

# **Naïve Bayes Classifier**

# 수업 목표

## 이번 수업의 핵심:

- Bayes' Rule을 이용한 Naïve Bayes 분류기 이해
- Naïve Bayes를 이용한 MNIST 분류기 학습
- Naïve Bayes를 이용한 MNIST 분류기 추론

## 핵심 개념

- Bayes' Rule
- Naïve Bayes
- MNIST

# MNIST Dataset

MNIST (Modified National Institute of Standards and Technology)



- 0에서 9까지 손글씨 숫자 사진
  - 55,000개의 Training Examples
  - 10,000개의 Test Examples
- 각 숫자 사진들은 전처리됨
  - 숫자가 사진의 중앙에 정렬
  - 각 사진이  $28 \times 28$  해상도로 고정
  - 각 픽셀은 0에서 1사이의 실수 값을 가짐
  - 이번 예시에선 0 또는 1을 가진다고 가정
    - Threshold를 이용

# Naïve Bayes 분류기

Bayes' Rule을 이용한 간단한 모델을 통해 분류 문제를 푸는 방법

- Naïve: (지나치게) 순진한
- 분류 문제의 확률적 정의:

입력  $\mathbf{x}$ 를 줬을 때, 분류기  $P(Y|X)$ 를 통해서 가장 확률이 높은 출력  $y$ 를 찾는 것

- 입력  $\mathbf{x}$ , 출력  $y$ 인 분류기를 Bayes' Rule을 통해 간접적으로 모델링

$$y_{\text{pred}}(\mathbf{x}) = \underset{y}{\operatorname{argmax}} P(Y = y | X = \mathbf{x})$$

분류 문제의 확률적 정의

$$= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \frac{P(X = \mathbf{x} | Y = y) P(Y = y)}{P(X = \mathbf{x})}$$

Bayes' Rule

$$= \underset{y}{\operatorname{argmax}} P(X = \mathbf{x} | Y = y) P(Y = y)$$

Naïve Bayes 분류기

# Naïve Bayes 분류기

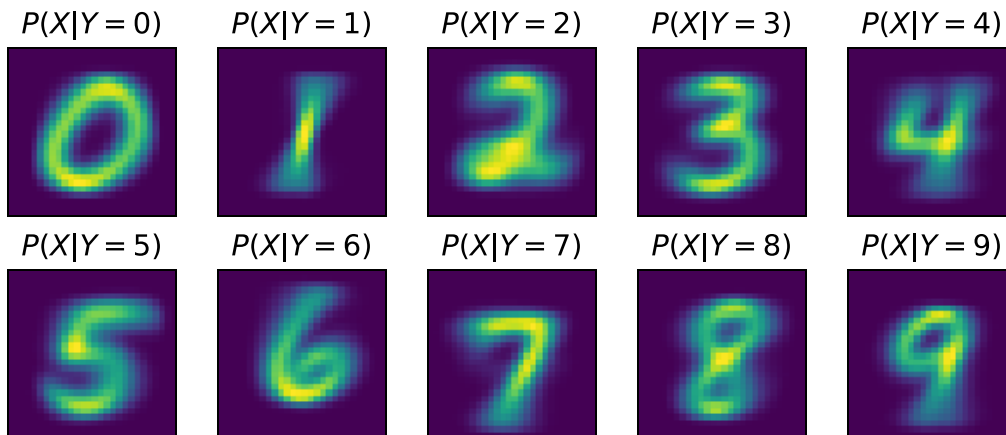
- Naïve Bayes 분류기

$$y_{\text{pred}}(\mathbf{x}) = \underset{y}{\operatorname{argmax}} P(X = \mathbf{x} | Y = y) P(Y = y)$$

