

# Trigonometri Dasar I

Nayaka

19 Oktober 2022

---

## A Pendahuluan

**Trigonometri** adalah cabang ilmu geometri yang membahas tentang segitiga. Trigonometri memberikan hubungan analitis antara sisi dan sudut suatu segitiga, serta menghubungkan geometri dengan aljabar. Kenapa harus repot-repot belajar trigonometri?

Kita mulai dengan meninjau beberapa persoalan. Misalkan kita punya suatu segitiga yang panjang seluruh sisinya sudah diketahui. Kira-kira apakah informasi tersebut cukup untuk menentukan bagian-bagian segitiga lainnya, yakni sudutnya? Misalnya:

**Contoh A.1.** “Panjang seluruh sisi suatu segitiga adalah 4 sentimeter. Berapa besar sudut-sudutnya?”

Segitiga tersebut adalah segitiga sama sisi, yang besar ketiga sudutnya sama. Karena jumlah besar sudut-sudut dalam satu segitiga adalah  $180^\circ$ , kita bisa temukan bahwa besar tiap sudutnya adalah  $180^\circ/3 = 60^\circ$ . Lagi:

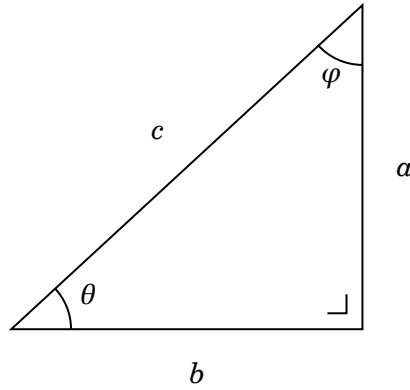
**Contoh A.2.** “Panjang sisi-sisi suatu segitiga adalah 3, 4, dan 5 sentimeter. Tentukan besar dari salah satu sudutnya.”

Tentunya panjang sisi-sisi segitiga tersebut memenuhi teorema Pythagoras:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Teorema tersebut hanya berlaku untuk segitiga siku-siku, sehingga kita tahu bahwa besar salah satu sudut pada segitiga tersebut adalah  $90^\circ$ . Bagaimana dengan pertanyaan berikut:

**Contoh A.3.** “Panjang sisi-sisi suatu segitiga adalah 2, 3, dan 4 sentimeter. Berapa besar sudut-sudutnya?”

Apakah ada rumus atau fakta geometris yang bisa kita pakai di sini? Sayangnya tidak. Hal terbaik yang bisa kita lakukan hanyalah mencoba menggambar segitiga tersebut lalu mengukur besar sudutnya dengan busur. Dari sini bisa kita sadari bahwa masih ada “lubang” dalam ilmu geometri yang belum kita isi. Bahkan pertanyaan sesepele ini belum bisa kita jawab dengan kepastian. Oleh karena itu, trigonometri hadir untuk memberikan solusi.

## B 6 Fungsi Trigonometri



Dengan segitiga siku-siku di atas, kita bisa definisikan 6 fungsi<sup>i</sup> trigonometri pada sudut  $\theta$  (dibaca “theta”) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{a}{c} & \csc(\theta) &= \frac{\text{miring}}{\text{depan}} = \frac{c}{a} \\ \cos(\theta) &= \frac{\text{samping}}{\text{miring}} = \frac{b}{c} & \sec(\theta) &= \frac{\text{miring}}{\text{samping}} = \frac{c}{b} \\ \tan(\theta) &= \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{a}{b} & \cot(\theta) &= \frac{\text{samping}}{\text{depan}} = \frac{b}{a}\end{aligned}$$

Yang dimaksud dengan “depan” adalah sisi yang berada di depan sudut  $\theta$ . Sedangkan “samping” adalah sisi yang berada di samping sudut, di mana salah satu ujung sisi tersebut adalah titik sudut  $\theta$ . Terakhir, “miring” maksudnya adalah sisi miring/hipotenusa dari segitiga siku-siku tersebut. Keenam fungsi di atas, yakni sinus, kosinus, tangen, kosekan, sekan, dan kotangen<sup>ii</sup> adalah alat perkakas utama dalam trigonometri.

## C Hubungan antara Keenam Fungsi Trigonometri

Dengan menggunakan segitiga siku-siku dan definisi pada bagian B, akan kita buktikan beberapa identitas<sup>iii</sup> berikut:

**Proposisi C.1.** <sup>iv</sup>  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

*Bukti.*

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan \theta \quad \square$$

**Proposisi C.2.**  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

*Bukti.*

$$\csc \theta = \frac{c}{a} = \left( \frac{a}{c} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin \theta} \quad \square$$

<sup>i</sup>Catat bahwa makna kata “fungsi” di sini bukanlah “kegunaan”; “fungsi” di sini sama saja seperti “fungsi”  $f(x)$  di aljabar.

<sup>ii</sup>Bahasa Inggris: *sine, cosine, tangent, cosecant, secant, cotangent*.

<sup>iii</sup>Identitas adalah suatu persamaan yang selalu benar untuk semua nilai variabel. Misalnya, persamaan  $x = x$  adalah suatu identitas karena tidak peduli berapa nilai variabel  $x$ , persamaan tersebut bernilai benar.

<sup>iv</sup>Proposisi adalah pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran: benar atau salah. Di sini, kita mau membuktikan kebenaran dari proposisi yang telah dinyatakan.

**Proposisi C.3.**  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

*Bukti.*

$$\sec \theta = \frac{c}{b} = \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos \theta} \quad \square$$

**Proposisi C.4.**  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

*Bukti.*

$$\cot \theta = \frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan \theta} \quad \square$$

Lalu,

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \square$$

**Proposisi C.5.**  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  <sup>v</sup>

*Bukti.* Berdasarkan teorema Pythagoras,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Membagi kedua ruas dengan  $c^2$  akan menghasilkan

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Berdasarkan definisi,  $\frac{a}{c}$  dan  $\frac{b}{c}$  secara berturut-turut adalah  $\sin \theta$  dan  $\cos \theta$ . Dengan demikian,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \square$$

Identitas ini dan turunannya (Proposisi C.6 & C.7) sering disebut identitas *Pythagorean* karena berasal dari teorema Pythagoras.

**Proposisi C.6.**  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

*Bukti.* Kita bisa gunakan Proposisi C.5:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Membagi kedua ruas persamaan dengan  $\cos^2 \theta$  memberikan kita

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$
$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad \square$$

**Proposisi C.7.**  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

*Bukti.* Kita bisa gunakan Proposisi C.5:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Membagi kedua ruas persamaan dengan  $\sin^2 \theta$  memberikan kita

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$
$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \quad \square$$

---

<sup>v</sup>Catat bahwa  $\sin^2 \theta = (\sin \theta)(\sin \theta)$ . Hal yang sama berlaku bagi kelima fungsi trigonometri lainnya.

**Proposisi C.8.**  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$  dan  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$

*Bukti.* Perhatikan sudut  $\varphi$  (dibaca “phi”) pada segitiga siku-siku di bagian B. Berdasarkan definisi,  $\sin \varphi = \frac{b}{c} = \cos \theta$  dan  $\cos \varphi = \frac{a}{c} = \sin \theta$ .

Lalu, jumlah seluruh sudut pada segitiga adalah  $180^\circ$ , sehingga

$$\theta + \varphi + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\theta + \varphi = 90^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - \theta$$

Dengan demikian,  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$  dan  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ . □

## D Sudut-sudut Istimewa

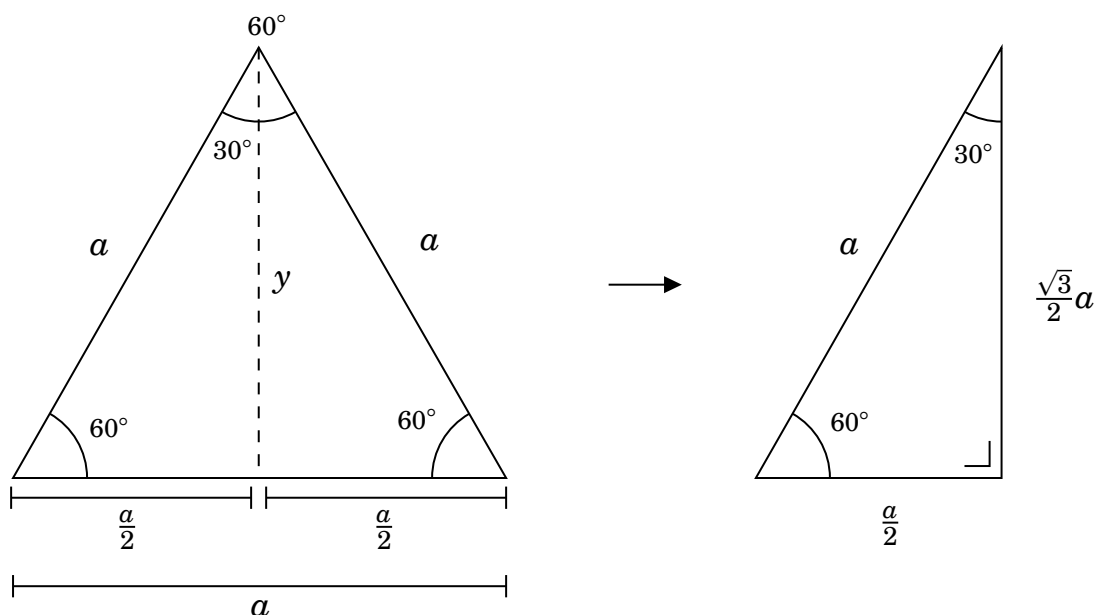
Ada beberapa sudut yang disebut “istimewa” karena nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut tersebut diketahui secara pasti dan tidak perlu dihitung menggunakan kalkulator atau deret ekspansi Taylor<sup>vi</sup>. Untuk awalan, kita akan mencari nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut berikut:  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , dan  $90^\circ$ .

