선형대수의 구성요소

수업 목표

이번 수업의 핵심:

- 선형대수의 구성요소
- 행렬의 표기 방법과 기본 법칙
- 내적의 의미와 특성

핵심 개념

- 스칼라, 벡터, 행렬
- 열 벡터, 행 벡터
- 내적
- 정사각행렬, 직사각행렬, 전치행렬

스칼라, 벡터, 그리고 행렬

- **스칼라 (Scalar):** 단일 숫자 - $x \in \mathbb{R}$ → e.g., $x = 3.8$
  - 기울인 소문자를 표기에 사용
- **벡터 (Vector):** 일련의 숫자 열 - $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ → e.g., $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - 굵은 소문자를 표기에 사용
- **행렬 (Matrix):** 2차원 숫자 배열 - $X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2}$ → e.g., $X = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
  - 기울인 대문자를 표기에 사용
  - 행렬 크기가 3×2: 행이 3개, 열이 2개
  - 행 벡터 (Row vector): 수평 벡터
  - 열 벡터 (Column vector): 수직 벡터

행렬 표기법

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: 정사각행렬 (정방행렬, Square matrix)
  - 행의 개수 = 열의 개수, e.g., $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: 직사각행렬 (장방행렬, Rectangular matrix)
  - 행의 개수 ≠ 열의 개수, e.g., $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
- $A_{i,j}$: A의 (i,j)번째 요소, e.g., $A_{2,1} = 3$
- $A_{i,:}$, $A_{:,j}$: A의 i번째 행, j번째 열, e.g., $A_{2,:} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{:,2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $A^\top$: 전치행렬 (Transpose of matrix)
  - 대각선 기준으로 행과 열을 뒤집음, e.g., $A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

열 벡터와 행 벡터

- n-차원 벡터는 일반적으로 열 벡터를 의미
  - 즉, $n \times 1$ 크기 행렬

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$$

- 한편, 행 벡터는 일반적으로 전치된 형태(Transpose)로 쓰임
  - 즉, $n \times 1$ 크기 행렬

$$\mathbf{x}^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

벡터와 행렬의 덧셈과 곱셈

- $C = A + B$: 요소별 덧셈. 즉, $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
  - 행렬 A, B, C가 모두 동일한 크기이어야 함, 즉, $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $c\mathbf{x}$, cX: 벡터/행렬의 스칼라 곱셈
  - e.g., $2\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}, 2\begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 12\\6 & 8\\10 & 4\end{bmatrix}$

- $C = AB$: 행렬-행렬 곱셈, 즉, $C_{ij} = \sum_k A_{i,k}B_{k,j}$
  - e.g., $\begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & 5\\11 & 1\\9 & -3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} = [14]$, $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\\5 & 10\end{bmatrix}$

    Size: $(3\times2)(2\times2) = 3\times2$, $(1\times3)(3\times1) = 1\times1$, $(3\times1)(1\times2) = 3\times2$
  - 행렬-행렬 곱셈은 좌측 행렬 행과 우측 행렬 열의 내적(Inner product)로 정의

내적

- 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$에 대하여, $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 열 벡터 형태의 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 행렬이라고 가정
  - $\mathbf{u}^\top$는 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 행렬,
- 행렬곱 $\mathbf{u}^\top\mathbf{v}$는 $\mathbb{R}^{1\times 1}$ 행렬 → 스칼라 값으로 쓸 수 있음

- $\mathbf{u}^\top\mathbf{v}$에 해당하는 값을 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$의 내적 (Inner product, Dot product)라고 부름

$$\mathbf{u}^\top\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

예시) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$의 경우:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 14$$

$$(1\times 3)(3\times 1) = 1\times 1$$

내적의 특성

- 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$와 스칼라 c가 주어졌을 때,
  1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ← 교환법칙
  2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ← 분배법칙
  3) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
  4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$
  5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

- 특성 3)과 4)는 아래의 유용한 규칙을 생성:

$$(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{w} = c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}) + \cdots + c_p(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{w})$$

행렬 곱셈의 교환법칙

행렬 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않음

$$AB \neq BA$$

- 예를 들어 $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times5}$라면 AB는 정의돼도 BA는 정의되지 않음

- 만약 $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$, $B \in R^{3\times2}$로 BA가 정의되면?

  → $AB \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $BA \in \mathbb{R}^{3\times3}$이므로 크기가 맞지 않음, 따라서 $AB \neq BA$.

- 만약 $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$로 AB와 BA의 크기가 일치하면?

  → 이러한 경우에도 일반적으로 $AB \neq BA$.

예시) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23 & 34\\31 & 46\end{bmatrix}$

행렬의 특성

- $(AB)^\top = B^\top A^\top$: 전치행렬의 특성

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\right)^\top = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\6 & 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}39 & 33 & 27\\26 & 22 & 18\\13 & 11 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}39 & 26 & 13\\33 & 22 & 11\\27 & 18 & 9\end{bmatrix}^\top$$

(3×2) (2×1) (1×3) (3×1) (1×2) (2×3) (3×3) (3×3)

- $A(BC) = (AB)C$: 결합법칙

$$\begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 6\\3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\6 & 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\\11\\9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}39 & 26 & 13\\33 & 22 & 11\\27 & 18 & 9\end{bmatrix}$$

(3×2) (2×1) (1×3) (3×2) (2×3) (3×1) (1×3) (3×3)

- $A(B+C) = AB + AC$: 분배법칙

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$$

요약

- 스칼라, 벡터, 행렬과 같은 선형 대수의 기본 구성 요소 파악
- 정사각행렬, 직사각행렬, 전치행렬의 정의 확인
- 내적 계산 방법과 특성
- 행렬의 덧셈, 곱셈 및 교환/결합 법칙 등 다양한 수학적 법칙 학습

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 26 & 13 \\ 33 & 22 & 11 \\ 27 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$