

## 1.2.2 Экспериментальная проверка закона вращательного движения на крестообразном маятнике

Анна Назарчук Б02-109

### 1 Теоретические сведения

Закон вращательного движения:

$$I\ddot{\varphi} = M \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$$

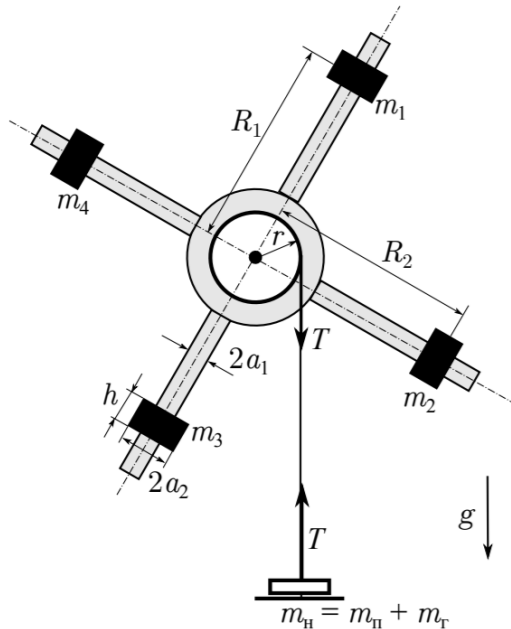


Рис. 1: Крестообразный маятник Обербека

На маятник действуют два момента сил: силы натяжения нити ( $M_T$ ) и трения ( $M_{тр}$ ):  $M_T = rT$ ,  $r$  - радиус шкива. Для движения платформы с учетом нерастяжимости нити:

$$m_H \beta r = m_H \ddot{y} = m_H g - T$$

Откуда согласно основному уравнению вращательного движения:

$$(I + m_H r^2) \beta = m_H g r - M_{тр} \quad (2)$$

Рассмотрим момент силы трения. Его зависимость от скорости не ясна, однако может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси  $N$  (сухое трение), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости вращения (вязкое трение). Откуда:

$$M_{тр} \simeq (1 + \frac{m_H}{m_M}) M_0 + \eta \omega \approx M_0 + \eta \omega \quad (3)$$

где  $M_0$  - момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса,  $m_M$  - масса маятника

Для расчета момента инерции системы, предположим, что грузы  $m_i$  имеют форму полых цилиндров, внутренний и внешний радиус которых известен, образующая  $h$

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2) \quad (4)$$

где  $I_0$  - момент инерции системы без грузов,  $R_i$  - расстояние от центров масс грузов до оси вращения

$$I_i = \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) \quad (5)$$

- момент инерции груза относительно оси, проходящей через его центр масс

## 2 Экспериментальная установка

В работе используется крестообразный маятник (рис. 1), состоит из четырех тонкий стержней, перпендикулярных друг другу, укрепленных на втулке. Втулка и два шкива насажены на общую ось, вся система благодаря подшипникам может вращаться вокруг горизонтальной оси. Установка позволяет автоматически фиксировать моменты прохождения концов стержня через датчик.

Таблица 1: Характеристики системы в сбалансированном состоянии

№ груза	m, г	R, см
1	$155.5 \pm 0.1$	$8.2 \pm 0.05$
2	$148.9 \pm 0.1$	$8.6 \pm 0.05$
3	$151.9 \pm 0.1$	$9.4 \pm 0.05$
4	$150.1 \pm 0.1$	$9.5 \pm 0.05$

## 3 Измерения и обработка данных

### 3.1 Балансировка

Балансировка системы при помощи добавления грузов на стержни, при движении несбалансированного маятника слышны стуки в подшипниках, график зависимости ускорения от угловой скорости имеет пульсации (рис. 2)



Рис. 2: Пульсации при движении недостаточно сбалансированного маятника

Маятник приходит в движение без добавления перегрузок, поэтому так момент силы трения в подшипниках измерить невозможно. Но можно сделать вывод, что:

