Eigenvector와 Eigenvalue

수업 목표

이번 수업의 핵심:

- Eigenvector와 Eigenvalue의 정의 및 특성
- Eigenvector와 Eigenvalue 계산 방법과 예시
- Characteristic equation의 개념과 예시

핵심 개념

- Eigenvector, Eigenvalue
- Eigenspace
- Characteristic equation

Eigenvector와 Eigenvalue의 정의

정의) 정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에 대해서,
영벡터가 아닌 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}$가 어떤 스칼라 값 λ에 대해서 다음 식을 만족:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- 이 때, λ는 A의 Eigenvalue이고, 대응되는 $\mathbf{x}$를 Eigenvector로 부름

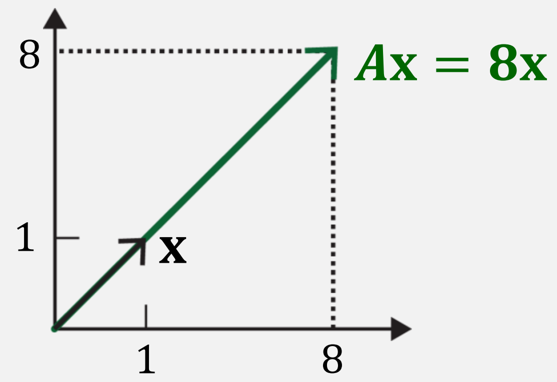
변환 관점에서의 Eigenvector

선형 변환 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 를 가정하면…

- $\mathbf{x}$가 Eigenvector라면 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- 이 경우, 출력 벡터는 $\mathbf{x}$와 같은 방향에 λ배만큼 크기가 달라진 벡터가 됨

예시) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$이라면, Eigenvector는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{A}_{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{=}_{=} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \underbrace{8}_{8} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$



- $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$와 $8\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 비교했을 때 계산 비용 상 후자가 매우 유리

Eigenvector와 Eigenvalue

수식 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$는 다음과 같이 다시 쓸 수 있음:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

- 위 식을 만족하는 Nontrivial (자명하지 않은) $\mathbf{x}$가 있음 $\Leftrightarrow$ λ가 A의 Eigenvalue
  - 자명하지 않다 → $\mathbf{x}$가 영벡터가 아님
- 위 식을 만족하는 Null space를 A의 λ에 대응되는 Eigenspace라 부름
  - 영벡터와 위 식을 만족하는 Eigenvector로 Eigenspace가 구성

Eigenvector와 Eigenvalue의 예시

문제)

8이 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$의 Eigenvalue임을 증명하라

답안)

- $(A - 8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$를 만족하는 Nontrivial $\mathbf{x}$가 존재하면 8은 A의 Eigenvalue

$$(A - 8I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- 위 식의 해답은 0이 아닌 모든 c에 대해서 $\mathbf{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 이는 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$의 Span과 동일

Eigenvector와 Eigenvalue의 예시

문제)

-3이 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$의 Eigenvalue임을 증명하라

- 해당 문제에서 -3 역시 Eigenvalue임

$$(A + 3I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- 위 식의 해답은 0이 아닌 모든 c에 대해서 $\mathbf{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$
- 이는 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}\right\}$의 Span과 동일

Characteristic Equation

행렬 A에서 어떻게 8, -3과 같은 Eigenvalue를 찾을 수 있을까?

- $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$에 자명하지 않는 답이 있음 → $(A - \lambda I)$는 Non-invertible
  - 만약 $(A - \lambda I)$에 역행렬이 존재한다면 $\mathbf{x}$는 무조건 영벡터가 됨

$$(A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\mathbf{x} = (A - \lambda I)^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- 따라서 다음 행렬식을 풂으로써 Eigenvalue를 구할 수 있음:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

  - 이러한 행렬식을 Characteristic equation이라 부름
  - 만약 해답이 유일하지 않다면, $A - \lambda I$의 열들은 선형 종속

Characteristic Equation의 예시

- 이전 예시에서 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$는 원래 역행렬이 존재

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 30 = -24 \neq 0$$

- Characteristic equation을 풀어 $A - \lambda I$가 Non-invertible한 λ를 찾고자 함:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda) - 30$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 25 = (\lambda - 8)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = -3 \text{ or } 8$$

- Eigenvalue를 얻은 후 $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$를 풀어 Eigenvector를 계산

Eigenspace

- 하나의 λ에 대응되는 Eigenspace의 차원이 1보다 클 수 있음을 주의
  - 이 경우 Eigenspace 상의 모든 벡터 $\mathbf{x}$가 다음 식을 만족:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

A acts as a dilation in the eigenspace

요약

- Eigenvector, Eigenvalue의 정의와 예시를 통한 개념 파악
- Eigenvector로 구성된 Eigenspace 특성의 이해
- Characteristic equation을 활용한 Eigenvector의 계산