrt{\frac{u\mu_0}{TB_r}} \left( \tanh \left( \sqrt{\frac{uT\beta_r}{4\mu_0}} (c_1\mu_0 + 2\ln(T(m_c + \mu_0) - t\mu_0)) \right) \right)^{-1}$  y  $x - x_0 = \int_{t_0}^t (v_0 - gt + u \ln \frac{m_c + \mu_0}{m_c + \mu(t)}) dt$ .

Debido a la complejidad de este método, pediremos únicamente al programa que calcule la resolución de la ecuación diferencial de movimiento, no sin antes definir el comportamiento de la variable densidad del aire.

Hay varias ecuaciones que simplifican el comportamiento de  $\rho$  según la altura de forma continua, sin embargo, el modelo más próximo es el que va por secciones. La densidad en función de la altitud viene dada por  $\rho = \frac{p}{0.2869(T+273.1)}$  siendo  $p$  la presión. Para alturas hasta los 11000 metros tenemos  $p = 101.29 \left( \frac{15.04 - 0.00649h + 273.1}{288.08} \right)^{5.265}$ , entre 11000 y 25000 metros  $p = 22.65 \exp 1.73 - 0.000157h$  y para más de 25000 metros  $p = 2.488 \left( \frac{-131.21 + 0.00299h + 273.1}{216.6} \right)^{-11.388}$ . Aplicamos entonces esto mismo a

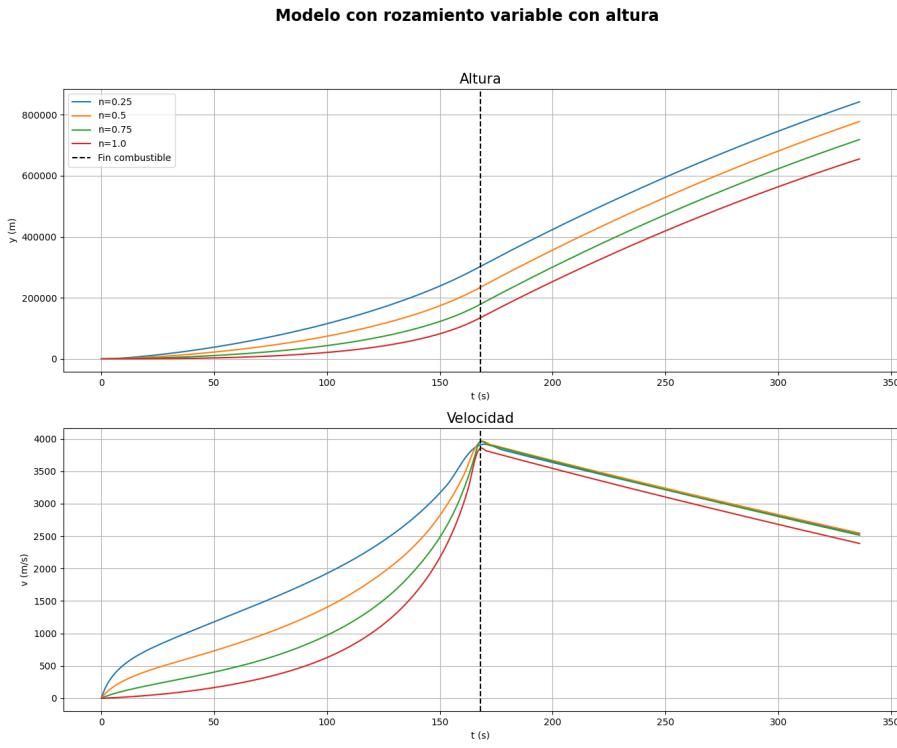


Figura 6: Simulación modelo de una etapa con rozamiento.

nuestro problema.

Para este caso en la Figura 6 podemos ver que el comportamiento en cada etapa es muy similar al de gravedad variable, a diferencia de que la velocidad disminuye mas rápido una vez se agota el combustible debido a esta nueva fuerza. Por otro lado, hemos tenido que quitar las velocidades de combustión crecientes ya que daba velocidades muy negativas en un principio (por la misma causa que vimos en el caso de gravedad) que impiden apreciar bien las gráficas.

## 6. Comparación diferentes métodos numéricos para resolver el problema

Como mencionamos al principio, nuestra función nos permite utilizar diferentes métodos de integración para calcular la solución. Estos son:

- 'RK45' que aplica el método explícito de Runge-Kutta de orden 5(4).
- 'RK23' que aplica el método explícito de Runge-Kutta de orden 3(2).

