

# 1.4.1 Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Анна Назарчук Б02-109

## 1 Аннотация

На примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомились с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; проверили справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; убедились в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; оценили погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата

## 2 Теоретические сведения

Физический маятник - твердое тело, совершающее колебания в поле силы тяжести, является совокупностью жестко связанных точечных масс. (рис. 1)

### 2.1 Закон вращательного движения и момент инерции

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (1)$$

$$Fr = \frac{d}{dt}(mr^2\omega) \rightarrow M = \frac{dL}{dt} \quad (2)$$

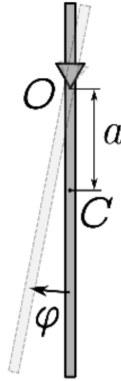


Рис. 1: Стержень как физический маятник

$M$  - момент силы относительно оси вращения,  $L = mr^2\omega = J\omega$  - момент импульса,  $J = mr^2$  - момент инерции.

$$J = \sum_j m_j r_j^2 \quad (3)$$

Момент инерции тонкого стержня массой  $m$  и длиной  $l$ , вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равен:

$$J_c = \frac{ml^2}{12} \quad (4)$$

А момент инерции стержня с осью вращения на расстоянии  $a$  от центра масс по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \quad (5)$$

### 3 Стержень как физический маятник

$$M = -mga \sin\varphi \approx -mga\varphi \quad (6)$$

При малых отклонениях движение физического маятника будет иметь характер гармонических колебаний. Получим формулу для периода колебаний, используя аналогию с пружинным маятником, период которого равен  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Роль массы играет момент инерции, роль коэффициента жесткости - коэффициент пропорциональности между моментом силы и величиной отклонения.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (7)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{12} + a^2} \quad (8)$$

Введем приведенную длину физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \quad (9)$$

Теорема Гюйгенса: если стержень подвесить за центр качения (точка, отстоящая от точки опоры на  $l_{\text{пр}}$  вдоль стержня), то период колебаний не изменится.

### 3.1 Гармонические колебания

Получим формулу 7 через дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Из 1 и 6:

$$J\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \quad (10)$$

Решения уравнения будут вида:

$$\varphi(t) = A \sin(\Omega t + \alpha) \quad (11)$$

где  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$  - угловая частота колебаний,  $A$  - угловая амплитуда,  $\alpha$  - начальная фаза колебаний

### 3.2 Затухание колебаний

Если трение не слишком велико, колебания все еще могут быть описаны формулой 11, но амплитуду колебаний следует считать медленно убывающей функцией времени.

$$\gamma = \frac{|\Delta A|}{A}$$

$\gamma$  - декремент затухания (относительная убыль амплитуды за одно затухание), можно считать постоянным, поэтому:

$$A(t) = A_0 e^{(-\gamma t)} \quad (12)$$

Добротность колебательной системы можно найти:

$$Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T} = \pi \frac{1/\gamma}{T} \quad (13)$$

### 3.3 Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень длиной  $l \sim 1$  м и массой  $m \sim 1$  кг (точные параметры определяются непосредственными измерениями) подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины  $d \sim 12$  мм  $\ll l$ . Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острые ребра призмы образует ось качания маятника.

**Установка А.** Точку крепления можно перемещать вдоль стержня, период колебания измеряется секундомером.

## 4 Измерения и обработка результатов

### 4.1 Оборудование

Линейка

$$\sigma_l = 0.5 \text{ мм} \quad (14)$$

Секундомер

$$\sigma_t = 0.005c \quad (15)$$

Максимальная относительная погрешность измерения периода колебаний маятника

$$\varepsilon_{max} = 0.1\% \quad (16)$$

Длина стержня

$$l = 100 \text{ см} \quad (17)$$

Масса штанги

$$m_c = 870.3 \pm 0.1 \quad (18)$$

Масса призмы

$$m_p = 76.6 \pm 0.1 \quad (19)$$

Центр масс пустого стержня

$$l_{ц} = 50.1 \quad (20)$$

Таблица 1: Измерение времени колебаний

№ опыта	t, с
1	30.79
2	30.84
3	30.88
4	30.67
5	30.69
6	30.75
7	30.75
8	30.68
$\bar{t}$ , с	30.76
$\sigma_t^{\text{случ}}$ , с	0.08
$\sigma_t^{\text{сист}}$ , с	0.01
$\sigma_t^{\text{полн}}$ , с	0.08

