Trigonometri Dasar II

Nayaka

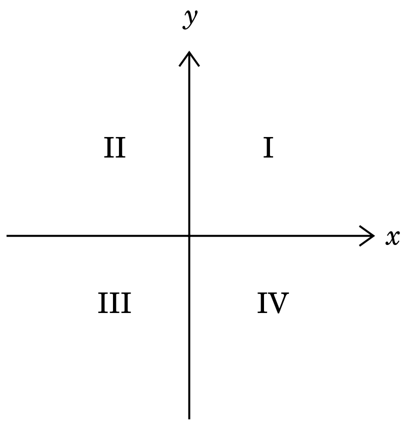
26 Oktober 2022

A Pendahuluan

Sejauh ini kita sudah mengetahui sedikit tentang trigonometri. Kita telah menemukan nilai fungsi trigonometri pada sudut-sudut lancip tertentu dari 0° hingga 90°. Akan tetapi, sudut lancip bukanlah satu-satunya sudut. Masih ada sudut tumpul dan sudut-sudut antara 180° hingga 360°.

Lebih lanjut lagi, kalau berdasarkan definisi yang kita pakai pada pertemuan sebelumnya, trigonometri hanya akan terbatas pada sudut-sudut antara 0° hingga 90° saja. Dengan demikian, trigonometri akan terasa "tidak berguna" karena tidak bisa diterapkan untuk semua sudut.

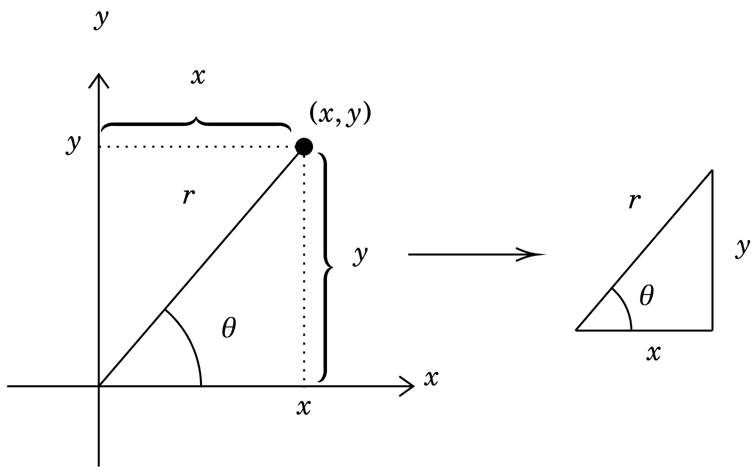
Berangkat dari persoalan ini, kita akan mencoba mendefinisikan ulang keenam fungsi trigonometri. Kita akan menggunakan definisi yang bisa diterapkan untuk sudut apapun. Ketimbang menggunakan sudut lancip pada segitiga siku-siku seperti pada definisi sebelumnya, kali ini kita akan menggunakan bidang koordinat Kartesius:



Bidang koordinat Kartesius 2-dimensi tersusun atas dua sumbu yang saling tegak lurus satu sama lain, yakni sumbu vertikal (sumbu-y) dan sumbu horizontal (sumbu-x). Tiap titik pada koordinat Kartesius dapat dinyatakan dalam bentuk (x, y), di mana x adalah absis: jarak titik ke sumbu-y, dan y adalah ordinat: jarak titik ke sumbu-x.

Bidang koordinat Kartesius 2-dimensi terbagi menjadi empat wilayah yang dinamakan kuadran, yakni kuadran I, II, III, dan IV. Jika titik (x, y) terletak pada kuadran I, maka cukup jelas bahwa $x > 0$ dan $y > 0$,
sedangkan untuk kuadran II: $x < 0$ dan $y > 0$,
untuk kuadran III: $x < 0$ dan $y < 0$,
dan terakhir, untuk kuadran IV: $x > 0$ dan $y < 0$.

B Definisi Baru untuk Fungsi Trigonometri



Kita mulai dengan suatu garis dengan panjang r yang berpangkal di titik asal (0,0) dan berujung di titik (x, y) seperti pada ilustrasi di atas. Garis ini membentuk sudut θ[i] terhadap sumbu-x positif dan terletak di kuadran I. Sekilas, garis tersebut seperti membentuk sebuah segitiga siku-siku dengan panjang hipotenusa r serta panjang kaki-kakinya x dan y.

Sedikit mirip dengan definisi sebelumnya, kini kita definisikan fungsi-fungsi trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{y}{r} & \csc(\theta) &= \frac{r}{y} \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{r} & \sec(\theta) &= \frac{r}{x} \\ \tan(\theta) &= \frac{y}{x} & \cot(\theta) &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

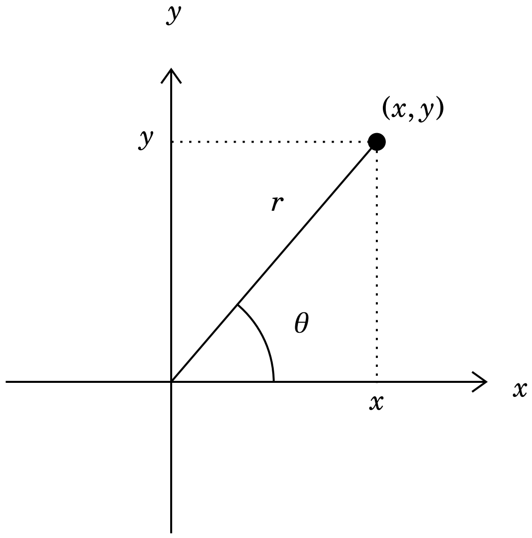
Nampak sekilas, tidak ada perbedaan dengan definisi sebelumnya. Akan tetapi, perhatikan baik-baik bahwa nilai r memang selalu positif,[ii] tetapi nilai x dan y bisa negatif.[iii] Akibatnya, sekarang nilai keenam fungsi trigonometri bisa negatif. Lebih lanjut lagi, dengan definisi yang baru, kita kini bisa menggunakan sudut-sudut yang lebih besar dari 90°.

