Induction et Récursivité

Exemple 1 : palindrome

Mot qui se lit de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche

Exemple :

ressasser, rever, Anna, oho, e sont des palindromes

papa n’est pas un palindrome

Connus

palindrome("v")
VRAI

palindrome("eve")
VRAI

palindrome("")
VRAI

Inconnu

palindrome("rever")

palindrome("rever")

le premier et le dernier caractère sont égaux donc rever est un palindrome si eve est un palindrome

palindrome("eve")
VRAI

donc rever est un palindrome

Cas général

$\boxed{s_0}\boxed{s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \ldots}\boxed{s_{n-1}}$ est un palindrome ssi

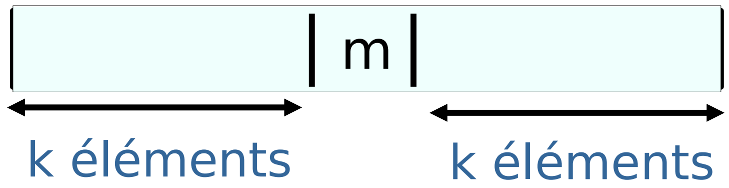
s0 = sn-1

et $\boxed{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_{n-2}}$ est un palindrome

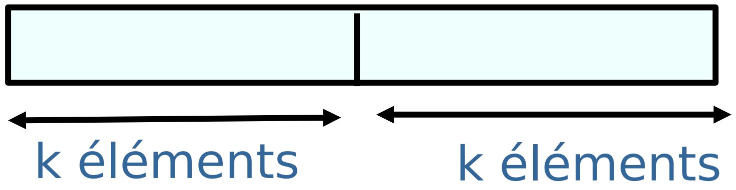
Comment s’arrêter ?

A chaque étape, on diminue la taille de la chaîne considérée de 2.

si la taille de la chaîne est impaire, on atteindra une liste ayant un seul élément



si la taille de la chaîne est paire, on atteindra la liste vide



En Java

```
 public static boolean palindrome(String c) {
   int taille = c.length();
   if ((taille == 0) || (taille == 1))
        return true;
   if (c.charAt(0)==c.charAt(taille-1))
        return palindrome(c.substring(1,taille-1));
   return false;
}
```

Exemple 2 : recherche dichotomique dans une liste ordonnée

Principe :

comparer x à l'élément m qui est au milieu de la partie du tableau considérée.

Si x = m renvoyer l'indice de m

Si x < m chercher x dans la partie du tableau à gauche de m

Si x > m chercher x dans la partie du tableau à droite de m

Si la partie considérée est vide, renvoyer –1

< m	m	> m

La méthode fait appel à une méthode privée.

Le méthode privée a pour paramètres les indices gauche et droite qui délimitent la partie du tableau à traiter.

```
public int rechercheViteRecursif(int[] t,int x) {
    return rechercheViteRecursif(t,x,0,t.length-1);
}
```

A VOUS

```
/** pour rechercher l'indice d'un élément
* antécédent : t est un tableau d'entiers ordonné par ordre croissant,
*              x est un entier,
*              -1 <= g <= t.length et -1 <= d <= t.length
* conséquent : renvoie i si t[i] == x,
*              renvoie -1 si pour tout i, g<=i<=d, t[i]!=x  */

private int rechercheViteRecursif(int[] t,int x,int g,
       int d){
  if (........)return ........ ;
  int m = (g+d)/2;
  if (t[m]==x) return ........ ;
  if (t[m]<x) return ....................;
  return ..............................;
}
```

Exemple 3 : l'incontournable factorielle

0! = 1

n! = n * (n-1) * (n-2) * … * 3 * 2 * 1

ou encore : 0! = 1

n! = n * (n-1)!

En java :

```
/** renvoie n ! */
public int factorielle(int n) {
   if (n==0) return 1;
   return n * factorielle(n-1);
}
```

Comment ça marche ?

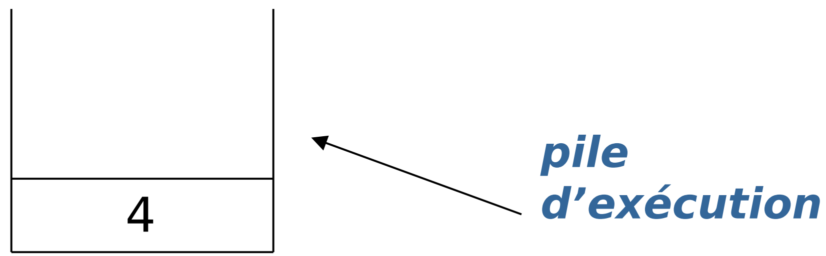
- A chaque appel de procédure, les paramètres sont empilés dans la pile d’exécution
- Au moment du return, le calcul est effectué en fonction des résultats précedents (stockés dans un registre spécialisé *return*)
- à la sortie de la procédure les paramètres sont dépilés.

