



UNIVERSIDAD  
DEL CAUCA

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**

**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**

# **TRANSFORMADA DE LA PLACE**

**AUTOR: NAYIBE ALEJANDRA RUIZ COLLAZOS**

**PRESENTADO A: JHONATAN COLLAZOS RAMIREZ**

**POPAYAN CAUCA**

**29 DE AGOSTO DE 2022**

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Transformada de Laplace</b>	<b>3</b>
2.1. Ejemplo: . . . . .	3
2.2. Teorema 31. Linealidad de la transformada de Laplace. . . . .	4
<b>3. Teorema 39. Transformada de Laplace de la derivada.</b>	<b>4</b>
3.1. Ejemplo: . . . . .	4
<b>4. Teorema 42. Transformada de Laplace de la integral de una función.</b>	<b>5</b>
4.1. Demostración: . . . . .	5
<b>5. Fracciones parciales.</b>	<b>6</b>
5.1. a) Factores lineales distintos . . . . .	6
5.2. b) Factores lineales repetidos . . . . .	6
5.3. c) Factores cuadráticos distintos . . . . .	6
5.4. d) Factores cuadráticos repetidos . . . . .	6
5.5. Ejemplo primer caso . . . . .	6
<b>6. Solución de problemas con condiciones iniciales utilizando la transformada de Laplace.</b>	<b>8</b>
6.1. Ejemplo: . . . . .	8
<b>7. Ejercicios propuestos en Matlab</b>	<b>10</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>12</b>
<b>9. Bibliografía</b>	<b>12</b>

## 1. Introducción

Se abordaran las definiciones de transformada de la place de una función, transformada de la place de derivadas e integrales, fracciones parciales.

Tambien se muestra la solución de un problema con valor inicial aplicando transformada de Laplace.

## 2. Transformada de Laplace

Definición 32.

sea  $f$  definida  $\forall t \geq 0$ . La transformada de Laplace de  $f$  se define como:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} f(t) dt \dots (1)$$

Siempre que la integral sea convergente.

**Nota:**

Los valores de  $P$  para los cuales la integral impropia en (1) sea convergente, determinan el dominio de la transformada de Laplace.

### 2.1. Ejemplo:

Encontremos la transformada de Laplace de la función  $f(t)=t$

Solución:

$f(t)=t$  está definida  $\forall t \geq 0$ , entonces de la definición 32, tenemos que:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt$$

$$\text{Si } p \neq 0, \text{ entonces } \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{te^{-pt}}{p} \Big|_0^b + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-pt} \left( \frac{t}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-pb} \left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2} \right]$$

Analicemos el limite obtenido.

$$p < 0 \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-pb} \left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2} \right] = \infty + \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt \text{ es divergente}$$

$$\dots \dots \dots \infty (-\infty)$$

$$p > 0 \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-pb} \left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{e^{pb}} \left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2} \right]$$

$$\dots \dots \dots 0 (+\infty)$$

$$*\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$*\lim_{b \rightarrow \infty} -\left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) / e^{pb} = \lim_{b \rightarrow \infty} -\left( \frac{1}{p} \right) / p^{eb} = 0$$

$$* \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{e^{pb}} \left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \right] + 1/p^2 \text{ existe}$$

$$\dots\dots\dots 0 \text{ } (+\infty)$$

Por lo tanto  $\int_0^\infty e^{-pt} dt$  es convergente.

Luego, por la definición 32:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-pt} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-pb} \left( \frac{b}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + 1/p^2 \right] = 1/p^2, p > 0$$

$$\mathbf{L}\{\mathbf{t}\} = \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \frac{1}{p^2}, p > 0$$

## 2.2. Teorema 31. Linealidad de la transformada de Laplace.

si  $f$  y  $g$  son funciones cuyas

transformadas de Laplace existen y sea  $K$  un número real cualquiera, entonces:

$$a) \mathcal{L}\{kf(t)\} = k\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$b) \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

## 3. Teorema 39. Transformada de Laplace de la derivada.

Si  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ , son continuas  $\forall t \geq 0$  y orden exponencial y si  $f^{(n)}(t)$  es continua a tramos para  $t \geq 0$ , entonces :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \mathcal{L}\{f(t)\} - p^{(n-1)} f(0) - p^{(n-2)} f'(0) \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

**Nota:**

Del teorema 39:

$$*\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

$$*\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$*\mathcal{L}\{f'''(t)\} = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

### 3.1. Ejemplo:

Dada  $f(t) = \sin 2t$ , utilizar el teorema 39 para obtener  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ .

**Solución:**

\* $f(t)$ ,  $f'(t)$  y  $f''(t)$ , son continuas  $\forall t \geq 0$

\*  $f(t)$  y  $f'(t)$  son de orden exponencial  $\forall t \geq 0$

$$* f(t) = \sin 2t \implies f(0) = 0$$

$$* f'(t) = 2\cos 2t \implies f'(0) = 2$$

De lo anterior aplicando el T.39

$$\implies \mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf'(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2 \mathcal{L}\{\sin 2t(t)\} - p(0) - 2 = \left(\frac{2p^2}{p^2+4} - 2\right)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -\frac{8}{p^2+4}$$

#### 4. Teorema 42. Transformada de Laplace de la integral de una función.

si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ , entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{p} f(p)$$

##### 4.1. Demostración:

Aplicando la definición de transformada de Laplace tenemos que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(t)dt\right) dt \quad (1)$$

$$u = \int_0^t f(t) dt \implies du = f(t) dt$$

$$dv = e^{-pt} dt \implies v = -\frac{e^{-pt}}{p}$$

$$(1) \implies \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \int_0^t f(t)dt \Big|_0^b\right] + \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{p} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{pe^{-pb}} \int_0^b f(t)dt\right]}_{0, \dots, \text{existe}, \dots, 0} + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-p(0)}}{p} \int_0^0 f(t)dt + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t))$$

## 5. Fracciones parciales.

Una función racional  $\frac{Px}{Qx}$  puede ser llevada a otra equivalente dependiendo del divisor  $Q(x) \neq 0$  de la misma, de tal modo que el divisor puede presentar terminos que permitan factorizarlo.

Cada caso de los indicados permite formar una fracción racional equivalente al grado del modo siguiente :

### 5.1. a) Factores lineales distintos

$$\frac{Px}{Qx} = \frac{Px}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\dots(a_nx+b_n)}$$

O sea que:  $Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)\dots(a_nx + b_n)$

### 5.2. b) Factores lineales repetidos

$$\frac{Px}{Qx} = \frac{Px}{(a_x+b)(a_x+b)(a_x+b)\dots(a_x+b)}$$

Es decir que:  $Q(x) = (a_x + b)(a_x + b)(a_x + b)\dots(a_x + b) = (a_x + b)^n$

### 5.3. c) Factores cuadráticos distintos

$$\frac{Px}{Qx} = \frac{Px}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)(a_3x^2+b_3x+c_3)\dots(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Ahora  $Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)(a_3x^2 + b_3x + c_3)\dots(a_nx^2 + b_nx + c_n)$

### 5.4. d) Factores cuadráticos repetidos

$$\frac{Px}{Qx} = \frac{Px}{(a_x^2+b_x+c)(a_x^2+b_x+c)(a_x^2+b_x+c)\dots(a_x^2+b_x+c)}$$

Siendo  $Q(x) = (a_x^2 + b_x + c)(a_x^2 + b_x + c)(a_x^2 + b_x + c)\dots(a_x^2 + b_x + c)$

### 5.5. Ejemplo primer caso

a) Factores de primer grado distintos.

Sea la función racional  $\frac{Px}{Qx} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$

Esta función racional puede ser llevada a otra equivalente, dependiendo del divisor  $Qx \neq 0$

de la misma, de tal modo que el divisor presenta dos factores lineales distintos  $(x+1)$  y  $(x+3)$ .

A partir de la fracción dada  $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$  podemos construir dos fracciones cuya suma sea equivalente a la fracción conocida:  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

Es decir:  $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1}$  Multiplicando ésta ecuación por el mínimo común múltiplo  $(x+1)$  y  $(x+3)$ , tenemos  $5x-3 = A(x-3) + B(x+1)$

Multiplicando a la derecha de la igualdad nos queda  $5x-3 = Ax-3A + Bx + B$

Asociando en la derecha los términos semejantes:  $5x-3 = (A+B)x + (-3A + B)$

Igualando los términos semejantes:

En  $x$ :  $\dots\dots\dots 5x = (A+B)x$  (I)

Términos independientes:  $\dots\dots\dots -3 = -3A + B$  (II)

De I dividiendo entre  $x$  la expresión:  $5 = A + B$  (I)

$\dots\dots\dots -3 = -3A + B$  (II)

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones I y II mediante reducción:

Multiplicando la ecuación I por 3:  $\dots\dots 15 = 3A + 3B$

$\dots\dots\dots -3 = -3A + B$

Sumando las dos ecuaciones anteriores  $12 = 4B \rightarrow B = 12/4 = 3 \rightarrow B = 3$

Sustituyendo B en la ecuación I:  $\dots\dots 5 = A + 3 \rightarrow A = 5 - 3 = 2 \rightarrow A = 2$

Con los valores de A, B encontrados tenemos:

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

La suma de las dos fracciones de la derecha son equivalentes a la fracción inicial conocida.