[i]Matematikawan umumnya sepakat bahwa sudut yang diukur berlawanan arah jarum jam dari sumbu-x positif adalah positif, sedangkan sudut yang diukur searah jarum jam adalah negatif.

[ii]Karena merupakan panjang garis.

[iii]Karena sekarang kita berada di koordinat Kartesius, bukan pada sisi-sisi segitiga siku-siku yang panjangnya harus selalu positif.

C Tanda Fungsi Trigonometri di Tiap Kuadran



Pada gambar di atas, garis r bisa terletak di kuadran I, II, III, atau IV tergantung dengan besar sudut θ:

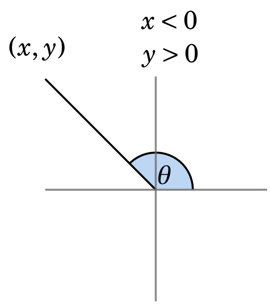
- jika $0° < \theta < 90°$,[iv] maka garis berada di kuadran I,[v]
- jika $90° < \theta < 180°$, maka garis berada di kuadran II,
- jika $180° < \theta < 270°$, maka garis berada di kuadran III, dan
- jika $270° < \theta < 360°$, maka garis berada di kuadran IV.

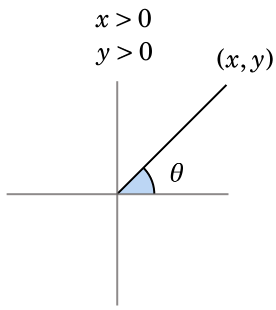
Adapun tanda fungsi trigonometri di tiap kuadrannya adalah sebagai berikut:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$





$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

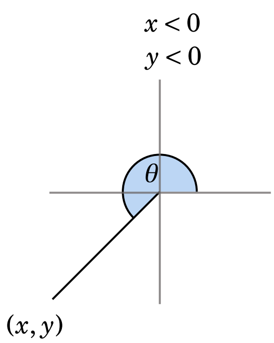
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

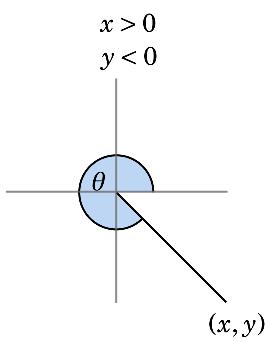
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{(-)}{(-)} = (+)$$





$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

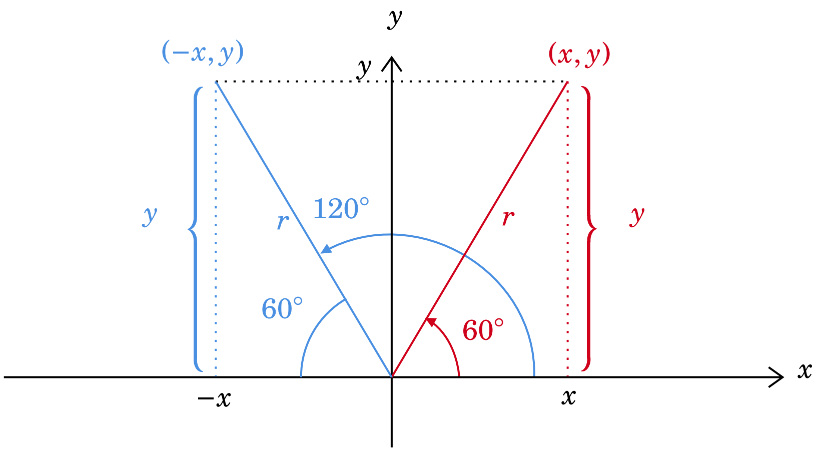
[iv]Artinya, $\theta > 0$ dan di saat yang bersamaan $\theta < 90°$. Dengan demikian, θ lebih besar dari 0 tetapi lebih kecil dari 90°, sehingga nilai θ adalah antara 0 sampai 90° tapi tidak termasuk 90°.

[v]Kita bisa juga bilang bahwa sudut θ terletak di kuadran I.

D Sudut-sudut Berelasi

D.I Kuadran II

Sama seperti sudut-sudut $0°, 30°, 45°, 60°$ dan $90°$, ada sudut-sudut "istimewa" yang lebih besar dari $90°$. Ambil contoh sudut tumpul (kuadran II), misalnya $120°$.