## 4.2 Оценка числа колебаний, требуемых для достижения нужной точности измерения

Измерим период  $n$  ( $n = 20$ ) колебаний для экспериментального определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера.  
**Положение призмы относительно центра масс**

$$l = 75.3 \text{ см} \quad (21)$$

Откуда число колебаний, по которому следует измерять период, чтобы относительная погрешность измерений периода соответствовала точности измерений  $\varepsilon_{\text{max}} = 0.1\%$ :  $n = 50$

## 4.3 Опыт по измерению периода колебаний маятника по $n$ полным колебаниям

## 4.4 Обработка результатов

Получим  $g$  усреднением полученных результатов (в оценке погрешности учитывается как случайная составляющая, так и систематическая:

$$\bar{g}_1 = 9.97 \pm 0.16 \text{ м/с}^2 - \text{с учетом призмы}$$

$\bar{g}_2 = 9.73 \pm 0.16 \text{ м/с}^2$  - без учета призмы Дальнейшую обработку будем производить без учета призмы, так как относительная погрешность измерений больше 1%, существенного вклада в точность результатов учет призмы не даст. Построим график зависимости  $T(a)$ . (рис. 2)

Таблица 2: Измерение периода колебаний маятника по  $n$  полным колебаниям (установка А) (без учета призмы)

№ опыта	$l_k$ , см	$a$ , см	$t_n$ , с	$T$ , с	$g$ , м/с <sup>2</sup>
1	75.3	25.2	76.85	1.54	9.74
2	70.1	20	79.26	1.59	9.69
3	63.4	13.3	87.46	1.75	9.80
4	60.5	10.4	96.48	1.93	9.60
5	57.5	7.4	110.78	2.22	9.65
6	54.6	4.5	140.19	2.80	9.53
7	87.3	37.2	77.76	1.56	9.73
8	94.8	44.7	79.91	1.60	9.79
9	72.1	22	77.85	1.56	9.75
10	73.4	23.3	77.21	1.54	9.78
11	73.6	23.5	77.28	1.55	9.74
12	74.5	24.4	77.11	1.54	9.72

Таблица 3: Измерение периода колебаний маятника по  $n$  полным колебаниям (установка А) (с учетом призмы)

№ опыта	$l_k$ , см	$a$ , см	$x_{ц}$ , см	$t_n$ , с	$T$ , с	$g$ , м/с <sup>2</sup>
1	75.30	25.20	23.10	76.85	1.54	9.76
2	70.10	20.00	17.90	79.26	1.59	9.95
3	63.40	13.30	11.20	87.46	1.75	10.70
4	60.50	10.40	8.30	96.48	1.93	11.05
5	57.50	7.40	5.30	110.78	2.22	12.39
6	54.60	4.50	2.40	140.19	2.80	16.42
7	87.30	37.20	35.10	77.76	1.56	9.48
8	94.80	44.70	42.60	79.91	1.60	9.44
9	72.10	22.00	19.90	77.85	1.56	9.91
10	73.40	23.30	21.20	77.21	1.54	9.88
11	73.60	23.50	21.40	77.28	1.55	9.83
12	74.50	24.40	22.30	77.11	1.54	9.77

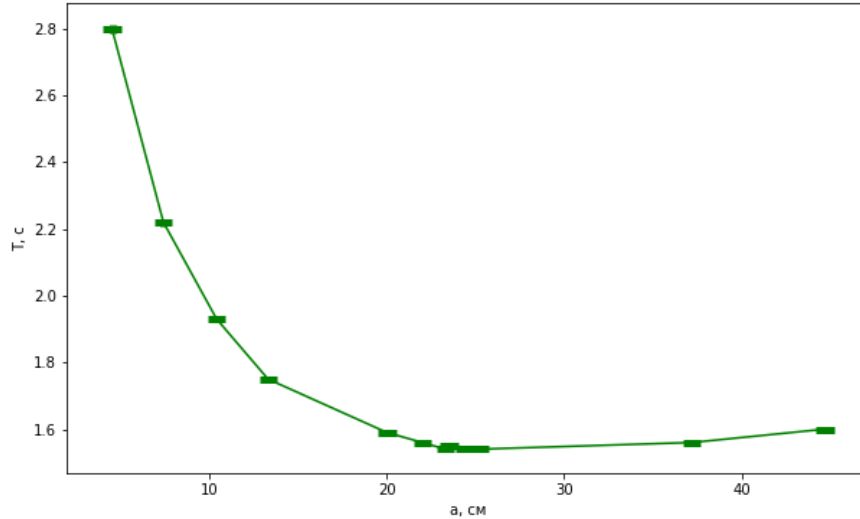


Рис. 2: Зависимость периода колебаний от расстояния от точки крепления до центра масс