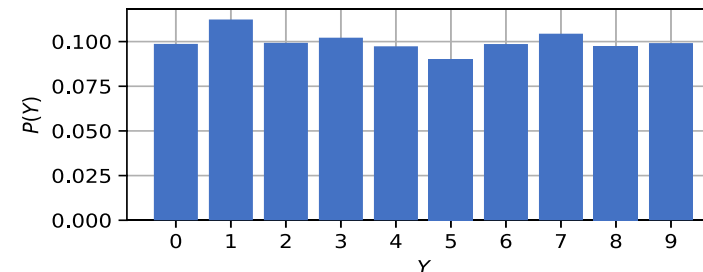
- $P(Y = y | X = \mathbf{x})$ 는 입력의 경우의 수가 너무 커서 모델링이 어려움
- $P(X = \mathbf{x} | Y = y)$ 와  $P(Y = y)$ 로 쪼개어 각각을 모델링 하는 것은 간단  
통계적으로 등장하는 비율을 계산

## MNIST에서 Naïve Bayes 분류기 모델링 예시

클래스가 주어졌을 때 이미지의 확률 분포



클래스 별 확률 분포



# Naïve Bayes 분류기를 이용한 손글씨 분류: 학습

$P(X|Y)$  모델링: 숫자에 따른 이미지의 분포

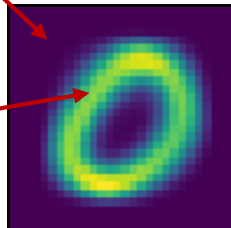
1. 학습 데이터 55,000장을 숫자별로 나누어 가짐
2. 각 숫자 별로  $28 \times 28$  픽셀에 대해 위치 별로 1이 등장한 비율을 계산