### D.1 $30^\circ$ dan $60^\circ$

Jangan terburu-buru ke bawah. Fokus pada kalimat ini. Sebuah pertanyaan sederhana:

“di mana kita bisa menemukan sudut  $60^\circ$  dan  $30^\circ$ ?”

Kita bisa dengan mudah menemukan sudut  $60^\circ$  pada *segitiga sama sisi*, karena besar tiap sudutnya adalah  $60^\circ$ . Lalu, kita bisa membuat garis bagi untuk membagi sudut  $60^\circ$  menjadi dua sudut yang sama besar, yakni  $30^\circ$ . Lebih jelasnya, misalkan suatu segitiga sama sisi panjang sisinya  $a$  seperti pada ilustrasi berikut:



Anda bisa menemukan tinggi segitiga  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  dengan menerapkan teorema Pythagoras. Sekarang, dengan menggunakan definisi sinus, kosinus, dan tangen, kita dapatkan

<sup>vi</sup>Kira-kira ini apa, ya? Silakan coba *browsing* tentang ini.

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

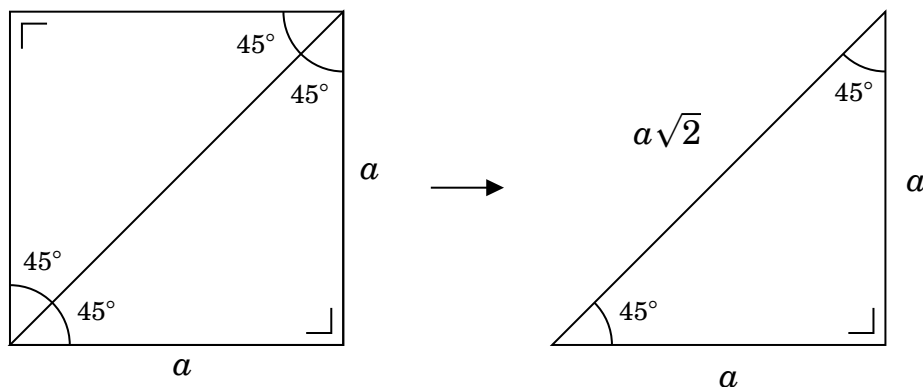
$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

## D.2 45°

Lagi, kita tanyakan suatu pertanyaan sederhana:

“di mana kita bisa menemukan sudut 45°?”

Tentunya kita bisa mendapatkannya dengan membelah suatu persegi menjadi dua segitiga siku-siku yang kongruen. Lebih jelasnya, misalkan suatu persegi dengan panjang sisi  $a$  seperti pada ilustrasi berikut:



Panjang diagonal  $a\sqrt{2}$  bisa ditemukan dengan menerapkan teorema Pythagoras. Sekarang, dengan menggunakan definisi sinus, kosinus, dan tangen, kita dapatkan

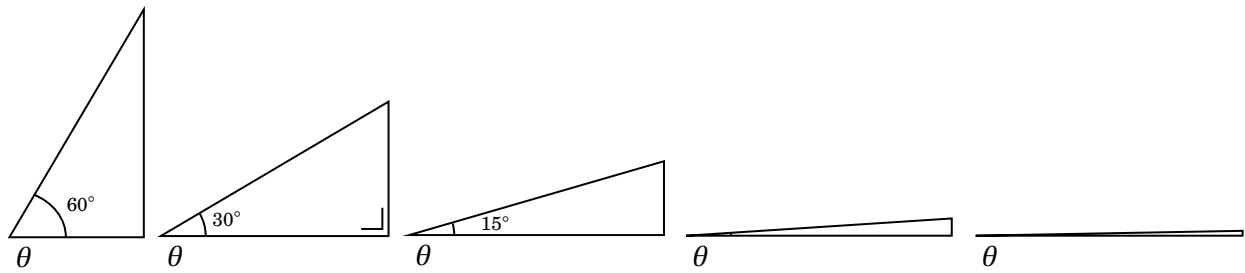
$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

## D.3 0° dan 90°

Kalau ditanya di mana kita bisa temukan sudut  $0^\circ$  dan  $90^\circ$ , tentunya tidak ada segitiga yang punya kedua sudut itu. Sudut  $0^\circ$  hanya ada pada garis lurus. Akan tetapi, kita bisa gunakan suatu pendekatan untuk mengetahui nilai-nilai fungsi trigonometri untuk kedua sudut tersebut.



Perhatikan bahwa semakin  $\theta$  mengecil (mendekati 0), panjang sisi samping sudut  $\theta$  akan makin mendekati panjang hipotenusa, dan sisi di depan sudut  $\theta$  makin mendekati 0. Dengan kata lain,

$$\text{samping} \approx \text{miring} \quad \text{dan} \quad \text{depan} \approx 0$$

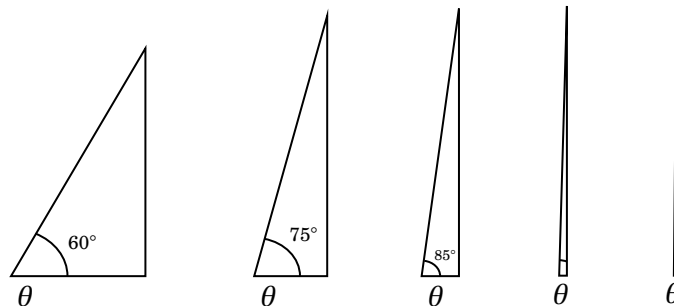
Akibatnya,

$$\sin 0^\circ = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{0}{\text{miring}} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} = \frac{\text{miring}}{\text{miring}} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

Pendekatan sebaliknya bisa diterapkan untuk menentukan nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut  $90^\circ$ .



Semakin sudut  $\theta$  mendekati  $90^\circ$ , panjang sisi depannya akan makin mendekati panjang hipotenusa sedangkan panjang sisi samping mendekati 0. Dengan kata lain,

$$\text{depan} \approx \text{miring} \quad \text{dan} \quad \text{samping} \approx 0$$

Akibatnya,

$$\sin 90^\circ = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{\text{miring}}{\text{miring}} = 1$$

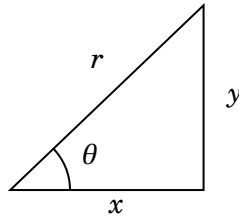
$$\cos 90^\circ = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} = \frac{0}{\text{miring}} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{tidak terdefinisi}$$

Pendekatan yang kita gunakan di sini adalah menggunakan aproksimasi. Pada pertemuan selanjutnya hal ini bisa kita buktikan secara pasti dengan definisi baru yang kita gunakan untuk fungsi-fungsi trigonometri.

## E Latihan Soal dan Pembahasan

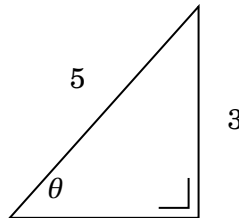
1. Sebuah segitiga siku-siku mempunyai sudut lancip sebesar  $\theta$  hipotenusa dengan panjang  $r$  seperti pada ilustrasi di bawah. Nyatakan panjang dua sisi lainnya ( $x$  dan  $y$ ) dalam  $r$  dan  $\theta$ .



**Jawab.** Berdasarkan definisi sinus dan kosinus,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  dan  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ . Memindahkan penyebut  $r$  ke ruas kiri, kita dapatkan  $r \sin \theta = y$  dan  $r \cos \theta = x$ .