- 'DOP853' que aplica el método de Runge-Kutta de orden 8.
- 'Radau' que aplica el método implícito de Runge-Kutta Radau orden 5.
- 'BDF' que aplica la fórmula de diferenciación hacia atrás.
- 'LSODA' que aplica el método lineal multipaso.

Para ver cuál es más óptimo pediremos a nuestro programa calcular la solución simbólica, de forma que podamos representar los errores de los diferentes métodos respecto a esta. Tomaremos el caso sin gravedad para  $n = 1$  para hacer la comparación.

**Comparación distintos métodos de resolución del sedo**

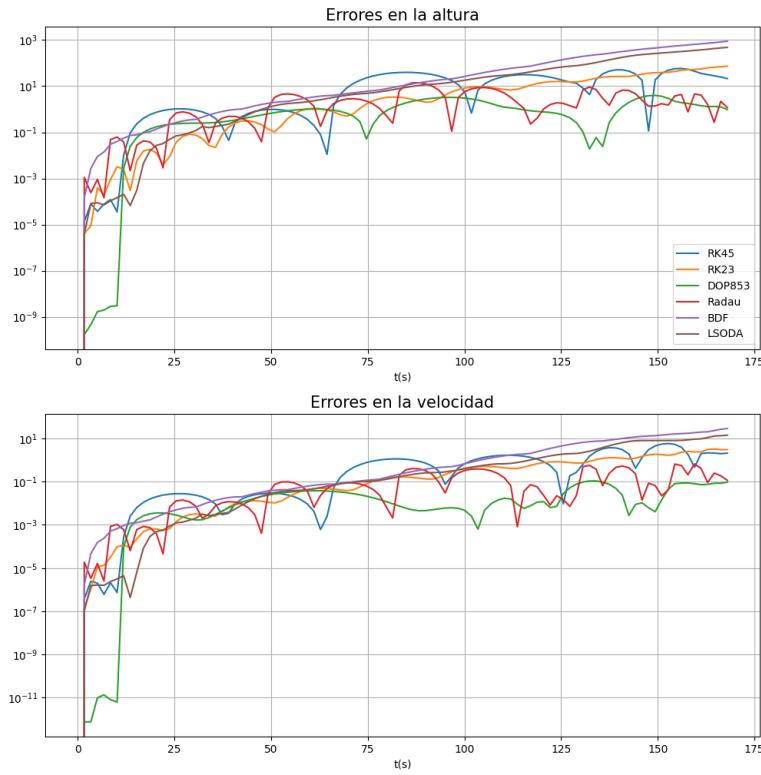


Figura 7: Error de los diferentes métodos de integración.

Los errores mostrados en la Figura 7 aumentan en general cuando aumenta el tiempo. Es fácil observar que para los métodos 'BDF' y 'LSODA' a tiempos altos se obtiene un error alto (con un factor de  $10^3$ ), así como para 'RK23' y 'RK45', aunque de menor forma (con un factor de 10). Sin embargo, para el caso de los métodos 'Radau' y 'DOP853' la solución se estabiliza y el error es bajo (con un factor de 0.1). Por tanto estos dos últimos métodos son los más óptimos para calcular la solución.

Cabe destacar que para tiempos pequeños el método 'DOP853' tiene menos error que los demás.

## 7. Modelo de varias etapas

Dejando atrás el modelo de cohete de Tsiolkovski, que es muy útil para simplificar el comportamiento de un cohete y facilitando así el estudio su comportamiento bajo diferentes fuerzas vamos a mejorar el modelo utilizando un cohete de varias etapas.

Este modelo es el que más se aproxima a los cohetes reales, dónde este estaría dividido por módulos (normalmente tres) que se desprenden cuando el combustible se agota, quedando finalmente un único módulo donde tendremos lo que queremos transportar al espacio. Para poder obtenerlo tomaremos el modelo de rozamiento para una sola etapa, dándole al programa diferentes funciones que utilizará en función de la masa de combustible disponible.

