МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий
и управления в технических системах СГУ
Кафедра «Высшая математика»

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Методические указания
и контрольные задания

Севастополь
СевГУ
2017

УДК 518.0

Лабораторный практикум по численным методам решения задач. Методические указания и индивидуальные задания /Состав. Ю.И. Папкова, С.О. Папков, Гхашим Мохамад – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2017. - 26 с.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения специальности 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», изучающих курс «Численные методы решения задач». Пособие содержит 10 вариантов индивидуальных заданий, охватывающих такие разделы дисциплины как решение алгебраических уравнений, вычисление определенных интегралов, построение интерполяционных полиномов, метод наименьших квадратов. В методических указаниях приведены примеры решения заданий, выполненные с использованием Mathcad.

Индивидуальные задания, содержащиеся в указаниях, могут быть использованы для практических занятий.

Приводится список рекомендуемой литературы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшей математики» протокол № 1 от 15 февраля 2017 г.

Допущено УМК Института информационных технологий и управления в технических системах в качестве методических указаний протокол № 1 от 22 марта 2017 г.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н. Деркач М.И.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1
Тема «Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности приближенного числа, погрешность округления. Погрешность функции».

Цель работы: Научиться находить абсолютную и относительную погрешность числа.

Пусть a – приближенное значение числа, A – точное значение числа;

Абсолютная погрешность $\Delta a = |A - a|$, **относительная погрешность** $\delta a = \frac{\Delta a}{|A|}$.

Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда.

Количество **верных знаков** числа a **в широком смысле** отсчитывается от первой значащей числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности Δa.

Значащую цифру называют верной в узком смысле, если абсолютная погрешность не превосходит половины единицы разряда соответствующего этой цифре.

ЗАДАНИЕ № 1. Вычислить абсолютную и относительную погрешности числа, заданного всеми своими верными цифрами в узком смысле (приложение А).

Варианты:

1) a = 3,5738;
2) a = 3,8945;
3) a = 3,5344;
4) a = 3,4834;
5) a = 3,2356;
6) a = 3,6785;
7) a = 3,1274;
8) a = 3,5672;
9) a = 3,6723;
10) a = 3,1659.

<u>Пример</u>:

Число a = 3,7834 задано всеми своими верными знаками в узком смысле, это означает, что абсолютная погрешность $\Delta a = 0{,}00005$. Найдем относительную погрешность $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} = 0{,}0000132156$.

ЗАДАНИЕ № 2. Вычислить абсолютную и относительную погрешности округленного числа.

<u>Варианты:</u>

1) Округляя число 0,001545 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
2) Округляя число 0,001475 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
3) Округляя число 0,0002545 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
4) Округляя число 0,00005422 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
5) Округляя число 0,001541 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
6) Округляя число 0,001644 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
7) Округляя число 0,001745 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
8) Округляя число 0,021321 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.
9) Округляя число 0,000001641 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.

10) Округляя число 0,0015476 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученного числа. Цифры верны в широком смысле.

<u>Пример</u>:

Число а = 0,07834 округлим до трех значащих цифр a_1 = 0,0783. Так как цифры числа а верны в широком смысле, то $\Delta a = 0{,}00001$. Погрешность округления находим по формуле $\Delta = |a - a_1| = 0{,}00004$. Вычислим абсолютную погрешность округленного числа по формуле $\Delta a_1 = \Delta a + \Delta = 0{,}00005$. Относительную округленного числа определим по формуле $\delta a_1 = \dfrac{\Delta a_1}{|a_1|} = 0{,}00063857$.

ЗАДАНИЕ № 3. Вычислить абсолютную и относительную погрешности объема шара $V = \dfrac{\pi d^3}{6}$, если $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta\pi = 0{,}0016$, а диаметр равен

<u>Варианты:</u>

1. $d = 2{,}3 \pm 0{,}05$;
2. $d = 2{,}4 \pm 0{,}05$;
3. $d = 2{,}5 \pm 0{,}05$;
4. $d = 2{,}6 \pm 0{,}05$;
5. $d = 2{,}7 \pm 0{,}05$;
6. $d = 2{,}8 \pm 0{,}05$;
7. $d = 2{,}9 \pm 0{,}05$;
8. $d = 3{,}2 \pm 0{,}05$;
9. $d = 3{,}4 \pm 0{,}05$;
10. $d = 3{,}5 \pm 0{,}05$.

Пример:

Пусть $d = 3{,}7 \pm 0{,}05$, тогда $V = \frac{\pi d^3}{6} = 27{,}4$. Найдем абсолютную погрешность по формуле $\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| \Delta\pi + \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right| \Delta d = 8{,}44 \cdot 0{,}0016 + 21{,}5 \cdot 0{,}05 \approx 1{,}1$, вычислим относительную погрешность $\delta V = \frac{\Delta V}{|V|} = 0{,}0397$.

