TAREFA 9 – TEORIA DOS GRAFOS - NAYARA TEREZINHA NUNES

9.37) Como foi provado em 9.5, um grafo G possui emparelhamento perfeito apenas se possuir sendo par. Se retirarmos um vértice de G, G permanece conexo e então (G) n temos que a única componente conexa vai possuir um número ímpar de vértices

12.8) Um grafo cúbico é um grafo regular no qual todos os vértices tem grau três. Em outras palavras um grafo cúbico é um grafo 3-regular. Grafos cúbicos são também chamados grafos trivalentes. O grafo 3-regular (cúbico) Nunca terá aresta de corte pois esta representaria um laço no grafo original, que é simples. É sempre possível 3-colorir as arestas de um grafo cúbico hamiltoniano , pois todo grafo cúbico possui um número par de vértices pois o grau de todo vértice é ímpar e todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar. Então o ciclo hamiltoniano é um ciclo par e suas arestas podem ser coloridas com duas cores. As arestas ainda não coloridas formam um emparelhamento perfeito, pois existe exatamente uma incidente a cada vértice; portanto, estas podem ser coloridas com a terceira cor de e o resultado é uma 3-coloração própria das arestas do grafo. Assim o número cromático de G um grafo cúbico dotado de circuito hamiltoniano é $\chi'(G) = 3$. Lema: Seja G um snark. Então $\chi(G) = 3$. Pelo Teorema 1 seja G um grafo simples e conexo que não é um grafo completo nem é um ciclo ímpar. Então, $\chi(G) \leq \Delta(G)$. No caso $\chi(G) \leq 3$. Por outro lado, pelo Teorema 3: Teorema 3. (König, 1916) Se G é grafo simples e bipartido, então χ 0 $(G) = \Delta$. G não é grafo bipartido, pois seria classe 1. Portanto, G possui ciclo ímpar, que necessita de no mínimo 3 cores para colorir os vértices. Assim, $\chi(G) \geq 3$. Logo, $\chi(G) = 3$

14.5)

```
Entrada: G(V,A), vértice inicial v
Crie fila vazia F
marque v como visitado
coloque v no final de F
enquanto F != {} faça
        u← remove primeiro elemento de F
        para cada vértice w adjacente a u faça
                se w não foi visitado então
                        marque w como visitado e guarde a distância w→dist == v→dist +1
                        coloque w no fim de F
                fim
        fim
fim
```

O caminho mínimo entre dois vértices pode ser dado pelo algoritmo de Dijkstra.

15.4) Teoreoma de (ford e Fulkerson, 1995). O valor de qualquer fluco máxio em uma rede é igual a capacidade de qualquer corte mínimo. Sejam G(V, A) um grafo conexo e a,b $\in$ V vértices distintos. O número máximo de caminhos aresta-disjuntos de a a b é igual ao número mínimo de arestas em um conjunto ab-desconectador em G. Pelo lema, é suficiente mostrar que o número máximo de caminhos aresta-disjuntos de a a b é igual a $|E|$, onde E é um conjunto ab-desconectador mínimo. Vamos proceder por indução no número de arestas. Suponha que o resultado vale para grafos conexos com menos do que m arestas, onde $m = |A|$. Há dois casos a considerar. (i) Suponha que exista um conjunto ab-desconectador mínimo em que nem todas as suas arestas são incidentes em a e nem todas são incidentes em b. (Por exemplo, o conjunto E1 no exemplo anterior é um conjunto deste tipo). A remoção das arestas de E desconecta o grafo em dois subgrafos, digamos, A e B contendo a e b, respectivamente. Defina dois grafos, G1 e G2, da seguinte forma: G1 é obtido contraindo-se todas as arestas de A em a e G2 é obtido contraindo-se as arestas de B em b. É claro que E é um conjunto ab-desconectador mínimo em G1 e em G2. Além disso, G1 e G2 possuem menos do que m arestas. Segue da hipótese de indução que há |E| caminhos aresta-disjuntos de a a b em ambos G1 e G2. Combinando estes caminhos, obtemos |E| caminhos aresta-disjuntos de a a b em G. (ii) Agora suponha que cada conjunto ab-desconectador mínimo em G possui todas as suas arestas incidentes em a ou em b. Suponha ainda que tais conjuntos tem cardinalidade k. Podemos supor, sem perda de generalidade, que toda aresta de G está contida em algum conjunto ab-desconectador mínimo. De fato, se existe alguma aresta que não possui tal propriedade, sua remoção não alteraria o valor de k. Aplicando-se a hipótese de indução, obteríamos k caminhos aresta-disjuntos. Deste modo, toda aresta de G é incidente em a e/ou em b. Assim, todo caminho de a a b possui uma ou duas arestas. Consequentemente, possui no máximo uma aresta de um conjunto ab-desconectador de cardinalidade k. Seja P um tal caminho. Considere o grafo H obtido de G após a remoção das arestas em P. Segue da hipótese de indução que H possui ao menos k − 1 caminhos aresta-disjuntos. Estes caminhos, juntamente com P, somam os k caminhos aresta-disjuntos em G.

16.13) Foi convencionado que para todo n≥2 e para G completo. K(n)k=n−1(K1)k=1 Agora se tirarmos uma aresta de G, temos, e portanto ficamos com uma aresta a G−e menos e assim, para todo n ≥ 3 e para n = 2 será (G)k−e=n−2(G). k−e=0

18.21) Sim, é verdade.