부분공간

수업 목표

이번 수업의 핵심:

- 부분공간과 기저의 정의
- 열공간/행공간의 차원과 Rank 계산
- 영공간의 정의와 특성
- Orthogonal complement의 개념과 행렬의 주요 부분 공간

핵심 개념

- 부분공간, 기저
- 열공간, 행공간, 영공간, 좌영공간
- 차원, Rank
- Orthogonal complement

Span과 부분공간

부분공간 (Subspace)

- **정의** - 부분공간 H는 선형결합으로 닫힌 $\mathbb{R}^n$의 부분 집합: $H \subseteq \mathbb{R}^n$
  - 임의의 두 벡터 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H$와 두 스칼라 c, d에 대하여, $c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2 \in H$

- $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$은 항상 부분공간임
  - $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_p\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_p\mathbf{v}_p$라고 가정

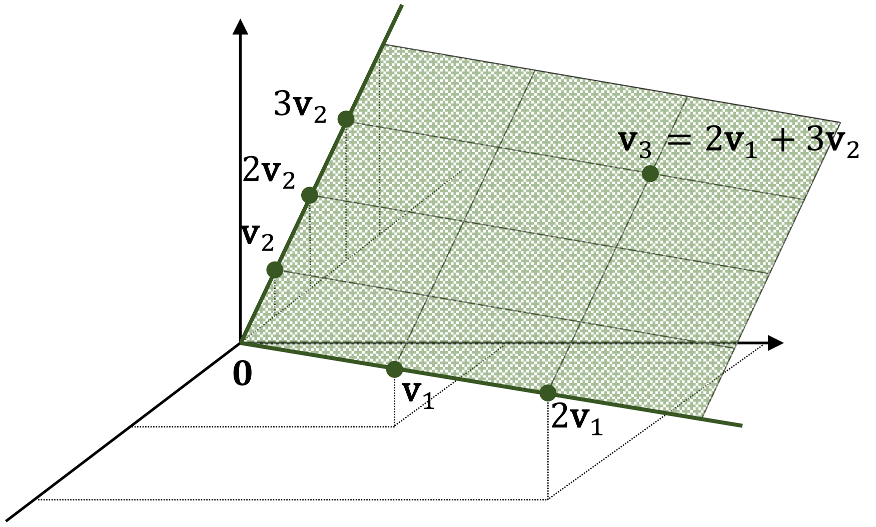
$$c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2 = c(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_p\mathbf{v}_p) + d(b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_p\mathbf{v}_p) = (ca_1 + db_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (ca_p + db_p)\mathbf{v}_p$$

- 사실, 부분공간은 항상 $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$의 형태로 표현됨

부분공간의 기저

기저 (Basis)

- **정의** - 부분공간 H의 기저는 다음을 만족하는 벡터의 집합:
  - 부분공간 H 전체를 Span(생성)할 수 있음
  - 선형독립 (즉, 불필요한 벡터가 없음)



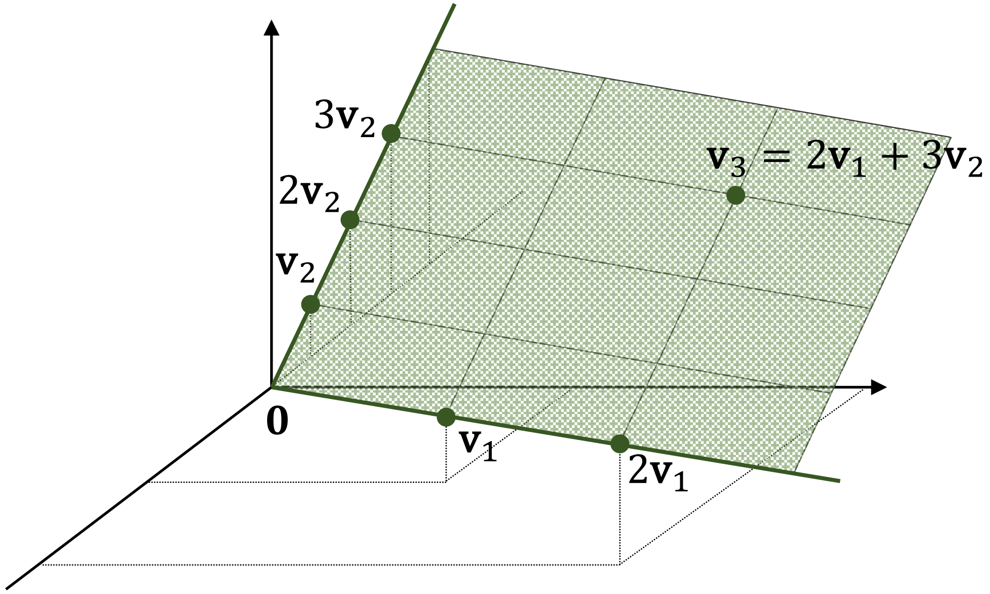
- **예시)** 오른쪽 그림 $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
  - $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$로 평면이 생성 → $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$는 기저
  - $\{\mathbf{v}_1\}$로는 평면을 생성할 수 없음 → $\{\mathbf{v}_1\}$는 기저가 아님
  - $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ → $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$는 기저가 아님