ЗАДАНИЕ № 4. Вычислить абсолютную и относительную погрешности арифметических операций: сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в четвертую степень над приближенными числами, заданными всеми своими значащими цифрами в широком смысле:

Варианты:

1. a = 0, 1234 и b = 1, 7658;
2. a = 1, 1234 и b = 0, 7658;
3. a = 0, 4678 и b = 1, 2456;
4. a = 2, 9867 и b = 1, 4567;
5. a = 0, 1234 и b = 1, 7658;
6. a = 1, 3998 и b = 1, 9892;
7. a = 0, 9237 и b = 2, 7658;
8. a = 2, 1234 и b = 1, 8723;
9. a = 0, 8723 и b = 1, 4576;
10. a = 1, 8723 и b = 2, 7658.

Указания:

1) Для арифметической операции $a + b$ абсолютная погрешность равна $\Delta a + \Delta b$.

2) Для арифметической операции $a - b$ абсолютная погрешность равна $\Delta a + \Delta b$.

3) Для арифметической операции $a \cdot b$ абсолютная погрешность равна $|a|\Delta b + |b|\Delta a$.

4) Для арифметической операции $\frac{a}{b}$ абсолютная погрешность равна $\frac{|a|\Delta b + |b|\Delta a}{b^2}$.

5) Для арифметической операции a^n абсолютная погрешность равна $na^{n-1}\Delta a$.

Лабораторная работа № 2
Тема: «Интерполяция функций»

Цель работы: изучить различные виды интерполяционных полиномов.

Пусть имеется набор значений x_i и соответствующих им значений y_i, $i=0,1,\ldots,n$ (допустим, полученных экспериментально). Необходимо получить значение y аргумента x^*, который принадлежит отрезку $[x_0, x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i. Поставленную задачу можно решить следующим способом: построить аналитическую функцию $F(x)$ таким образом, чтобы она проходила через данные точки (x_i, y_i), т.е. $F(x_0)= y_0$, $F(x_1)= y_1,\ldots,F(x_n)= y_n$. В этом случае нахождение $F(x)$ называют **интерполяцией**, точки (x_i, y_i) - **узлами интерполяции**, точку x^* – **точкой интерполяции**, а $F(x)$ - **интерполяционной функцией**.

Рассмотрим некоторые виды интерполяции:

Интерполяция называется **линейной**, если каждые две соседние точки (x_i, y_i) соединены прямолинейными отрезками.

Классический полином $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, где a_i – неизвестные коэффициенты, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} F(x_0) = y_0, \\ F(x_1) = y_1, \\ ..., \\ F(x_{n-1}) = y_{n-1}, \\ F(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Полином Ньютона

$$F(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}),$$

где

$$A_0=y_0,\ A_1=y_{01}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1},\ A_2=y_{012}=\frac{y_{01}-y_{02}}{x_1-x_2},\ldots$$

С помощью теоремы Ролля можно показать, что для функции $y=f(x)$, по аргументам x_i которой строится полином Ньютона, остаточный член определяется формулой

$$R(x)=f(x)-F(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

где ξ зависит от x и лежит внутри отрезка $[x_0, x_n]$.

Оценка для абсолютной погрешности интерполяционной формулы Ньютона имеет вид:

$$|R(x)|=|f(x)-F(x)|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)|,$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{x_0\le x\le x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

Полином Лагранжа

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

Сплайн – интерполяция – это функция, которая на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяции является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными.

Наиболее распространены кубические сплайны:

$$S(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3,$$

где неизвестные коэффициенты находятся из системы:

$$\begin{cases} c_0 = 0, \\ c_n + 3d_n h_n = 0, \\ a_i = y_{i-1}, \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1}, \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}. \end{cases}$$

$h_i = x_i - x_{i-1}$.

ЗАДАНИЕ: известен набор экспериментальных данных, записать классический интерполяционный многочлен, полином Ньютона, Полином Лагранжа, сплайн-интерполяцию (приложение Б).

<u>Варианты:</u>

1) Зависимость магнитной индукции B от напряженности внешнего магнитного поля H в образце из серого чугуна описывается кривой намагниченности (см. таблицу). С помощью интерполяционного полинома найти значения магнитной индукции при H=7кА/м.

H, кА/м	6	8	10
B, Тл	0,75	0,9	1

2) Источник тока исследовали путем подключения к нему различных резисторов, измерялись сила тока и напряжение на клеммах источника. Получен следующий ряд значений:

I, A	0,16	0,23	0,30
U, B	4,1	3,3	3,1

С помощью интерполяции найти напряжение при I=0.2 A.