Найдем минимум с помощью графика (рис. 3 )

Обработка данных выдает зависимость периода от расстояния от точки крепления до центра масс, которая вместе с экспериментальными точками показана на рис. 4

$T_{min} = 1.53$  с согласно графику, что согласуется с теоретическим расчетом ( $T_{min} = 1.52$  с). В пределах округления период при измерении графически и аппроксимируя данные под функцию совпадает, но, конечно, измерение при помощи графика имеет существенно большую погрешность.

Построим график в координатах  $u = \frac{T^2 a}{4\pi^2}$ ,  $v = a^2 + \frac{l^2}{12}$  (рис. 5)

Определим  $g$  с помощью графика 5 МНК и оценим погрешность. В итоге получим,

$$g = 9.79 \pm 0.06 \text{ м/с}^2$$

Данным способом удалось получить меньшую погрешность и улучшить точность измерения.

Для одной из длин экспериментально сравним периоды колебаний физического маятника и математического с приведенной длиной нити (согласно формуле 9).  $a = 25.2$  см,  $l_{пр} = 58.3$  см,  $T_{ф} = 1.54$  с,  $T_{м} = 1.54$  с, что согласуется с теорией.

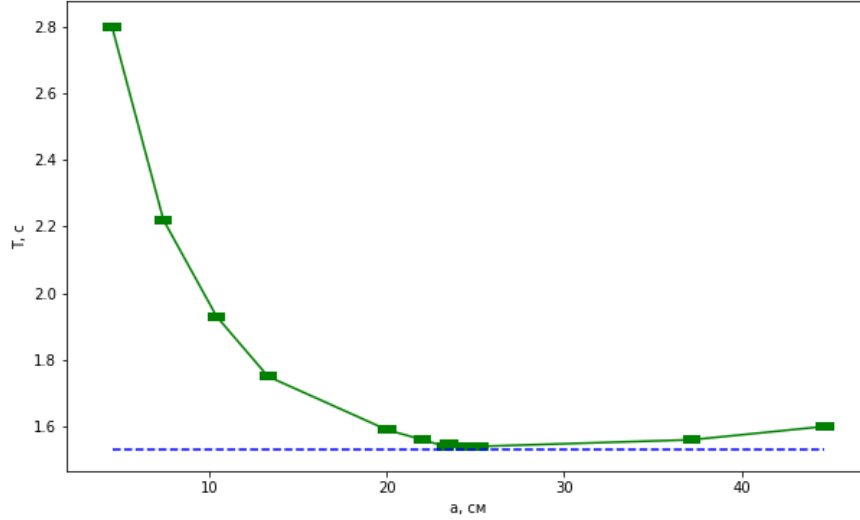


Рис. 3: Зависимость периода колебаний от расстояния от точки крепления до центра масс с минимальным периодом

Проверим справедливость теории Гюйгенса: точка опоры и центр качания маятника взаимно обратимы.  $a_1 = 25.2$  см,  $a_2 = 58.3$  см,  $T_1 = 1.54$  с,  $T_2 = 1.54$  с, что согласуется с теорией.

#### 4.5 Затухающие колебания, вязкость воздуха

Рассмотрим затухающие колебания. За  $n = 160$  колебаний, амплитуда уменьшилась в два раза. Поэтому

$$\gamma = \frac{\ln(2)}{nT}$$

$$Q = \pi \frac{\tau}{T} = \pi \frac{1/\gamma}{T} = \frac{\pi n}{\ln(2)} = 725$$

Будем считать, что скорости маятника малы, амплитуды колебаний малы, сила сопротивления пропорциональна скорости.

