# Diagonalization과 Eigendecomposition

# 수업 목표

**이번 수업의 핵심:**

- Diagonalization (대각화)의 개념과 대각화가 가능하기 위한 필요충분조건
- Diagonalization과 Eigendecomposition의 관계
- Eigendecomposition을 통한 선형 변환 과정의 이해

**핵심 개념**

- Diagonalization
- Eigendecomposition

# Diagonalization (대각화)

정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$가 주어졌을 때 이를 대각 행렬로 바꾸고자 함:

$$D = P^{-1}AP$$

- 행렬 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$는 역행렬이 존재
- 행렬 $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$는 대각 행렬

- 이러한 변환을 Diagonalization (대각화)라고 부름

- 모든 $A$가 대각화가 가능한 것은 아님
  - $A$가 대각화가 가능하기 위해선 $D$가 대각행렬이 되면서 역행렬이 존재하는 $P$가 있어야 함

# Diagonalization (대각화)

대각 행렬 $D = P^{-1}AP$가 되는 $P$를 찾는 방법은?

$$D = P^{-1}AP \implies PD = AP$$

다음과 같이 표현해보자:

$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ where $\mathbf{v}_i$는 $P$의 열벡터, $\quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

- $AP = A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n]$
- $PD = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n]$
- $PD = AP \iff [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n]$

# Eigenvector와 Diagonalization의 관계

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \cdots, A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n$$

- 따라서, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ⋯, $\mathbf{v}_n$는 Eigenvector, $\lambda_1$, $\lambda_2$, ⋯, $\lambda_n$는 Eigenvalue
- $PD = AP \Longrightarrow D = P^{-1}AP$가 참이 되기 위해선 $P$의 역행렬이 존재 필요
  - $P$는 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 형태의 정사각행렬
  - $P$는 $n$개의 선형 독립인 Eigenvector를 가져야함
  - 모든 행렬이 이러한 조건을 만족하지 않지만, 만족하다면 그 행렬 $A$는 Diagonalizable
- 이때, 대각행렬 $D$는 Eigenvalue를 대각선 원소로 가짐

# Eigendecomposition

- 만약 $A$가 Diagonalizable하다면, $D = P^{-1}AP$

  ← 이를 거꾸로 $A = PDP^{-1}$로도 쓸 수 있음

  - 이를 $A$의 Eigendecomposition이라 부름
- “$A$가 대각화가 가능하다”는 “A가 Eigendecomposition이 가능하다”와 동치

## 선형 변환 관점에서의 Eigendecomposition

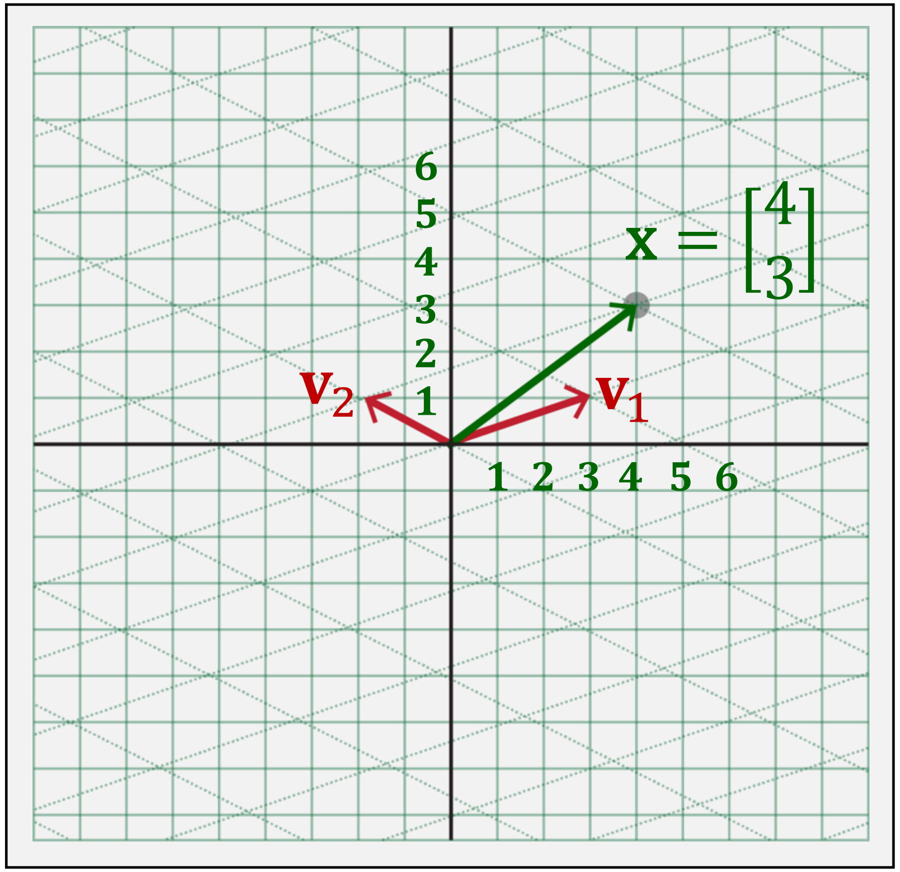
- 선형 변환 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$를 가정
- $A$가 대각화가 가능하다고 가정 → Eigendecomposition $A = PDP^{-1}$