Appels

appel de factorielle(4)

4 est empilé

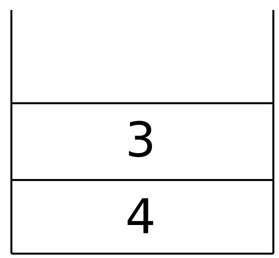
appel de factorielle(3)



appel de factorielle(3)

3 est empilé

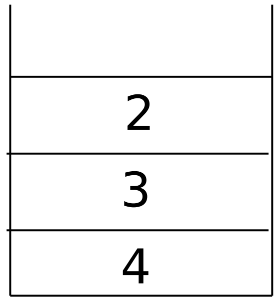
appel de factorielle(2)



appel de factorielle(2)

2 est empilé

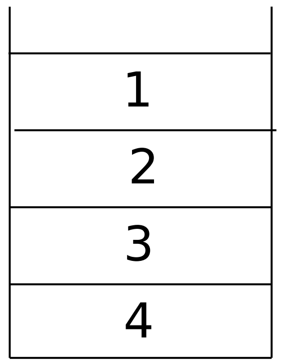
appel de factorielle(1)



appel de factorielle(1)

1 est empilé

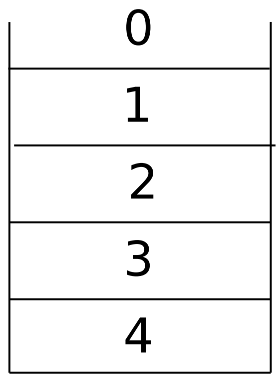
appel de factorielle(0)



appel de factorielle(0)

0 est empilé

fin des appels récursifs



Retours

if (n==0) ***return*** *1;*

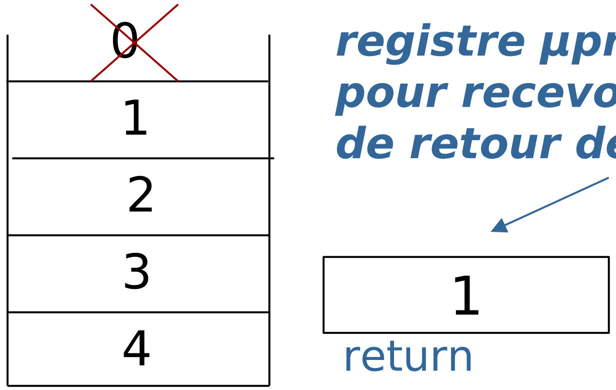
retour de factorielle(0)

return = 1

0 est dépilé

revient à factorielle(1)

registre µproc spécialisé pour recevoir la valeur de retour des fonctions



else ***return*** *n * factorielle(n-1);*

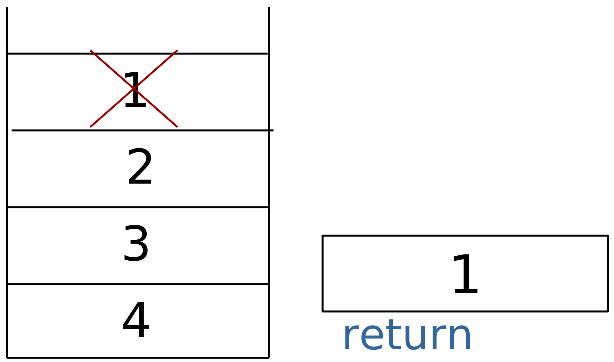
retour de factorielle(1)

return = sommetDePile * return

= 1 * 1

1 est dépilé

revient à factorielle(2)



retour de factorielle(2)

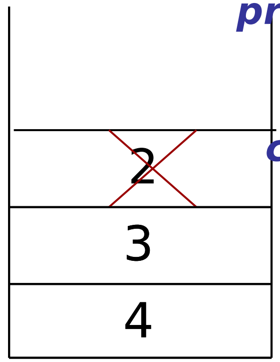
return = sommetDePile * return

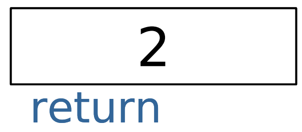
= 2 * 1

2 est dépilé

revient à factorielle(3)

A chaque retour de procédure, le sommet de pile contient le paramètre et return contient le résultat de l'appel précedent





