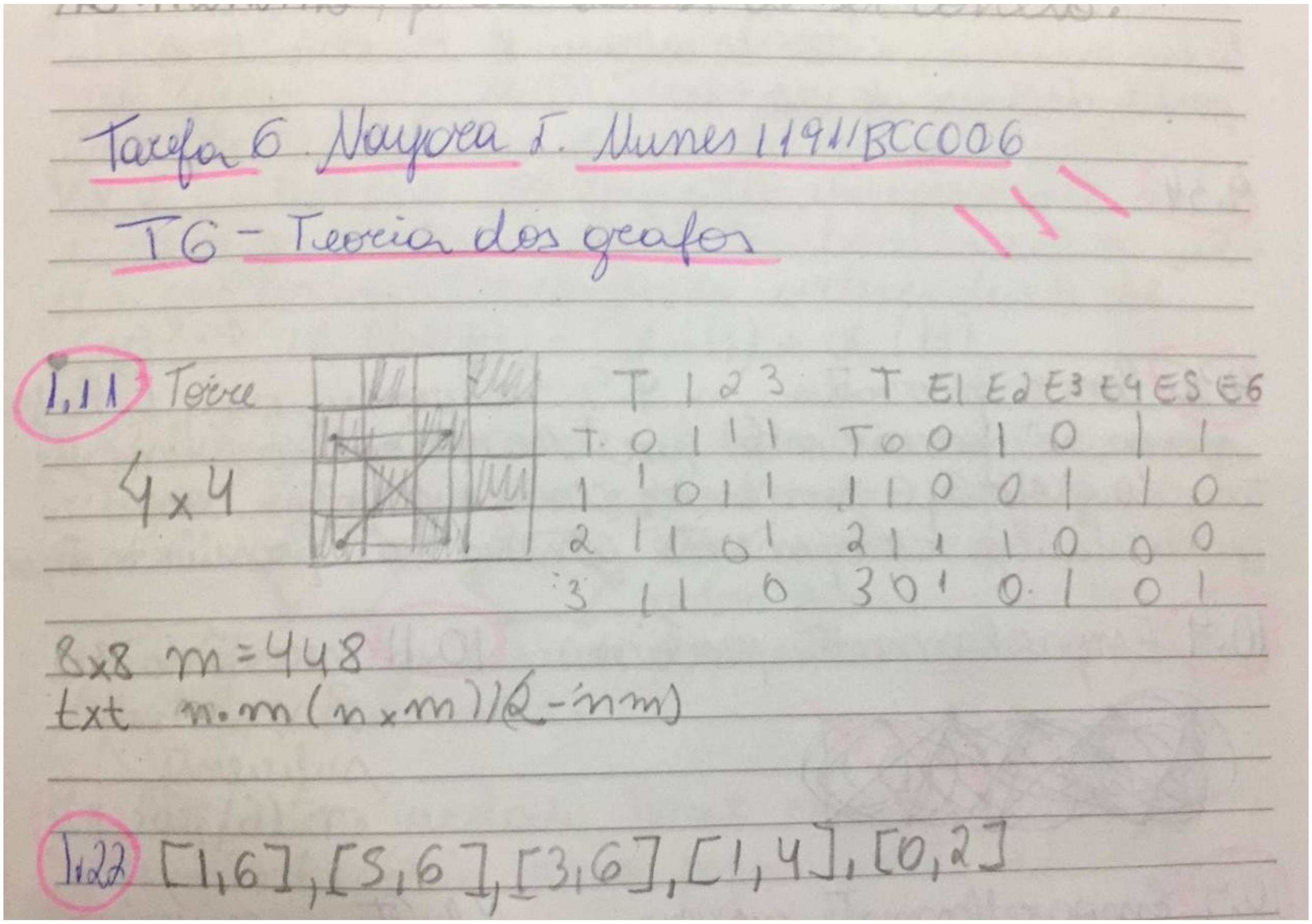
Tarefa 6 Nayara I. Nunes 11911BCC006

T6 - Teoria dos grafos

1.11 Torre 4x4

8x8 m=448

1.22 [1,6], [5,6], [3,6], [1,4], [0,2]

E 8.4 Encontre uma coloração mínima dos vértices de um caminho. Repita com um circuito no lugar do caminho. Repita com uma grade no lugar do caminho.

Seja P um caminho e sejam e1 e e2 dois elementos distintos de P, adjacentes ou incidentes, coloridos com duas cores distintas. Então, existe uma única 3-coloração total que preserva as cores de e1 e e2.