## 6. Solución de problemas con condiciones iniciales utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}
 & * a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t) \\
 & * y(0) = y_1 \\
 & * y'(0) = y_2 \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & * y^{(n-2)}(0) = y_{n-1} \\
 & * y^{(n-1)}(0) = y_n \\
 & \implies * (1)
 \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, problemas con condición inicial de la forma (1), pueden resolverse haciendo uso de las propiedades de la Transformada de Laplace. Estas condiciones son , por ejemplo:

- Existencia de la Transformada de Laplace de  $g(t)$  (función de entrada).
- Los coeficientes de la variable dependiente y de sus derivadas sean funciones polinomiales.
- Existencia de la Transformada de Laplace inversa.

En tal caso, el procedimiento para hallar la solución de (1), utilizando la Transformada de Laplace, sigue los siguientes pasos:

Paso1: Aplicar la Transformada de Laplace y propiedades de la Transformada de Laplace que den a lugar en la ecuación diferencial que describe (1), lo cual implicara de manera inmediata el aplicar las condiciones iniciales del problema, dado que se debe utilizar el teorema 39 (T.L. de la derivada). En este paso, resulta o una ecuación en la variable  $F(p)$  o una ecuación diferencial.

Paso 2: Despejar  $F(p)$  y verificar que  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$

Paso 3: Aplicar la transformada inversa y las propiedades de la transformada inversa para obtener  $f(t)$ .

### 6.1. Ejemplo:

Obtengamos la solución del problema con condición inicial:



$$ty'' - y' = t^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

**Solución:**

Paso 1: Apliquemos la transformada de Laplace en (1).

$$\mathcal{L}\{ty'' - y'\} = \mathcal{L}\{t^2\} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{ty''\} - \mathcal{L}\{y'\} = \frac{2}{p^3} \quad (3)$$

Aplicando derivada de la transformada y transformada de la derivada y la condición (2) del problema

se tiene que:

$$\begin{aligned} * \mathcal{L}\{ty''\} &= -\frac{d}{dp} [\mathcal{L}\{y''\}] = -\frac{d}{dp} [p^2 F(p) - f'(0)] \\ * \mathcal{L}\{y'\} &= p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \\ * \mathcal{L}\{y\} &= pF(p) - f(0) \\ * &\Rightarrow (4) \end{aligned}$$

Dado que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 0$  es una constante, entonces  $\frac{d}{dp} [f'(0)] = 0$ . Entonces en (4):

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{L}\{ty''\} &= -\frac{d}{dp} [p^2 F(p)] = -[2p F(p) + p^2 f'(p)] \\ \bullet \mathcal{L}\{y'\} &= p^2 f(p) \\ \bullet \mathcal{L}\{y\} &= p f(p) \\ \bullet (3) &\Rightarrow -[2p F(p) + p^2 F'(p)] - pF(p) = \frac{2}{p^3} \end{aligned}$$

$$-[2p F(p) + p^2 F'(p)] - pF(p) = \frac{2}{p^3} \Leftrightarrow \underline{F'(p)} + \underline{3/p F(p)} = -\frac{2}{p^3} \dots \dots \dots (5)$$

.....Ecuación diferencial lineal

Paso 2: Obtengamos la solución de (5)

$$\begin{aligned} F(p) &= e^{-\int \frac{3}{p} dp} \left[ \int e^{\int \frac{3}{p} dp} \left( -\frac{2}{p^3} \right) dp + c \right] = e^{-3 \ln p} \left[ \int e^{3 \ln p} \left( -\frac{2}{p^3} \right) dp + c \right] \\ F(p) &= p^{-3} \left[ \int \frac{2}{p^3} dp + c \right] = p^{-3} \left( -2 \int p^{-2} dp + c \right) \\ F(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = p^{-3} (2p^{-1} + c) = \frac{2}{p^4} + c \frac{1}{p^3} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty}$$

Para cada  $C \in \mathbb{R}$  en (9) se obtiene una función que es solución del problema. es decir, el problema tiene infinitas soluciones.