3) В лабораторной работе проверялся закон Стефана-Больцмана. Потребляемая лампой накаливания мощность (следовательно, и излучаемая мощность P=RS) измерялась амперметром и вольтметром, а температура нити - оптическим пирометром. Излучающая площадь нитей накаливания 1 см^2 При разных токах получено следующее:

t, C	700	900	1100
P, Вт	11	23	47

С помощью интерполяции найти мощность при t=1000 C.

4) Температура кипения воды при определенных давлениях приведена в таблице. С помощью интерполяционного полинома сделать шаг таблицы равномерным. Чему равна температура кипения воды при P=0,3 атм ?

P, атм	0.2	0.4	0.6
t, C	59.67	75.42	89.35

5) Теплоемкость при постоянном давлении C_p жидкого этилового спирта возрастает при увеличении температуры как показано в таблице. Используя таблицу, определить теплоемкость при температуре t =-50 C.

t, C	-60	-40	-20
C_p, 10^3 Дж/кг·град	1,59	1,79	1,99

6) Сопротивление полупроводникового резистора резко уменьшается при увеличении температуры как показано в таблице. С помощью интерполяции Найти значение R при t =350 C.

t, C	300	400	500
R, Ом	6283	3460	63

7) Для увеличения предела измерения I_0 амперметра до значения I к нему подключают сопротивление (шунт) $R_ш$. При этом новый предел измерения прибора в эксперименте зависел от $R_ш$ следующим образом:

$R_ш$, Ом	5	10	15
I , A	1,9	1,3	1,2

С помощью интерполяции определить, какой шунт необходимо подключить, чтобы увеличить предел измерения до 10,3 А?

8) Для увеличения предела измерения U_0 амперметра до значения U к нему подключают добавочное сопротивление $R_д$. При этом экспериментально новый предел измерения прибора зависит от добавочного сопротивления следующим образом (см. таблицу). С помощью интерполяции определить, какое добавочное

сопротивление необходимо подключить, чтобы увеличить предел измерения до 55В?

U , В	39	50	59
$R_д$, Ом	1000	2000	3000

9) Физическая величина громкость L измеряется в фонах и зависит от звукового давления P. Экспериментальная зависимость представлена в таблице.

L, фон	8	14	20
P, мкПа	50	100	200

С помощью интерполяции найти давление, при котором L=19.

10) Сопротивление металлического проводника, как известно, прямо пропорционально температуре. Из данных таблицы с помощью интерполяции найти значение R при t=13 C.

t, C	5	10	15
R, Ом	51	53	54

<u>Указание:</u>

Использовать интерполяционные многочлены по трем узлам (x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2):

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$

$$F(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1);$$

$$L(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Лабораторная работа № 3
Тема: «Аппроксимация функций»

Цель работы: изучить метод наименьших квадратов.

Найдем теоретическую зависимость (например, физический закон) $Y = f(x, a_0, a_1, ..., a_k)$, при этом функция содержит параметры $a_0, a_1, ..., a_k$. Подбирают параметры таким образом, чтобы график функции $f(x, a_0, a_1, ..., a_k)$ наиболее близко подходил к известным (экспериментальным) точкам (x_i, y_i), где $i = 1,2,\ldots n$. Такой подход называется **аппроксимацией**. Одним из методов, используемых для аппроксимации функций, является **метод наименьших квадратов**.

Задача подбора экспериментальной зависимости методом наименьших квадратов состоит из двух этапов: на первом этапе по экспериментальным данным выбирается вид зависимости (прямая, парабола, показательная функция и т.д.), а на втором – подбираются параметры $a_0, a_1, ..., a_k$ выбранной зависимости $\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x, a_0, a_1, ..., a_k))^2 \to \min$.

Для **линейной функции** $Y = a_0 + a_1 x$ (уравнение регрессии y на x) параметры a_0, a_1 (коэффициенты регрессии) находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases}$$

Для **квадратичной функции** $Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ параметры a_0, a_1, a_2 определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2. \end{cases}$$

Для **показательной функции** $Y = ab^x$ логарифмируется левая и правая части $\ln Y = \ln a + x \ln b$ с последующей заменой $\ln a = a_0$, $\ln b = a_1$.

ЗАДАНИЕ: известен набор экспериментальных данных значений *x* и *y*, найти методом наименьших квадратов линейную функцию, квадратичную функцию, степенную функцию, показательную функцию, логарифмическую функцию и гиперболическую функцию. Сравнить качество полученных приближений (приложение В).

