선형결합과 Span

수업 목표

이번 수업의 핵심:

- 선형결합과 Span의 정의와 관계
- 선형결합, Span, 그리고 벡터방정식의 기하적 설명
- 선형결합을 통한 행렬 곱셈 해석

핵심 개념

- 선형결합
- Span

선형결합

벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$와 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$가 주어졌을 때,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

→ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$의 선형결합(Linear combination)

- 위의 선형결합은 $c_1, c_2, \ldots, c_p$를 가중치(Weight) 혹은 계수(Coefficient)로 가짐
  - 선형결합의 가중치는 0을 포함해서 그 어떤 실수도 될 수 있음

예시)

번호	체중 (kg)	신장 (cm)	흡연 여부	수명
1	65	180	흡연자 (=1)	72
2	50	160	비흡연자 (=0)	82
3	60	170	흡연자 (=1)	68

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 65 & 180 & 1 \\ 50 & 160 & 0 \\ 60 & 170 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 72 \\ 82 \\ 68 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- 행렬방정식은 선형결합의 벡터방정식으로 변환할 수 있음:

$$\begin{bmatrix} 65 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 170 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 72 \\ 82 \\ 68 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}$$

벡터의 생성 - Span

Span $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$: 벡터 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$의 가능한 모든 선형결합

- 곧, Span $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$은 다음과 같이 나타날 수 있는 모든 벡터를 의미

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

  - $c_1, \cdots, c_p$는 임의의 스칼라 값을 의미

→ Span $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$은 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$로 생성(Span)된 $\mathbb{R}^n$의 부분 집합

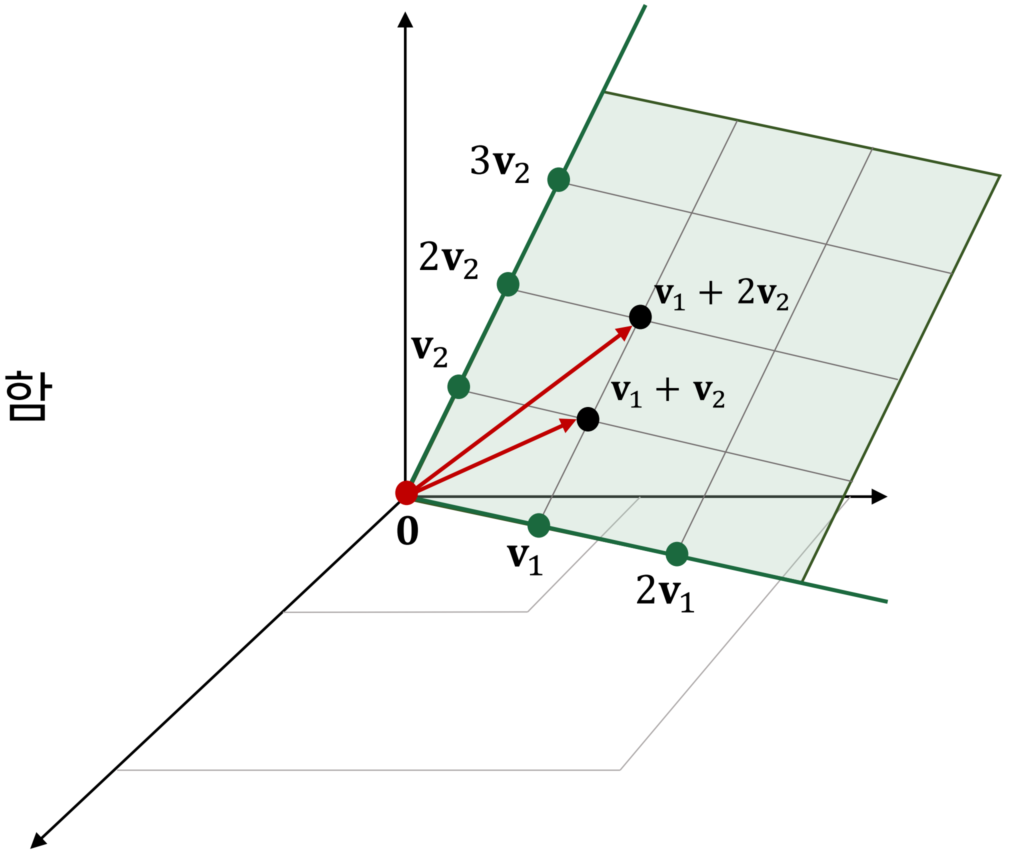
예시) Span $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \cdots\right\}$