Demonstração:

A demonstração é por indução no tamanho de P, medido pelo seu número de arestas. Se |P| = 1, então P é isomorfo ao K2 e basta associar ao (único) elemento que ainda não foi colorido a (única) cor que não foi utilizada.

Suponha agora que |P| > 1.

Considere dois casos: quando e1, e2 são arestas; e quando pelo menos um de e1, e2 é um vértice. Seja P := v0, v0v1,...,vn−2vn−1, vn−1.

Se e1 e e2 são arestas, existe um vértice vi ∈ V (P) tal que e1 e e2 incidem em vi. Então, como e1 e e2 estão coloridas, a cor de vi tem que ser aquela (única) que ainda não foi utilizada. Ajuste a notação para que e1 = vi−1vi. Sejam P1 := v0,...,vi e P2 := vi,...,vn−1. Em cada P_j , $j = 1, 2$, os elementos e_j e v_i estão coloridos. Por hipótese de indução, existe uma única 3-coloração total π_j de P_j , $j = 1, 2$ que preserva as cores de e_j e v_i. Como a cor de v_i bem como as colorações π_1 e π_2 são unicamente determinadas e, além disso, e_1 e e_2 tem cores fixas, concluímos que a coloração $\pi := \pi_1 \cup \pi_2$ é uma 3-coloração total de P, unicamente determinada e com as propriedades requeridas.

Considere agora o caso em que pelo menos um de e_1, e_2 é um vértice. Ajuste a notação para que $e_1 \in \{v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}\}$ e $e_2 \in \{v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}\}$. Seja P o subgrafo de P obtido pela remoção de $v_{n-2}v_{n-1}$ e v_{n-1}. Pela hipótese de indução, existe uma única 3-coloração total π de P que preserva as cores de e_1 e e_2.

Vamos agora mostrar que a expansão de π para P é única e preserva as propriedades requeridas. A aresta $v_{n-2}v_{n-1}$ incide em v_{n-2} e é adjacente a $v_{n-3}v_{n-2}$, ambos coloridos com cores distintas. Portanto, existe apenas uma cor disponível para atribuir a $v_{n-2}v_{n-1}$ que é $\pi(v_{n-3})$. O vértice v_{n-1} é adjacente ao vértice v_{n-2} e possui como aresta incidente a aresta $v_{n-2}v_{n-1}$. Portanto, a única cor disponível para atribuir a este vértice é a cor $\pi(v_{n-3}v_{n-2})$. Assim, a coloração π foi expandida para uma 3-coloração total de P de forma única preservando as cores de e_1 e e_2.

E 12.9 Seja G um grafo cúbico dotado de circuito hamiltoniano. (Um circuito C em G é hamiltoniano se VC = VG. Veja o capítulo 17.) Prove que $\chi'(G) = 3$.

Um grafo cúbico é um grafo regular no qual todos os vértices tem grau três. Em outras palavras um grafo cúbico é um grafo 3-regular. Grafos cúbicos são também chamados grafos trivalentes.
O grafo 3-regular (cúbico) Nunca terá aresta de corte pois esta representaria um laço no grafo original, que é simples. É sempre possível 3-colorir as arestas de um grafo cúbico hamiltoniano , pois todo grafo cúbico possui um número par de vértices pois o grau de todo vértice é ímpar e todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar. Então o ciclo hamiltoniano é um ciclo par e suas arestas podem ser coloridas com duas cores. As arestas ainda não coloridas formam um emparelhamento perfeito, pois existe exatamente uma incidente a cada vértice; portanto, estas podem ser coloridas com a terceira cor de e o resultado é uma 3-coloração própria das arestas do grafo. Assim o número cromático de G um grafo cúbico dotado de circuito hamiltoniano é $\chi'(G) = 3$.

os snarks são grafos cúbicos, sem ponte e classe 2, para snarks que são grafos simples. O grafo de Petersen é o menor snark, porque possui 10 vértices e foi o primeiro e ser descoberto por J. Petersen.
Lema: Seja G um snark. Então $\chi(G) = 3$.
Pelo Teorema 1
Seja G um grafo simples e conexo que não é um grafo completo nem é um ciclo ímpar. Então, $\chi(G) \leq \Delta(G)$. No caso $\chi(G) \leq 3$.
Por outro lado, pelo Teorema 3:
Teorema 3. (König, 1916) Se G é grafo simples e bipartido, então χ 0 (G) = Δ.
G não é grafo bipartido, pois seria classe 1.
Portanto, G possui ciclo ímpar, que necessita de no mínimo 3 cores para colorir os vértices.

Assim, $\chi(G) \geq 3$. Logo, $\chi(G) = 3$