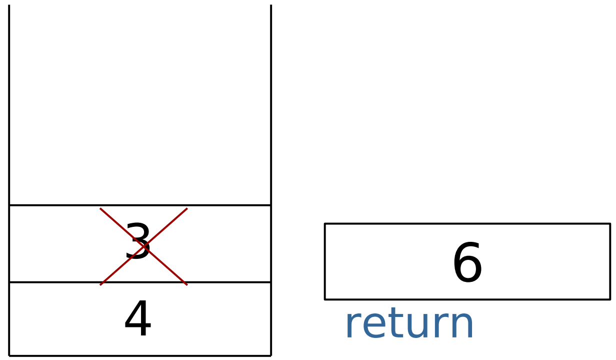
retour de factorielle(3)

return = sommetDePile * return

= 3 * 2

3 est dépilé

revient à factorielle(4)

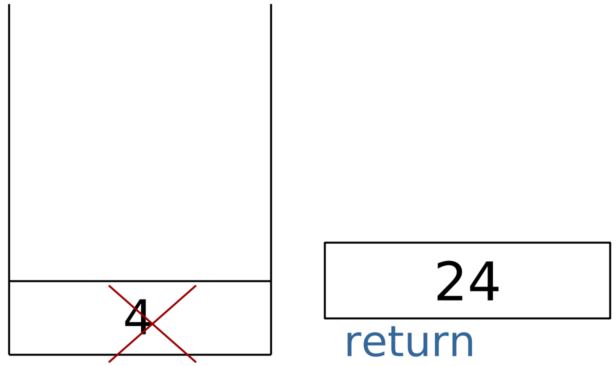


retour de factorielle(4)

return = sommetDePile * return

= 6 * 4

4 est dépilé



fin du retour des appels récursifs

le résultat de factorielle(4) est contenu dans return

Récursivité : Pourquoi ?

Résoudre des problèmes complexes qui nécessitent un retour arrière

- Faire un emploi du temps
- Colorier une carte de façon à ce que deux pays voisins n'aient pas la même couleur
- Le sudoku

Parcourir des structures arborescentes

- Vérifier qu'un fichier HTML est bien formé <tag> </tag>
- Traiter un fichier XML en explorant sa structure DOM

Schémas d'induction

Définir un ensemble de données de façon inductive

- les éléments de base
- les règles de construction de nouveaux éléments

Prouver des propriétés sur les ensembles définis de façon inductive

- montrer que P est vraie pour les éléments de la base
- montrer que
  - P vraie pour un élément e
  - $\Rightarrow$ P vraie pour tous les éléments construits à partir de e en appliquant une règle de construction

Définir des fonctions inductives

- définir f pour les éléments de la base
- définir f sur les éléments construits en appliquant des règles à un élément e, en fonction de la valeur de f pour e.

Les entiers positifs

Construction

base : 0 est un entier

règle : si n-1 est un entier positif, n est un entier positif

Récurrence :

P(n) est vrai ssi

P(0) est vrai

$P(i-1) \Rightarrow P(i)$ est vrai $\forall\ i>0$

Les listes

Construction

base : vide est une liste

règle : si x est un élément

si L est une liste

alors la liste notée <x, L> dont x est le premier élément et L la suite de liste, est une liste

Schéma de preuve par induction :

P(L) est vrai ssi

P(vide) est vrai

$P(LL) \Rightarrow P(<x,LL>)$ est vrai $\forall$ x, $\forall$ LL

Exemple : définition inductive de la longueur

longueur(vide) = 0

longueur(<x,L>) = 1 + longueur(L)

En java :

- Utilisation de deux classes pour la tête de liste et le chaînage (chapitre suivant)

Les arbres binaires (dernier chapitre)

Construction

base : vide est un arbre binaire

règle : si x est un élément

si g est un arbre binaire

si d est un arbre binaire

<x,g,d> est un arbre binaire

Schéma de preuve par induction :

P(l) est vrai ssi

- P(vide) est vrai
- P(g) et P(d) $\Rightarrow$ P(<x,g,d>) est vrai $\forall$ x, $\forall$ g, $\forall$ d

Récursivité

Forme générale d'une fonction récursive

```
public <type> fonctionRecursive(<parametres>) {
    if (<parametres> correspond à la base)
          return valeur pour la base
    return valeur calculée à partir de
          fonctionRecursive ( fonction(<parametres>) )
}
```

où *fonction(<parametres>)* permet d'accéder aux éléments à partir desquels ont été construits *<parametres>*

Terminaison

S’assurer que la fonction qui définit les paramètres de l’appel récursif en fonction des paramètres d’entrée est une fonction qui *converge* vers une des valeurs de la base.

```
public int jeBoucle(int i) {
  if (i==0) return 3;
  else return jeBoucle(i-2);
}
```

Si i n’est pas un nombre pair, on n’atteint jamais la valeur 0.