$$M_0 < m_{\pi}gr = 2.9 \cdot 10^{-3} \quad (6)$$

Таблица 2: Измерения с постоянным моментом инерции и разными перегрузками

$m_{\text{п}}, \text{ г}$	$k, 1/\text{с}$	$\sigma_k, 1/\text{с}$	$\beta_0, \text{ рад}/\text{с}^2$	$\sigma_{\beta_0}, \text{ рад}/\text{с}^2$	$R_1, \text{ см}$	$R_2, \text{ см}$	$R_3, \text{ см}$	$R_4, \text{ см}$	$r, \text{ см}$
0	-0.005163	0.0023	0.1837	0.0015	8.2	8.6	9.4	9.5	1.75
6.21	-0.00831	0.0028	0.2607	0.0024	8.2	8.6	9.4	9.5	1.75
9.07	-0.0084	0.0018	0.3008	0.0016	8.2	8.6	9.4	9.5	1.75
45	-0.009674	0.002	0.7118	0.0027	8.2	8.6	9.4	9.5	1.75
62	-0.01475	0.0012	0.95	0.002	8.2	8.6	9.4	9.5	1.75
51.5	-0.01102	0.0055	0.7811	0.0074	8.2	8.6	9.4	9.5	1.75
100	-0.01176	0.0011	0.7065	0.0019	8.2	8.6	9.4	9.5	0.9
103.55	-0.01237	0.0013	0.7288	0.0023	8.2	8.6	9.4	9.5	0.9
8.95	-0.006902	0.0022	0.136	0.002	8.2	8.6	9.4	9.5	0.9
64.2	-0.00763	0.0027	0.4785	0.0029	8.2	8.6	9.4	9.5	0.9
106	-0.01022	0.0017	0.7382	0.0026	8.2	8.6	9.4	9.5	0.9

### 3.2 Измерения с постоянным моментом инерции и разными перегрузками

Значение  $k$  мало, можно считать, что угловое ускорение постоянно. По полученным данным (таблица 2) и формуле 2 построим график зависимости  $\beta_0$  от  $M_T$  (рис. 3)

Данные образуют прямую, что подтверждает справедливость уравнения вращательного движения. С помощью графика определим  $M_0$  - момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса и  $I$  - момент инерции системы:  $M_0 = 0.32 \pm 0.03 \text{ мН}\cdot\text{м}$ ,  $I = 14.2 \pm 0.1 \text{ г}\cdot\text{м}^2$

Получили, что  $M_0 < m_{\text{п}}gr = 2.93 \cdot 10^{-3}$ , что согласуется с результатами из предыдущих пунктов.

### 3.3 Измерения с одинаковой массой перегрузка, но разными моментами инерции

Значение  $k$  мало, можно считать, что угловое ускорение постоянно. По полученным данным (таблица 4) и формуле 2 найдем момент инерции системы в зависимости от положений грузов и построим график зависимости  $I$  от  $\sum_i m_i R_i^2$  (рис. 4)

Определим сумму  $I_i$ :

$$\sum_i I_i = \sum_i \left( \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) \right) = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

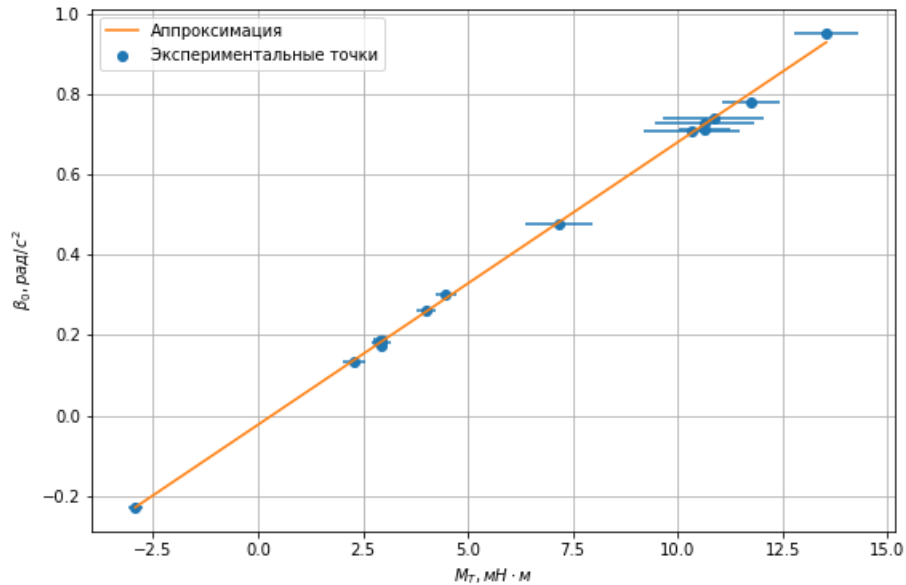


Рис. 3: Зависимость углового ускорения от момента силы натяжения нити

Сумма значительно меньше сдвига (а) прямой графике, определенного по МНК, поэтому  $I_0 \approx a$  С помощью графиков и формул (4 и 5) определим значение  $I_0 = a = (73 \pm 0.91) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

### 3.4 Измерения без грузов

Из полученных данных можно определить  $I_0 = (68 \pm 0.136) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , что согласуется с результатами измерений предыдущим способом.