## TRANSFORMADA DE LA PLACE

## 7. Ejercicios propuestos en Matlab

$$\mathcal{L}\{s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \dots f(t)=t$$

$$\mathcal{L}\{s\} = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

Resuelvo la integral por partes

$$\text{Sea } u = t \dots \dots \dots dv = e^{-st} dt$$

$$du = dt \dots \dots \dots v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

Sustituyendo en:  $uv - \int v du$

$$-\frac{te^{-st}}{s} - \int -\frac{e^{-st}}{s} dt$$

$$-\frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{s\} = -\frac{te^{-st}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty}$$

$$\mathcal{L}\{s\} = -(\infty e^{-\infty} / s) - (e^{-\infty} / s^2) + (0 e^0 / s) + (e^0 / s^2)$$

$$\dots = -(\infty / se^{\infty}) - (1 / s^2 \infty)$$

$$\dots = 0 - 0 + 0 + (1 / s^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{s\} = (1 / s^2)$$

2. Transformada de la place de una derivada:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} f'(t) dt e^{-st} dt$$

Resuelvo la integral por partes

$$\text{Sea } u = e^{-st} \dots \dots \dots dv = f'(t) dt$$

$$du = -s e^{-st} dt \dots \dots \dots v = f(t)$$

Sustituyendo en:  $uv - \int v du$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s e^{-st} f(t) dt$$

Ahora

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0} 0 e^{-s(0)} f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$(e^{-st} = \frac{1}{e^{st}})$$

$$(e^{-st} = \frac{1}{e^{\infty}}) = 0$$

$$= -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\dots \dots \dots \mathcal{L}\{t\}$$

$$\Rightarrow -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}$$

3. Transformada de Laplace de una integral:

$$\int_0^t f(u) du = g(t)$$

Sustituimos en :  $\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$ .

$$\mathcal{L}\left\{d\left(\int_0^t f(u)du\right)\right\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(u)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

6. Transforma de Laplace con valores iniciales.

$$1. y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, \dots, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

Primero aplicamos transformada de Laplace en ambos lados de (1)

$$\mathcal{L}(y''') + 2\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin 3t) \dots \dots \dots (2)$$

$$S^3Y(S) - S^2y(0) - Sy'(0) - y''(0) + 2S^2Y(s) - 2Sy(0) - 2y'(0) - SY(s) + y(0) - 2Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \dots \dots \dots (3)$$

Sustituimos las condiciones iniciales en (3):

$$S^3Y(s) - S^2(0) - S(0) - 1 + 2S^2Y(s) - 2S(0) - 2(0) - SY(s) + (0) - 2Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \dots \dots \dots (4)$$

$$S^3Y(s) - 2S^2Y(s) - SY(s) - 2Y(s) - 1 = \frac{3}{s^2+9} \dots \dots \dots (5)$$

Reorganizamos a (5):

$$S^3Y(s) - 2S^2Y(s) - SY(s) - 2Y(s) = \frac{3}{s^2+9} + 1$$

$$S^3Y(s) - 2S^2Y(s) - SY(s) - 2Y(s) = \frac{s^2+9}{s^2+9} \dots \dots \dots (6)$$

Sacamos a Y(s) factor común:

$$(S^3 + 2S^2 - S - 2)Ys = \frac{s^2+9}{s^2+9} \dots \dots \dots (7)$$

Despejamos a Y(s) de (7):

$$Y(s) = \frac{s^2+12}{(s^3+2S^2-S-2)(s^2+9)} \dots \dots \dots (8)$$

Aplicamos transformada inversa de Laplace en (8) para determinar la función y(t).

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+12}{(s^3+2S^2-S-2)(s^2+9)}\right] \dots \dots \dots (9)$$

Descomponemos el denominador:

$$(s^3 + 2S^2 - S - 2)(s^2 + 9) = (S + 1)(S - 1)(S + 2)(S^2 + 9) \dots \dots \dots (10)$$

Sustituimos a (10) en (9):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+12}{(s^3+2S^2-S-2)(s^2+9)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{S+1} + \frac{B}{S-1} + \frac{C}{S+2} + \frac{DS+E}{S^2+9}\right] \dots \dots \dots (11)$$

Multiplicamos a(11) por (s+1)(s-1)(s+2)(s^2+9) :

$$A(S^4 + S^3 + 7S^2 + 9S - 18) + B(S^4 + 3S^3 + 15S^2 + 18) + C(S^4 + 8S^2 - 9) + DS^4 + 2DS^3 + ES^3 + DS^2 - 2DS - ES - 2E = S^2 + 12 \dots \dots \dots (12)$$