각 위치에 대해서 1이 등장한 비율을 도식화 한 모습

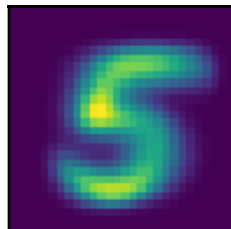
손글씨 "0" 5,923장 중  
50번 1이 등장: 50/5923

손글씨 "0" 5,923장 중  
3000번 1이 등장: 3000/5923

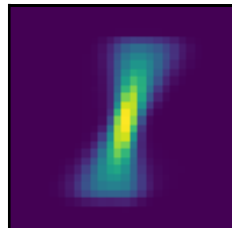
$P(X|Y=0)$



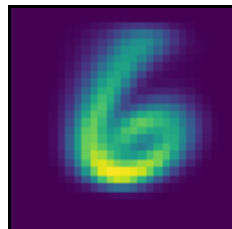
$P(X|Y=5)$



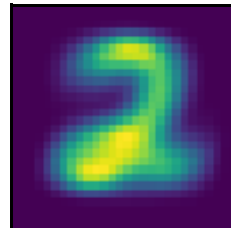
$P(X|Y=1)$



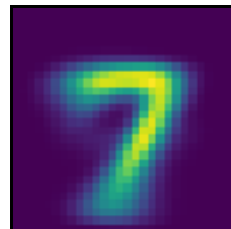
$P(X|Y=6)$



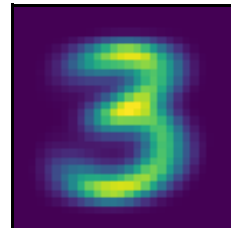
$P(X|Y=2)$



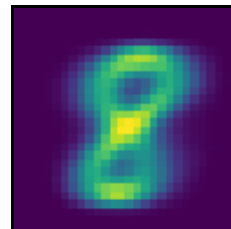
$P(X|Y=7)$



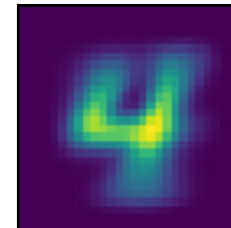
$P(X|Y=3)$



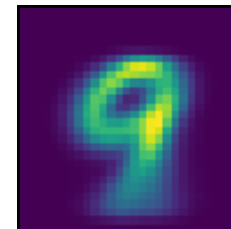
$P(X|Y=8)$



$P(X|Y=4)$



$P(X|Y=9)$



# Naïve Bayes 분류기를 이용한 손글씨 분류: 학습

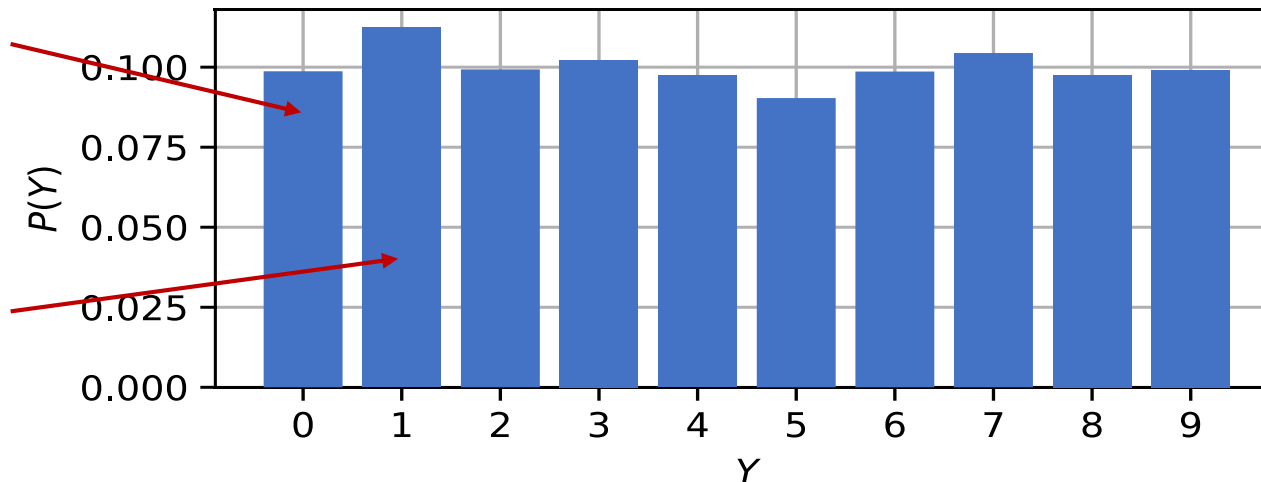
$P(Y)$  모델링: 전체 데이터 중 숫자가 등장하는 분포

1. 학습 데이터 55,000장을 숫자별로 나누어 가집
2. 각 숫자가 등장하는 횟수를 전체 데이터 수로 나누어 등장하는 비율을 계산

전체 학습 데이터 중에서 각 숫자 별로 등장한 비율을 계산한 모습

전체 학습 데이터 55,000장 중  
“0”은 5923번 등장:  $5923/55000$

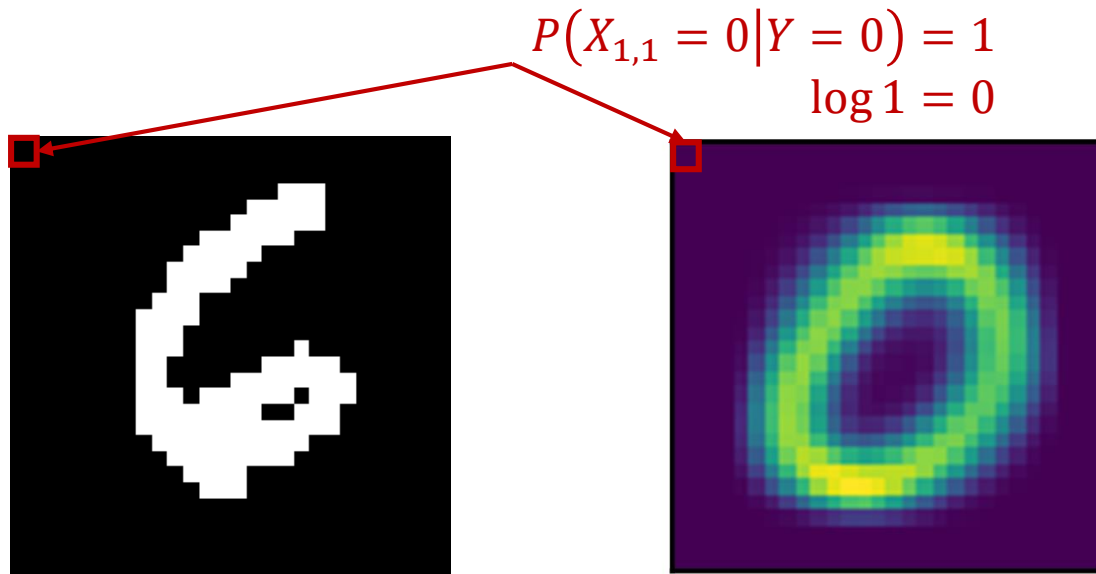
전체 학습 데이터 55,000장 중  
“1”은 6742번 등장:  $6742/55000$



