CBSE कक्षा 11 अर्थशास्त्र
पाठ - 7 सहसंबंध
पुनरावृत्ति नोट्स

स्मरणीय बिन्दु-

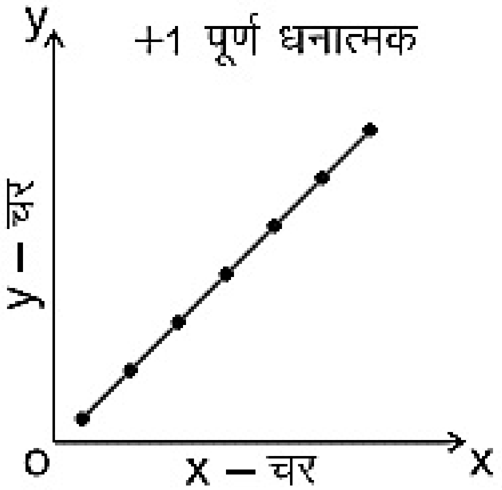
- सहसंबंध एक सांख्यिकीय उपकरण है जो दो चरो के मध्य संबंध का एक संख्यात्मक अध्ययन करता है। यह चरों के बीच संबंधों की गहनता एवं दिशा का अध्ययन एवं मापन करता है। यह प्रसरण का मापन तो करता है परन्तु कार्य-कारण संबंध का मापण नहीं करता है।
  1. **धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध :** जब दोनों चर मूल्यों में परिवर्तन एक ही दिशा मे हो तो उन्हें धनात्मक सहसंबंध कहते है जबकि परिवर्तन विपरीत दिशा में हो तो उन्हें ऋणात्मक सहसंबंध कहते हैं।
     जैसे तापमान का बढ़ना तथा A.C. की बिक्री में धनात्मक जबकि तापमान का बढ़ना तथा हीटर की बिक्री में ऋणात्मक सहसंबंध आदि।
  2. **रेखीय एवं अरेखीय सहसंबंध :** जब दोनो चर मूल्यों में परिवर्तन समान अनुपात से है तो रेखीय सहसंबंध कहेंगें जब परिवर्तन असमान अनुपात से हो तो अरेखीय सहसंबंध कहेगें।
  3. **सरव, आंशिक एंव बहुगणी सहसंबंध :** जब केवल दो चरों के बीच सहसंबंध का अध्ययन किया जाता है तो उसे सरण सहसंबंध कहते है। इसके एक चर आश्रित तथा दूसरा चर स्वतंत्र होता है।
     जब दो चर मूल्यों के बीच सहसंबंध का अध्ययन करते समय अन्य चर मूल्यों के प्रमाण को स्थिर मान लिया जाता है उसे आंशिक सहसंबंध कहते हैं।
     जब एक आश्रित चर मूल्य दो या दो से अधिक स्वंय चर मूल्यों के सम्मिलित प्रभाव का अध्ययन किया जाता है उसे बहुगुणी सहसंबंध कहते हैं।
     सहसंबंध का परिमाण

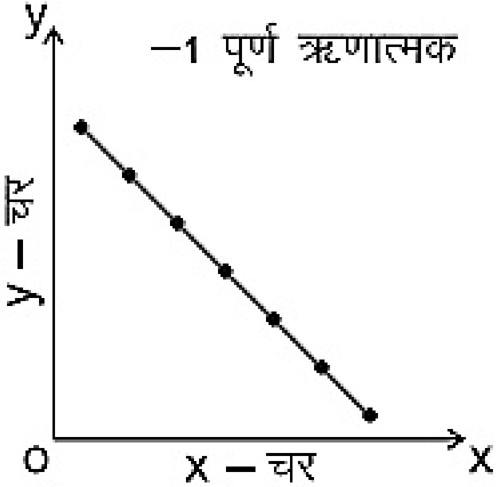
परिमाण	धनात्मक	ऋणात्मक
पूर्ण	+1	-1
उच्च	+0.75 से +1 के बीच	-0.75 से -1 के बीच
मध्यम	+0.25 से +1 के बीच	-0.25 से -1 के बीच
निम्न	0 से +0.25 के बीच	0 से -0.25 के बीच
शून्य (सहसंबंध की अनुपस्थिति)	0	0