Desarrollamos a (12):

$$AS^4 + AS^3 + 7AS^2 + 9AS - 18A + BS^4 + 3BS^3 + 15BS^2 + 18B + CS^4 + 8CS^2 - 9C + DS^4 +$$

$$2DS^3 + ES^3 + DS^2 - 2DS - ES - 2E = S^2 + 12 \dots \dots \dots (13)$$

Desarrollamos a (12):

$$A+B+C+D= 0$$

$$A+3B+2D+E=0$$

$$7A+15B+8C+D=1$$

$$9A+18B-9C-2D-E=0$$

$$-18A+18B-9C-2E=12 \dots \dots \dots (14)$$

Buscamos la solución (14):

$$A=-\frac{1821}{4061}, B=\frac{31}{131}, C=\frac{219}{4061}, D=\frac{641}{4061}, E=\frac{2444}{4061} \dots \dots \dots (15)$$

Sustituimos a(15) en (11)

$$y(t)=-\frac{1821}{4061} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\frac{31}{131} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\left(\frac{219}{4061}\right) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{641S-2344}{s^2+9}\right)$$

$$y(t)=-\frac{1821}{4061} e^{-t}+\frac{31}{131} e^t-\frac{219}{4061} e^{-2t}+\frac{641}{4061} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)-\frac{2344}{4061} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)$$

$$y(t)=-\frac{1821}{4061} e^{-t}+\frac{31}{131} e^t-\frac{219}{4061} e^{-2t}+\frac{641}{4061} \cos 3t-\frac{2344}{12183} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{1821}{4061} e^{-t}+\frac{31}{131} e^t-\frac{219}{4061} e^{-2t}+\frac{641}{4061} \cos 3t-\frac{2344}{12183} \operatorname{sen} 3 t . / /$$

## 8. Conclusiones

-Se realizo la integración de dos áreas fundamentales de la ingeniería, para lo cual se desarrollo diferentes aplicaciones de la transformada de Laplace que posteriormente programe en Matlab.

Quiero resaltar la importancia de la nueva herramienta de trabajo que he adquirido, con el lenguaje de programacion LaTeX, la cual genera textos de alta calidad. Overleaf cuenta con un amplio contenido por explorar, que me permitira una excelente presentación para mi trabajo de grado.

## 9. Bibliografía

GUIAS DE CLASE ECUACIONES DIFERENCIALES, Lorena Maritza Terrios Guzman.

(1) ZILL, Dennis. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Novena edicion. Cengage Learning. Mexico.2009.

(2) EDWARDS, Henry, Penney David. Ecuaciones Diferenciales. Segunda edicion. Pearson. Mexico.2001.

(3) NAGLE, R. Kent, Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores de frontera. Cuarta edicion. Pearson. (4) ESCOBAR, Jaime. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple. Texto en la pagina web: [http:](http://matematicas.udea.edu.co/jescobar/)

[matematicas.udea.edu.co/jescobar/](http://matematicas.udea.edu.co/jescobar/)

(5) VARONA, M. Juan Luis. Metodos Clasicos de resolucion de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Universidad de La Rioja. Segunda edicion. Logroño.1996.

(6) ROSS,Shepley L. Differential equations. Tercera edicion. interamericana S.A. 1982. (7) AYRES, Frank. Teoria y problemas de Ecuaciones Diferenciales. Mcgraw- Hill.Madrid. 1970.

(8)PROFESOR PARTICULAR, [www.profesorparticularpuebla.com](http://www.profesorparticularpuebla.com),Transformada de Laplace de una derivada e integral,

<https://youtu.be/JoAnzA-dLhw?list=PLDrYCU02ie-Eazxk7H0s0bGMewU6aE19M>

(9)PROFESOR PARTICULAR, [www.profesorparticularpuebla.com](http://www.profesorparticularpuebla.com),Transformada de Laplace de  $f(t)=t$ <https://youtu.be/exEr1YjHC80?list=PLDrYCU02ie-Eazxk7H0s0bGMewU6aE19M>

(10)Dr. Trefor Bazett, Intro to LaTeX:Learn to writebeautiful math equations II part 1,

<https://youtu.be/Jp0lPj2-DQA> (11) LaTeX - GeoGebra Manual,<https://wiki.geogebra.org/es/LaTeX>