Варианты:

1)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,4	1,6	1,7	1,9

2)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,05	1,55	1,7	1,75	1,8

3)

x_i	2	3	4	5	6
y_i	0,4	0,55	0,13	0,09	0,07

4)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8,5	6,7	5,3	3,5	2,9

5)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8,2	5,9	4,9	4	3,2

6)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,2	5,9	4,9	4,3	3

7)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	6,1	4,9	3,8	3,1

8)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,55	0,7	0,77	0,82	0,85

9)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,55	1,9	2,3	2,6

10)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,55	1,9	2,25	2,5

Лабораторная работа № 4

Тема: «Численное интегрирование функции»

Цель работы: рассмотреть различные численные методы вычисления определенного интеграла.

Формулы прямоугольников $h = \dfrac{b-a}{n}$ **:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih); \quad \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(a+ih);$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(a+ih-\frac{h}{2}\right).$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right).$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a+(2i-1)h\right)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a+2ih)\right).$$

ЗАДАНИЕ: вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона если отрезок интегрирования разбит на n =1000 равных частей, вычислить определенный интеграл с помощью метода Монте-Карло. Сравнить приближенные значения интегралов с точными значениями, полученными на основе формулы Ньютона-Лейбница (приложение Г).

Варианты:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$ 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x dx.$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$ 7) $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \cos 4x dx.$

3) $\displaystyle\int_0^{e} \ln(x+2) dx.$ 8) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}.$

4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. 9) $\int_0^1 xe^x dx$.

5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 10) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$.

Лабораторная работа № 5

Тема: «Приближенное решение алгебраических уравнений»

Цель работы: Научиться приближенно вычислять действительные корни алгебраических уравнений.

Процесс отыскания корня уравнения $f(x) = 0$ состоит из двух этапов:

1) Нахождение приближенного значения корня;
2) Уточнения приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Теорема: Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha;\beta]$, то есть $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$, то есть найдется хотя бы одно число $\xi \in (\alpha;\beta)$ такое, что $f(\xi) = 0$. Корень ξ заведомо будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала $(\alpha;\beta)$.

Процесс определения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных точках $x = a$ и $x = b$ в области ее существования. На втором этапе строится последовательность, элементы которой в пределе сходятся к точному значению корня.

Метод половинного деления для уравнения $f(x) = 0$ (метод дихотомии). Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, причем функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Найдем середину отрезка $x_1 = \frac{a+b}{2}$, если $f(x) \neq 0$, то для продолжения вычислений выберем ту из частей данного отрезка $[a;x_1]$ или $[x_1;b]$ на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1. Новый суженный промежуток $[a_1;b_1]$ снова делим пополам и проводим вычисления по разобранной схеме т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока длина полученного отрезка не станет меньше величины ε, где ε - заданная точность. За приближенное решение принимается либо средняя точка последнего промежутка, либо последнее значение.

Метод хорд (метод пропорциональных частей). Дано уравнение $f(x)=0$, причем функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Если $f(a)<0$ и $f(b)>0$, то последовательные приближения $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n)$, ($n$ = 0, 1, 2, …; $x_0=a$) образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, при этом $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots<\xi<b,$ где ξ - корень уравнения. Если $f(a)>0$ и $f(b)<0$, то последовательные приближения $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a)$, ($n$ = 0, 1, 2, …; $x_0=b$) образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем $a<\xi<\ldots<x_{n+1}<x_n<\ldots<x_1<x_0$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, где ε - заданная точность. За приближенное решение принимается $\xi\approx x_{n+1}$.

ЗАДАНИЕ: найти все действительные корни алгебраического уравнения двумя методами (приложение Д).

__Варианты__:

1) $x^4-3x-20=0;$	6) $x^3+3x+5=0;$
2) $2x^3+x^2-4=0;$	7) $x^3+5x-7=0;$
3) $x^3-2x^2-4x+5=0;$	8) $x^5-x-2=0;$
4) $x^3-10x+5=0;$	9) $x^4-3x-20=0;$
5) $x^3+2x-7=0;$	10) $x^4-2x-4=0.$

Приложение А

Индивидуальное задание №1. Вычислить абсолютную и относительную погрешности числа, заданного всеми своими верными цифрами в узком смысле.

$$a := 3.8734$$

$$\Delta a := 0.00005$$

$$\delta a := \frac{\Delta a}{|a|}$$

$$\delta a = 1.291 \times 10^{-5}$$

$$\delta a \cdot 100 = 1.291 \times 10^{-3}$$

Число a=3,8734 задано всеми своими верными знаками в узком смысле, это означает, что абсолютная погрешность Δa=0,00005.