- 기저는 유일하지 않음
  - 즉, 똑같은 부분공간 H를 생성하는 선형독립 벡터 집합이 존재

부분공간의 차원

부분공간 H가 주어졌을 때, 유일성을 가지는 것은 무엇이 있을까?

- H에 다른 기저가 존재해도, 기저 내 벡터의 개수는 변하지 않음
- 해당 벡터 개수를 H의 차원(Dimension) $\dim H$로 표기
- 예시에서 평면으로 나타난 부분공간 차원은 $\dim H = 2$
  - 그 어떤 기저도 정확히 2개의 벡터를 포함하기 때문



행렬의 열공간

열공간 (Column space)

- **정의** - 행렬 A의 열공간은 A의 열로 생성된 부분 공간을 의미
  - 이러한 행렬의 열공간을 $\text{Col}\,A$로 표기

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Col}\,A = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

  - 따라서, $\dim \text{Col}\,A = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Col}\,A = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

  - $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 세번째 열이 첫 두 열의 선형결합
  - 따라서, $\dim \text{Col}\,A = 2$

행렬의 행공간

행공간 (Row space)

- **정의** - 행렬 A의 행공간은 A의 행으로 생성된 부분 공간을 의미
  - 이러한 행렬의 행공간을 $\mathrm{Row}\,A$로 표기

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\top}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\top}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\top}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top}\right\}$$

  - 따라서, $\dim \mathrm{Row}\,A = 2$

- 행렬 A의 행공간은 행렬 $A^{\top}$의 열공간과 동일

$$\mathrm{Row}\,A = \mathrm{Col}\,A^{\top}$$

행렬의 Rank

열 계수 (Column rank)와 행 계수 (Row rank)

- 열 계수 – 열 공간의 차원: $\dim \mathrm{Col}\, A$
- 행 계수 – 행 공간의 차원: $\dim \mathrm{Row}\, A$

Rank (계수)

- **정의** - 행렬 A의 Rank는 A의 열(행)공간의 차원을 의미
  - 열 계수와 행 계수는 같은 수치를 가짐
  - 이러한 행렬의 차원을 $\mathrm{rank}\, A$로 표기

$$\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Col}\, A = \dim \mathrm{Row}\, A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rank}\, A = 2$$

열 계수와 행 계수는 같다에 대한 내용:
https://home.cs.Colorado.edu/~alko5368/lecturesCSCI2820/mathbook.pdf의 Chapter 4.6를 참고

행렬의 영공간

영공간 (Null space)

- 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$의 영공간은 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 모든 해들의 집합
  - 이러한 영공간을 $\mathrm{Nul}\,A$로 표기
  - 해당 공간은 $\mathbb{R}^n$의 부분공간

- $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \mathbf{a}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\top \end{bmatrix}$에 대하여, $\mathbf{x}$가 다음을 만족:

$$\mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = 0, \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = 0, \cdots, \mathbf{a}_m^\top \mathbf{x} = 0$$

  - $\mathbf{x}$가 A의 모든 행과 Orthogonal(직교)