# Naïve Bayes 분류기를 이용한 손글씨 분류: 추론

$P(X = \mathbf{x}|Y = y)$  계산하기: 학습된  $P(X|Y = y)$ 에  $\mathbf{x}$ 를 대입

- $P(X|Y = y)$ 는 숫자가 주어졌을 때, 픽셀 별로 등장할 확률을 알려준다.
- 추론하고 싶은  $\mathbf{x}$ 가 주어졌을 때,  $P(X = \mathbf{x}|Y = y) = \prod_{i,j} P(X_{i,j} = \mathbf{x}_{i,j}|Y = y)$
- Log-likelihood:  $\log P(X = \mathbf{x}|Y = y) = \sum_{i,j} \log P(X_{i,j} = \mathbf{x}_{i,j}|Y = y)$



$\mathbf{x}$ : 추론하고 싶은 이미지

$P(X|Y = 0)$

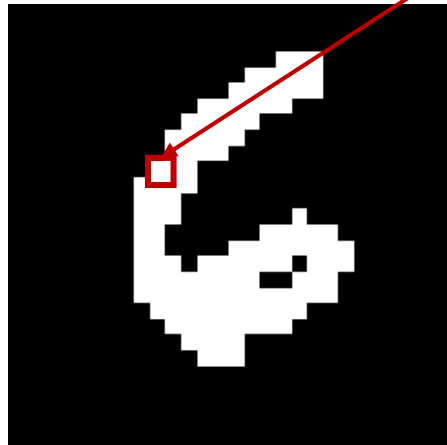
$$\begin{aligned} \log P(X = \mathbf{x}|Y = y) = & \boxed{\log P(X_{1,1} = 0|Y = 0)} \quad 0 \\ & + \log P(X_{1,2} = x_{1,2}|Y = 0) \\ & + \dots \\ & + \log P(X_{28,28} = x_{28,28}|Y = 0) \end{aligned}$$



# Naïve Bayes 분류기를 이용한 손글씨 분류: 추론

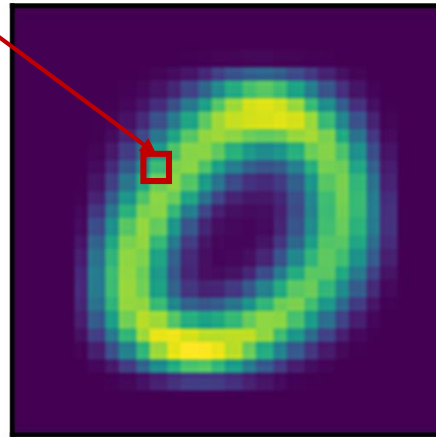
$P(X = \mathbf{x}|Y = y)$  계산하기: 학습된  $P(X|Y = y)$ 에  $\mathbf{x}$ 를 대입

- $P(X|Y = y)$ 는 숫자가 주어졌을 때, 픽셀 별로 등장할 확률을 알려준다.
- 추론하고 싶은  $\mathbf{x}$ 가 주어졌을 때,  $P(X = \mathbf{x}|Y = y) = \prod_{i,j} P(X_{i,j} = \mathbf{x}_{i,j}|Y = y)$
- Log-likelihood:  $\log P(X = \mathbf{x}|Y = y) = \sum_{i,j} \log P(X_{i,j} = \mathbf{x}_{i,j}|Y = y)$