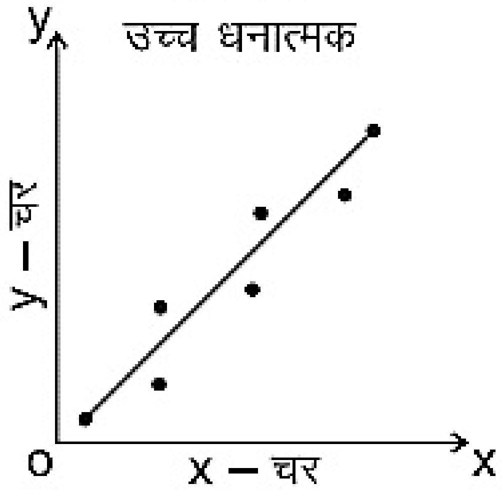
- **सहसंबंध को मापने की विधियाँ**
  इसकी निम्न विधियाँ है:-

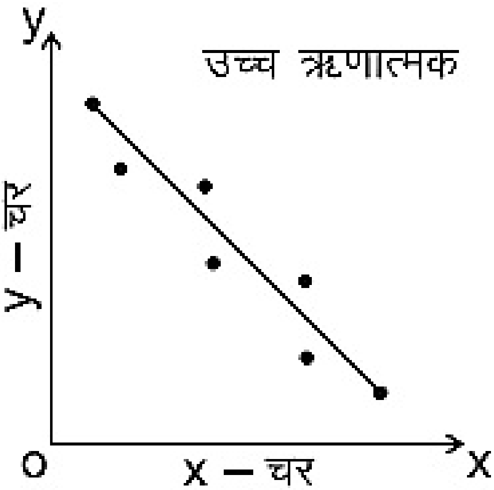
- **प्रकीर्ण आरेख विधि :**

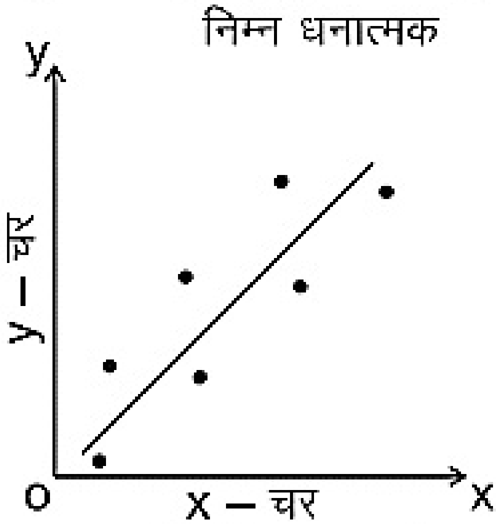
  यह एक रेखा चित्र विधि है। इसके द्वारा संहसंबंध के परिमाण को रेखा चित्र के द्वारा ज्ञात किया जाता है। दोनों चरों के मान को ग्राफ पेपर पर बिन्दु के रुप में आरेखित किया जाता है। आरेखित बिन्दुओं के इस गुच्छ को प्रकीर्ण आरेख कहा जाता है। यदि सभी बिन्दु एक रेखा पर होते है तो सहसंबंध पूर्ण माना जाता है। और यदि प्रकीर्ण बिन्दु रेखा से दूर होते जाते है तो संहसंबंध का परिमाण कम होता जाता है।

