Norm과 Metric

수업 목표

이번 수업의 핵심:

- Norm의 정의와 다양한 벡터 Norm의 예시
- 행렬 Norm의 계산 방법
- Metric의 정의와 두 벡터 사이의 거리
- 두 벡터가 직교(Orthogonal)함의 의미

핵심 개념

- Norm, Metric
- L_1, L_2, L_∞, L_p-norm, Frobenius norm
- 단위 벡터
- Orthogonality

벡터 Norm

Norm (놈, 노름) → $\|\cdot\|$

- **정의:** 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$를 받아 스칼라 값을 출력하며 다음을 만족하는 함수
  1) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ ← Norm은 음수가 될 수 없음
  2) $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ← "$\mathbf{v}$가 영벡터"와 "Norm이 0"은 동치
  3) 스칼라 c가 주어졌을 때, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$ ← 벡터를 상수배하면 Norm도 상수배
  4) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ ← 삼각부등식
- 일반적으로 Norm은 크기/길이를 의미

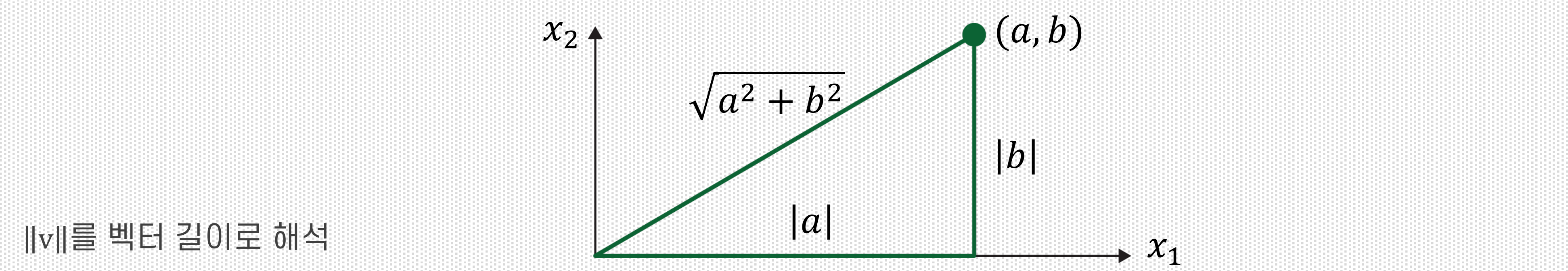
예시)

- $v_1, \dots, v_n$을 원소로 갖는 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$를 가정했을 때,

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

벡터 Norm의 기하적 의미

- 벡터 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$를 가정
- $\|\mathbf{v}\|$는 원점과 $\mathbf{v}$를 잇는 선분의 길이
- 이는 피타고라스 정리를 통해 다음 그림의 삼각형처럼 나타낼 수 있음:



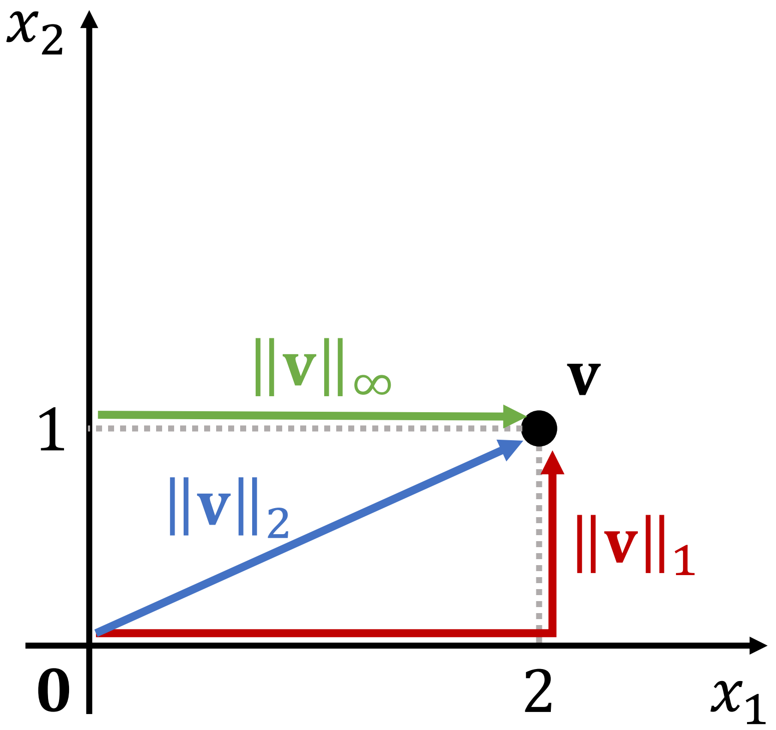
- 임의의 스칼라 c에 대하여, 벡터 $c\mathbf{v}$의 길이는 벡터 $\mathbf{v}$ 길이의 $|c|$배와 동일