Приложение Б

Индивидуальное задание:

1) Сопротивление полупроводникового резистора резко уменьшается при увеличении температуры как показано в таблице. С помощью интерполяции найти R при t =350 C.

t, C	300	400	500
R, Ом	6350	350	61

Ход работы:

— линейная интерполяция;
—полином Лагранжа;
—полином Ньютона;
—канонический полином;
— сплайн - интерполяция.

Пример реализации в Mathcad линейной интерполяции:

$$t := \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} 6350 \\ 350 \\ 61 \end{pmatrix}$$

$$c := 350 \qquad \mathrm{linterp}(t, R, c) = 3.35 \times 10^{3}$$

Пример реализации в Mathcad полинома Лагранжа:

$$t := \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} 6350 \\ 350 \\ 61 \end{pmatrix}$$

$$L(a,i1,i2,i3) := R_{i1}\frac{\left[\left(a - t_{i2}\right)\left(a - t_{i3}\right)\right]}{\left[\left(t_{i1} - t_{i2}\right)\left(t_{i1} - t_{i3}\right)\right]} + R_{i2}\cdot\frac{\left[\left(a - t_{i1}\right)\left(a - t_{i3}\right)\right]}{\left[\left(t_{i2} - t_{i1}\right)\left(t_{i2} - t_{i3}\right)\right]} + R_{i3}\cdot\frac{\left[\left(a - t_{i1}\right)\left(a - t_{i2}\right)\right]}{\left[\left(t_{i3} - t_{i1}\right)\left(t_{i3} - t_{i2}\right)\right]}$$

$$L(c,0,1,2) = 2.636 \times 10^{3}$$

Пример реализации в Mathcad полинома Ньютона:

$$R1(i1,i2) := \frac{\left(R_{i2} - R_{i1}\right)}{\left(t_{i2} - t_{i1}\right)}$$

$$R2(i1,i2,i3) := \frac{(R1(i1,i2) - R1(i1,i2))}{\left(t_{i3} - t_{i1}\right)}$$

$$N(a,i1,i2,i3) := R_{i1} + \left(a - t_{i1}\right)\cdot R1(i1,i2) + \left(a - t_{i1}\right)\left(a - t_{i2}\right)R2(i1,i2,i3)$$

$$N(c,0,1,2) = 3.35 \times 10^{3}$$

Пример реализации в Mathcad канонического полинома:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 300 & 300^{2} \\ 1 & 400 & 400^{2} \\ 1 & 500 & 500^{2} \end{pmatrix}$$

$$T := A^{-1}\cdot R$$

$$f(c) := T_0 + T_1 c + T_2 c^{2} \qquad T = \begin{pmatrix} 5.862 \times 10^{4} \\ -259.885 \\ 0.286 \end{pmatrix}$$

$$c := 350 \quad f(350) = 2.636 \times 10^{3}$$

Пример реализации в Mathcad сплайн-интерполяции:

$$Origin := 0$$

$$t := \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} 6350 \\ 350 \\ 61 \end{pmatrix}$$

$$i := 0..1$$

$$h_i := t_{i+1} \cdot -t_i$$

$$h = \begin{pmatrix} -1.2 \times 10^5 \\ -2 \times 10^5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

GIven

$$B_0 h_0 + C_0 (h_0)^2 + D_0 (h_0)^3 = R_1 - R_0$$

$$B_1 h_1 + C_1 (h_1)^2 + D_1 (h_1)^3 = R_2 - R_1$$

$$B_1 - B_0 - 2 C_0 h_0 - 3 D_0 (h_0)^2 = 0$$

$$C_1 - C_0 - 3 D_0 h_0 = 0$$

$$C_1 + 3 D_1 h_1 = 0$$

$$C_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} B \\ C \\ D \end{pmatrix} := Find(B, C, D) \qquad B = \begin{pmatrix} 0.059 \\ 0.032 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.276 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -6.322 \times 10^{-13} \\ 3.793 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$i := 0..1$$

$$S := R_i + B_1 (t - t_i) + C_1 (t - t_1)^2 + D_1 (t - t_1)^3$$

$$d := cspline(t, R)$$

$$interp(d, t, R, 350) = 2.279 \times 10^3$$

Приложение В

Индивидуальное задание: Известен набор экспериментальных данных значений x и y, найти методом наименьших квадратов линейную, логарифмическую, степенную, показательную и гиперболическую функцию с помощью математического пакета MathCAD. Сравнить качество полученных приближений.

X_i	1	2	3	4	5
Y_i	7,2	5,9	4,9	4,3	3

Ход работы

— Аппроксимация линейной функцией;

— Аппроксимация степенной функцией;

— Аппроксимация показательной функцией;

— Аппроксимация логарифмической функцией;

— Аппроксимация гиперболической функцией;

— Аппроксимация квадратичной функцией.