Autre cas d'erreur ?

Correction

S'assurer que la valeur renvoyée pour la base est correcte

En supposant que la valeur retournée par l'appel récursif est correcte, s'assurer que la valeur retournée pour le cas général est correcte

Remarque :

La récursivité peut ne pas suivre les schémas d'induction structurelle usuels; dans ce cas, il faut s'assurer que le schéma d'induction utilisé est correct pour les données considérées.

Schéma usuel

```
public int factorielle(int n) {
   if (n==0) return 1;
   return n * factorielle(n-1);
}
```

Schéma non usuel

```
public int factorielle2(int n) {
   if (n==0) return 1;
   if (....) return ...; // incorrect sans ce test d'arrêt
   return n * (n-1) * factorielle2(n-2);
}
```

Calcul de la complexité

résolution d'une *relation de récurrence* donnant la complexité de la méthode en fonction de la complexité des appels récursifs.

$$C(0) = c_0$$
$$C(n) = a * C(f(n)) + c_n$$

n : taille des données
c_0: complexité pour une donnée de taille nulle
a : nombre d'appels récursifs
f(n) : taille de la donnée pour l'appel récursif
c_n: complexité du calcul pour la donnée de taille n

```
public int factorielle(int n) {
  if (n==0) return 1;
  return n * factorielle(n-1);
}
```

$$C(0) = \Theta(1)$$
$$C(n) = C(n-1) + \Theta(1)$$

```java
private int rechercheViteRecursif(int[] t, int x,
       int g,int d){
 if (g > d) return - 1;
 else {
   int milieu = (g + d) / 2 ;
   if (x==t[milieu]) return milieu;
   if (x<t[milieu])
       return rechercheViteRecursif(t,x,g,milieu-1);
    return rechercheViteRecursif(t,x,milieu+1,d);
   }
}
```

$$C(0) = \Theta(1)$$

$$C(n) = C(n/2) + \Theta(1)$$

taille des données : n = nombre d'éléments entre g et d
complexité pour une donnée de taille nulle : 1
nombre d'appels récursifs : un seul
nouvelle valeur de n : n/2 car on travaille sur la moitié du tableau
complexité du calcul : 1 car constant (test et affectation)

Relations de récurrence

Arbre de récursivité

$C(0) = \theta\ (1)$

$C(n) = C(n\text{-}1) + \theta\ (1)$

1
\+
C(n-1)

1
\+
1
\+
C(n-2)

1
\+
1
\+
1
\+
C(n-3)

1
\+
1
\+
1
\+
1
…
C(0)

hauteur n+1

$\boxed{C(n) = \theta\ (n)}$

$$C(0) = \Theta(1)$$
$$C(n) = C(n/2) + \Theta(1)$$

$$1 + C(n/2)$$

$$1 + 1 + C(n/4)$$

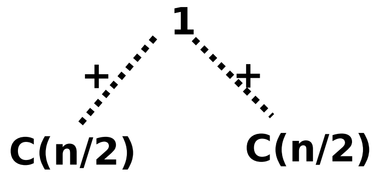
$$1 + 1 + 1 + C(n/8)$$

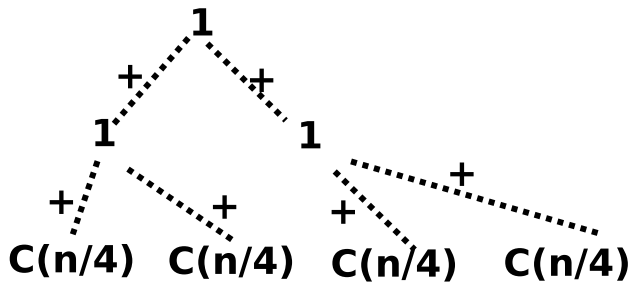
$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots C(0)$$