- $c_1 = 1, c_2 = 1 \rightarrow c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix}$
- $c_1 = 0, c_2 = 1 \rightarrow c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$
- $c_1 = 1, c_2 = 0 \rightarrow c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$
- $c_1 = 0, c_2 = 0 \rightarrow c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

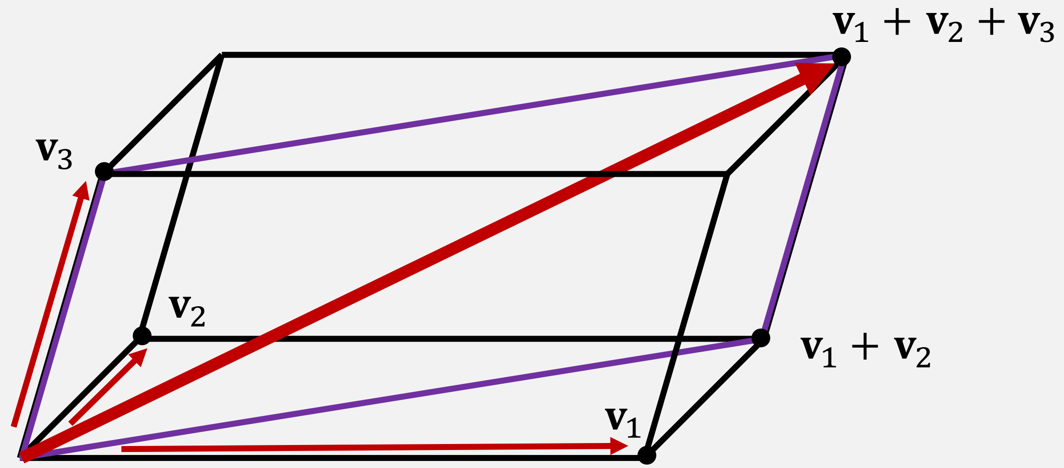
Span의 기하적 설명

- 다음과 같은 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$를 가정
  - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$가 영벡터가 아님
  - $\mathbf{v}_2$가 $\mathbf{v}_1$의 배수가 아님

→ Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$은 $\mathbf{0}$과 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$를 포함하는 평면
  - $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{0}$을 지나는 직선과 $\mathbf{v}_2$와 $\mathbf{0}$을 지나는 직선을 포함



- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$의 경우 → **평행 육면체**



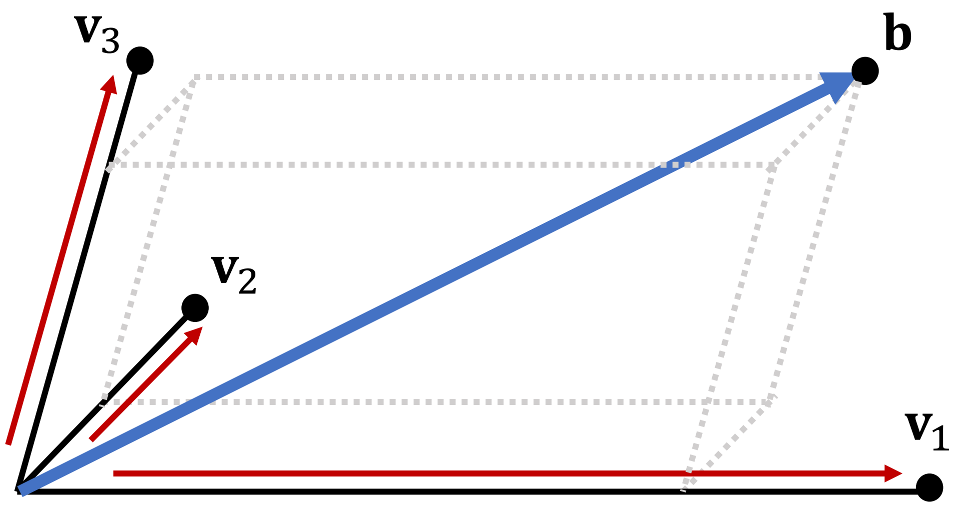
벡터방정식의 기하적 설명

- 벡터 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$이 주어졌을 때 $\mathbf{b}$가 되는 선형결합 찾기

$$\begin{bmatrix} 65 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 170 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 72 \\ 82 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 x_1 \quad + \quad \mathbf{a}_2 x_2 \quad + \quad \mathbf{a}_3 x_3 \quad = \quad b$$