2. Jika  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ , maka tentukan nilai  $\cos \theta$  dan  $\tan \theta$ . ( $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ )

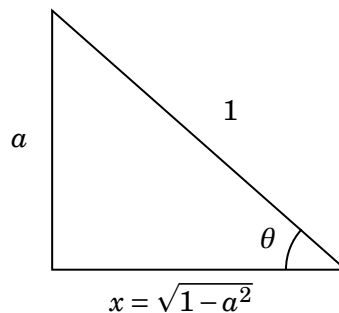
**Jawab.** Pada suatu segitiga siku-siku dengan  $\theta$  sebagai salah satu sudut lancipnya,  $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$  sehingga bisa kita gambarkan seperti ini:



Dengan menerapkan teorema Pythagoras, kita bisa temukan bahwa panjang sisi samping sudut  $\theta$  adalah 4. Dengan demikian,  $\cos \theta = 4/5$  dan  $\tan \theta = 3/4$ .

3. Jika  $\sin \theta = a$ , tentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri lainnya untuk sudut  $\theta$ .

**Jawab.** Perhatikan bahwa  $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = a = \frac{a}{1}$ . Dari sini kita punya suatu segitiga siku-siku dengan sudut  $\theta$ , di mana panjang sisi depannya  $a$  dan panjang hipotenusanya 1:



Misalkan sisi samping sudut  $\theta$  adalah  $x$ . Nilai  $x$  dapat dicari dengan menerapkan teorema Pythagoras:

$$a^2 + x^2 = 1$$

$$x^2 = 1 - a^2 \implies x = \sqrt{1 - a^2} \quad \text{vii}$$

<sup>vii</sup>Mengapa di sini kita abaikan tanda  $\pm$  yang seharusnya ada di depan tanda akar? Karena  $x$  adalah panjang sisi segitiga. Hasil berupa  $x = -\sqrt{1 - a^2}$  adalah tidak masuk akal karena panjang tidak mungkin negatif.

Sekarang sisi-sisi segitiga siku-siku sudah kita lengkapi dan kita bisa mencari nilai fungsi trigonometri untuk sudut  $\theta$ :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1} = \sqrt{1-a^2}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Silakan hitung  $\sec \theta$ ,  $\csc \theta$ , dan  $\cot \theta$  sendiri.

**Alternatif Jawaban.** Kita bisa gunakan identitas dari Proposisi C.5:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$a^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - a^2$$

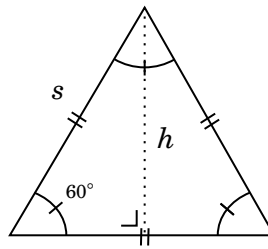
$$\cos \theta = \pm \sqrt{1-a^2} \quad \text{viii}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1-a^2}$$

Silakan coba hitung nilai-nilai fungsi trigonometri lainnya.

4. Tentukan luas segitiga sama sisi dengan panjang sisi  $s$ .

**Jawab.** Besar tiap sudut pada segitiga sama sisi adalah  $60^\circ$ . Kita bisa belah segitiga sama sisi menjadi dua segitiga siku-siku yang kongruen. Perhatikan ilustrasi berikut:



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{s}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{s}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} s$$

Selanjutnya, mencari luas segitiga:

$$L = \frac{1}{2} < \text{alas} > \times < \text{tinggi} >$$

$$= \frac{1}{2} sh$$

$$= \frac{1}{2} s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

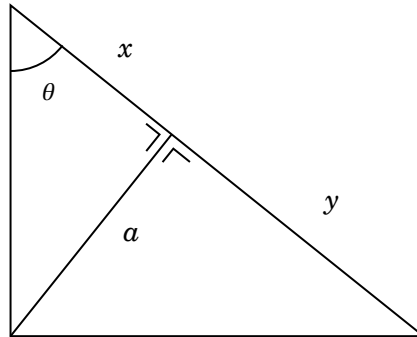
---

<sup>viii</sup>Kenapa di sini malah pakai tanda  $\pm$  di depan akar? Di pertemuan selanjutnya Anda akan paham bahwa nilai-nilai fungsi trigonometri bisa negatif. Sabar, ya. Untuk sementara, kita pakai nilai yang positif dahulu karena kita menggunakan definisi yang berdasar kepada panjang sisi-sisi segitiga siku-siku, sedangkan panjang sisi tidak mungkin negatif. Secara umum, sebenarnya alternatif jawaban ini lebih tepat karena soal tidak membatasi sudut  $\theta$  sebagai sudut lancip.



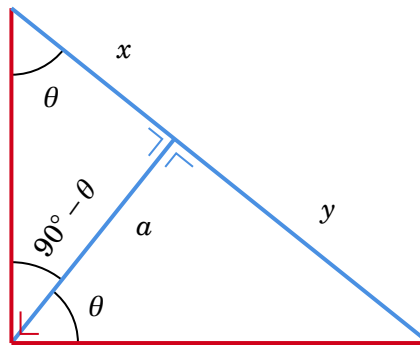
5. Pada suatu segitiga siku-siku, diketahui  $\theta$  adalah salah satu sudut lancipnya. Segitiga tersebut dibelah menjadi dua segitiga siku-siku kecil dengan tinggi  $a$  dan alasnya masing-masing  $x$  dan  $y$  (lihat ilustrasi).

- (a) Nyatakan luas segitiga siku-siku besar dalam  $a$  dan  $\theta$ .  
 (b) Buktikan dengan trigonometri bahwa  $xy = a^2$ .



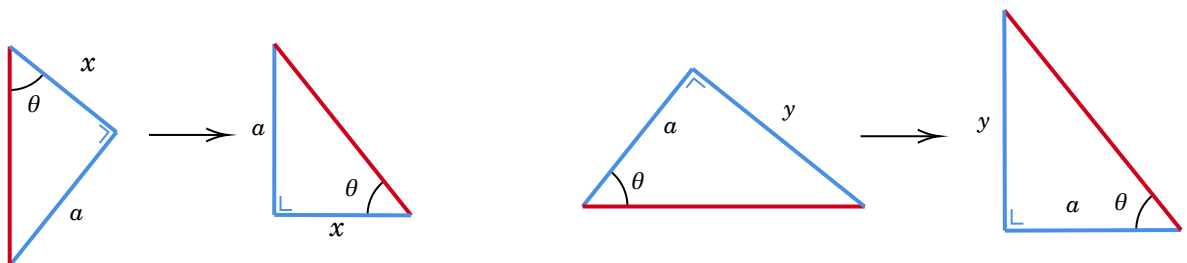
**Jawab.**

- (a) Mari kita lengkapi dulu sudut-sudut dalam segitiga tersebut.



Untuk mencari luas segitiga, kita bebas memilih alas dan tinggi yang kita mau (lihat gambar di atas). Kita akan pakai yang biru (silakan coba sendiri untuk yang merah). Alas dari segitiga tersebut adalah  $x + y$  dan tingginya adalah  $a$ . Luas segitiganya adalah  $\frac{1}{2}(x + y)a$ . Karena kita harus menyatakan jawabannya dalam  $a$  dan  $\theta$ , kita harus nyatakan  $x$  dan  $y$  dalam variabel tersebut terlebih dahulu.

Perhatikan dua segitiga siku-siku kecil yang menyusun segitiga siku-siku besar:



Pada segitiga pertama (kiri),  $\tan \theta = \frac{a}{x}$  sehingga  $x = \frac{a}{\tan \theta}$ . Pada segitiga kedua (kanan),  $\tan \theta = \frac{y}{a}$  sehingga  $y = a \tan \theta$ . Dengan demikian, luas segitiga siku-siku besar adalah

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y)a &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tan\theta} + a\tan\theta\right)a \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta\right)a^2 && \text{ix} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}\right)a^2 && \text{x} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}a^2 && \text{xi} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}a^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}} \times \frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta}a^2 \\
&= \frac{a^2}{2\cos\theta\sin\theta} \blacksquare
\end{aligned}$$

(b) Di bagian (a) tadi kita temukan  $x = \frac{a}{\tan\theta}$  dan  $y = a\tan\theta$ . Maka  $xy = \frac{a}{\cancel{\tan\theta}} \times a\cancel{\tan\theta} = a^2$ .  $\square$

---

<sup>xi</sup>Di sini kita memfaktorkan  $a$  dari ekspresi di dalam kurung.

<sup>xi</sup>Di sini kita menyamakan penyebut antara  $\frac{1}{\tan\theta}$  dengan  $\tan\theta$ .

<sup>xi</sup>Di sini kita gunakan identitas dari Proposisi C.6:  $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ . Catat bahwa  $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$  dan  $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ .

## F Daftar Pustaka

- Gelfand, I.M. Saul, M. (2001). *Trigonometry*. Boston, NY: Birkhauser.
- Miller, Kenneth S. Walsh, John B. (1962). *Elementary and Advanced Trigonometry*. New York, NY: Harper & Bros.
- Nasoetion dkk. (1994). *Matematika 1: Untuk Sekolah Lanjutan Umum 1*. Jakarta: Balai Pustaka.
- . (1994). *Matematika 2: Untuk Sekolah Lanjutan Umum 2*. Jakarta: Balai Pustaka.