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x} = P\big(D(P^{-1}\mathbf{x})\big)$$

# Basis 변환

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x} = P\left(D\left(P^{-1}\mathbf{x}\right)\right)$$

**예시)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$




- $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$로 둔다면,

$$P\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

→ $\mathbf{y}$는 $\mathbf{x}$를 새로운 Basis로 옮긴 좌표

- Eigenvector $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$를 Basis로 가짐

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= P\mathbf{y} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Dimension-wise Scaling

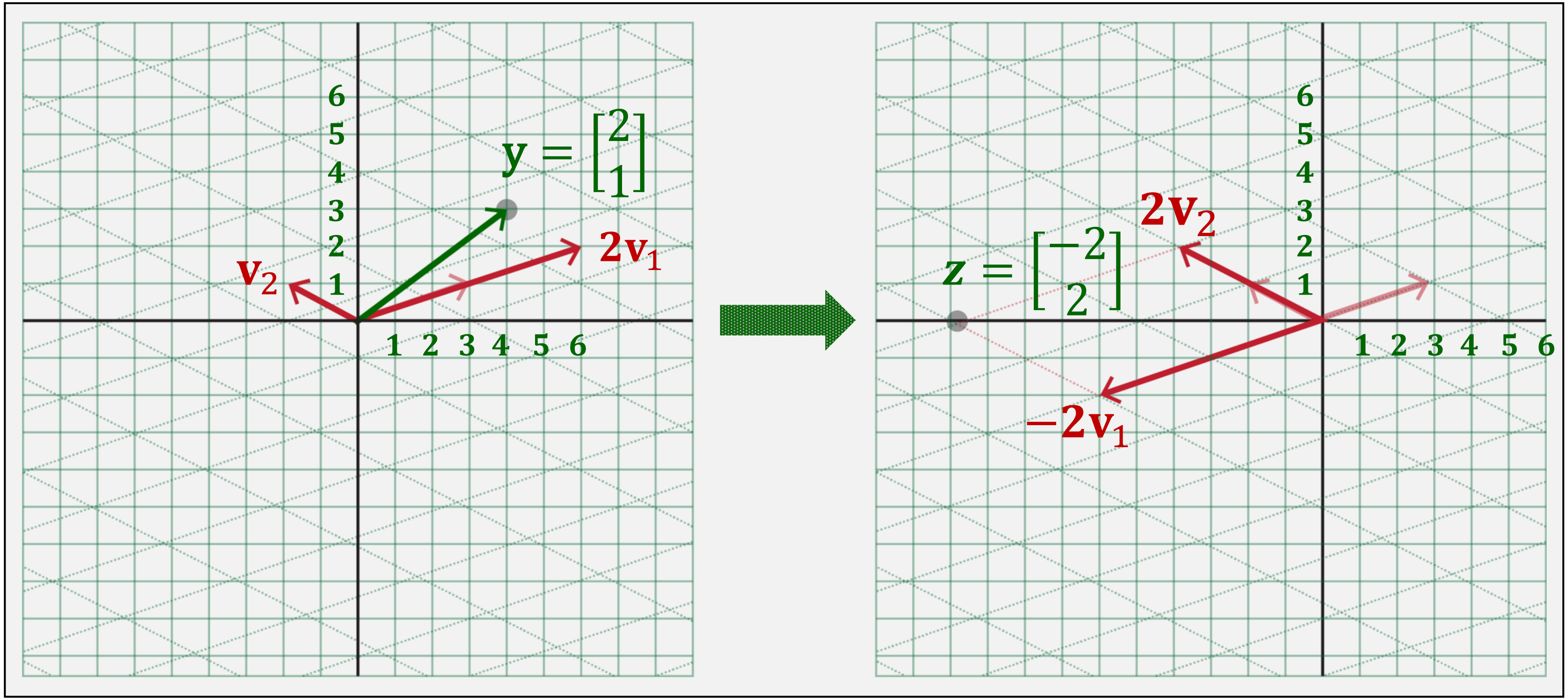
$$T(\mathbf{x}) = P\left(D\left(P^{-1}\mathbf{x}\right)\right) = P(D\mathbf{y})$$

- $z = D\mathbf{y}$로 두면, 해당 연산은 $\mathbf{y}$의 단순한 요소 단위 크기 조절

**예시)** $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$이라면:

$$z = D\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \times 2 \\ 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Dimension-wise Scaling