- 이때, $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$이어야만 해답이 존재



벡터 선형결합을 통한 행렬 곱셈

복습: 행렬-행렬 곱셈은 좌측 행렬 행과 우측 행렬 열의 내적(Inner product)

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 11 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

- 벡터방정식의 예처럼, $A\mathbf{x}$를 좌측 행렬 열들의 선형결합으로 볼 수 있음

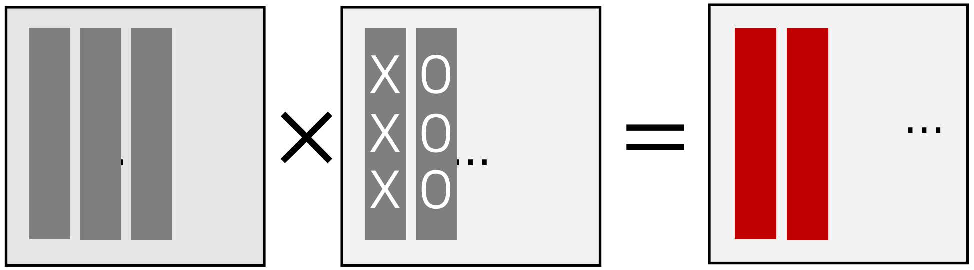
$$\begin{bmatrix} 65 & 180 & 1 \\ 50 & 160 & 0 \\ 60 & 170 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3$$

열들의 결합을 통한 행렬 곱셈

- 행렬 내 열들의 선형결합
  - 좌측 행렬: 일련의 열들, 우측 행렬: 계수

우측 행렬이 단일 열로 이루어진 경우

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3$$



우측 행렬이 여러 열로 이루어진 경우

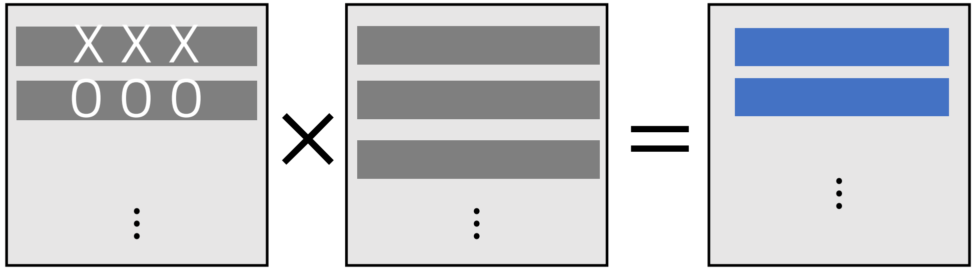
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ | & | \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1$$

행들의 결합을 통한 행렬 곱셈

- 행렬 내 행들의 선형결합
  - 좌측 행렬: 계수, 우측 행렬: 일련의 행들



좌측 행렬이 단일 행으로 이루어진 경우

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{array}{r}1\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\\ +2\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ +3\times\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

좌측 행렬이 여러 행으로 이루어진 경우

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}- & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} & -\\ - & \mathbf{y}^{\mathrm{T}} & -\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Rank-1 외적의 합을 통한 행렬 곱셈

- Rank-1 외적 (Outer product)

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

- Rank-1 외적의 합

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\-4 & -5 & -6\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

- Rank-1 외적 합은 기계 학습에서 다양하게 활용됨
  - 다변수 가우시안 분포의 공분산 행렬
  - Gram matrix를 활용한 스타일 변환
  - 저차원 행렬 분해

요약

- 선형결합과 Span의 정의와 특성 학습
- 기하적 설명을 통한 선형결합, Span, 벡터방정식 이해
- 행렬 곱셈 해석을 위한 다양한 선형결합 소개