## G Lampiran

### Alfabet Yunani

$A\alpha$ Alpha	$B\beta$ Beta	$\Gamma\gamma$ Gamma	$\Delta\delta$ Delta	$E\varepsilon$ Epsilon	$Z\zeta$ Zeta
$H\eta$ Eta	$\Theta\vartheta$ Theta	$I\iota$ Iota	$K\kappa$ Kappa	$\Lambda\lambda$ Lambda	$M\mu$ Mu
$N\nu$ Nu	$\Xi\xi$ Xi	$O\omicron$ Omikron	$\Pi\pi$ Pi	$\rho$ Rho	$\Sigma\sigma/\varsigma$ Sigma
$T\tau$ Tau	$\Upsilon\upsilon$ Upsilon	$\Phi\phi$ Phi	$\chi$ Chi	$\Psi\psi$ Psi	$\Omega\omega$ Omega

### Identitas-identitas Pemfaktoran

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

# Trigonometri Dasar II

Nayaka

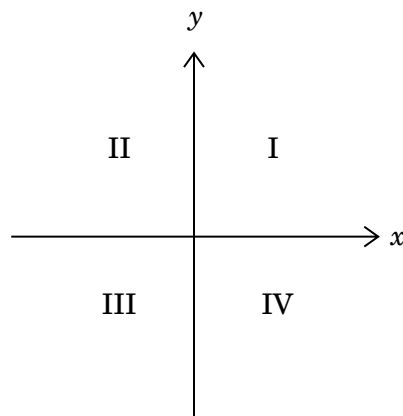
26 Oktober 2022

## A Pendahuluan

Sejauh ini kita sudah mengetahui sedikit tentang trigonometri. Kita telah menemukan nilai fungsi trigonometri pada sudut-sudut lancip tertentu dari  $0^\circ$  hingga  $90^\circ$ . Akan tetapi, sudut lancip bukanlah satu-satunya sudut. Masih ada sudut tumpul dan sudut-sudut antara  $180^\circ$  hingga  $360^\circ$ .

Lebih lanjut lagi, kalau berdasarkan definisi yang kita pakai pada pertemuan sebelumnya, trigonometri hanya akan terbatas pada sudut-sudut antara  $0^\circ$  hingga  $90^\circ$  saja. Dengan demikian, trigonometri akan terasa “tidak berguna” karena tidak bisa diterapkan untuk semua sudut.

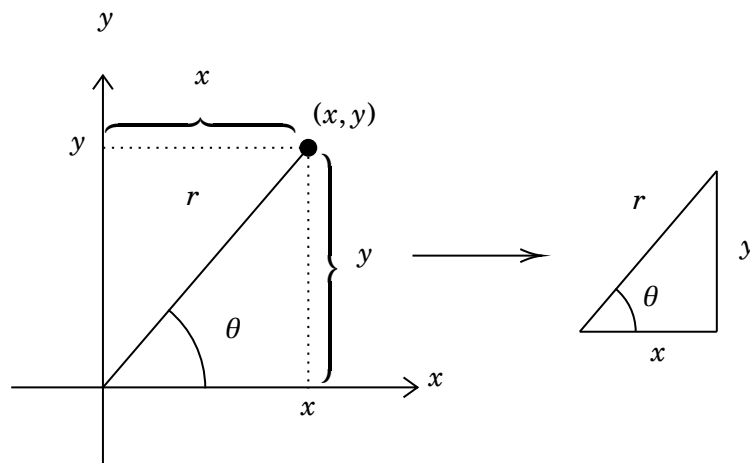
Berangkat dari persoalan ini, kita akan mencoba mendefinisikan ulang keenam fungsi trigonometri. Kita akan menggunakan definisi yang bisa diterapkan untuk sudut apapun. Ketimbang menggunakan sudut lancip pada segitiga siku-siku seperti pada definisi sebelumnya, kali ini kita akan menggunakan bidang koordinat Kartesius:



Bidang koordinat Kartesius 2-dimensi tersusun atas dua sumbu yang saling tegak lurus satu sama lain, yakni sumbu vertikal (sumbu-y) dan sumbu horizontal (sumbu-x). Tiap titik pada koordinat Kartesius dapat dinyatakan dalam bentuk  $(x, y)$ , di mana  $x$  adalah absis: jarak titik ke sumbu-y, dan  $y$  adalah ordinat: jarak titik ke sumbu-x.

Bidang koordinat Kartesius 2-dimensi terbagi menjadi empat wilayah yang dinamakan kuadran, yakni kuadran I, II, III, dan IV. Jika titik  $(x, y)$  terletak pada kuadran I, maka cukup jelas bahwa  $x > 0$  dan  $y > 0$ ,  
sedangkan untuk kuadran II:  $x < 0$  dan  $y > 0$ ,  
untuk kuadran III:  $x < 0$  dan  $y < 0$ ,  
dan terakhir, untuk kuadran IV:  $x > 0$  dan  $y < 0$ .

## B Definisi Baru untuk Fungsi Trigonometri



Kita mulai dengan suatu garis dengan panjang  $r$  yang berpangkal di titik asal  $(0,0)$  dan berujung di titik  $(x,y)$  seperti pada ilustrasi di atas. Garis ini membentuk sudut  $\theta^i$  terhadap sumbu- $x$  positif dan terletak di kuadran I. Sekilas, garis tersebut seperti membentuk sebuah segitiga siku-siku dengan panjang hipotenusa  $r$  serta panjang kaki-kakinya  $x$  dan  $y$ .

Sedikit mirip dengan definisi sebelumnya, kini kita definisikan fungsi-fungsi trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{y}{r} & \csc(\theta) &= \frac{r}{y} \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{r} & \sec(\theta) &= \frac{r}{x} \\ \tan(\theta) &= \frac{y}{x} & \cot(\theta) &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

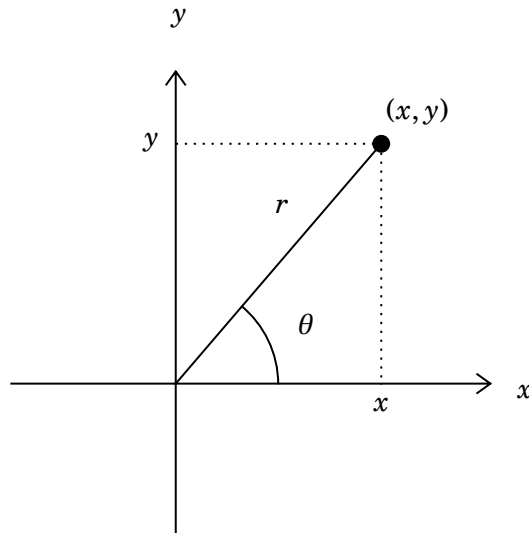
Nampak sekilas, tidak ada perbedaan dengan definisi sebelumnya. Akan tetapi, perhatikan baik-baik bahwa nilai  $r$  memang selalu positif,<sup>ii</sup> tetapi nilai  $x$  dan  $y$  bisa negatif.<sup>iii</sup> Akibatnya, sekarang nilai keenam fungsi trigonometri bisa negatif. Lebih lanjut lagi, dengan definisi yang baru, kita kini bisa menggunakan sudut-sudut yang lebih besar dari  $90^\circ$ .

<sup>i</sup>Matematikawan umumnya sepakat bahwa sudut yang diukur berlawanan arah jarum jam dari sumbu- $x$  positif adalah positif, sedangkan sudut yang diukur searah jarum jam adalah negatif.

<sup>ii</sup>Karena merupakan panjang garis.

<sup>iii</sup>Karena sekarang kita berada di koordinat Kartesius, bukan pada sisi-sisi segitiga siku-siku yang panjangnya harus selalu positif.

## C Tanda Fungsi Trigonometri di Tiap Kuadran



Pada gambar di atas, garis  $r$  bisa terletak di kuadran I, II, III, atau IV tergantung dengan besar sudut  $\theta$ :

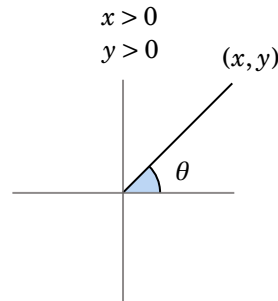
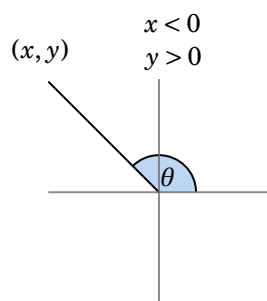
- jika  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ,<sup>iv</sup> maka garis berada di kuadran I,<sup>v</sup>
- jika  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , maka garis berada di kuadran II,
- jika  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , maka garis berada di kuadran III, dan
- jika  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ , maka garis berada di kuadran IV.

