선형독립과 선형종속

수업 목표

이번 수업의 핵심:

- 선형 독립과 선형 종속의 정의
- Span과 선형 종속의 관계
- 선형독립과 Linear system 해의 유일성 간의 관계

핵심 개념

- 선형독립, 선형종속

Linear System 복습

- Linear system에서 행렬식:

번호	체중 (kg)	신장 (cm)	흡연 여부	수명
1	65	180	흡연자 (=1)	72
2	50	160	비흡연자 (=0)	82
3	60	170	흡연자 (=1)	68

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 65 & 180 & 1 \\ 50 & 160 & 0 \\ 60 & 170 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 72 \\ 82 \\ 68 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

  - 위의 행렬식은 다음과 같이 벡터방정식으로 표현할 수 있음

$$\begin{bmatrix} 65 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 170 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 72 \\ 82 \\ 68 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}$$

  - 이때 방정식의 해는 $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$이어야만 존재

- 만약, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$라면, $\mathbf{x}$는 유일할까?
  - 만약 유일하다면, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$은 선형독립 (Linearly independent)
  - 만약 수많은 해답이 존재한다면, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$은 선형종속 (Linearly dependent)

선형독립

(일반적인) 선형독립의 정의:

- 벡터 집합 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$에 대하여,
  $i = 1, \ldots, p$인 $\mathbf{v}_i$가 이전 벡터 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$의 선형결합으로 표현되는지 확인

$$\mathbf{v}_i \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i\} \quad \text{for some } i = 1, \ldots, p$$

- 만약 그러한 $\mathbf{v}_i$가 없다면, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$는 **선형독립**
- 만약 최소 하나의 $\mathbf{v}_i$가 존재한다면, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$는 **선형종속**

선형독립

(엄밀한) 선형독립의 정의:

- $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$를 가정
  - 자명한 해(Trivial solution)로 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$가 존재

- 만약 자명한 해가 유일한 해라면, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$는 **선형독립**
- 만약 다른 비자명해가 존재한다면, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$는 **선형종속**
  - 즉, 하나 이상의 x_i가 0이 아님

선형독립

앞선 일반적인 정의와 엄밀한 정의는 수학적으로 동일

- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$가 선형독립인데, 비자명해가 존재한다고 가정
  - 이때, 마지막 요소 x_p가 0이 아니라고 가정

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow x_p\mathbf{v}_p = -x_1\mathbf{v}_1 - x_2\mathbf{v}_2 - \cdots - x_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_p = -\frac{x_1}{x_p}\mathbf{v}_1 - \frac{x_2}{x_p}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{x_{p-1}}{x_p}\mathbf{v}_{p-1}$$ $\because x_p$로 안전하게 나눔