$\mathbf{x}$ : 추론하고 싶은 이미지

$$P(X_{11,10} = 1|Y = 0) = 0.6702$$
$$\log 0.6702 \approx -0.4$$



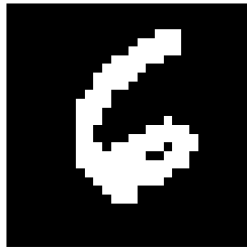
$P(X|Y = 0)$

$$\begin{aligned} \log P(X = \mathbf{x}|Y = y) &= \log P(X_{1,1} = 0|Y = 0) \\ &+ \dots \\ &+ \boxed{\log P(X_{11,10} = 1|Y = 0)} - 0.4 \\ &+ \dots \\ &+ \log P(X_{28,28} = x_{28,28}|Y = 0) \\ &= -259.54 \end{aligned}$$

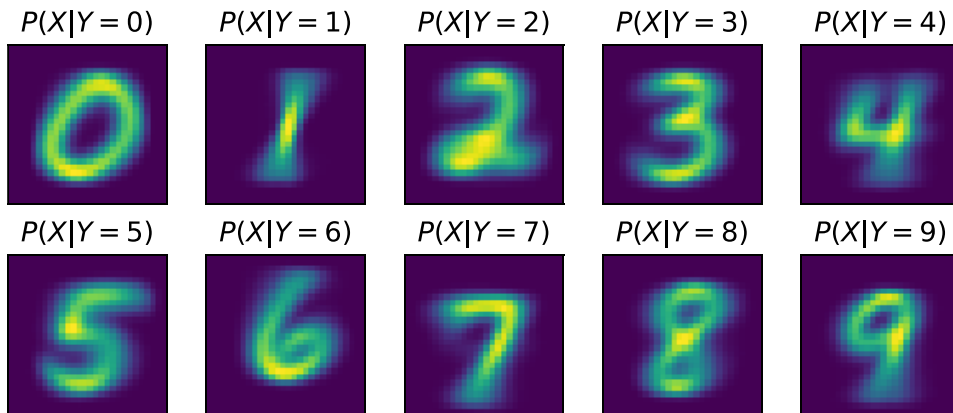
# Naïve Bayes 분류기를 이용한 손글씨 분류: 추론

$\operatorname{argmax}_y \log P(X = \mathbf{x} | Y = y)$  계산하기:

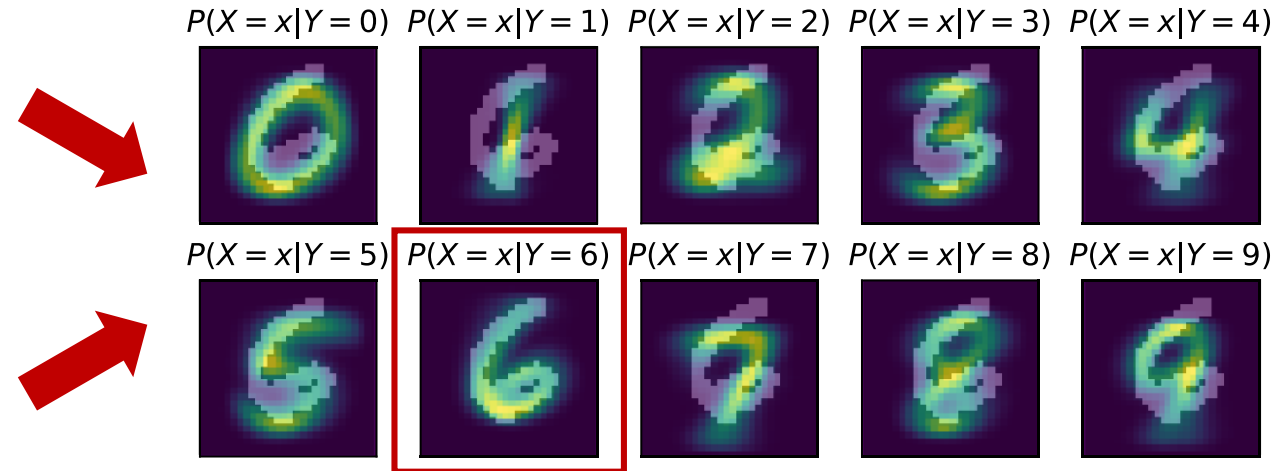
- $y = 0, 1, \dots, 9$ 를 모두 넣어보고 가장 높은 값을 찾는다