Adapun tanda fungsi trigonometri di tiap kuadrannya adalah sebagai berikut:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

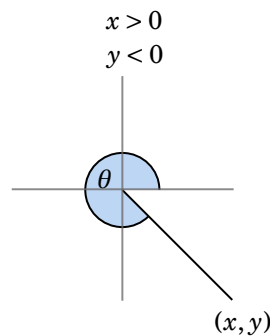
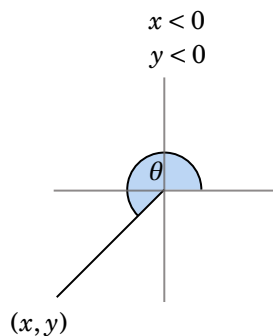
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(-)}{(-)} = (+)$$



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

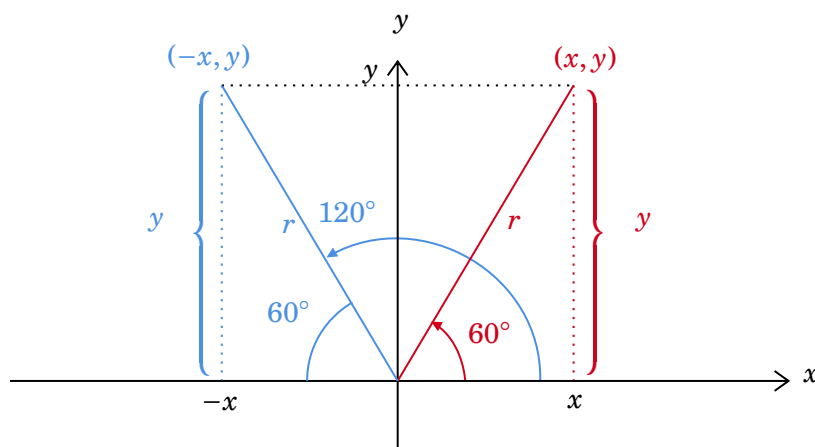
<sup>iv</sup>Artinya,  $\theta > 0$  dan di saat yang bersamaan  $\theta < 90^\circ$ . Dengan demikian,  $\theta$  lebih besar dari 0 tetapi lebih kecil dari  $90^\circ$ , sehingga nilai  $\theta$  adalah antara 0 sampai  $90^\circ$  tapi tidak termasuk  $90^\circ$ .

<sup>v</sup>Kita bisa juga bilang bahwa sudut  $\theta$  terletak di kuadran I.

## D Sudut-sudut Berelasi

### D.I Kuadran II

Sama seperti sudut-sudut  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  dan  $90^\circ$ , ada sudut-sudut “istimewa” yang lebih besar dari  $90^\circ$ . Ambil contoh sudut tumpul (kuadran II), misalnya  $120^\circ$ .



Dari gambar di atas nampak jelas bahwa

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{r} \text{ dan } \sin 120^\circ = \frac{y}{r}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{r} \text{ dan } \cos 120^\circ = \frac{-x}{r}$$

sehingga

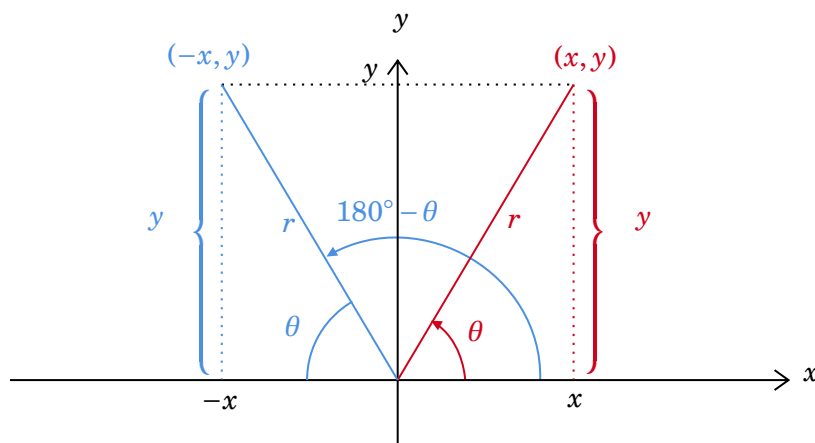
sehingga

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{dan } \tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Silakan coba cari nilai-nilai fungsi trigonometri untuk  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ , dan  $180^\circ$  dengan cara serupa. Anda akan menemukan suatu pola, yakni  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ,<sup>vi</sup>  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ , dan  $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$ . Mari kita buktikan bahwa ketiga persamaan tersebut memang merupakan suatu identitas dengan menggunakan ilustrasi berikut:



**Proposisi D.1.**  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

*Bukti.* Berdasarkan ilustrasi di atas,  $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y}{r}$  dan  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ . Dengan demikian  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ . □

<sup>vi</sup>Misalnya, seperti yang sudah kita hitung,  $\sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ$ .

**Proposisi D.2.**  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$

*Bukti.* Berdasarkan ilustrasi di atas,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  dan  $\cos(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \theta$ . □

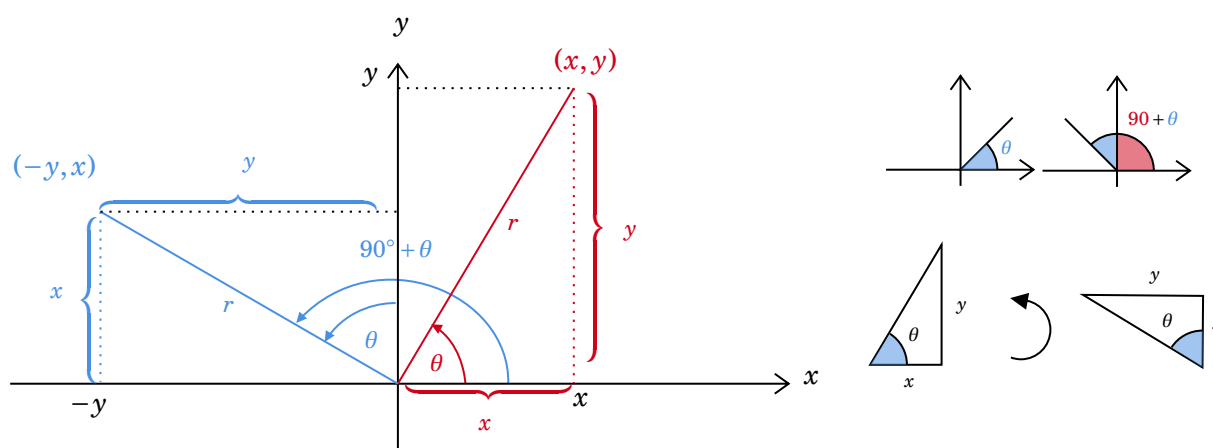
**Proposisi D.3.**  $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

*Bukti.* Berdasarkan dua identitas sebelumnya,  $\tan(180^\circ - \theta) = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$ . □

Dari sini, Anda bisa simpulkan bahwa sudut-sudut istimewa di kuadran II saling berpelurus dengan sudut-sudut istimewa di kuadran I.<sup>vii</sup> Sebagai contoh,  $120^\circ$  berpelurus dengan  $60^\circ$ .

Kita bisa pakai cara pandang yang berbeda. Tadi kita temukan bahwa  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , sedangkan  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$  juga, sehingga  $\sin 120^\circ = \cos 30^\circ$ .

Kalau Anda sudah menghitung nilai  $\sin 135^\circ$ , maka Anda akan temukan bahwa  $\sin 135^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Di sini terlihat suatu pola, yaitu  $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$ . Jika Anda coba amati nilai kosinus dan tangen untuk sudut-sudut tumpul juga, akan terlihat pola  $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$  dan  $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$ . Identitas-identitas tadi bisa dibuktikan:



**Proposisi D.4.**  $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$

*Bukti.* Berdasarkan gambar,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  sedangkan  $\sin(90^\circ + \theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$ . □

**Proposisi D.5.**  $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$

*Bukti.* Berdasarkan gambar,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  sedangkan  $\cos(90^\circ + \theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$ . □

**Proposisi D.6.**  $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$

*Bukti.* Berdasarkan dua identitas sebelumnya,  $\tan(90^\circ + \theta) = \frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\cot \theta$ . □

Perlu digarisbawahi: tidak perlu menghafal semua identitas sudut berelasi ini. Memori manusia punya batasannya, sehingga lebih baik menghafal hal-hal yang lebih esensial. Yang paling penting adalah memahami darimana identitas-identitas tersebut berasal. Bukankah lebih mudah menghafal cara berpikir yang diperlukan untuk menurunkan identitas-identitas tadi ketimbang menghafal identitasnya satu per satu? Kalau Anda hapal alurnya, Anda bisa dengan mudah menemukan identitas-identitas tadi sendiri. Memang agak ribet, tapi bukankah ini lebih baik? ^ \_ ^

<sup>vii</sup>Sembarang dua sudut, misalkan  $\theta$  dan  $\varphi$ , disebut saling berpelurus jika  $\theta + \varphi = 180^\circ$ , atau  $\theta = 180^\circ - \varphi$ , atau  $\varphi = 180^\circ - \theta$ .