Пример реализации в Mathcad аппроксимации линейной функцией:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.9 \\ 4.9 \\ 4.3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$N := \text{length}(x) - 1$

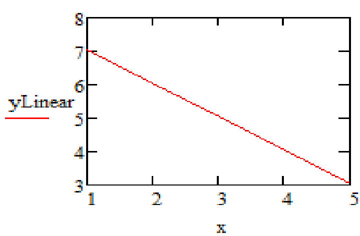
$i := 0..N$

$a := \text{slope}(x, y) \qquad a = -1$

$b := \text{intercept}(x, y) \qquad b = 8.06$

$yLinear := a \cdot x + b$

$$yLinear = \begin{pmatrix} 7.06 \\ 6.06 \\ 5.06 \\ 4.06 \\ 3.06 \end{pmatrix}$$



$$\sum (y - yLinear)^2 = 0.132$$

Пример реализации в Mathcad аппроксимации степенной функцией:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.9 \\ 4.9 \\ 4.3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$N := \mathrm{length}(x) - 1$$

$$i := 0..N$$

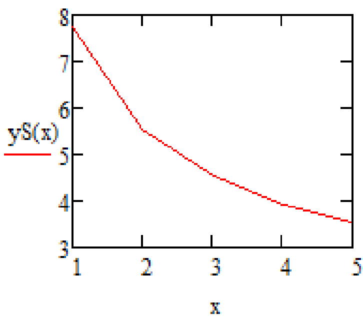
$$k := \exp\left(\mathrm{intercept}\left(\overrightarrow{\ln(x)}, \overrightarrow{\ln(y)}\right)\right)$$

$$m := \mathrm{slope}\left(\overrightarrow{\ln(x)}, \overrightarrow{\ln(y)}\right)$$

$$k = 7.763 \qquad m = -0.491$$

$$yS(x) := k \cdot x^m$$

$$yS(x) = \begin{pmatrix} 7.763 \\ 5.523 \\ 4.526 \\ 3.929 \\ 3.522 \end{pmatrix}$$



$$\sum (y - yS(x))^2 = 1.008$$

Пример реализации в Mathcad аппроксимации показательной функцией:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.9 \\ 4.9 \\ 4.3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$N := \mathrm{length}(x) - 1$$

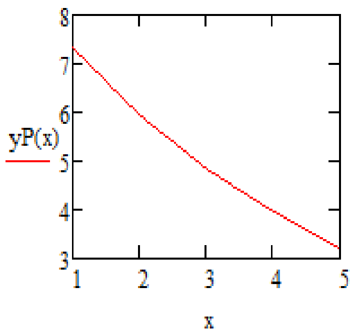
$$i := 0..N$$

$$m := \mathrm{slope}\left(x, \overrightarrow{\ln(y)}\right) \qquad m = -0.207$$

$$k := \exp\left(\mathrm{intercept}\left(x, \overrightarrow{\ln(y)}\right)\right) \qquad k = 9.019$$

$$yP(x) := k \cdot \exp(m \cdot x)$$

$$yP(x) = \begin{pmatrix} 7.334 \\ 5.965 \\ 4.851 \\ 3.945 \\ 3.208 \end{pmatrix}$$



$$\sum (y - yP(x))^2 = 0.194$$

Пример реализации в Mathcad аппроксимации логарифмической функцией:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.9 \\ 4.9 \\ 4.3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$N := \mathrm{length}(x) - 1$

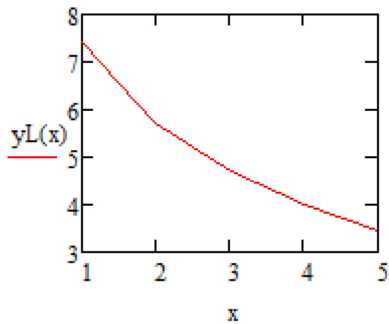
$i := 0..N$

$k := \mathrm{slope}\left(\overrightarrow{\ln(x)}, y\right) \qquad k = -2.453$

$m := \mathrm{intercept}\left(\overrightarrow{\ln(x)}, y\right) \qquad m = 7.409$

$yL(x) := k \cdot \ln(x) + m$

$$yL(x) = \begin{pmatrix} 7.409 \\ 5.708 \\ 4.714 \\ 4.008 \\ 3.461 \end{pmatrix}$$



$$\sum (y - yL(x))^2 = 0.412$$

Пример реализации в Mathcad аппроксимации гиперболической функцией:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.9 \\ 4.9 \\ 4.3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$N := \mathrm{length}(x) - 1$$

