



Universidad de Sonora

Departamento de Física

Licenciatura en Física

Computacional I

2017-1

Reporte

# Actividad #7: Ajuste Fourier y Mareas con error relativo

Leonardo Coronado Arvayo

Profesor: Carlos Lizárraga Celaya

12 de abril de 2017

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Constituyentes de la marea</b>	<b>2</b>
<b>3. Constituyentes de la marea y ajuste Fourier en Manzanillo, Colima (noviembre y diciembre 2016)</b>	<b>4</b>
3.1. Error relativo para Manzanillo . . . . .	11
<b>4. Constituyentes de la marea y ajuste Fourier en la Isla Mona, Puerto Rico (noviembre y diciembre 2016)</b>	<b>11</b>
4.1. Error relativo para la Isla Mona . . . . .	14
<b>5. Conclusiones</b>	<b>14</b>

## Resumen

La presente actividad trata sobre la obtención de los principales constituyentes de la marea para la Isla Mona (Puerto Rico) y Manzanillo (México) mediante el uso de transformadas de Fourier. Para este caso se utilizan los datos para noviembre y diciembre del año 2016.

## 1. Introducción

En esta actividad comienzan a realizarse ajustes de datos sobre las mareas marea a través de las obtención de los constituyentes de la marea para Manzanillo en México y la Isla Mona en Puerto Rico. Esto se realiza a través del uso de transformadas de Fourier para encontrar las funciones que componen la marea de estos lugares.

La actividad se divide en 4 secciones (siendo la 1 la introducción). En la sección 2 se mencionan los principales constituyentes de la marea a manera de recordatorio.

En la sección 3 se encuentran los constituyentes para Manzanillo usando una transformada de Fourier.

En la 4 se realiza el mismo procedimiento para la Isla Mona.

Las secciones 3 y 4 tienen subsecciones sobre el calculo del error relativo parar ambos casos. Por ultimo se tiene una sección de conclusiones.

## 2. Constituyentes de la marea

Los constituyentes de la marea son el resultado neto de varios factores que afectan a la marea por periodos de tiempo en especifico, los principales son la rotación de la tierra, la posición de la luna y el sol, la altitud de la luna con respecto al ecuador y factores relativos a la profundidad del mar [1]. Variaciones con periodos menores a 12 horas se llaman armónicos constituyentes y para periodos largos se refieren como constituyentes a largo plazo [1].

A continuación se mencionan los principales constituyentes[1]:

- Constituyente principal lunar semi-diurno: comúnmente el constituyente mayor y conocido como M2. Con un periodo de 12 horas t 25.2 minutos (tiempo de una rotación relativa de la tierra con respecto a la luna), este periodo es en e que el campo gravitacional de la luna esta a su máximo y mínima distancia.
- Rango semi-diurno: es la diferencia entre agua alta y baja en medio día (un ciclo de dos semanas normalmente entre la luna nueva y llena).
- Marea primaveral: se refiere al punto mas alto de la marea.
- Marea muerta: cuando la marea esta en su punto mínimo.
- Altitud lunar: cuando la luna esta a su mínima altura (ápside) el rango aumenta y cuando esta a su máxima altura (apsis) el rango disminuye.

- Fase y amplitud: Como el constituyente M2 es el dominante en la mayoría de los lugares, etapas o fases de la marea es un concepto útil. La fase de la marea se mide de forma angular ( $2\pi$  o  $360^\circ$  para un ciclo completo).
- Otros constituyentes: factores como el campo gravitacional solar, la inclinación del ecuador y el eje rotacional, la inclinación del plano de la órbita de la luna y la forma orbital de la tierra con el sol.

En la siguiente tabla se resumen los constituyentes principales semidiurnos[1]:

Semi-diurno	Darwin	Periodo	Velocidad	Coeficientes Doodson				Doodson	NOAA
Nombre	Simbolo	(hr)	( $^\circ$ /hr)	$n_1$ (L)	$n_1$ (m)	$n_3$ (y)	$n_4$ (mp)	Número	Orden
Principal lunar semi-diurno	$M_2$	12.42	28.98	2				255.55	1
Principal solar semi-diurno	$S_2$	12	30	2	2	-2		273.555	2
Semi-diurno elíptico lunar mayor	$N_2$	12.66	28.44	2	-1		1	245.655	3

Tabla 1: Constituyentes principales semidiurnos

En la tabla 2 se muestran los constituyentes armónicos mayores[1]:

Armónico mayor	Darwin	Periodo	Velocidad	Coeficientes Doodson				Doodson	NOAA
Nombre	Simbolo	(hr)	( $^\circ$ /hr)	$n_1$ (L)	$n_1$ (m)	$n_3$ (y)	$n_4$ (mp)	Número	Orden
Sobremarea principal superficial lunar	$M_4$	6.21	57.97	4				455.555	5
Sobremarea principal superficial lunar*	$M_6$	4.14	86.95	6				655.555	7
Marea superficial terdiurna	$MK_3$	8.18	44.03	3	1			365.555	8
Principal sobremarea superficial solar	$S_4$	6	60	4	4	-4		491.555	9
Superficial diurno cuarto	$MN_4$	6.27	57.42	4	-1		1	445.655	10

Tabla 2: Constituyentes armónicos mayores

Por ultimo la tabla 3 presenta los constituyentes diurnos principales[1]:

Diurno	Darwin	Periodo	Velocidad	Coeficientes Doodson				Doodson	NOAA
Nombre	Simbolo	(hr)	(°/hr)	$n_1$ (L)	$n_1$ (m)	$n_3$ (y)	$n_4$ (mp)	Número	Orden
Lunar diurno	$K_1$	23.93	15.04	1	1			165.555	4
Lunar diurno	$O_1$	25.82	13.94	1	-1			145.555	6

Tabla 3: Constituyentes diurnos principales

Los coeficientes de Doodson están dados por[3]:

- $n_1$  es el tiempo medio lunar, la hora del angulo Greenwich de la media de la luna mas 12 horas. En forma de ecuación es:

$$n_1 = \tau = \theta_M + \pi - s \quad (1)$$

- $n_2$  es la longitud media de la luna, esta dado por:

$$n_2 = \delta = F + \Omega \quad (2)$$

- $n_3$  es la longitud media del sol, se calcula como:

$$n_3 = h = s - D \quad (3)$$

- $n_4$  es la longitud media de la luna en perigeo, es:

$$n_4 = p = s - l \quad (4)$$

Donde[3]:

- $l$  es la anomalía media de la luna (distancia desde su perigeo).
- $F$  es el argumento de latitud medio de la luna (distancia desde su nodo).
- $D$  es la elongación media de la luna (distancia desde el sol).
- $\Omega$  es la longitud media del nodo elíptico ascendiente de la luna.

### 3. Constituyentes de la marea y ajuste Fourier en Manzanillo, Colima (noviembre y diciembre 2016)

En la siguiente imagen se muestra la marea para Manzanillo:

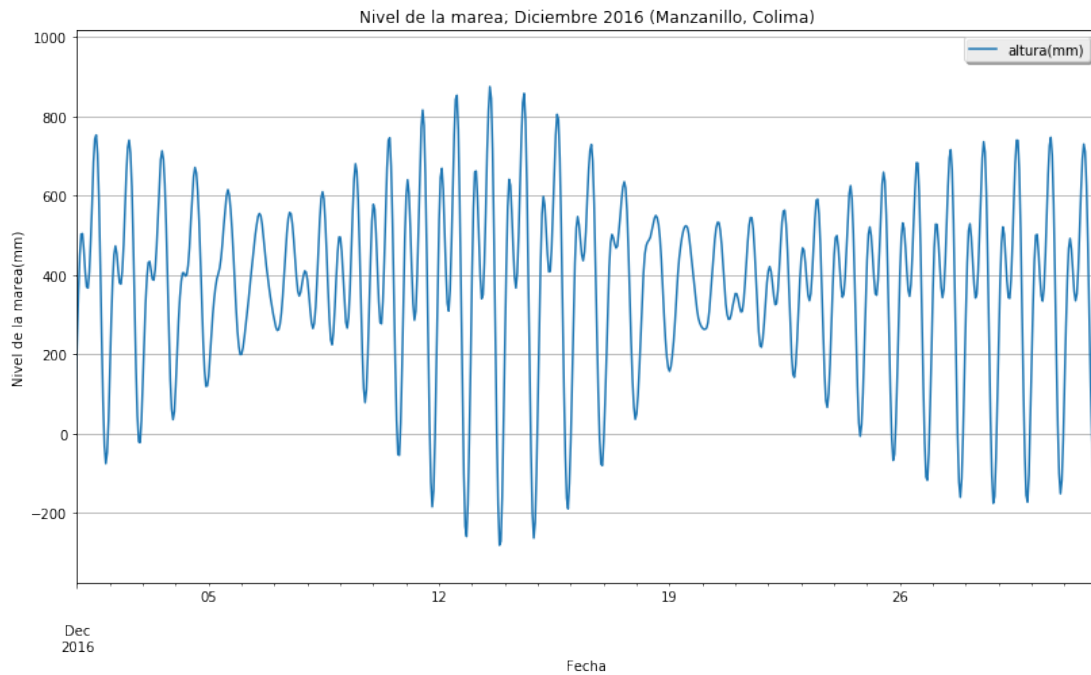


Figura 1: Marea en Manzanillo, diciembre 2016

Para obtener los principales constituyentes de la marea se aplico transformada discreta de Fourier a los datos mostrados anteriormente pero para poder realizar esto, se tubo que crear una variable de tiempo continua (en horas) que cubriera la temporalidad en cuestión (noviembre y diciembre), esto se hizo con:

```
#indicador de tiempo
df_short['month']=pd.DatetimeIndex(df_short[u'date']).month
#noviembre
df_nov=df_short.loc[df_short[u'month'] == 11]
#diciembre
df_dic=df_short.loc[df_short[u'month'] == 12]
#juntar diciembre y noviembre
df_23 = [df_nov, df_dic]
df_nd = pd.concat(df_23)

df_nov=df_short.loc[df_short[u'month'] == 11]
df_dic=df_short.loc[df_short[u'month'] == 12]

#noviembre
import pandas as pd
time_range = pd.date_range('2016-11-01 00:00:00','2016-11-30 23:00:00', freq='H')
# podemos aun seleccionar un rango de días

hours = time_range.hour
days = time_range.day
# Podemos calcular el número de horas transcurridas desde la fecha inicial
```

```

nov_d = (days-1)*24+hours
nov_d

#diciembre
import pandas as pd
time_range = pd.date_range('2016-12-01 00:00:00', '2016-12-31 23:00:00', freq='H')
# podemos aun seleccionar un rango de días

hours = time_range.hour
days = time_range.day
# Podemos calcular el número de horas transcurridas desde la fecha inicial
dic_d= 720 + (days-1)*24+hours
dic_d

#crear variables de hora para cada caso
df_nov['hour'] = nov_d
df_dic['hour']= dic_d

#unir las variables de hora en una variable
df_23 = [df_nov['hour'], df_dic['hour']]
df_nd['hour'] = pd.concat(df_23)

```

Y se encontraron/graficaron la transformada discreta de Fourier con:

```

import matplotlib.pyplot as mplt
fig = mplt.gcf()
fig.set_size_inches(13.5, 7.5)

import numpy as np
from scipy.fftpack import rfft
# Number of samplepoints
N = 1464
# sample spacing
T = 1.0/732
x = df_nd[u'hour']
#eliminando la suma
y = df_nd[u'altura(mm)']
yf = rfft(y)
xf = np.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(xf, 2.0/N * np.abs(yf[0:N/2]))
plt.xlim(-5,130)
plt.ylim(0,800)
plt.grid()
plt.show()

```

Que resultado en:

