



E 17.8 Seja G um grafo cúbico dotado de um circuito hamiltoniano. Mostre que $\chi_0(G) = 3$.

Um grafo $G = (V, A)$ consiste em um conjunto de vértices V conectados por um conjunto de arestas A . Um grafo é dito cúbico se todos os vértices possuem três arestas incidentes. Um ciclo em um grafo é um caminho de vértices conectados por arestas que começa e termina no mesmo vértice e este é dito hamiltoniano se contém todos os vértices do grafo. Grafos hamiltonianos são aqueles que possuem ciclos hamiltonianos. O problema do ciclo hamiltoniano consiste em determinar se um grafo G é ou não hamiltoniano. Em 1884, Peter G. Tait propôs a seguinte conjectura: Todo grafo 3-conexo planar cúbico possui um ciclo hamiltoniano.

É sempre possível 3-colorir as arestas de um grafo cúbico hamiltoniano por isso $\chi_0(G) = 3$, porque todo grafo cúbico possui um número par de vértices pois o grau de todo vértice é ímpar e todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar. Então o ciclo hamiltoniano é um ciclo par e suas arestas podem ser coloridas com duas cores. As arestas ainda não coloridas formam um emparelhamento perfeito, pois existe exatamente uma incidente a cada vértice; portanto, estas podem ser coloridas com a terceira cor de e o resultado é uma 3-coloração própria das arestas do grafo.