$$\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$$

다양한 벡터 Norm 예시

예시) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

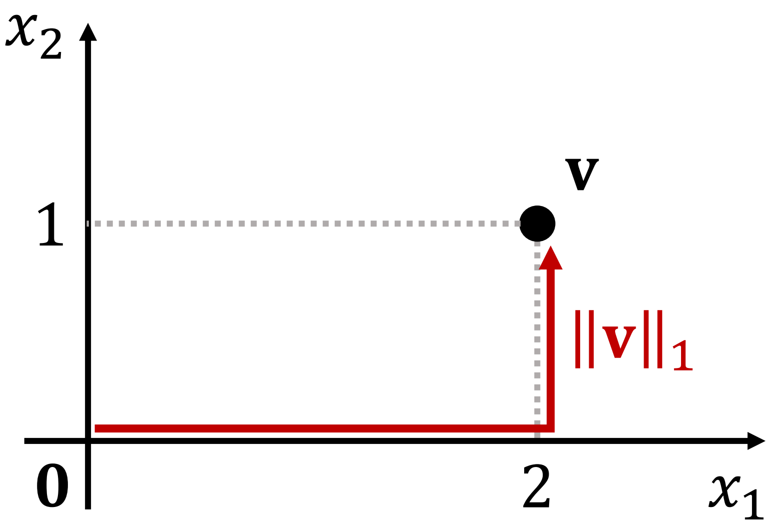
- L_1-norm: $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| = 3$
- L_2-norm: $\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{3}$
  - 일반적으로 $\|\mathbf{v}\|$은 $\|\mathbf{v}\|_2$을 의미
  - $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
- L_∞-norm: $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |v_i| = 2$
- L_p-norm: $\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ where $1 \le p < \infty$
- $\|\mathbf{v}\|_A = \|A\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\mathbf{a}_i^\top \mathbf{v}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$



벡터 Norm 조건 증명

$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$가 Norm임을 증명해보자

1) $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \geq 0$
2) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이라면 $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$
   $\|\mathbf{v}\|_1 = 0$ 이라면 모든 v_i가 0이어야만 함 ($\because$ 귀류법을 활용)
3) $\|c\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |cv_i| = \sum_{i=1}^{n} |c||v_i| = |c| \sum_{i=1}^{n} |v_i| = |c|\|\mathbf{v}\|_1$
4) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|u_i| + |v_i|) = \sum_{i=1}^{n} |u_i| + \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1$



단위 벡터

- 전체 길이가 1인 벡터를 단위 벡터(Unit vector)라고 부름

벡터 정규화 (Vector normalization)

- 영벡터가 아닌 $\mathbf{v}$를 그 길이로 나누면, 단위 벡터를 얻을 수 있음:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

- $\mathbf{u}$는 $\mathbf{v}$와 동일한 방향을 향하지만, 그 길이가 1임

행렬 Norm

- 행렬 $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$의 $p, q \geq 1$에 대한 $L_{p,q}$-norm:

$$\|A\|_{p,q} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

  - 각 $\mathbf{a}_i$ 열에 대해 L_p-norm을 적용한 뒤, 그 결과물에 L_q-norm을 적용

예시)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- $\|A\|_{1,2}$
  1) 각 열의 L_1-norm을 계산: $3, 5$
  2) 위 결과물의 L_2-norm을 계산: $\sqrt{3^2 + 12^2}$
- $\|A\|_{2,1}$
  1) 각 열의 L_2-norm을 계산: $\sqrt{5}, \sqrt{50}$
  2) 위 결과물의 L_1-norm을 계산:$\sqrt{5} + \sqrt{50}$

행렬 Norm

- $L_{p,q}$-norm에서 $p = q$라면:

$$\|A\|_{p,p} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^{p}\right)^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

  - 이는 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 행렬을 $\mathbb{R}^{mn}$ 벡터 행태로 취급하여 Norm을 계산한 것과 같음

Frobenius norm (또는 Hilbert-Schmidt norm)

- $p = q = 2$인 특수한 케이스

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}}$$

Norm vs. Metric

- Norm은 단일 벡터의 길이를 측정
- Metric은 두 벡터 사이의 거리를 측정

- Metric은 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$를 받아 스칼라 값을 출력하며 다음을 만족하는 함수
  1) $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ ← "거리가 0"과 "두 벡터는 동일 벡터"는 동치
  2) $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ← 교환법칙
  3) $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathrm{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ← 삼각부등식

예시)

- 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 사이의 거리 $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$를 벡터 $\mathbf{u} - \mathbf{v}$의 길이/Norm으로 계산