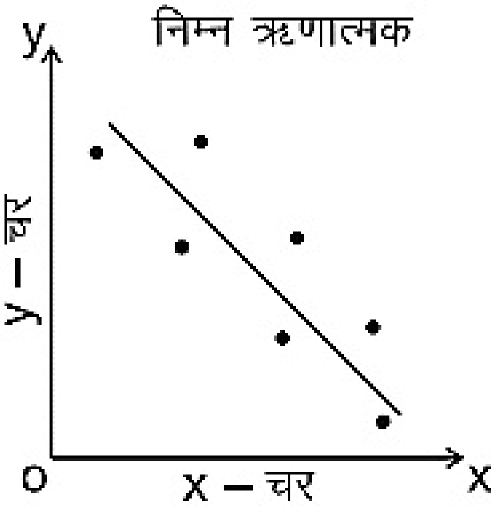


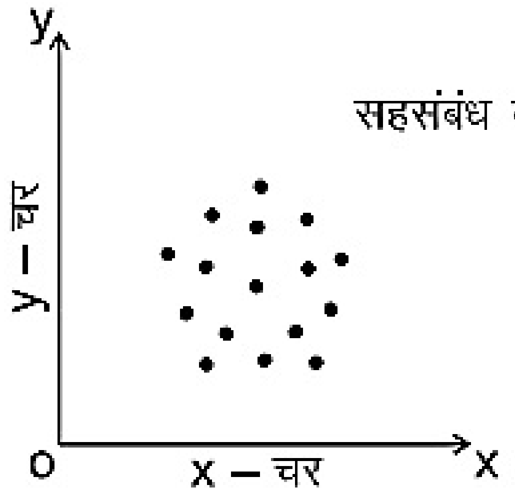





उच्च ऋणात्मक
y
y – चर
o
x – चर
x


निम्न धनात्मक
y
y – चर
o
x – चर
x


निम्न ऋणात्मक
y
y – चर
o
x – चर
x



- **कार्ल पियरसन का सहसंबंध गुणांक**

  इसे गणन आधूर्ण सहसंबंध भी कहा जाता है। इसे γ द्वारा व्यक्त करते है यह समांतर माध्य तथा मानक विचलन पर आधारित है।

  मान ले कि X तथा Y चर है। चर X की श्रेणी का माध्य $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$ तथा चर-y की श्रेणी का माध्य $\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$ है तथा उनके मानक विचलन $\sigma x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$ तथा $\sigma y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}}$ है जहाँ $x = x - \bar{x}$ तथा $y = y - \bar{y}$ चर X तथा Y के सहप्रसरण $Cov, (X,\ Y) = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N} = \frac{\Sigma xy}{N}$

  तो चर X तथा Y में कार्ल पियरसन सहसंबंध

  $r = \frac{Cov.(x,y)}{\sigma x.\ \sigma y}$ OR $r = \frac{\Sigma xy}{N.\sigma x\ .\ \sigma y}$ OR $r = \frac{\Sigma xy}{N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\ X\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}}}$ OR $r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \sqrt{\Sigma y^2}}}$

  $= \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma\left(X-\bar{X}\right)^2\sqrt{\Sigma\left(Y-\bar{Y}\right)^2}}}$

- **कार्ल पियरसन सहसंबंध की गणना के निम्नलिखित विधियाँ है-**

  1. **वास्तविक माध्य विधि**

     $r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2} \times \sqrt{\Sigma y^2}}$

     जहाँ $x = X - \bar{X};\ y = Y - \bar{Y}$

     $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N};\ \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$

  2. **कल्पित माध्य विधि**

     r = $\frac{N\,\Sigma dxdy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N.\ \Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}\sqrt{N.\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}}$

     जहाँ dx = x - A

     dy = y - A

     A = कल्पित माध्य

$$r = r = \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\sqrt{\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}\sqrt{\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}}$$

3. **पद विचलन विधि**

$$r = \frac{N.\Sigma dx'dy' - (\Sigma dx')(\Sigma dy')}{\sqrt{N.\Sigma dx'^2 - (\Sigma dx')^2}\sqrt{N.\Sigma dy'^2 - (\Sigma dy')^2}}$$

अथवा

$$r = \frac{\Sigma dx'dy' - \frac{(\Sigma dx')(\Sigma dy')}{N}}{\sqrt{\Sigma dx'^2 - \frac{(\Sigma dx')^2}{N}}\sqrt{\Sigma dy'^2 - \frac{(\Sigma dy')^2}{N}}}$$

$$dx' = \frac{X-A}{l};\ dy' \frac{Y-A}{l}$$

यदि यह मान ले कि

$d = dx' = U = \frac{X-A}{i}$ तथा $dy' = V = \frac{Y-A}{i}$

तो उपरोक्त सूत्र निम्न प्रकार हो सकता है सकता है

$$r = \frac{\Sigma UV - \frac{(\Sigma U)(\Sigma V)}{N}}{\sqrt{\Sigma U^2 - \frac{(\Sigma U)^2}{N}}\sqrt{\Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{N}}}$$

जहाँ X तथा Y में सहसंबंध $\gamma_{xy} = \gamma_{uv}$

4. **प्रत्यक्ष विधि**

$$r = \frac{N.\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N.\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N.\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