Dari gambar di atas nampak jelas bahwa

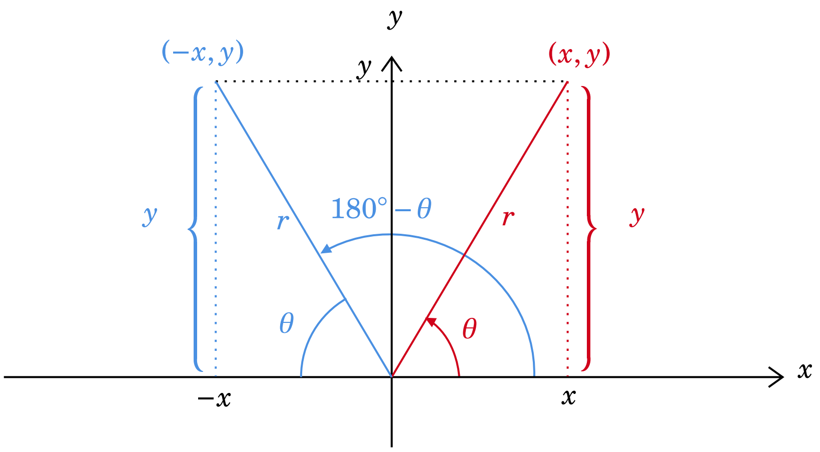
$$\sin 60° = \frac{y}{r} \text{ dan } \sin 120° = \frac{y}{r} \qquad \cos 60° = \frac{x}{r} \text{ dan } \cos 120° = \frac{-x}{r}$$

sehingga sehingga

$$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{dan } \tan 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{\sin 60°}{-\cos 60°} = -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

Silakan coba cari nilai-nilai fungsi trigonometri untuk $135°$, $150°$, dan $180°$ dengan cara serupa. Anda akan menemukan suatu pola, yakni $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$,[vi] $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, dan $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$. Mari kita buktikan bahwa ketiga persamaan tersebut memang merupakan suatu identitas dengan menggunakan ilustrasi berikut:



Proposisi D.1. $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

Bukti. Berdasarkan ilustrasi di atas, $\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r}$ dan $\sin\theta = \frac{y}{r}$. Dengan demikian $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$. □

[vi] Misalnya, seperti yang sudah kita hitung, $\sin(180° - 60°) = \sin 120° = \sin 60°$.

Proposisi D.2. $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

Bukti. Berdasarkan ilustrasi di atas, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ dan $\cos(180^\circ - \theta) = \dfrac{-x}{r} = -\dfrac{x}{r} = -\cos\theta$. □

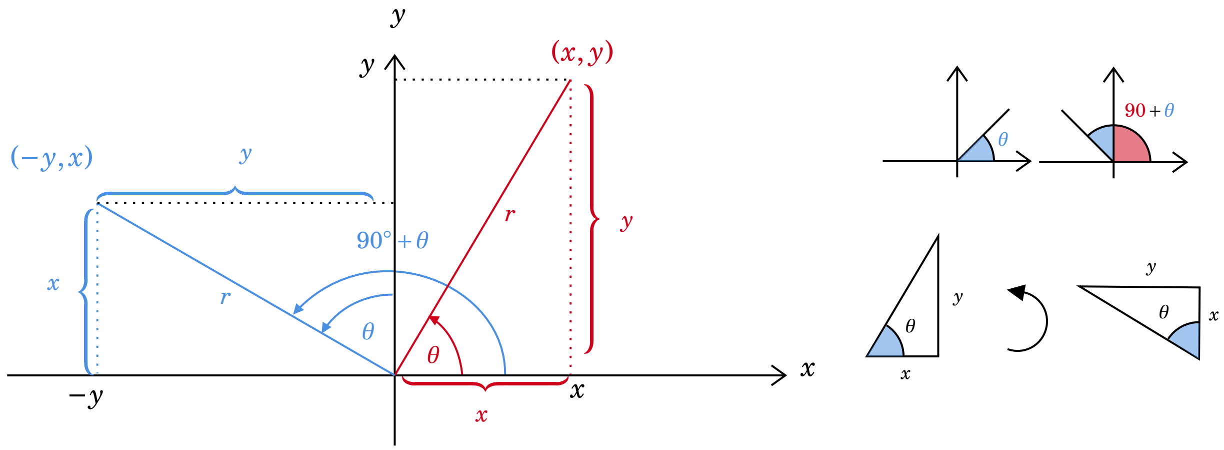
Proposisi D.3. $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

Bukti. Berdasarkan dua identitas sebelumnya, $\tan(180^\circ - \theta) = \dfrac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = \dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$. □

Dari sini, Anda bisa simpulkan bahwa sudut-sudut istimewa di kuadran II saling berpelurus dengan sudut-sudut istimewa di kuadran I.[vii] Sebagai contoh, 120° berpelurus dengan 60°.

Kita bisa pakai cara pandang yang berbeda. Tadi kita temukan bahwa $\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, sedangkan $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$ juga, sehingga $\sin 120^\circ = \cos 30^\circ$.