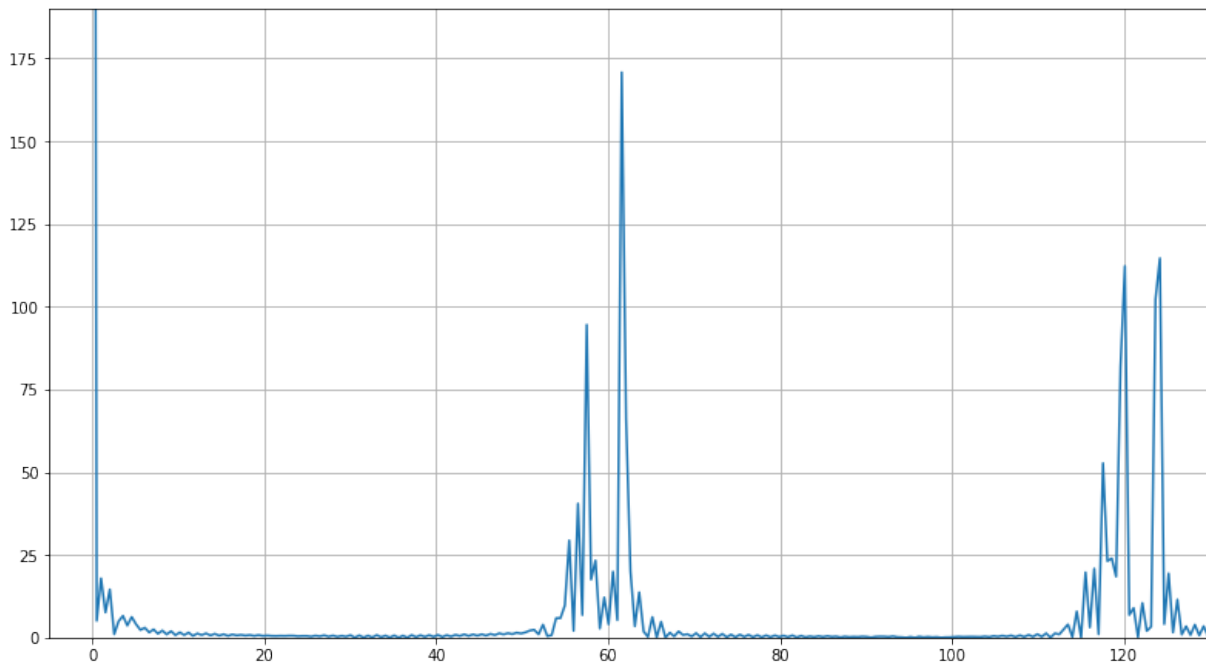


Figura 2: Constituyentes de la marea en Manzanillo, diciembre 2016

En este caso obtenemos alrededor de 7 nodos significativos, los valores en el eje de las x nos indican el valor de  $372/T$  en la sumatoria (viene de la definición de  $T=1/371$  en el código. Para obtener los valores de la transformada se uso:

#Obtener valores de la funcion furrier por orden, en este caso de menor a mayor

```
temp = 2.0/N * np.abs(yf[0:N/2])
```

```
temp.sort()
```

```
temp
```

Los valores máximos obtenidos son:



	Amplitud	n
a0	389.547706	
a1	170.753539	61.5
a2	114.609969	124
a3	112.232966	120
a4	94.5109376	57.6
a5	52.7094677	57.8
a6	40.5105779	56.5
a7	29.3780067	55
a8	23.1170791	59
a9	2.00E+01	115.5
a10	2.00E+01	116.5

Tabla 4: Principales constituyentes para Manzanillo

Para calcular los valores de las frecuencias se utiliza la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \Phi_n\right) \quad (5)$$

Donde el valor  $a_n$  representa el valor del pico.

Sin embargo, por la definición del código de Fourier se cambio el ciclo de  $2\pi$  a  $\pi$ , véase el espacio x del código:

```
xf = np.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)
```

Entonces la ecuación queda:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \sin\left(\frac{\pi nt}{T} + \Phi_n\right) \quad (6)$$

La forma de calcular para el primer nodo se da como (que esta en la posición 30.08):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{n=2}^N a_n \sin\left(\frac{\pi nt}{T} + \Phi_n\right) = 375.78 + 181.24 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{n=2}^N a_n \sin\left(\frac{\pi nt}{T} + \Phi_n\right)$$

Sigue igualar:

$$\frac{372}{T} = (30.08)$$

Y por ende:

$$T_1 = \frac{372}{30.08} = 12.37h$$

Para el constituyente  $a_2$  tenemos:

$$f(t) = 375.78 + 181.24 \sin\left(\frac{\pi t}{T_1}\right) + 114.1 \sin\left(\frac{\pi t}{T_2}\right) + \sum_{n=3}^N a_n \sin\left(\frac{\pi nt}{T} + \Phi_n\right)$$

Y:

$$T_2 = \frac{372}{62.17} = 5.98h$$

Siguiendo este procedimiento se pudieron obtener los componentes  $T_n$  para los demás, estos se muestran en la siguiente tabla:

	Amplitud	n	T (horas)	Constituyente
a0	389.547706			
a1	170.753539	61.5	12.09756098	M2
a2	114.609969	124	6	M4
a3	112.232966	120	6.2	MN4
a4	94.5109376	57.6	12.91666667	S2
a5	52.7094677	57.8	12.87197232	
a6	40.5105779	56.5	13.16814159	
a7	29.3780067	55	13.52727273	
a8	23.1170791	59	12.61016949	
a9	2.00E+01	115.5	6.441558442	
a10	2.00E+01	116.5	6.386266094	