$$F_c = -b\dot{x} \quad (22)$$

$$m\ddot{\varphi} = -b\dot{\varphi} - mg \sin(\varphi) \quad (23)$$



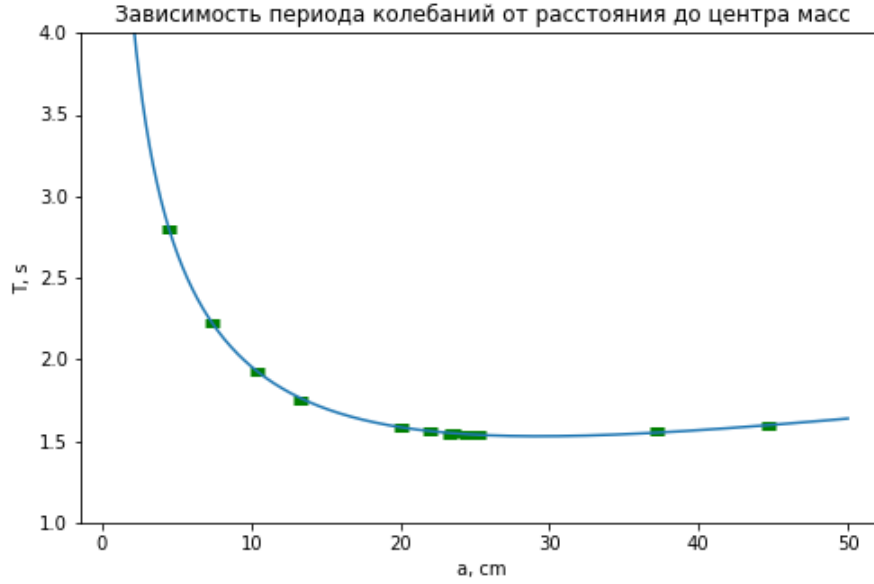


Рис. 4: Зависимость периода колебаний от расстояния от точки крепления до центра масс с аппроксимацией

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad (24)$$

$$\omega = \frac{g}{l} \gg \frac{b^2}{4m^2} \quad (25)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (26)$$

Рассмотрим амплитуду угла, которая изменяется согласно формуле 12

$$A = \varphi_0 e^{\frac{b}{2m}t} \quad (27)$$

Откуда можно было найти коэффициент пропорциональности в силе сопротивления, если знать массу:

$$\frac{b}{2m} = \gamma \quad (28)$$

Согласно формуле Стокса:

$$b = 6\pi r\mu \quad (29)$$

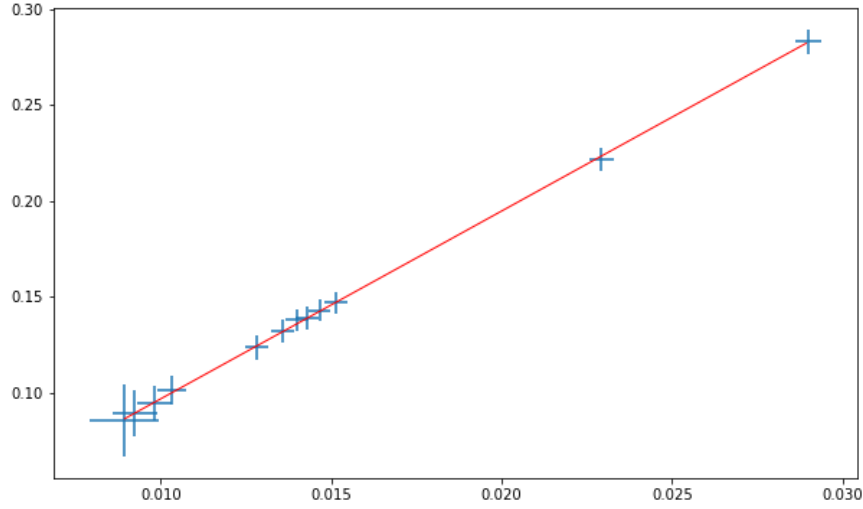


Рис. 5: График в координатах  $u(v)$

Откуда динамическая вязкость воздуха:

$$\mu = \frac{b}{6\pi r} = \frac{2m\gamma}{6\pi r} \quad (30)$$

Однако отсутствие данных для массы шарика не позволяет оценить вязкость воздуха.

## 5 Выводы

Проверена справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определено значение ускорения свободного падения; экспериментально подтверждена справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника. Конечные результаты измерения не отличаются большой точностью из-за наличия множества точек, в которых  $a$  небольшое, поэтому относительная погрешность таких измерений высока. Также не совсем точно измерялось время колебаний, уменьшить эту погрешность можно с помощью многократных измерений, однако их количество должно быть невероятно велико для существенных улучшений.