→$\mathbf{x}$ 는 A의 행공간 내 모든 벡터와 Orthogonal

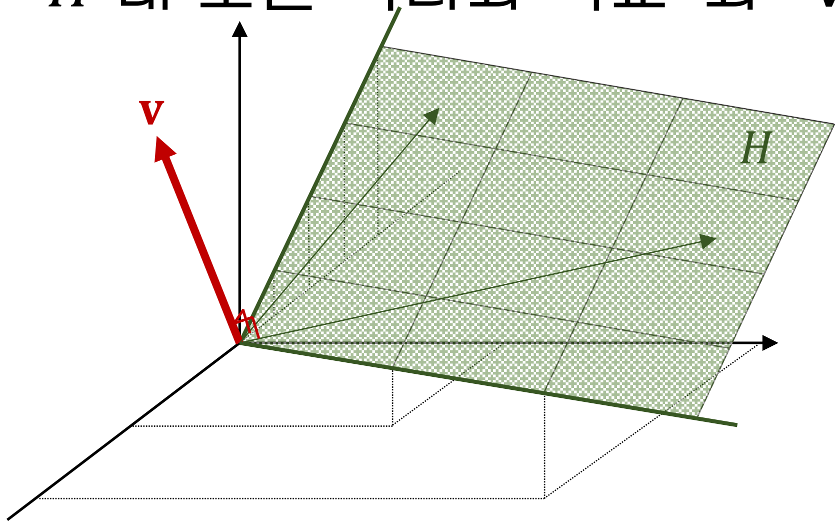
$$(c_1 \mathbf{a}_1^\top + c_2 \mathbf{a}_2^\top + \cdots + c_m \mathbf{a}_m^\top)\mathbf{x} = 0$$

Orthogonal Complement

- 벡터 $\mathbf{v}$가 부분공간 $H \subset \mathbb{R}^n$ 내 모든 벡터와 직교한다면, $\mathbf{v}$는 H에 Orthogonal

Orthogonal Complement (직교여공간)

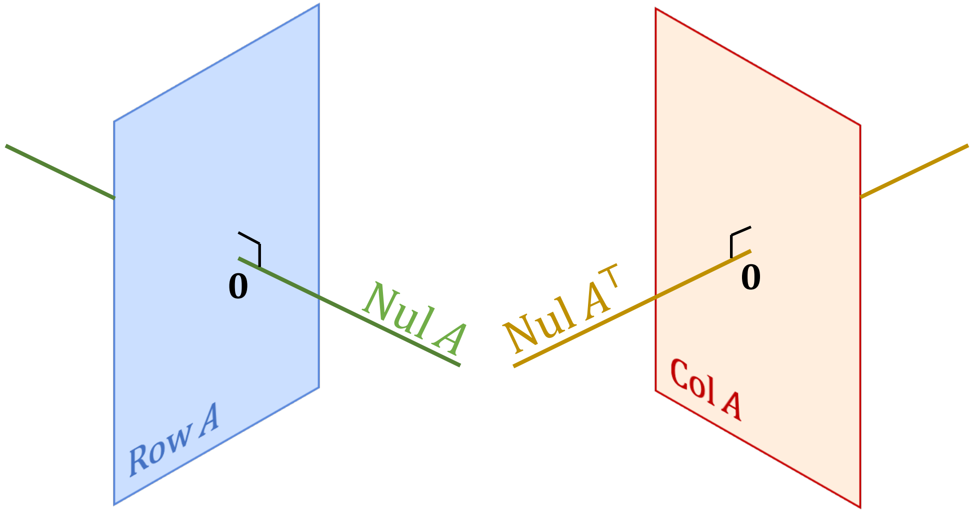
- H와 Orthogonal한 모든 벡터 $\mathbf{v}$의 집합
- $H^\perp$로 표기하고 H perpendicular 혹은 H perp로 읽음
- 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$를 가정했을 때, "$H$ 내 모든 벡터와 직교"와 "$\mathbf{v} \in H^\perp$"는 동치
- $H^\perp$ 또한 $\mathbb{R}^n$의 부분공간
- $\dim H + \dim H^\perp = n$



행렬 A에서 만들어지는 주요 부분공간

행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$에서

- 열공간 (Column space): $\mathrm{Col}\, A$
  - $\dim \mathrm{Col}\, A = \mathrm{rank}\, A = r$
- 행공간 (Row space): $\mathrm{Row}\, A = \mathrm{Col}\, A^{\top}$
  - $\dim \mathrm{Row}\, A = \mathrm{rank}\, A = r$
- 영공간 (Null space): $\mathrm{Nul}\, A = (\mathrm{Row}\, A)^{\perp}$
  - $\dim \mathrm{Nul}\, A = n - r$
- 좌영공간 (Left null space): $\mathrm{Nul}\, A^{\top} = (\mathrm{Col}\, A)^{\perp}$
  - $\dim \mathrm{Nul}\, A^{\top} = m - r$



요약

- 부분 공간 및 기저의 정의와 특성 제시
- 열공간과 행공간의 의미와 이에 기반한 Rank의 계산 확인
- 영공간의 정의와 Orthogonal complement로써의 행공간과의 관계 파악
- 행렬의 주요 부분공간 간의 관계 학습