Tabla 5: Principales constituyentes para Manzanillo

Por ultimo, la función para la marea en manzanillo queda como:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & 389.55 + 170.75 \sin\left(\frac{\pi t}{T_1}\right) + 114.61 \sin\left(\frac{\pi t}{T_2}\right) + 112.23 \sin\left(\frac{\pi t}{T_3}\right) + 94.51 \sin\left(\frac{\pi t}{T_4}\right) \\
 & + 52.71 \sin\left(\frac{\pi t}{T_5}\right) + 40.51 \sin\left(\frac{\pi t}{T_6}\right) + 29.38 \sin\left(\frac{\pi t}{T_7}\right) + 23.12 \sin\left(\frac{\pi t}{T_8}\right) \\
 & 20 \sin\left(\frac{\pi t}{T_9}\right) + 20 \sin\left(\frac{\pi t}{T_{10}}\right) \\
 f(t) = & 389.55 + 170.75 \sin\left(\frac{\pi t}{12.1}\right) + 114.61 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 112.23 \sin\left(\frac{\pi t}{6.2}\right) + 94.51 \sin\left(\frac{\pi t}{12.92}\right) \\
 & + 52.71 \sin\left(\frac{\pi t}{12.87}\right) + 40.51 \sin\left(\frac{\pi t}{13.17}\right) + 29.38 \sin\left(\frac{\pi t}{13.52}\right) + 23.12 \sin\left(\frac{\pi t}{12.61}\right) \\
 & 20 \sin\left(\frac{\pi t}{6.44}\right) + 20 \sin\left(\frac{\pi t}{6.38}\right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Finalmente se gráfico esta función contra los datos reales usando el codigo:

```
#funcion de fourier
def f(t):
    return 389.55 + (170.75)*np.sin(1*np.pi*t/12.1) + (114.161)*np.sin(1*np.pi*t/6)
    + (112.23)*np.sin(1*np.pi*t/6.2) + (94.51)*np.sin(1*np.pi*t/12.92) +
```

```

(52.71)*np.sin(1*np.pi*t/12.87) + (40.51)*np.sin(1*np.pi*t/13.16) +
(29.38)*np.sin(1*np.pi*t/13.53) + (23.12)*np.sin(1*np.pi*t/12.61) +
(20)*np.sin(1*np.pi*t/6.44) + (20.0)*np.sin(1*np.pi*t/6.39)

#interpolarse la funcion
df_nd[u'altura(mm)'] = df_nd[u'altura(mm)'].astype(float).interpolate(method='spline', order=2)

fig = plt.gcf()
fig.set_size_inches(13.5, 7.5)

plt.plot(df_nd[u'hour'], f(df_nd[u'hour']), c='black', label='Ajuste Fourier')
plt.plot(df_nd[u'hour'], df_nd[u'altura(mm)'], c='red', label='Datos CICESE')

plt.ylabel('Nivel de la marea(mm)')
plt.xlabel('Hora')
plt.legend(fancybox=True, shadow=True)
plt.grid(True)

```

Y resultado en:

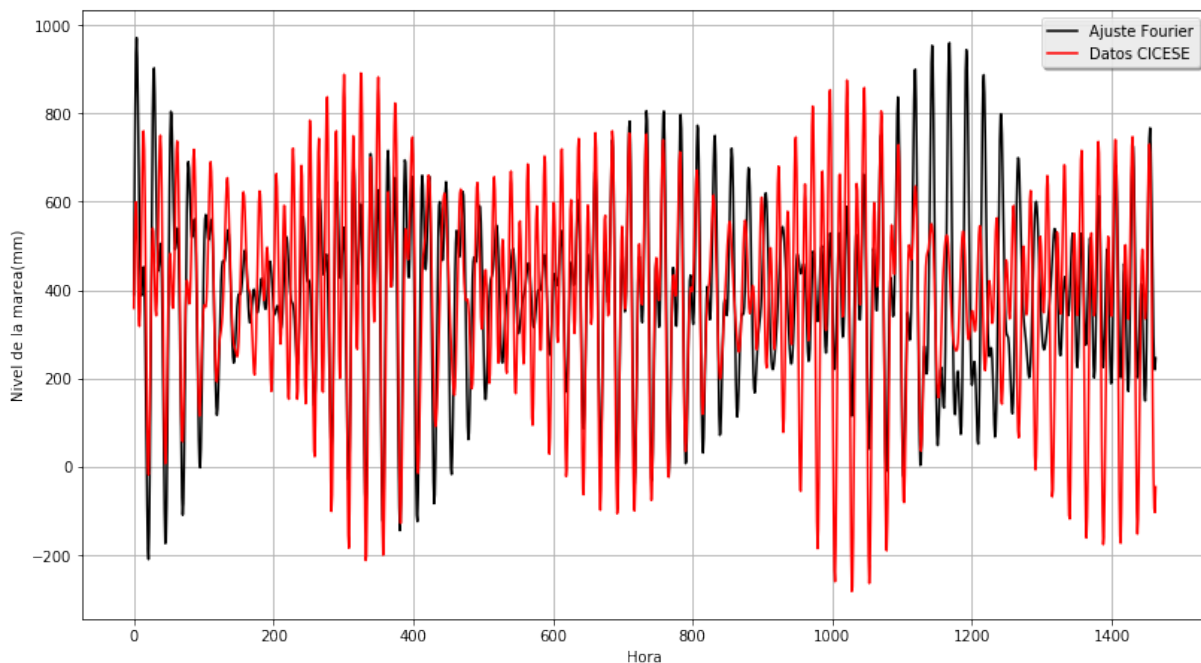


Figura 3: Ajuste Fourier y datos de CICESE noviembre y diciembre 2017

### 3.1. Error relativo para Manzanillo

En este caso el error relativo se calcula como[4]:

$$Error - relativo = \frac{\sum_{n=1}^N |y - y_{fou}|^2}{\sum_{n=1}^N |y|^2} \quad (8)$$