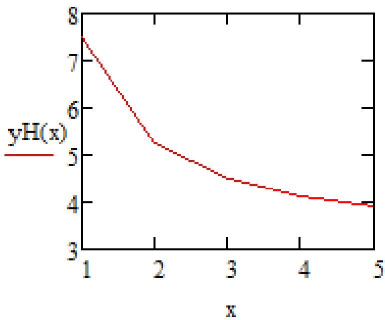
$$i := 0..N$$

$$k := \mathrm{slope}\left(\frac{1}{x}, y\right) \qquad k = 4.525$$

$$m := \mathrm{intercept}\left(\frac{1}{x}, y\right) \qquad m = 2.993$$

$$yH(x) := \mathrm{if}\left(x = 0, \text{"error"}, \frac{k}{x} + m\right)$$

$$yH(x) = \begin{pmatrix} 7.519 \\ 5.256 \\ 4.502 \\ 4.125 \\ 3.898 \end{pmatrix}$$



$$\sum (y - yH(x))^2 = 1.513$$

Пример реализации в Mathcad аппроксимации квадратической функцией:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.9 \\ 4.9 \\ 4.3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

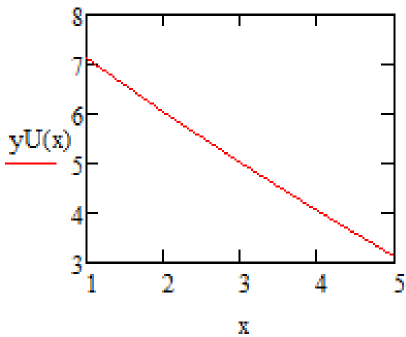
$$N := \mathrm{length}(x) - 1$$

$$i := 0..N \qquad yK(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$a := \mathrm{linfit}(x, y, yK)$$

$$a = \begin{pmatrix} 8.26 \\ -1.171 \\ 0.029 \end{pmatrix} \qquad yU(x) := a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$yU(x) = \begin{pmatrix} 7.117 \\ 6.031 \\ 5.003 \\ 4.031 \\ 3.117 \end{pmatrix}$$



$$\sum (y - yU(x))^2 = 0.121$$

Приложение Г

Индивидуальное задание: $\int_0^6 \sqrt{8 - 3\sin^2 x}\,dx.$

Ход работы:

Методы прямоугольников $\int_0^6 \sqrt{8 - 3\sin^2 x}\,dx$ **:**

$$\text{rectangle}(a,b,n,f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{j-1} \leftarrow a + h\cdot(j-1) \\ S \leftarrow S + f\left(x_{j-1}\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow S\cdot h \\ S \end{array} \right.$$

$$f(x) := \sqrt{8 - 3\cdot\sin(x)^2}$$

$$\text{rectangle}(0,6,100,f) = 15.169$$

$$\text{rectangle1}(a,b,n,f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{j} \leftarrow a + h\cdot j \\ S \leftarrow S + f\left(x_{j}\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow S\cdot h \\ S \end{array} \right.$$

$$\text{rectangle1}(0,6,100,f) = 15.167$$

$$\mathrm{rectangle2}(a,b,n,f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_j \leftarrow a + h \cdot j \\ S \leftarrow S + f\left(x_j - \dfrac{h}{2}\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow S \cdot h \\ S \end{array} \right.$$

$$\mathrm{rectangle2}(0,6,100,f) = 15.168$$

Метод трапеций $\int_0^6 \sqrt{8 - 3\sin^2 x}\,dx$ **:**

$$\mathrm{trap}(a,b,n,f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..(n-1) \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_j \leftarrow a + h \cdot j \\ S \leftarrow S + f\left(x_j\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow \left(S + \dfrac{f(a) + f(b)}{2}\right. \\ S \end{array} \right.$$

$$\mathrm{trap}(0,6,100,f) = 15.168$$

Метод Симпсона $\int_0^6 \sqrt{8 - 3\sin^2 x}\,dx$ **:**

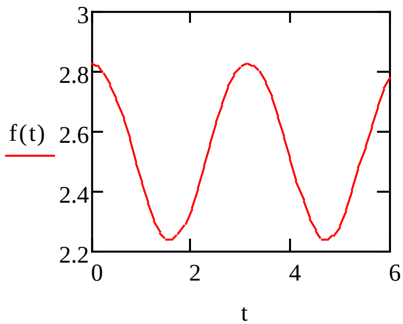
$$
\text{simpson}(a,b,n,f) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\
S1 \leftarrow 0 \\
\text{for } j \in 1..\left(\dfrac{n}{2}\right) \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_{2\cdot j-1} \leftarrow a + h\cdot(2\cdot j - 1) \\ S1 \leftarrow S1 + f\left(x_{2\cdot j-1}\right) \end{array} \right. \\
S2 \leftarrow 0 \\
\text{for } k \in 1..\left(\dfrac{n}{2} - 1\right) \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_{2\cdot k} \leftarrow a + h\cdot 2\cdot k \\ S2 \leftarrow S2 + f\left(x_{2\cdot k}\right) \end{array} \right. \\
S \leftarrow [4\cdot S1 + 2\cdot S2 + (f(a) + f(b))] \\
S
\end{array}
\right.
$$