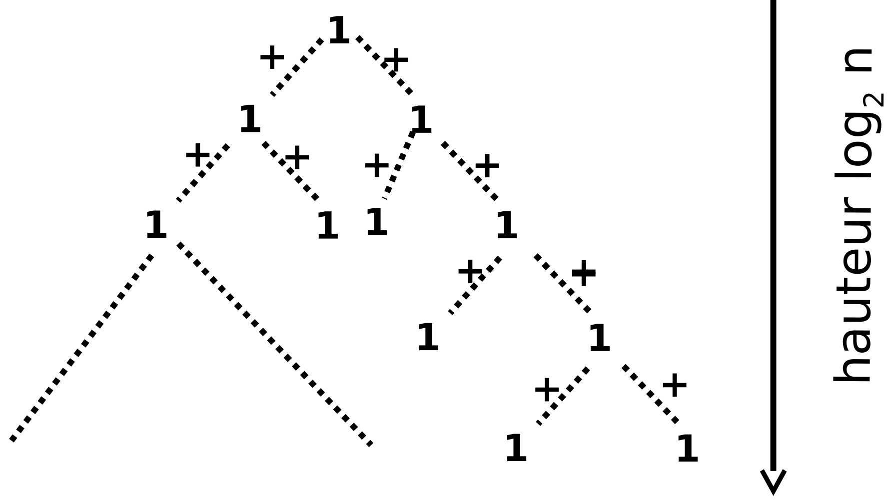
hauteur $\log_2 n$

$$\boxed{C(n) = \Theta(\log_2 n)}$$

$C(0) = \theta\ (1)$
$C(n) = 2\ C(n/2) + \theta\ (1)$





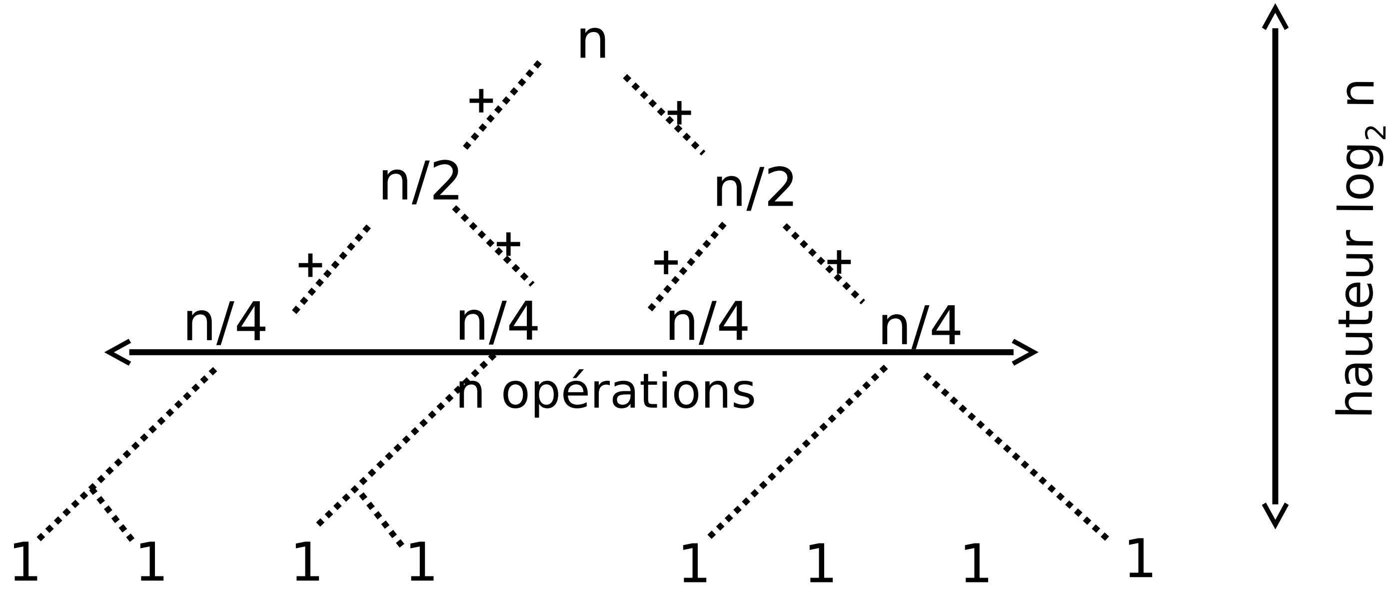


$\boxed{C(n) = \theta\ (n)}$

arbre binaire complet de hauteur $\log_2 n$
donc n nœuds, une opération par nœud

$C(0) = 1$

$C(n) = 2\ C(n/2) + \Theta(n)$



n opérations à chaque niveau

$\log_2 n$ niveaux

$\boxed{C(n) = \Theta(n \log_2 n)}$

Cas général

$$C(0) = \theta(1)$$
$$C(n) = a\,C(n/b) + n^k$$

si $k < \log_b a$ $\quad \boxed{C(n) = \theta(n^{\log_b a})}$

si $k = \log_b a$ $\quad \boxed{C(n) = \theta(n^k \log_2 n)}$

si $k > \log_b a$ $\quad \boxed{C(n) = \theta(n^k)}$