Donde  $y$  es el valor real de marea en este caso y  $y_{fou}$  es el valor de la marea ajustado con Fourier. El código para realizarlo es:

```
def f(t):
    return 389.55 + (170.75)*np.sin(1*np.pi*t/12.1) + (114.161)*np.sin(1*np.pi*t/6) +
    (112.23)*np.sin(1*np.pi*t/6.2) + (94.51)*np.sin(1*np.pi*t/12.92) +
    (52.71)*np.sin(1*np.pi*t/12.87) + (40.51)*np.sin(1*np.pi*t/13.16) +
    (29.38)*np.sin(1*np.pi*t/13.53) + (23.12)*np.sin(1*np.pi*t/12.61) +
    (20)*np.sin(1*np.pi*t/6.44) + (20.0)*np.sin(1*np.pi*t/6.39)

#interpoliar la funcion
df_nd[u'altura(mm)'] = df_nd[u'altura(mm)'].astype(float).interpolate(meth
od='spline', order=2)

#error relativo
x = (np.abs(df_nd[u'altura(mm)'] - f(df_nd[u'hour'])))**2
y = (np.abs(df_nd[u'altura(mm)']**2

er = x/y

er.sum()
```

Y el resultado fue de:

$$Error - relativo = 176556.85$$

## 4. Constituyentes de la marea y ajuste Fourier en la Isla Mona, Puerto Rico (noviembre y diciembre 2016)

La siguiente figura muestra la marea para la Isla Mona.

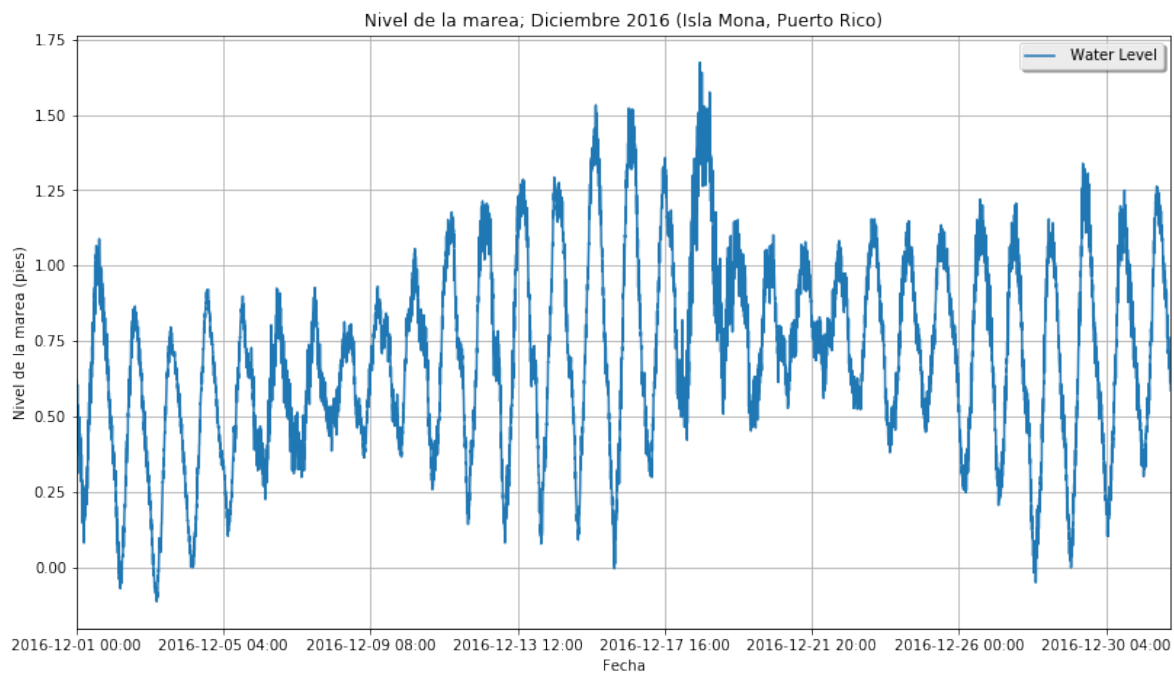


Figura 4: Marea en Isla Mona, diciembre 2016

En la siguiente figura se ve la aplicación de la transformada de Fourier para la Isla Mona:

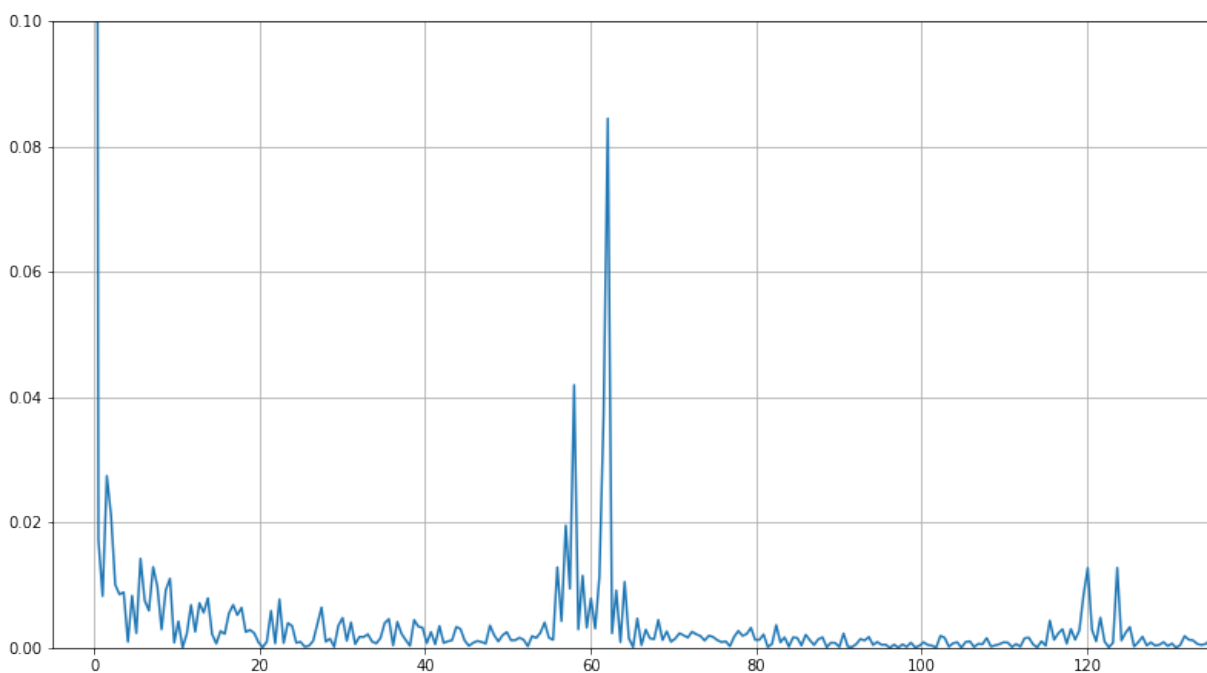


Figura 5: Constituyentes de la marea en la Isla Mona, diciembre 2016

En la siguiente tabla se el proceso de la sección anterior para la Isla Mona:

	Amplitud (metros)	n	T (hora)	Constituyente
a0	0.21531011			
a1	0.084450193	61.8	12.03883495	M2
a2	0.041920013	57.8	12.87197232	S2
a3	0.019531866	57.3	12.98429319	N2
a4	0.012848187	56.3	13.21492007	
a5	0.012765334	120	6.2	MN3
a6	0.012740746	123.9	6.004842615	M4
a7	0.011513145	59.3	12.54637437	
a8	0.010818659	64	11.625	
a9	0.009200942	63	11.80952381	
a10	0.007870824	60	12.4	

Tabla 6: Principales constituyentes para la Isla Mona

Y la función queda como:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & 0.22 + 0.0845 \sin\left(\frac{\pi t}{12.04}\right) + 0.0419 \sin\left(\frac{\pi t}{12.87}\right) + 0.0195 \sin\left(\frac{\pi t}{12.98}\right) \\
 & + 0.0128 \sin\left(\frac{\pi t}{13.21}\right) + 0.0128 \sin\left(\frac{\pi t}{6.2}\right) + 0.0127 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\
 & + 0.0115 \sin\left(\frac{\pi t}{12.55}\right) + 0.0108 \sin\left(\frac{\pi t}{11.63}\right) + 0.0092 \sin\left(\frac{\pi t}{11.81}\right) + 0.0079 \sin\left(\frac{\pi t}{12.4}\right)
 \end{aligned} \quad (9)$$

Y la gráfica de la función contra los datos reales resulto en:

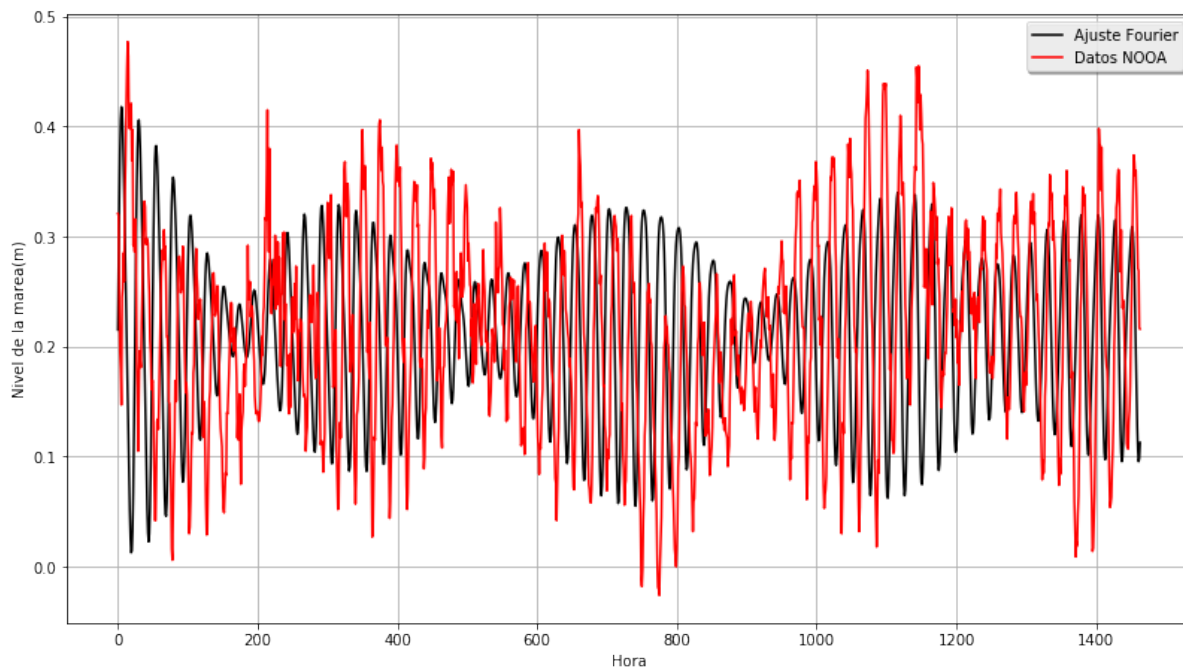


Figura 6: Ajuste Fourier y datos de NOAA noviembre y diciembre 2017

### 4.1. Error relativo para la Isla Mona

Para el caso de la Isla Mona el código que se utilizó fue:

```
def f(t):
    return 0.2153 + (0.0845)*np.sin(np.pi*t/12.04) + (0.0419)*np.sin(np.pi*t/12.87) +
    (0.0195)*np.sin(np.pi*t/12.98) + (0.0128)*np.sin(np.pi*t/13.21) +
    (0.01277)*np.sin(np.pi*t/6.2) + (0.0127)*np.sin(np.pi*t/6) +
    (0.0115)*np.sin(np.pi*t/12.55) + (0.0108)*np.sin(np.pi*t/11.63) +
    (0.0092)*np.sin(np.pi*t/11.81) + (0.0079)*np.sin(np.pi*t/12.4)

#interpoliar la funcion
df_nd[u' Water Level'] = df_nd[u' Water Level'].astype(float).interpolate(meth
od='spline', order=2)

#error relativo
x = (np.abs(df_nd[u' Water Level'] - f(df_nd[u'hour'])))**2
y = (np.abs(df_nd[u' Water Level']))**2

er = x/y

er.sum()
#evitar error infinito
np.ma.masked_invalid(er).sum()
```

En este caso se agregó el último código para eliminar un error que mandaba a infinito la sumatoria. Al final el error relativo fue de:

$$Error - relativo = 40407.85$$

Se puede observar que el error es menor para este caso que para el anterior, es decir que se encontró un mejor ajuste para la Isla Mona que para Manzanillo.

## 5. Conclusiones

El uso de la transformada de Fourier para encontrar los constituyentes de un comportamiento ondulatorio parece ser muy útil. Sin embargo su uso resultó complicado más allá de aplicar el código, ya que el encontrar las frecuencias de cada onda fue lo que me resultó más difícil. Sin embargo esto puede tener como origen el no estar del todo familiarizado con la aplicación de las transformadas de Fourier.

Se encontró que dependiendo del número de observaciones (meses en este caso) que se tengan cambia la precisión del ajuste.

Además, se tiene que para el caso de la Isla Mona el error relativo es menor lo que lo hace un mejor ajuste. Hecho que también se puede observar en las gráficas.

## Referencias

- [1] Tide. Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tide>
- [2] Fourier Series. Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier\\_series](https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series)
- [3] Arthur Thomas Doodson. Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur\\_Thomas\\_Doodson](https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Thomas_Doodson)
- [4] [urlhttp://computacional1.pbworks.com/w/page/116715627/Actividad20720\(2017-1\)](http://computacional1.pbworks.com/w/page/116715627/Actividad20720(2017-1))