Kalau Anda sudah menghitung nilai $\sin 135^\circ$, maka Anda akan temukan bahwa $\sin 135^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Di sini terlihat suatu pola, yaitu $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$. Jika Anda coba amati nilai kosinus dan tangen untuk sudut-sudut tumpul juga, akan terlihat pola $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$ dan $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$. Identitas-identitas tadi bisa dibuktikan:



Proposisi D.4. $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

Bukti. Berdasarkan gambar, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ sedangkan $\sin(90^\circ + \theta) = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$. □

Proposisi D.5. $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

Bukti. Berdasarkan gambar, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ sedangkan $\cos(90^\circ + \theta) = \dfrac{-y}{r} = -\dfrac{y}{r} = -\sin\theta$. □

Proposisi D.6. $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$

Bukti. Berdasarkan dua identitas sebelumnya, $\tan(90^\circ + \theta) = \dfrac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} = \dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$. □

Perlu digarisbawahi: tidak perlu menghafal semua identitas sudut berelasi ini. Memori manusia punya batasannya, sehingga lebih baik menghafal hal-hal yang lebih esensial. Yang paling penting adalah memahami darimana identitas-identitas tersebut berasal. Bukankah lebih mudah menghafal cara berpikir yang diperlukan untuk menurunkan identitas-identitas tadi ketimbang menghafal identitasnya satu per satu? Kalau Anda hapal alurnya, Anda bisa dengan mudah menemukan identitas-identitas tadi sendiri. Memang agak ribet, tapi bukankah ini lebih baik? ^ _ ^

[vii] Sembarang dua sudut, misalkan θ dan φ, disebut saling berpelurus jika $\theta + \varphi = 180^\circ$, atau $\theta = 180^\circ - \varphi$, atau $\varphi = 180^\circ - \theta$.

D.II Kuadran III

Selanjutnya, kita bisa memperluas cakupan kita ke sudut-sudut di kuadran III (antara $180°$ sampai $270°$). Belajar dari pengalaman sebelumnya, sudut istimewa memiliki bentuk umum $90° - \theta$, $90° + \theta$, dan $180° - \theta$, di mana θ adalah sudut lancip yang istimewa. Kalau polanya dilanjutkan, kita akan dapatkan bentuk $180° + \theta$, yang merupakan sudut di kuadran III.

Akan tetapi, sekarang adalah waktunya Anda coba membuktikan identitas-identitasnya sendiri. Silakan cari sudut-sudut istimewa di kuadran ini dan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sudut-sudut tersebut.[viii] Petunjuknya sederhana: penalaran yang perlu Anda gunakan sebenarnya mirip-mirip dengan sebelumnya. Silakan buktikan identitas-identitas di bawah ini—θ adalah sudut lancip. Selamat mencoba.

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$
$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$
$\tan(270° - \theta) = \cot\theta$

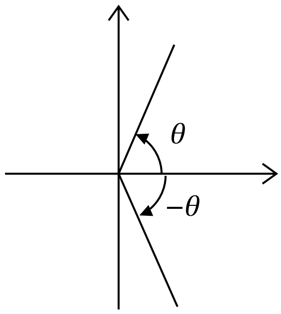
D.III Kuadran IV

Seperti sebelumnya, silakan coba buktikan identitas-identitas untuk sudut-sudut di kuadran IV. Tentukan juga sudut-sudut istimewa serta nilai fungsi-fungsi trigonometrinya.

$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$

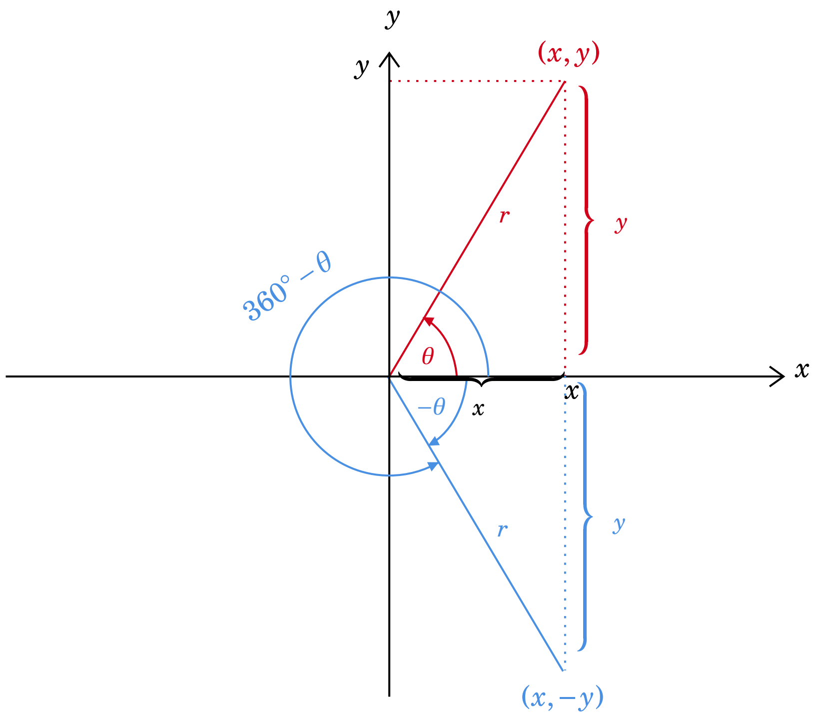
$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$
$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

D.IV Sudut Negatif



Para matematikawan umumnya sepakat bahwa sudut yang diukur berlawanan arah jarum jam nilainya positif, sedangkan yang diukur searah jarum jam adalah sudut negatif. Dengan demikian, tidak hanya $\sin 30°$, kita juga punya $\sin(-30°)$. Kira-kira, bagaimana cara menghitung nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sudut yang negatif?