## D.II Kuadran III

Selanjutnya, kita bisa memperluas cakupan kita ke sudut-sudut di kuadran III (antara  $180^\circ$  sampai  $270^\circ$ ). Belajar dari pengalaman sebelumnya, sudut istimewa memiliki bentuk umum  $90^\circ - \theta$ ,  $90^\circ + \theta$ , dan  $180^\circ - \theta$ , di mana  $\theta$  adalah sudut lancip yang istimewa. Kalau polanya dilanjutkan, kita akan dapatkan bentuk  $180^\circ + \theta$ , yang merupakan sudut di kuadran III.

Akan tetapi, sekarang adalah waktunya Anda coba membuktikan identitas-identitasnya sendiri. Silakan cari sudut-sudut istimewa di kuadran ini dan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sudut-sudut tersebut.<sup>viii</sup> Petunjuknya sederhana: penalaran yang perlu Anda gunakan sebenarnya mirip-mirip dengan sebelumnya. Silakan buktikan identitas-identitas di bawah ini— $\theta$  adalah sudut lancip. Selamat mencoba.

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta$$

## D.III Kuadran IV

Seperti sebelumnya, silakan coba buktikan identitas-identitas untuk sudut-sudut di kuadran IV. Tentukan juga sudut-sudut istimewa serta nilai fungsi-fungsi trigonometrinya.

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta$$

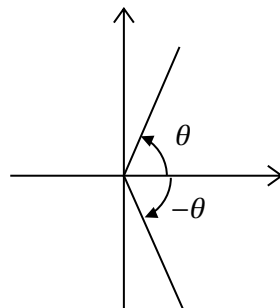
$$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot \theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

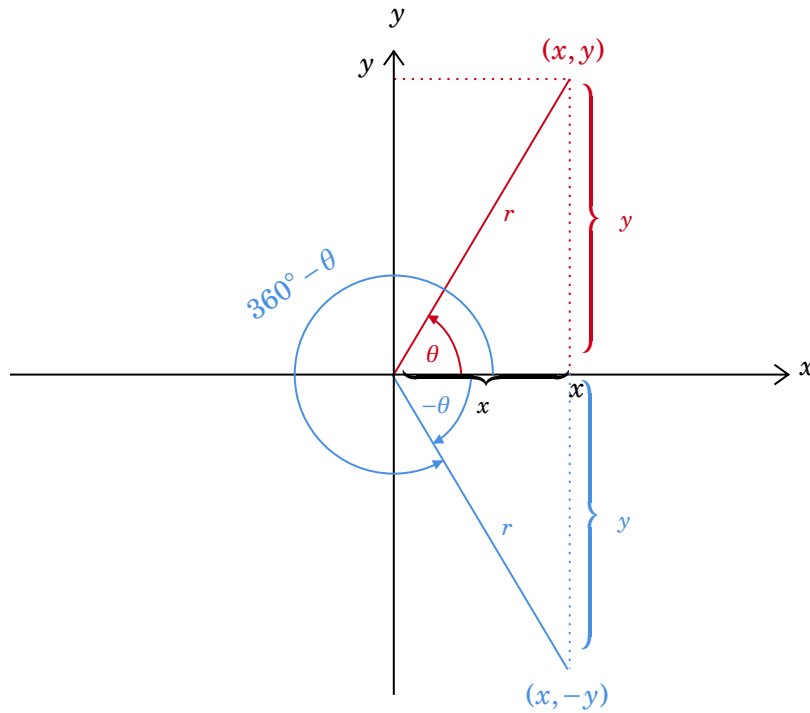
$$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

## D.IV Sudut Negatif



Para matematikawan umumnya sepakat bahwa sudut yang diukur berlawanan arah jarum jam nilainya positif, sedangkan yang diukur searah jarum jam adalah sudut negatif. Dengan demikian, tidak hanya  $\sin 30^\circ$ , kita juga punya  $\sin(-30^\circ)$ . Kira-kira, bagaimana cara menghitung nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sudut yang negatif?

<sup>viii</sup>Tenang, di bagian akhir nanti ada tabel fungsi trigonometri dan semua sudut istimewa.



Dari gambar,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  dan  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  sedangkan  $\sin(-\theta) = \frac{-y}{r}$  dan  $\cos(-\theta) = \frac{x}{r}$ . Dengan demikian,  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  dan  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ . Ini mengakibatkan  $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ .

Lebih lanjut lagi, kita bisa lihat bahwa posisi garis yang membentuk sudut  $-\theta$  akan sama seperti garis yang dibentuk sudut  $360^\circ - \theta$ . Secara umum,

$$\sin(-\theta) = \sin(360^\circ - \theta) \quad (\text{D.7})$$

dan identitas ini tetap berlaku jika sinus diganti dengan kelima fungsi trigonometri lainnya.

## D.V Sudut-sudut yang Lebih Besar dari $360^\circ$

Kita masih bisa memperluas cakupan kita lagi. Bagaimana kalau sudut untuk fungsi trigonometri tidak dibatasi sampai  $360^\circ$ ? Kira-kira berapa nilai  $\sin(390^\circ)$ ? Ini adalah pertanyaan yang cukup mudah: catat bahwa  $360^\circ$  adalah satu putaran penuh. Setelah kita melakukan satu putaran penuh, kita akan kembali ke posisi awal.

Misalkan suatu garis membentuk sudut  $30^\circ$  terhadap sumbu-x. Kalau garis diputar satu putaran penuh berlawanan arah jarum jam, maka garis akan kembali ke posisi semula dan membentuk sudut  $30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$ . Karena posisinya tidak berubah, maka koordinatnya juga tidak berubah sehingga nilai-nilai fungsi trigonometrinya sama.

Kalau garis diputar dua putaran penuh, garis tetap akan kembali ke posisi semula dan membentuk sudut  $30^\circ + 720^\circ = 750^\circ$ . Misal garis diputar satu putaran searah jarum jam, garis tetap kembali ke posisi semula dan membentuk sudut  $30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$ . Tentunya nilai-nilai fungsi trigonometrinya tetap sama. Dengan kata lain,  $\sin(\theta + 360^\circ) = \sin(\theta + 720^\circ) = \sin(\theta - 360^\circ) = \sin \theta$ , dan ini berlaku pula untuk kelima fungsi trigonometri lainnya.

Secara umum dapat kita simpulkan secara matematis bahwa, untuk  $n \in \mathbb{Z}$ : <sup>ix</sup>

---

<sup>ix</sup> $n \in \mathbb{Z}$  artinya “ $n$  termasuk bilangan bulat.”

$$\sin(\theta \pm 360^\circ n) = \sin \theta \quad (\text{D.8})$$

$$\cos(\theta \pm 360^\circ n) = \cos \theta \quad (\text{D.9})$$

$$\tan(\theta \pm 360^\circ n) = \tan \theta \quad (\text{D.10})$$

$$\sec(\theta \pm 360^\circ n) = \sec \theta \quad (\text{D.11})$$

$$\csc(\theta \pm 360^\circ n) = \csc \theta \quad (\text{D.12})$$

$$\cot(\theta \pm 360^\circ n) = \cot \theta \quad (\text{D.13})$$

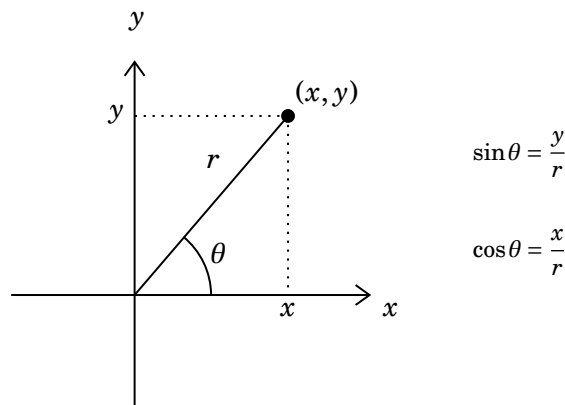
atau, dengan kata-kata: “menjumlahkan atau mengurangi suatu sudut dengan kelipatan  $360^\circ$  tidak mengubah nilai-nilai fungsi trigonometrinya.”