$$\text{simpson}(0, 6, 100, f) = 15.168$$

Метод Монте-Карло $\int_0^6 \sqrt{8 - 3\sin^2 x}\,dx$ **:**

$f(x) := \sqrt{8 - 3\cdot\sin(x)^2}$

$t := 0, 0.125 .. 6$



$b := 3$

$a := 6$

$N := 200$

$i := 1 .. N$

$x_i := rnd(a)$

$y_i := rnd(b)$

$m_i := if\left(y_i < f\left(x_i\right), 1, 0\right)$

$M := \sum_i m_i$

$M = 174$

$S := M\cdot a\cdot\frac{b}{N}$

$S = 15.66$

Приложение Д

Индивидуальное задание:

$$x^3 - 12x - 5 = 0$$

Ход работы:

— методом polyroots;

— методом дихотомии;

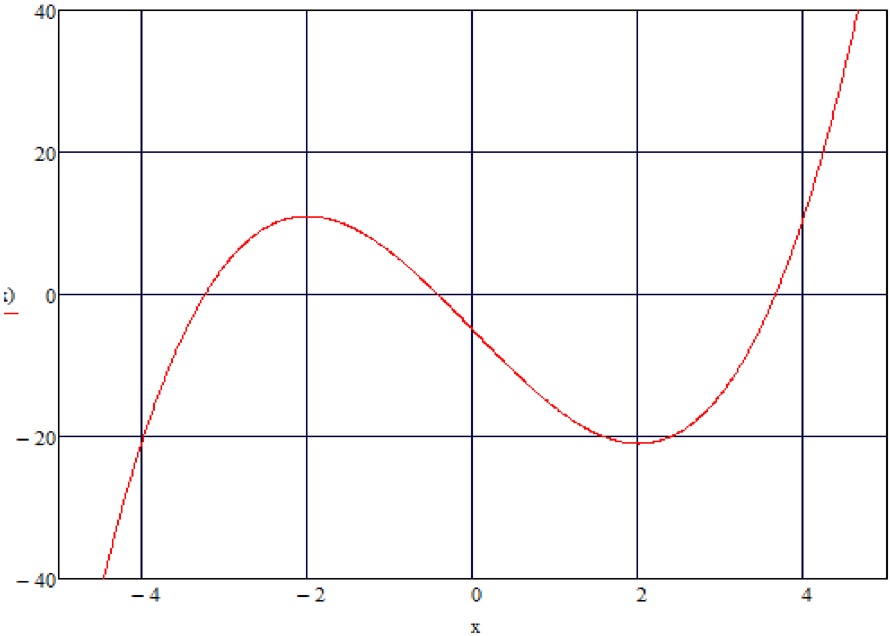
— методом хорд.

Решение алгебраического уравнения с помощью polyroots(v):

$$x^3 - 12x - 5 = 0$$

$$v := \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -3.233 \\ -0.423 \\ 3.656 \end{pmatrix}$$

$$F(x) := \sum_{i=0}^{3} \left(v_i \cdot x^i \right) \qquad v_0 + v_1 \cdot x + v_2 \cdot x^2 + v_3 \cdot x^3$$



Решение алгебраического уравнения с помощью метода дихотомии:

$$f(x) := x^3 - 12x - 5$$

$$\mathrm{dihot}(a,b,e) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{(a+b)}{2} \\ b \leftarrow c \;\; \text{if } f(c) \cdot f(a) < 0 \\ a \leftarrow c \;\; \text{otherwise} \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } |a - b| < e \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{dihot}(3,4,0.001) = \begin{pmatrix} 3.655 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Решение алгебраического уравнения с помощью метода хорд:

$$f(x) := x^3 - 12x - 5$$

$$\mathrm{horda}(a,b,e) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow a - \dfrac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)} \\ b \leftarrow c \;\; \text{if } f(c) \cdot f(a) < 0 \\ a \leftarrow c \;\; \text{otherwise} \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } |f(c)| < e \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{horda}(3,4,0.001) = \begin{pmatrix} 3.656 \\ 5 \end{pmatrix}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова. – М.: НТ Пресс, 2006. – 496с.
2. Охорозин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: Учебное пособие 2-е изд., испр. и доп./ В.А. Охорозин. – СПб: Издательство «Лань», 2008. – 352с.
3. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс /Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2005. – 448с.