[viii] Tenang, di bagian akhir nanti ada tabel fungsi trigonometri dan semua sudut istimewa.



Dari gambar, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ dan $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ sedangkan $\sin(-\theta) = \dfrac{-y}{r}$ dan $\cos(-\theta) = \dfrac{x}{r}$. Dengan demikian, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ dan $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Ini mengakibatkan $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

Lebih lanjut lagi, kita bisa lihat bahwa posisi garis yang membentuk sudut $-\theta$ akan sama seperti garis yang dibentuk sudut $360° - \theta$. Secara umum,

$$\sin(-\theta) = \sin(360° - \theta) \tag{D.7}$$

dan identitas ini tetap berlaku jika sinus diganti dengan kelima fungsi trigonometri lainnya.

D.V Sudut-sudut yang Lebih Besar dari 360°

Kita masih bisa memperluas cakupan kita lagi. Bagaimana kalau sudut untuk fungsi trigonometri tidak dibatasi sampai 360°? Kira-kira berapa nilai sin(390°)? Ini adalah pertanyaan yang cukup mudah: catat bahwa 360° adalah satu putaran penuh. Setelah kita melakukan satu putaran penuh, kita akan kembali ke posisi awal.

Misalkan suatu garis membentuk sudut 30° terhadap sumbu-x. Kalau garis diputar satu putaran penuh berlawanan arah jarum jam, maka garis akan kembali ke posisi semula dan membentuk sudut $30° + 360° = 390°$. Karena posisinya tidak berubah, maka koordinatnya juga tidak berubah sehingga nilai-nilai fungsi trigonometrinya sama.

Kalau garis diputar dua putaran penuh, garis tetap akan kembali ke posisi semula dan membentuk sudut $30° + 720° = 750°$. Misal garis diputar satu putaran searah jarum jam, garis tetap kembali ke posisi semula dan membentuk sudut $30° - 360° = -330°$. Tentunya nilai-nilai fungsi trigonometrinya tetap sama. Dengan kata lain, $\sin(\theta + 360°) = \sin(\theta + 720°) = \sin(\theta - 360°) = \sin\theta$, dan ini berlaku pula untuk kelima fungsi trigonometri lainnya.

Secara umum dapat kita simpulkan secara matematis bahwa, untuk $n \in \mathbb{Z}$: [ix]

[ix] $n \in \mathbb{Z}$ artinya "n termasuk bilangan bulat."

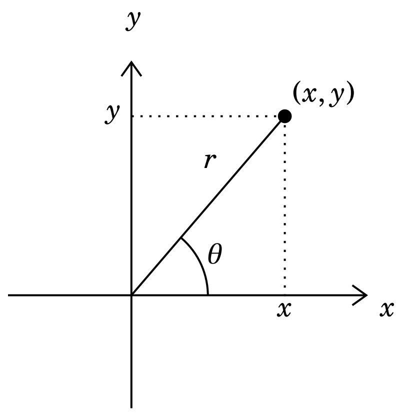
$$\sin(\theta \pm 360^\circ n) = \sin\theta \tag{D.8}$$
$$\cos(\theta \pm 360^\circ n) = \cos\theta \tag{D.9}$$
$$\tan(\theta \pm 360^\circ n) = \tan\theta \tag{D.10}$$
$$\sec(\theta \pm 360^\circ n) = \sec\theta \tag{D.11}$$
$$\csc(\theta \pm 360^\circ n) = \csc\theta \tag{D.12}$$
$$\cot(\theta \pm 360^\circ n) = \cot\theta \tag{D.13}$$

atau, dengan kata-kata: "menjumlahkan atau mengurangi suatu sudut dengan kelipatan 360° tidak mengubah nilai-nilai fungsi trigonometrinya."
Kita bisa lihat bahwa identitas dari subbab D.4 adalah kasus khusus dari identitas ini:

$$\sin(-\theta) = \sin(-\theta + 360^\circ) = \sin(360^\circ - \theta)$$

E Nilai Maksimum dan Minimum Sinus dan Kosinus

Nilai-nilai fungsi trigonometri tidak bisa sembarangan, ada batasannya. Di sini kita hanya akan membahas fungsi sinus dan kosinus. Kita akan gunakan definisi kedua fungsi tersebut di bidang koordinat Kartesius:

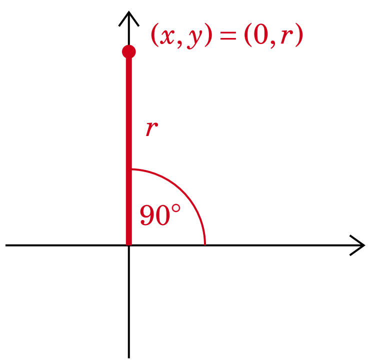


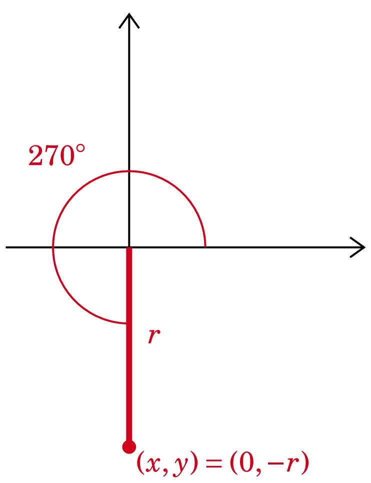
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