अथवा

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}}$$

- **सहसंबंध गुणांक के विशेषताएँ**
  1. सहसंबंध गुणांक (γ) की कोई इकाई नहीं होती है।
  2. γ का ऋणात्मक मान ऋणात्मक सहसंबंध को व्यक्त करता है जबकि धनात्मक मान धनात्मक सहसंबंध को।
  3. γ का अधिकतम मान +1 तथा न्यूनतम मान -1 होता है अथवा $-1 \leqslant \gamma \leqslant +1$
  4. γ= 0 हो तो इसका अर्थ है दोनो चरो में सहसंबंध नहीं है।
  5. γ का उच्चमान सुदृढ़ रेखीय संबंध को तथा निम्न मान दुर्बल रेखीय संबंध को प्रदर्शित करता है।
  6. यदि γ = +1 हो तो दानों चरो में पूर्ण धनात्मक सहसंबंध तथा यदि γ = -1 हो तो दोनों चरों में पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध होता है।
  7. γ का मान उद्गम परिवर्तन या पैमाने के परिवर्तन से प्रभावित नहीं होता है इसका प्रमाण पद विचलन विधि द्वारा सहसंबंध ज्ञात करके देखा जा सकता है।

- **स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध**

  इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है जब चरो मूल्यों का संख्यात्मक माप नहीं किया जाता है। जैसे- ईमानदारी, चरित्र, सुंदरता, मौलिकता, नेतृत्व, बुद्धिमता, साक्षरता आदि। इन गुणात्मक सूचनाओं का परिमाणीकरण के बजाय कोटि निर्धारित करना अधिक अच्छा विकल्प है, इसलिए स्पीयरमैन द्वारा प्रतिपादित विधि को कोटि अंतर या कोटि गुणन आधूर्ण सहसंबंध भी कहते है। इसे γ_{κ} से कोटि सहसंबंध की गणना में तीन प्रकार की स्थितियाँ –

  - **जब कोटियाँ दी गई है**

    $\gamma_{\kappa} = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N^3 - N}$

    जहाँ N = प्रेक्षणों की संख्या

    D= दोनों चरो की कोटियों के बीच विचलन
  - **जब कोटियाँ नहीं दी गई हो-**
    - इसमे सर्वप्रथम दिए गए आँकड़ों को कोटि में दर्शायें। सबसे बड़े मद को प्रथम कोटि, उससे छोटे सबसे बड़े मद को द्वितीय कोटि आदि।
    - दोनो कोटियों का अंतर R (D) ज्ञात करें

      $\gamma_{\kappa} = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N^3 - N}$
  - **जब कोटियों की पुनरावृति की गई हो-**
    - जब दो या दो से अधिक मद समान मूल्य के होते है तो उनके औसत कोटि दिए जाते है।
    - अगले मद के लिए अलग से कोटि दी जायेगी जो पहले दी गई कोटि के बाद होगी
    - स्पीयरमैन कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे

      $r_R = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right)\frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right) + \ldots\right]}{N^3 - N}$

      जहाँ m_1, m_2, ... कोटियों की पुनरावृत संख्याएँ हैं तथा

      $\frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right)$, $\frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right)$.......... उनके संगत संशोधन गुणांक है।
- **कार्ल पियरसन के सहसंबंध गुणांक और कोटि सहसंबंध गुणांक में समानता**
  - दोनों का मान -1 तथा +1 के बीच होता है।
  - जब $\gamma_r = -1$ हो तो इसका अर्थ है कि पूर्ण असहमति अर्थात कोटि को क्रम विपरीत दिशा में है।
  - जब $\gamma_r = +1$ हो तो इसका अर्थ है कि पूर्ण सहमति अर्थात कोटि के क्रम एक समान दिशा में है।

असमानताए

1. कोटि सहसंबंध गुणांक में सभी सूचनाओं के अंकों का प्रयोग नहीं होता है इसलिए इस विधि से प्राप्त सहसंबंध कार्ल पियरसन विधि की तुलना में परिशुद्ध नहीं होता है।
2. जब चरों को परिशुद्ध रुप से मापना संभव न हो, तो वहाँ कोटि सहसंबंध का प्रयोग कार्ल पियरसन सहसंबंध की तुलना में अधिक सार्थक हो सकता है।