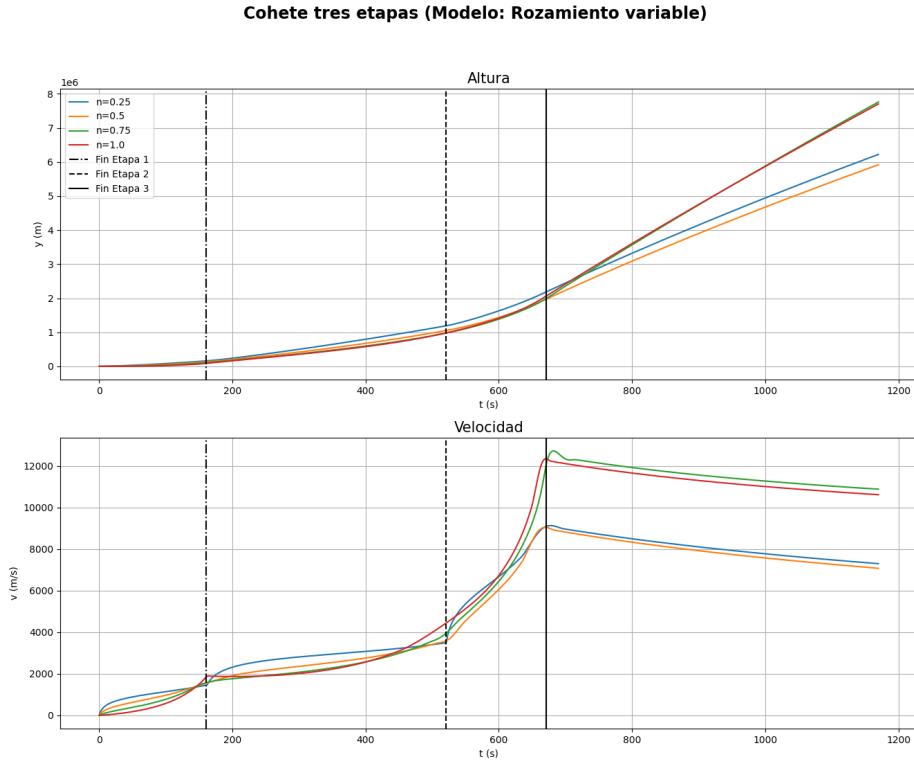


Figura 8: Simulación modelo de tres etapas.

Obtenemos entonces la Figura 8 donde podemos observar que el comportamiento de la velocidad y la altura en cada una de las etapas es análogo al caso de rozamiento. La diferencia reside en que las alturas y velocidades alcanzadas en este caso son mayores ya que al liberar la masa de las etapas que no es útil el cohete cuenta con menos peso y se ve menos afectado por la fuerza de la

gravedad. Al igual que el caso de rozamiento quitamos las velocidades de combustión crecientes. Para poder ver mejor la diferencia entre el movimiento de una etapa y varias tomamos  $n = 1$  y tomamos el movimiento sin gravedad dando lugar a la Figura 9.