E.I Sinus

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, sedangkan nilai r konstan, tidak bisa berubah. Artinya, yang menentukan nilai maksimum dan minimum $\sin\theta$ adalah y. Nilai y maksimum ketika garis berdiri tegak dan titik (x, y) berada di posisi tertinggi dan sebaliknya pula untuk nilai minimumnya:



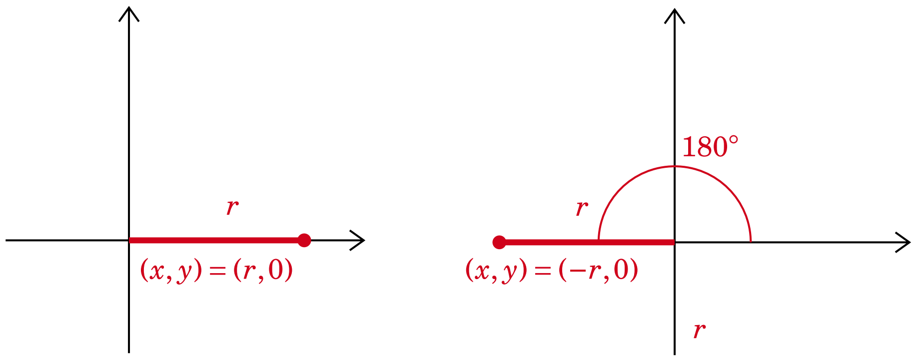


Nilai maksimumnya adalah $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$ dan nilai minimumnya adalah $\sin\theta = \sin 270^\circ = -1$. Artinya, nilai fungsi sinus berada di antara -1 dan 1, atau secara matematis bisa kita katakan

$$-1 \le \sin\theta \le 1 \tag{E.1}$$

E.II Kosinus

Mirip seperti sebelumnya, nilai maksimum dan nilai minimum $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ bergantung pada x. Nilai x maksimum ketika garis berarah mendatar di sumbu-x positif dan sebaliknya pula untuk nilai minimumnya:



Nilai maksimumnya adalah $\cos\theta = \cos 0° = 1$ dan nilai minimumnya adalah $\cos\theta = \cos 180° = -1$. Artinya, nilai fungsi sinus berada di antara -1 dan 1, atau secara matematis bisa kita katakan

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \tag{E.2}$$

F Fungsi Invers Trigonometri

Kita bisa menanyakan, "Berapa sinus dari sudut 30°?" Jawabannya tentunya 1/2. Akan tetapi, terkadang yang kita tanyakan adalah kebalikannya, "Sudut berapa derajat yang sinusnya 1/2?" Bentuk pertanyaan pertama secara matematis adalah $\sin 30° = \ldots$. Sedangkan pertanyaan kedua: $\sin(\ldots) = 1/2$.

Fungsi yang memberikan jawaban untuk pertanyaan kedua disebut fungsi invers trigonometri. Jika pada fungsi trigonometri kita memberikan input berupa sudut dan mendapatkan output berupa bilangan, maka fungsi invers trigonometri sebaliknya. Invers dari keenam fungsi trigonometri secara berturut-turut adalah $\arcsin\theta, \arccos\theta, \arctan\theta$, dll, yang juga umum ditulis sebagai $\sin^{-1}\theta, \cos^{-1}\theta, \tan^{-1}\theta$, dll. Contoh penggunaan fungsi invers trigonometri adalah sebagai berikut:

Jika $\sin 30° = \left(\dfrac{1}{2}\right)$, maka $\arcsin(\dfrac{1}{2}) = 30°$ Jika $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, maka $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$

Jika $\tan 45° = 1$, maka $\arctan 1 = 45°$

Secara umum, jika $y = \sin\theta$ maka $\theta = \arcsin y = \sin^{-1} y$. Ini berlaku untuk kelima fungsi trigonometri lainnya. Tentunya hal ini bisa menimbulkan pertanyaan. Misalnya perhatikan bahwa $\sin 30° = \sin 150° = \sin 390° = \sin 510° = \ldots = \dfrac{1}{2}$. Lalu, yang mana hasil dari $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$? $30°, 150°, 390°, 510°$, atau yang lain? Untuk mengatasi kasus ini, kita membatasi output untuk fungsi $\arcsin\theta$ dan kelima fungsi invers lainnya:

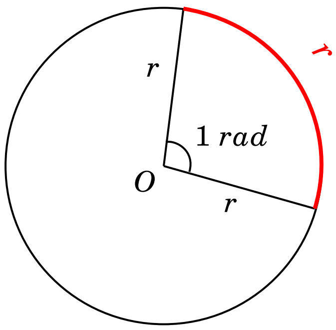
- $-90° \le \arcsin\theta \le 90°$
- $0° \le \arccos\theta \le 180°$
- $-90° < \arctan\theta < 90°$
- $-90° \le \operatorname{arccsc}\theta < 0°$ atau $0° < \operatorname{arccsc}\theta \le 90°$
- $0 \le \operatorname{arcsec}\theta < 90°$ atau $90° < \operatorname{arcsec}\theta \le 180°$
- $0 < \operatorname{arccot}\theta < 180°$

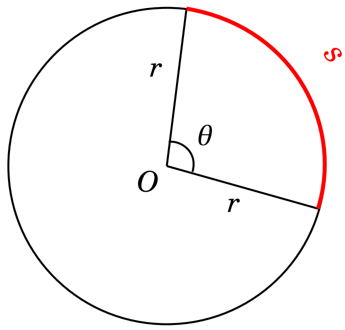
Sayangnya kita tidak akan membahas ini terlalu dalam. Keenam batasan di atas tidak perlu mati-matian dihapalkan juga—yang penting kita paham cara menggunakan fungsi invers trigonometri.