Kita bisa lihat bahwa identitas dari subbab D.4 adalah kasus khusus dari identitas ini:

$$\sin(-\theta) = \sin(-\theta + 360^\circ) = \sin(360^\circ - \theta)$$

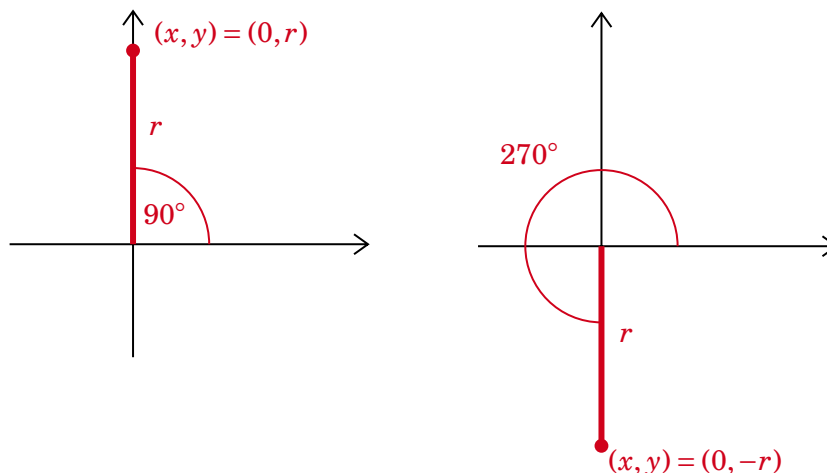
## E Nilai Maksimum dan Minimum Sinus dan Kosinus

Nilai-nilai fungsi trigonometri tidak bisa sembarangan, ada batasannya. Di sini kita hanya akan membahas fungsi sinus dan kosinus. Kita akan gunakan definisi kedua fungsi tersebut di bidang koordinat Kartesius:



### E.I Sinus

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ , sedangkan nilai  $r$  konstan, tidak bisa berubah. Artinya, yang menentukan nilai maksimum dan minimum  $\sin \theta$  adalah  $y$ . Nilai  $y$  maksimum ketika garis berdiri tegak dan titik  $(x, y)$  berada di posisi tertinggi dan sebaliknya pula untuk nilai minimumnya:

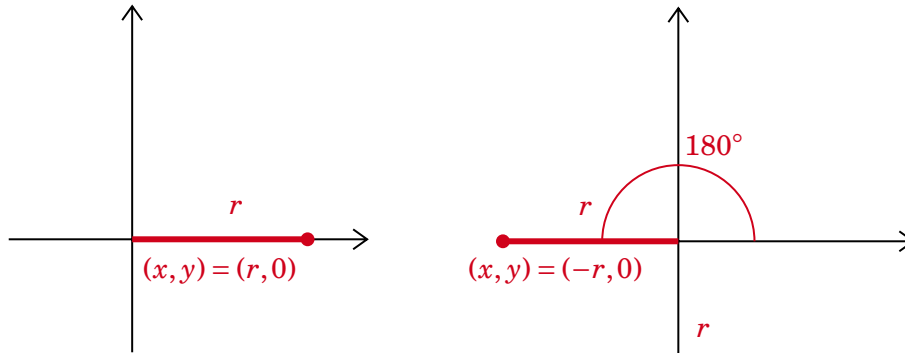


Nilai maksimumnya adalah  $\sin \theta = \sin 90^\circ = 1$  dan nilai minimumnya adalah  $\sin \theta = \sin 270^\circ = -1$ . Artinya, nilai fungsi sinus berada di antara -1 dan 1, atau secara matematis bisa kita katakan

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad (\text{E.1})$$

## E.II Kosinus

Mirip seperti sebelumnya, nilai maksimum dan nilai minimum  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  bergantung pada  $x$ . Nilai  $x$  maksimum ketika garis berarah mendatar di sumbu- $x$  positif dan sebaliknya pula untuk nilai minimumnya:



Nilai maksimumnya adalah  $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$  dan nilai minimumnya adalah  $\cos \theta = \cos 180^\circ = -1$ . Artinya, nilai fungsi sinus berada di antara -1 dan 1, atau secara matematis bisa kita katakan

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad (\text{E.2})$$

## F Fungsi Invers Trigonometri

Kita bisa menanyakan, “Berapa sinus dari sudut  $30^\circ$ ?” Jawabannya tentunya  $1/2$ . Akan tetapi, terkadang yang kita tanyakan adalah kebalikannya, “Sudut berapa derajat yang sinusnya  $1/2$ ?” Bentuk pertanyaan pertama secara matematis adalah  $\sin 30^\circ = \dots$ . Sedangkan pertanyaan kedua:  $\sin(\dots) = 1/2$ .

Fungsi yang memberikan jawaban untuk pertanyaan kedua disebut fungsi invers trigonometri. Jika pada fungsi trigonometri kita memberikan input berupa sudut dan mendapatkan output berupa bilangan, maka fungsi invers trigonometri sebaliknya. Invers dari keenam fungsi trigonometri secara berturut-turut adalah  $\arcsin \theta$ ,  $\arccos \theta$ ,  $\arctan \theta$ , dll, yang juga umum ditulis sebagai  $\sin^{-1} \theta$ ,  $\cos^{-1} \theta$ ,  $\tan^{-1} \theta$ , dll. Contoh penggunaan fungsi invers trigonometri adalah sebagai berikut:

$$\text{Jika } \sin 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right), \text{ maka } \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

$$\text{Jika } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ maka } \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\text{Jika } \tan 45^\circ = 1, \text{ maka } \arctan 1 = 45^\circ$$

Secara umum, jika  $y = \sin \theta$  maka  $\theta = \arcsin y = \sin^{-1} y$ . Ini berlaku untuk kelima fungsi trigonometri lainnya. Tentunya hal ini bisa menimbulkan pertanyaan. Misalnya perhatikan bahwa  $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \sin 390^\circ = \sin 510^\circ = \dots = \frac{1}{2}$ . Lalu, yang mana hasil dari  $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ ?  $30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$ , atau yang lain? Untuk mengatasi kasus ini, kita membatasi output untuk fungsi  $\arcsin \theta$  dan kelima fungsi invers lainnya:

- $-90^\circ \leq \arcsin \theta \leq 90^\circ$
- $0^\circ \leq \arccos \theta \leq 180^\circ$
- $-90^\circ < \arctan \theta < 90^\circ$
- $-90^\circ \leq \operatorname{arccsc} \theta < 0^\circ$  atau  $0^\circ < \operatorname{arccsc} \theta \leq 90^\circ$
- $0 \leq \operatorname{arcsec} \theta < 90^\circ$  atau  $90^\circ < \operatorname{arcsec} \theta \leq 180^\circ$
- $0 < \operatorname{arccot} \theta < 180^\circ$

Sayangnya kita tidak akan membahas ini terlalu dalam. Keenam batasan di atas tidak perlu matian dihapalkan juga—yang penting kita paham cara menggunakan fungsi invers trigonometri.

## G Satuan Radian

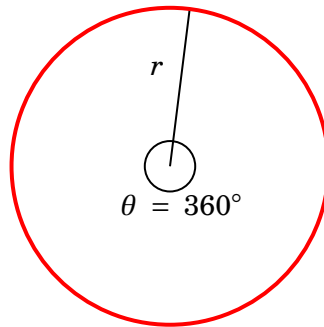
Semasa duduk di bangku SD dan mempelajari sudut untuk pertama kalinya, anak kecil mungkin pernah bertanya: “Mengapa satu putaran itu  $360^\circ$ , bukan  $100^\circ$  atau  $400^\circ$  saja?”

Jawabannya adalah “Satu putaran memang tidak harus  $360^\circ$ . Kalau umat manusia sepakat memutuskan bahwa satu putaran adalah  $100^\circ$  atau  $400^\circ$ , maka hal itu sah-sah saja.”<sup>x</sup>

Sebagai alternatif, para matematikawan menemukan satuan *radian*. 1 radian<sup>xi</sup> didefinisikan sebagai sudut pusat suatu lingkaran di mana panjang busur yang diapit sama dengan jari-jarinya, seperti pada gambar di sebelah kiri:



Secara umum, besar sudut ( $\theta$ ) dalam satuan radian sama dengan rasio antara panjang busur yang diapit ( $s$ ) dan jari-jari lingkaran ( $r$ ), yakni  $\theta = \frac{s}{r}$ , seperti pada ilustrasi di atas (kanan). Bagaimana kalau besar sudut pusatnya adalah satu putaran penuh, yakni  $360^\circ$ ?