# 원래의 Basis로 변환

$$T(\mathbf{x}) = P(D\mathbf{y}) = Pz$$

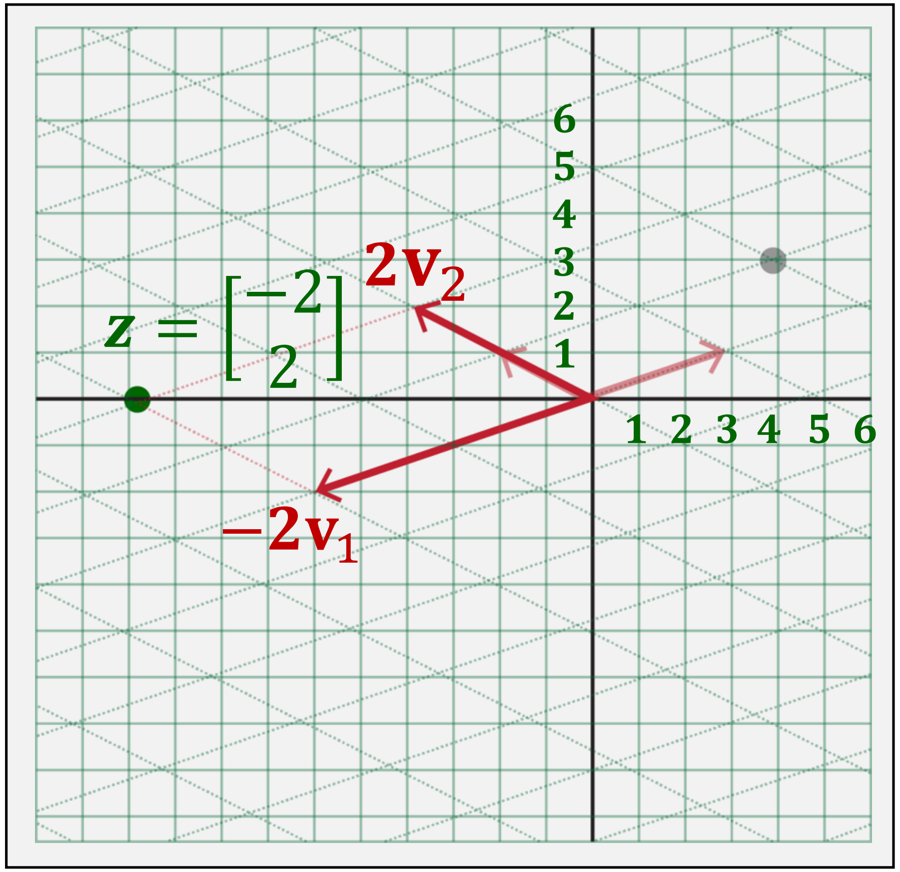
- $z$는 아직 새로운 Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 의 좌표로 표현되어 있음

- $Pz$는 $z$를 원래의 표준좌표계 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 으로 변환
  - $Pz$는 $z$를 계수로 사용한 $\mathbf{v}_1$와 $\mathbf{v}_2$의 선형 결합

$$Pz = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 z_1 + \mathbf{v}_2 z_2$$

# 원래의 Basis로 변환

- $T(\mathbf{x}) = P{\color{red}z} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$
$$= -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$
$$= -2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-10\\0\end{bmatrix}$$




- 따라서

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10\\0\end{bmatrix}$$

# Eigendecomposition 도식화

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\boldsymbol{A}"] \arrow[d, "\boldsymbol{P^{-1}}"'] & T(x) = Ax = P\left(D(P^{-1}x)\right) \\
y \arrow[r, "\boldsymbol{D}"'] & z \arrow[u, "\boldsymbol{P}"']
\end{tikzcd}
$$

Eigenvector들을
Basis로 하여
좌표계를 변환

원래의 표준좌표계를
Basis로 하여
좌표계를 변환

Dimension-wise Scaling

# $A^k$를 통한 선형 변환

**재귀적 변환 $A \times A \times \cdots \times A\mathbf{x} = A^k\mathbf{x}$을 가정:**

- $A$가 Diagonalizable하다면, $A$는 Eigendecomposition을 가짐

$$A = PDP^{-1}$$

- $A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$
- $D^k$는 간단히 계산이 가능:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

- $A^k\mathbf{x}$를 직접 계산하기보다 $P\left(D^k(P^{-1}\mathbf{x})\right)$로 계산하는 것이 훨씬 빠름

# 요약

- Diagonalization의 개념과 Diagonalization이 가능한 조건
- Diagonalization을 통한 Eigendecomposition 식 표현
- 선형 변환 예시를 통한 Eigendecomposition의 의미 확인
- Diagonalization을 활용한 $A^k$의 계산 효율화