G Satuan Radian

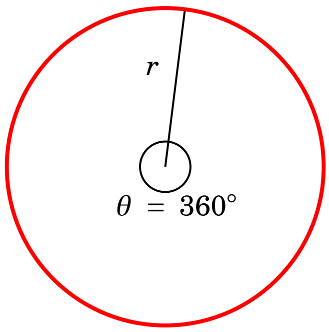
Semasa duduk di bangku SD dan mempelajari sudut untuk pertama kalinya, anak kecil mungkin pernah bertanya: “Mengapa satu putaran itu 360°, bukan 100° atau 400° saja?”
Jawabannya adalah “Satu putaran memang tidak harus 360°. Kalau umat manusia sepakat memutuskan bahwa satu putaran adalah 100° atau 400°, maka hal itu sah-sah saja.” [x]

Sebagai alternatif, para matematikawan menemukan satuan *radian*. 1 radian[xi] didefinisikan sebagai sudut pusat suatu lingkaran di mana panjang busur yang diapit sama dengan jari-jarinya, seperti pada gambar di sebelah kiri:





Secara umum, besar sudut (θ) dalam satuan radian sama dengan rasio antara panjang busur yang diapit (s) dan jari-jari lingkaran (r), yakni $\theta = \frac{s}{r}$, seperti pada ilustrasi di atas (kanan). Bagaimana kalau besar sudut pusatnya adalah satu putaran penuh, yakni 360°?



Panjang busur yang diapit sama saja dengan keliling lingkaran, atau $s = 2\pi r$. Dengan demikian, besar sudut satu putaran penuh dalam satuan radian adalah

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$360^\circ = \frac{2\pi\cancel{r}}{\cancel{r}}$$

$$360^\circ = 2\pi$$

Jadi, $360^\circ = 2\pi$ radian. Ini bisa kita pakai untuk mencari nilai sudut-sudut lainnya:

[x] Nilai 360° sebagai sudut satu putaran penuh nampak tak berdasar. Ketentuan ini adalah warisan dari peradaban Babilonia Kuno yang menggunakan sistem bilangan seksagesimal (berbasis 60), berbeda dengan sistem bilangan desimal (berbasis 10) milik kita. Berdasarkan perhitungan astronomi, mereka menemukan bahwa matahari dan bintang-bintang kembali pada posisinya di langit tiap 360 hari (sebenarnya 365 hari, atau satu tahun), sehingga mereka memilih angka itu sebagai sudut satu putaran penuh.

[xi] 1 radian bisa ditulis 1 rad atau 1 saja, tanpa ada simbol satuan.

$$180^\circ = \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

$$90^\circ = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = \frac{1}{2}\cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$60^\circ = \frac{1}{3}\cdot 180^\circ = \frac{1}{3}\cdot \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$45^\circ = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ = \frac{1}{2}\cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

dan seterusnya.

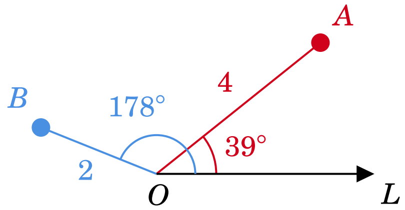
Satuan radian lebih disukai oleh para matematikawan karena lebih intuitif dan hemat tempat. Cukup masuk akal jika kita menghubungkan antara sudut pusat, jari-jari, dan busur yang diapit, ketimbang membagi satu putaran menjadi 360 bagian. Selain itu, lebih ringkas menuliskan 100π ketimbang 36000°.

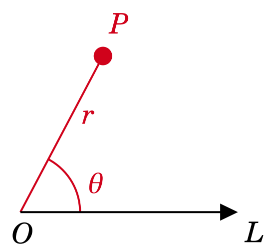
Akan tetapi, dalam kehidupan sehari-hari, satuan derajat lebih praktis. Kita tidak akan menggunakan busur yang menggunakan satuan radian, melainkan satuan derajat. Tidak ada salahnya untuk tetap menggunakan satuan derajat. Satuan radian umumnya lebih sering dipakai dalam kalkulus.

H Sistem Koordinat Polar/Kutub

Hal paling mendasar dari suatu sistem koordinat adalah caranya dalam menentukan posisi suatu benda, sebuah titik misalnya. Pada sistem koordinat Kartesius, cara menentukan posisi suatu titik adalah dengan mengukur jarak titik dengan sumbu-y (absis) dan sumbu-x (ordinat), lalu menyatakannya dalam sebuah daftar terurut (_ , _). Misalkan jarak titik dengan sumbu-y dan sumbu-x secara berturut-turut x dan y, maka posisi titik tersebut, atau *koordinatnya*, adalah (x, y).