### 3.5 Измерение коэффициента, отвечающего за вязкое трение

Согласно формулам 3 и 2 можно считать, что:

$$\eta = -m_{\text{H}} r^2 k \quad (7)$$

где  $k$  - коэффициент зависимости углового ускорения от угловой скорости. Из данных в таблице 2 получим, что:

Таблица 3: Измерения с одинаковой массой перегрузка, но разными моментами инерции

$m_n$ , г	$k$ , 1/с	$\sigma_k$ , 1/с	$\beta_0$ , рад/с <sup>2</sup>	$\sigma_{\beta_0}$ , рад/с <sup>2</sup>	$R_1$ , см	$R_2$ , см	$R_3$ , см	$R_4$ , см	$r$ , см
100	-0.002031	0.0037	1.587	0.0072	7.2	7.8	7.8	8.3	1.75
100	-0.01096	0.0026	1.026	0.0036	11.9	11.6	12	12	1.75
100	-0.0339	0.0024	2.501	0.0053	3.1	3.3	2.4	2.6	1.75
100	-0.02494	0.0049	2.081	0.0085	4.6	5.6	4.6	4.7	1.75
100	-0.02627	0.0098	-2.013	0.018	4.6	5.6	4.6	4.7	1.75
100	-0.01335	0.0041	0.8113	0.0066	7.2	7.8	7.8	8.3	0.9
100	-0.003478	0.0099	0.504	0.013	11.9	11.6	12	12	0.9
100	-0.02933	0.0035	1.294	0.0071	3.1	3.3	2.4	2.6	0.9
100	-0.01663	0.0051	1.071	0.001	4.6	5.6	4.6	4.7	0.9

Таблица 4: Измерения без грузов

$m_n$ , г	$k$ , 1/с	$\sigma_k$ , 1/с	$\beta_0$ , рад/с <sup>2</sup>	$\sigma_{\beta_0}$ , рад/с <sup>2</sup>	$r$ , см
100	-0.0084	0.0018	2.87	0.0178	1.75
100	-0.003478	0.0099	2.67	0.0211	1.75
100	-0.006902	0.0022	1.41	0.0137	0.9
100	-0.005464	0.002	1.76	0.0128	0.9

Таблица 5: Коэффициент вязкого трения

масса перегрузка, г	$k$ , 1/с	$r$ , см	$\eta$ , 10 <sup>-9</sup> кг·м <sup>2</sup> /с
0	-0.005163	1.75	2.695892719
6.21	-0.00831	1.75	5.919524625
9.07	-0.0084	1.75	6.71937
100	-0.01176	0.9	11.1497148
103.55	-0.01237	0.9	12.0837582
8.95	-0.006902	0.9	1.4535612
64.2	-0.00763	0.9	5.02149375
106	-0.01022	0.9	10.1863251

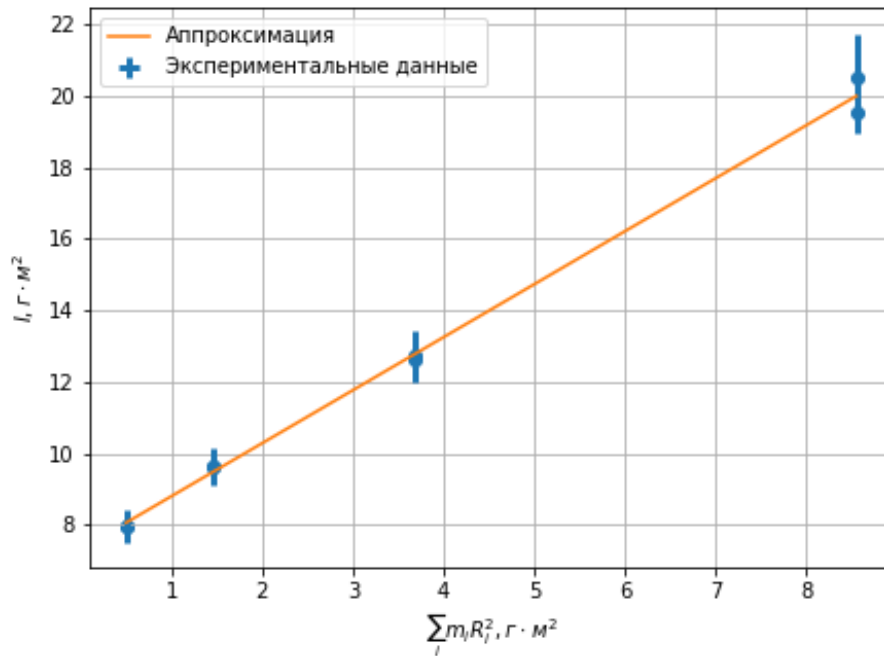


Рис. 4: Зависимость момента инерции от положений грузов

Исходя из полученных данных можно найти значение  $\eta = (6.09 \pm 1.22) \cdot 10^{-9} \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ . Однако из полученного значения можно сделать немного выводов ввиду высокой погрешности, но при данных скоростях можно пренебречь составляющей с вязким трением, так как значение существенно меньше момента сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса, что подтверждает предполагаемые приближения.

## 4 Вывод

Экспериментально получена зависимость углового ускорения от момента прикладываемых к маятнику сил, тем самым подтверждено уравнение вращательного движения. Определен момент инерции маятника несколькими способами, приводящими к одному и тому же результату.