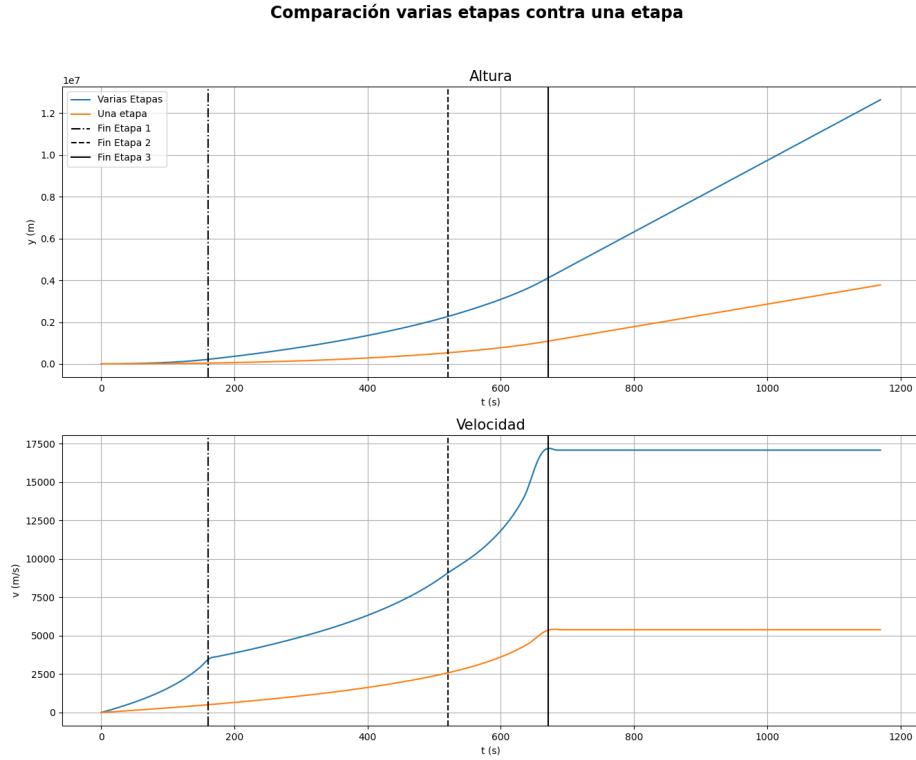


Figura 9: Simulación modelo de tres etapas.

Como podemos observar la velocidad y altura máxima es mucho mayor cuando tenemos un cohete por etapas en comparación al de una sola, cosa que tendremos en cuenta a la hora de resolver el siguiente apartado.

## 7.1. Cohete para llevar 1000 kg a órbita baja

Una vez visto el modelo por etapas buscaremos darle una aplicación al mismo poniendo 1000 Kg de masa en órbita baja (150-2000 Km sobre la superficie terrestre).

Usaremos para ello un cohete de tres etapas. Tomamos un coeficiente de arrastre menor que uno y probamos con distintas masas para las distintas etapas de forma que demos con una solución óptima, obteniendo la Figura 10.

Como podemos ver el cohete llega hasta la altura deseada con su última fase y deja la masa a esa altura que comienza a tener velocidad negativa ante la falta de impulso.

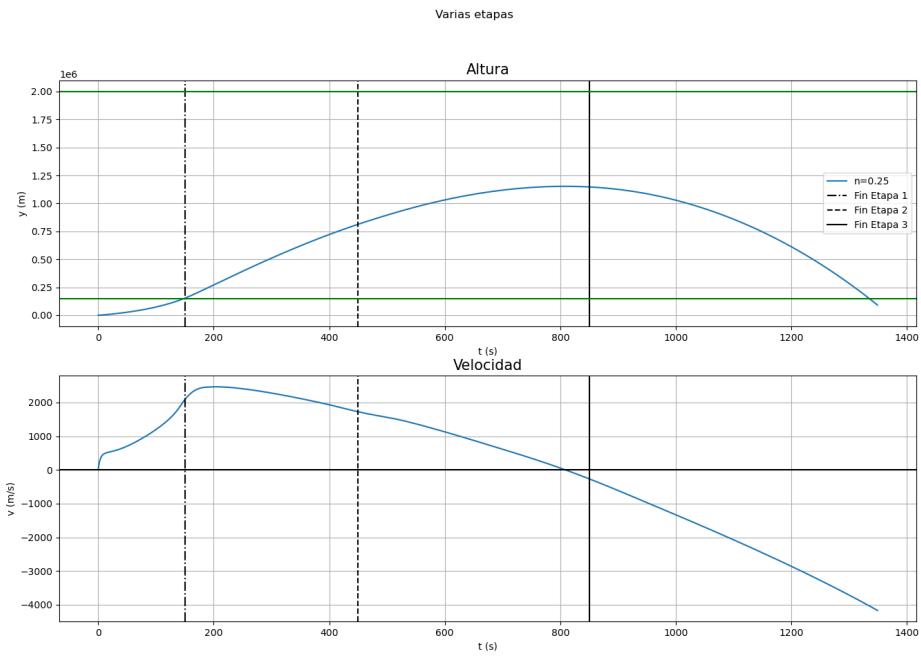


Figura 10: Simulación cohete para llevar 1000 kg a órbita baja.

## 8. Bibliografía

- [1] *scipy.integrate.solve\_ivp*. Scipy.org. Consultado: 5-5-2021.
- [2] *Método de Euler*. Wikipedia.com. Consultado: 5-5-2021.
- [3] *Método de Runge-Kutta*. Wikipedia.com. Consultado: 5-5-2021.
- [4] L.F. Shampine P. Bogacki. “A 3(2) pair of Runge - Kutta formulas”. En: (1989).
- [5] Julio M. Fernandez Díaz y Rosario Díaz Crespo. “Introducción a la Física Computacional: Problemas de Física resueltos numéricamente”. En: (2021).