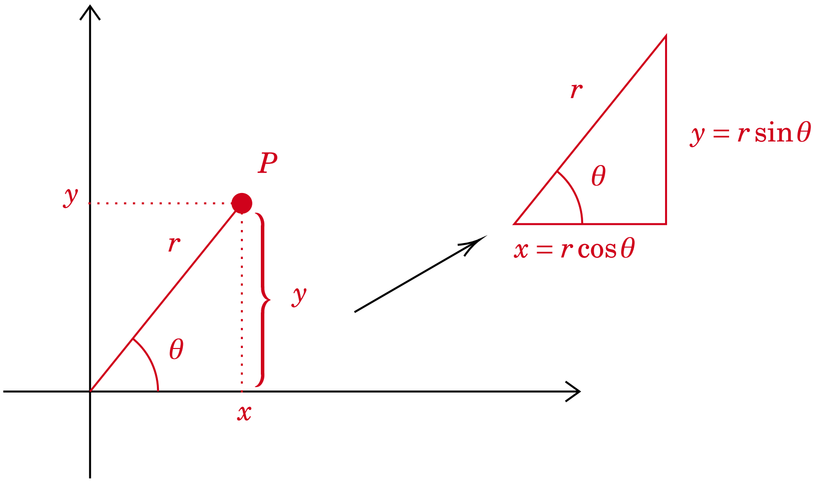
Sistem koordinat polar adalah sistem koordinat di mana posisi tiap titik ditentukan berdasarkan jaraknya terhadap suatu titik acuan dan sudut yang dibentuk terhadap suatu arah acuan tertentu, seperti pada ilustrasi di bawah ini:





Titik O adalah kutub (*pole*), yakni titik acuan untuk menghitung jarak, sedangkan sinar garis L adalah sumbu kutub (*polar axis*), yakni sumbu acuan untuk menghitung sudut. Titik A berjarak 4 satuan dari titik O dan membentuk sudut 39° terhadap sumbu L, sedangkan titik B berjarak 2 satuan dan membentuk sudut 178°. Koordinat kedua titik ini bisa dinyatakan sebagai $(4, 39^\circ)$ dan $(2, 178^\circ)$. Secara umum, jika suatu titik berjarak r dari kutub dan membentuk sudut θ terhadap sumbu kutub, maka koordinatnya adalah (r, θ).

H.I Mengkonversi Koordinat Polar ke Koordinat Kartesius dan Sebaliknya



Berdasarkan ilustrasi di atas, koordinat titik di atas pada sistem koordinat polar adalah (r, θ), sedangkan pada sistem koordinat Kartesius: (x, y). Dengan menggunakan definisi sinus dan kosinus, kita bisa nyatakan x dan y dalam r dan θ, yakni $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Sebaliknya, kita bisa nyatakan r dan θ dalam x dan y. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \\ &= r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} \\ &= r^2 \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \qquad \square \end{aligned}$$

Lalu, perhatikan juga bahwa $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ sehingga $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

I Tabel Fungsi Trigonometri untuk Sinus, Kosinus, dan Tangen

Sebelum melihat tabel lengkapnya, kita akan mempelajari suatu trik untuk mengingat nilai fungsi-fungsi trigonometri. Pertama, buat tabel seperti ini:

Sudut	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
sin	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$-\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$-\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$-\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$-\frac{\sqrt{\ }}{2}$
tan	$\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$-\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$-\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$-\sqrt{\frac{\ }{\ }}$	$-\sqrt{\frac{\ }{\ }}$

Untuk sinus dan kosinus, isilah dengan $\frac{\sqrt{\ }}{2}$, sedangkan isilah tangen dengan $\sqrt{\frac{\ }{\ }}$. Berilah tanda minus pada kosinus dan tangen sudut-sudut tumpul. Selanjutnya,

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$
tan	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$	$-\sqrt{\frac{3}{1}}$	$-\sqrt{\frac{2}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{0}{4}}$

kita isi bagian-bagian yang tersisa. Silakan amati sendiri, Anda akan menyadari polanya. Kita bisa sederhanakan lagi hingga menjadi

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Kita lengkapi dengan sudut antara 180° sampai 360°:

Sudut	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

J Daftar Pustaka

Gelfand, I.M. Saul, M. (2001). *Trigonometry*. Boston, NY: Birkhauser.

Miller, Kenneth S. Walsh, John B. (1962). *Elementary and Advanced Trigonometry*. New York, NY: Harper & Bros.

Nasoetion dkk. (1994). *Matematika 1: Untuk Sekolah Lanjutan Umum 1*. Jakarta: Balai Pustaka.

————————. (1994). *Matematika 2: Untuk Sekolah Lanjutan Umum 2*. Jakarta: Balai Pustaka.

K Lampiran

Alfabet Yunani

Αα Alpha	Ββ Beta	Γγ Gamma	Δδ Delta	Εε Epsilon	Ζζ Zeta
Ηη Eta	Θϑ Theta	Ιι Iota	Κϰ Kappa	Λλ Lambda	Μμ Mu
Νν Nu	Ξξ Xi	Οο Omikron	Ππ Pi	Ρρ Rho	Σσ/ς Sigma
Ττ Tau	υϒ Upsilon	Φφ Phi	Χχ Chi	Ψψ Psi	Ωω Omega

Identitas-identitas Pemfaktoran

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 + b^2 \pm 2ab \\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) \; = \; a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$