$\mathbf{x}$ : 추론하고 싶은 이미지



$P(X|Y = y)$ : 학습된 조건부 확률 분포

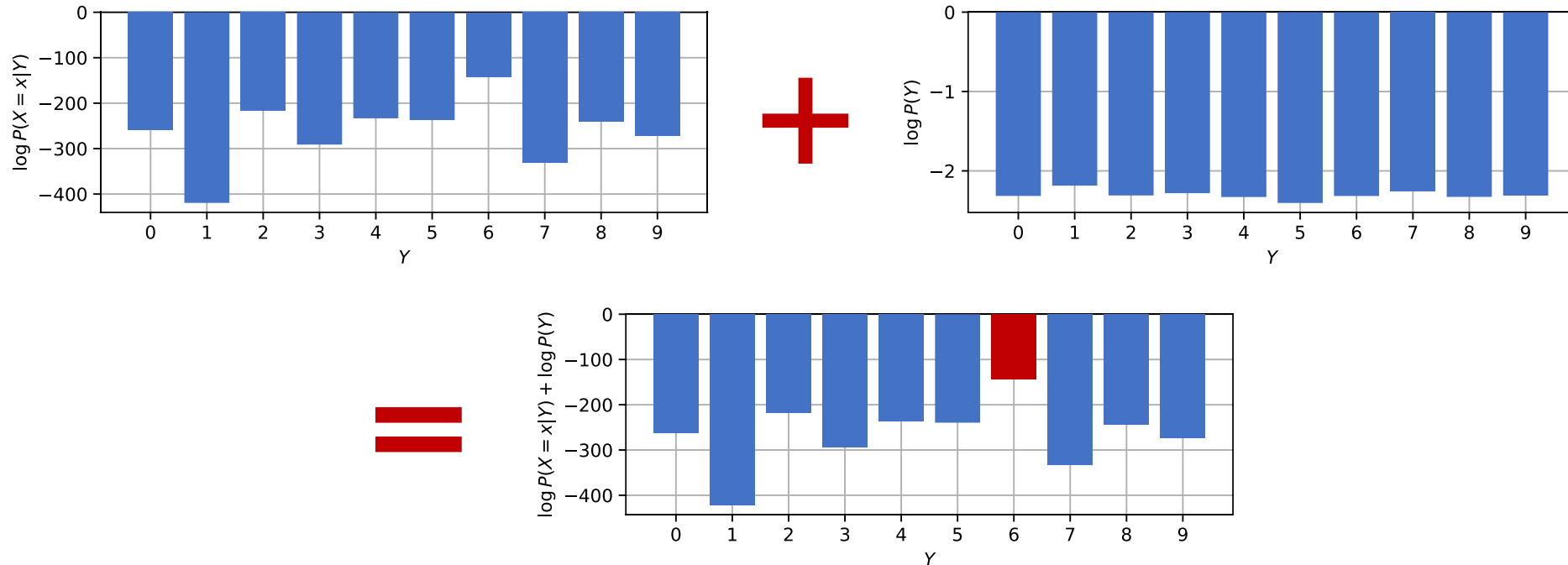


$$\operatorname{argmax}_y P(X = \mathbf{x} | Y = y) = 6$$

# Naïve Bayes 분류기를 이용한 손글씨 분류: 추론

- 주의: Naïve Bayes 분류기에는  $P(Y = y)$ 도 존재!

$$\begin{aligned} y_{\text{pred}}(\mathbf{x}) &= \operatorname{argmax}_y P(X = \mathbf{x} | Y = y) P(Y = y) \\ &= \operatorname{argmax}_y (\log P(X = \mathbf{x} | Y = y) + \log P(Y = y)) \end{aligned}$$



$$y_{\text{pred}}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_y (\log P(X = \mathbf{x} | Y = y) + \log P(Y = y)) = 6$$

# 요약

- Bayes' Rule을 활용한 Naïve Bayes 분류기 개념
- Naïve Bayes를 이용한 MNIST 분류기 학습과 추론