Panjang busur yang diapit sama saja dengan keliling lingkaran, atau  $s = 2\pi r$ . Dengan demikian, besar sudut satu putaran penuh dalam satuan radian adalah

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{s}{r} \\ 360^\circ &= \frac{2\pi r}{r} \\ 360^\circ &= 2\pi\end{aligned}$$

Jadi,  $360^\circ = 2\pi$  radian. Ini bisa kita pakai untuk mencari nilai sudut-sudut lainnya:

<sup>x</sup>Nilai  $360^\circ$  sebagai sudut satu putaran penuh nampak tak berdasar. Ketentuan ini adalah warisan dari peradaban Babilonia Kuno yang menggunakan sistem bilangan seksagesimal (berbasis 60), berbeda dengan sistem bilangan desimal (berbasis 10) milik kita. Berdasarkan perhitungan astronomi, mereka menemukan bahwa matahari dan bintang-bintang kembali pada posisinya di langit tiap 360 hari (sebenarnya 365 hari, atau satu tahun), sehingga mereka memilih angka itu sebagai sudut satu putaran penuh.

<sup>xi</sup>1 radian bisa ditulis 1 rad atau 1 saja, tanpa ada simbol satuan.

$$180^\circ = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

$$90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$60^\circ = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

dan seterusnya.

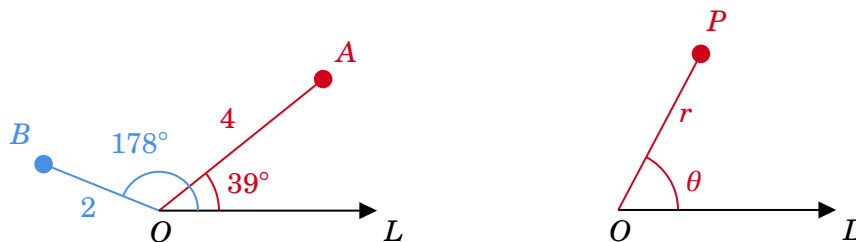
Satuan radian lebih disukai oleh para matematikawan karena lebih intuitif dan hemat tempat. Cukup masuk akal jika kita menghubungkan antara sudut pusat, jari-jari, dan busur yang diapit, ketimbang membagi satu putaran menjadi 360 bagian. Selain itu, lebih ringkas menuliskan  $100\pi$  ketimbang  $36000^\circ$ .

Akan tetapi, dalam kehidupan sehari-hari, satuan derajat lebih praktis. Kita tidak akan menggunakan busur yang menggunakan satuan radian, melainkan satuan derajat. Tidak ada salahnya untuk tetap menggunakan satuan derajat. Satuan radian umumnya lebih sering dipakai dalam kalkulus.

## H Sistem Koordinat Polar/Kutub

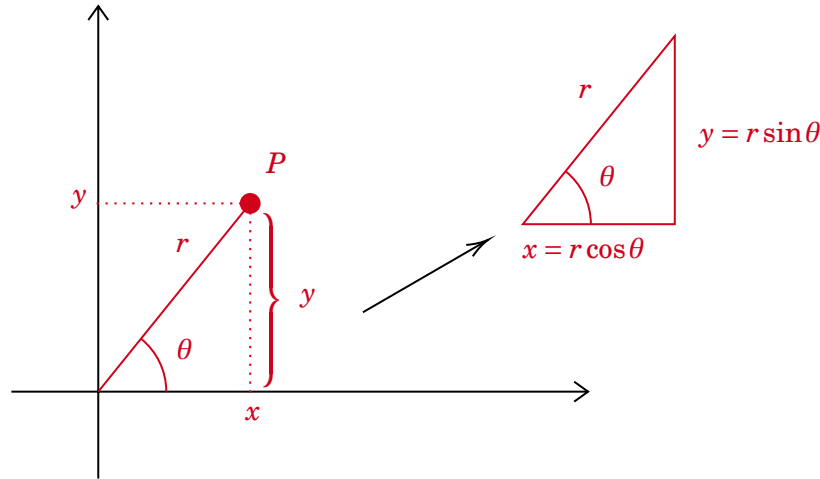
Hal paling mendasar dari suatu sistem koordinat adalah caranya dalam menentukan posisi suatu benda, sebuah titik misalnya. Pada sistem koordinat Kartesius, cara menentukan posisi suatu titik adalah dengan mengukur jarak titik dengan sumbu-y (absis) dan sumbu-x (ordinat), lalu menyatakannya dalam sebuah daftar terurut  $(\_, \_)$ . Misalkan jarak titik dengan sumbu-y dan sumbu-x secara berturut-turut  $x$  dan  $y$ , maka posisi titik tersebut, atau *koordinatnya*, adalah  $(x, y)$ .

Sistem koordinat polar adalah sistem koordinat di mana posisi tiap titik ditentukan berdasarkan jaraknya terhadap suatu titik acuan dan sudut yang dibentuk terhadap suatu arah acuan tertentu, seperti pada ilustrasi di bawah ini:



Titik  $O$  adalah kutub (*pole*), yakni titik acuan untuk menghitung jarak, sedangkan sinar garis  $L$  adalah sumbu kutub (*polar axis*), yakni sumbu acuan untuk menghitung sudut. Titik  $A$  berjarak 4 satuan dari titik  $O$  dan membentuk sudut  $39^\circ$  terhadap sumbu  $L$ , sedangkan titik  $B$  berjarak 2 satuan dan membentuk sudut  $178^\circ$ . Koordinat kedua titik ini bisa dinyatakan sebagai  $(4, 39^\circ)$  dan  $(2, 178^\circ)$ . Secara umum, jika suatu titik berjarak  $r$  dari kutub dan membentuk sudut  $\theta$  terhadap sumbu kutub, maka koordinatnya adalah  $(r, \theta)$ .

## H.I Mengkonversi Koordinat Polar ke Koordinat Kartesius dan Sebaliknya



Berdasarkan ilustrasi di atas, koordinat titik di atas pada sistem koordinat polar adalah  $(r, \theta)$ , sedangkan pada sistem koordinat Kartesius:  $(x, y)$ . Dengan menggunakan definisi sinus dan kosinus, kita bisa menyatakan  $x$  dan  $y$  dalam  $r$  dan  $\theta$ , yakni  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Sebaliknya, kita bisa menyatakan  $r$  dan  $\theta$  dalam  $x$  dan  $y$ . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} \\ &= r^2 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad \square \end{aligned}$$

Lalu, perhatikan juga bahwa  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  sehingga  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

## I Tabel Fungsi Trigonometri untuk Sinus, Kosinus, dan Tangen

Sebelum melihat tabel lengkapnya, kita akan mempelajari suatu trik untuk mengingat nilai fungsi-fungsi trigonometri. Pertama, buat tabel seperti ini:

Sudut	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
sin	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$-\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$-\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$-\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$-\frac{\sqrt{\quad}}{2}$
tan	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$-\sqrt{\quad}$	$-\sqrt{\quad}$	$-\sqrt{\quad}$	$-\sqrt{\quad}$

Untuk sinus dan kosinus, isilah dengan  $\frac{\sqrt{\quad}}{2}$ , sedangkan isilah tangen dengan  $\sqrt{\quad}$ . Berilah tanda minus pada kosinus dan tangen sudut-sudut tumpul. Selanjutnya,

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$
tan	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$	$-\sqrt{\frac{3}{1}}$	$-\sqrt{\frac{2}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{0}{4}}$

kita isi bagian-bagian yang tersisa. Silakan amati sendiri, Anda akan menyadari polanya. Kita bisa sederhanakan lagi hingga menjadi

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Kita lengkapi dengan sudut antara 180° sampai 360°:

Sudut	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

## J Daftar Pustaka

Gelfand, I.M. Saul, M. (2001). *Trigonometry*. Boston, NY: Birkhauser.

Miller, Kenneth S. Walsh, John B. (1962). *Elementary and Advanced Trigonometry*. New York, NY: Harper & Bros.

Nasoetion dkk. (1994). *Matematika 1: Untuk Sekolah Lanjutan Umum 1*. Jakarta: Balai Pustaka.

———. (1994). *Matematika 2: Untuk Sekolah Lanjutan Umum 2*. Jakarta: Balai Pustaka.



## K Lampiran

### Alfabet Yunani

$A\alpha$ Alpha	$B\beta$ Beta	$\Gamma\gamma$ Gamma	$\Delta\delta$ Delta	$E\epsilon$ Epsilon	$Z\zeta$ Zeta
$H\eta$ Eta	$\Theta\vartheta$ Theta	$I\iota$ Iota	$K\kappa$ Kappa	$\Lambda\lambda$ Lambda	$M\mu$ Mu
$N\nu$ Nu	$\Xi\xi$ Xi	$O\omicron$ Omikron	$\Pi\pi$ Pi	$\rho$ Rho	$\Sigma\sigma/\varsigma$ Sigma
$T\tau$ Tau	$\Upsilon\upsilon$ Upsilon	$\Phi\phi$ Phi	$X\chi$ Chi	$\Psi\psi$ Psi	$\Omega\omega$ Omega

### Identitas-identitas Pemfaktoran

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$