$$\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

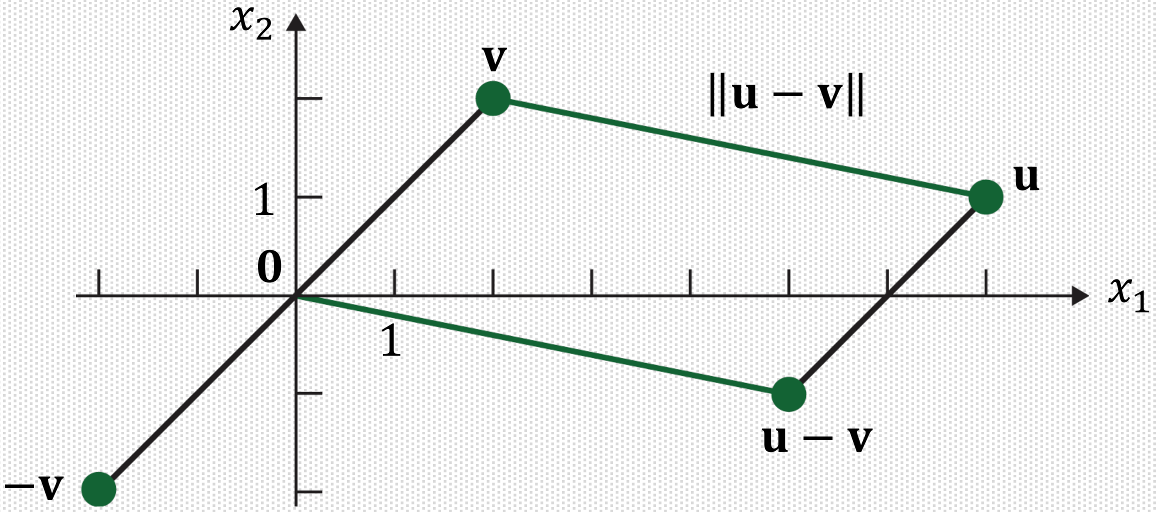
  - 일반적으로 L_2-norm을 사용하며, L_p-norm 사용 시 L_p-distance라고 호칭

벡터 사이의 거리 계산 예시

- 벡터 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$인 경우:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

- $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 사이의 거리는 $\mathbf{u} - \mathbf{v}$와 $\mathbf{0}$ 사이의 거리와 같음



$\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 사이의 거리는 $\mathbf{u} - \mathbf{v}$의 길이와 같음

두 벡터 사이의 각도와 내적

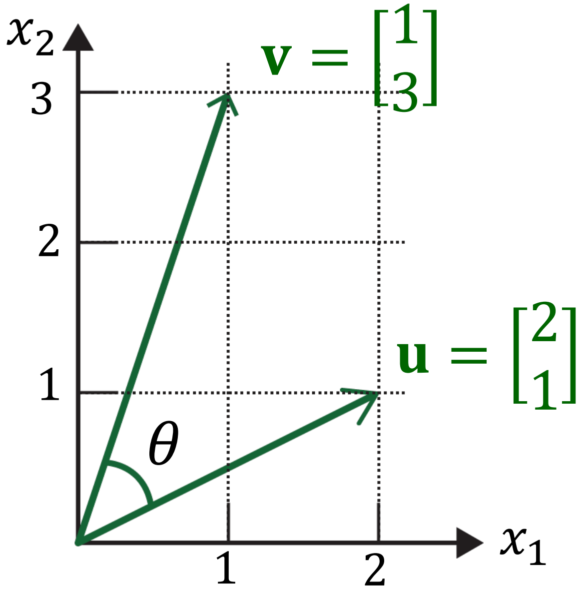
- $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 내적은 두 벡터의 Norm과 사이각으로 표현할 수 있음

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

예시) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = 5$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 5 = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$



직교 벡터

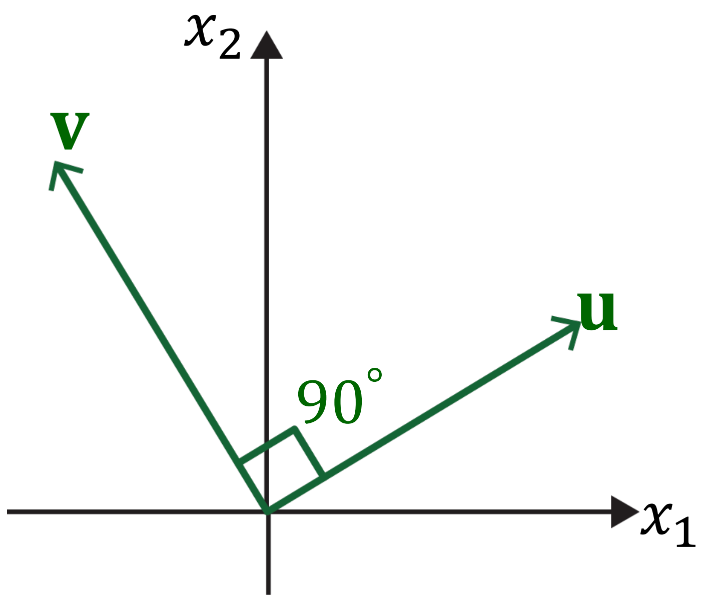
- 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$가 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$이라면, 두 벡터는 서로 Orthogonal(직교)함

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$가 영벡터가 아니라면 $\cos\theta = 0$

$\Rightarrow$ $\theta = 90°$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 서로 수직



요약

- 벡터의 길이로써 Norm의 정의와 L_2-norm 등 대표적 예시 소개
- $L_{p,q}$-norm을 비롯한 행렬의 Norm 계산 학습
- 벡터 간의 거리로써 Metric의 정의와 Norm을 활용한 계산 방법
- 내적과 두 벡터 사이의 각도 관계 및 Orthogonal 조건 확인