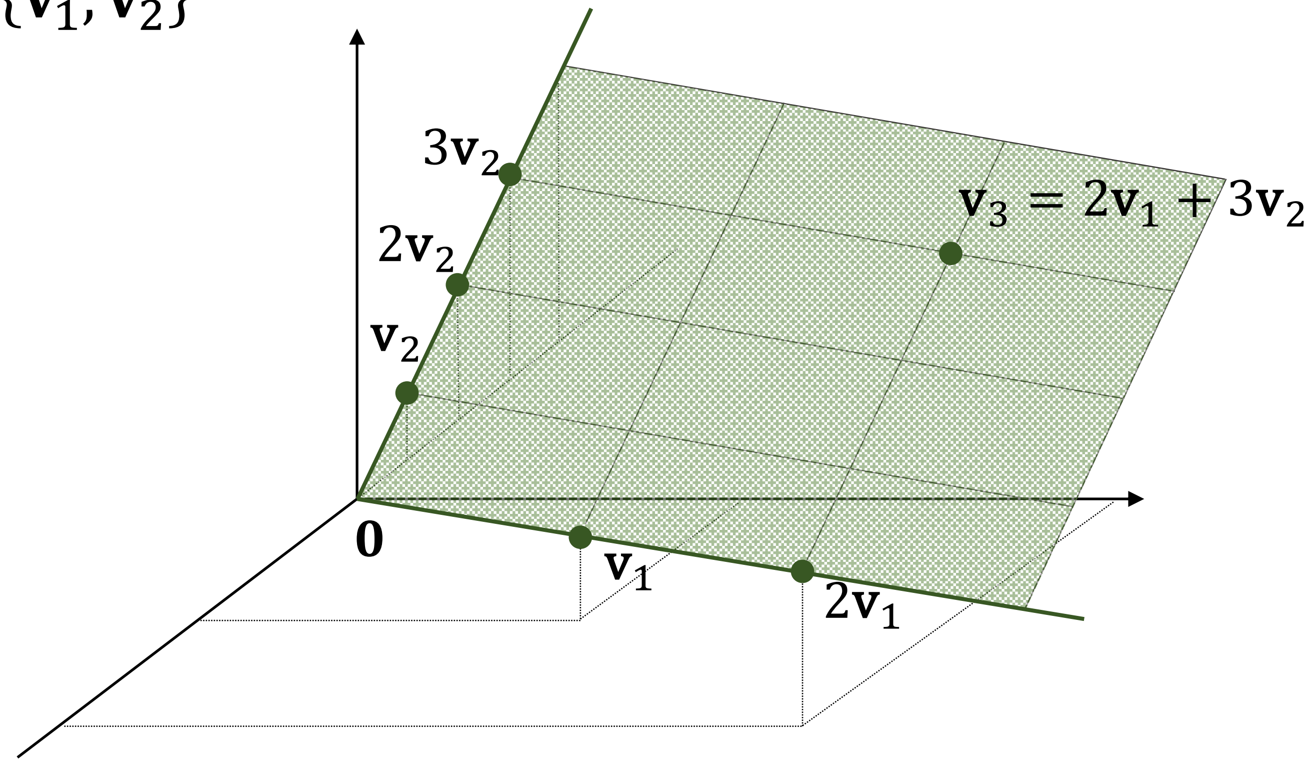
$$\Rightarrow \mathbf{v}_p \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{p-1}\}$$

→ 따라서 $\mathbf{v}_p$는 이전 벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있음

선형종속의 기하적 해석

- 두 벡터 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$에 대하여, $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$가 아래의 평면과 같이 나타난다고 가정
- 만약 세번째 벡터 $\mathbf{v}_3$가 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$와 선형의존이라면, $\mathbf{v}_3$는 평면 위에 위치

→ $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$



선형종속

- 선형종속인 벡터는 Span을 늘이지 못함
- 만약 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$이라면,

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

증명)

- $\mathbf{v}_3 = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2$라고 가정하면 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$의 선형결합은 다음과 같음:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\,\mathbf{v}_2$$

→ 이는 $\mathbf{v}_1$와 $\mathbf{v}_2$의 선형결합과 같음

Linear System의 해와 선형종속

- 선형종속 벡터 집합은 Linear system 해를 여러 선형결합으로 표현 가능
- 벡터방정식 $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$에서 해가 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$라고 가정
  - 즉, $3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$

- 만약 선형종속으로 $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_1$이라면:

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + (2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) = 5\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$$

→ 따라서 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$는 또 다른 해가 됨

- 사실, 매우 많은 다른 해가 존재함

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + (2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3)$$

$$= 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2(2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 + 8\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 해의 유일성

- 아래 방정식은 $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$일 때 해가 존재

$$\begin{bmatrix} 65 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 170 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 72 \\ 82 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}$$

- 만약, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해가 존재한다면, 언제 해가 유일할까?
  - $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$가 선형독립일 때, 해가 유일함
  - $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$가 선형종속이라면, 해가 유일하지 않음

요약

- 선형독립의 일반적인 정의와 엄밀한 정의 소개
- 기하적 해석을 통한 Span과 선형 종속의 관계 학습
- Linear system의 해가 유일하기 위한 선형독립의 조건 확인