

1.2.5 Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Анна Назарчук Б02-109

1 Теоретические сведения

Уравнение движения твердого тела:

$$\frac{\vec{dp}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{\vec{dL}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Так как сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент сил \vec{M} - от скорости поступательного движения, то уравнения движения можно рассматривать отдельно.

$$\vec{L} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z \quad (3)$$

Гироскоп - быстро вращающееся тело, для которого, например:

$$I_z \omega_z \gg I_x \omega_x, I_y \omega_y \quad (4)$$

Уравношенный гироскоп - тот, у которого центр масс неподвижен. Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, то:

$$|\Delta \vec{L}| = \left| \int \vec{M} dt \right| \ll |\vec{L}| \quad (5)$$

Рассмотрим маховик, вращающийся вокруг оси z (рис. 1). Будем считать, что:

$$\omega_x = \omega_0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0 \quad (6)$$

Пусть ось вращения повернулась на угол $d\varphi$ в плоскости zx :

$$d\varphi = \Omega dt$$

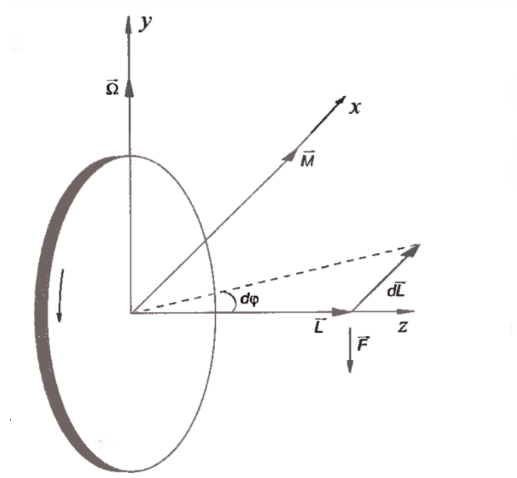


Рис. 1: Маховик

Будем считать, что $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$. Это означает, что момент импульса маховика изменится только по направлению:

$$|d\vec{L}| = Ld\varphi = L\Omega dt \quad (7)$$

Изменение направлено вдоль оси x , поэтому $d\vec{L}$ можно представить:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (8)$$

С учетом уравнения вращательного движения:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (9)$$

Под действием момента \vec{M} ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с угловой скоростью Ω - регулярная прецессия гироскопа. Скорость в случае движения уравновешенного гироскопа под действием моментов сил подвешенных грузов:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (10)$$

где l - расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 2)

Силы трения не лежат в плоскости осей вращения, поэтому они могут изменять момент импульса и по направлению, и по величине. Для ротора действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. В

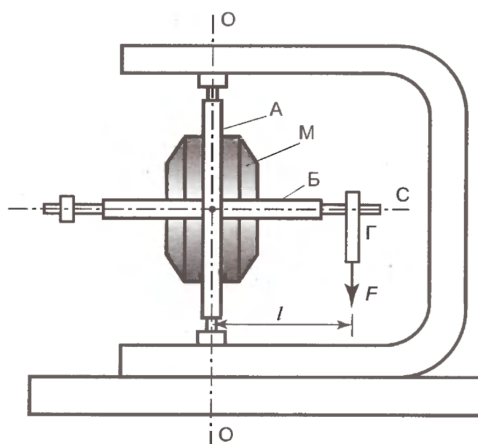


Рис. 2: Схема экспериментальной установки

результате действия нескомпенсированных сил трения в осях карданова подвеса ось гироскопа будет опускаться в направлении груза.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям на жесткой проволоке.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (11)$$

где f - модуль кручения проволоки. Чтобы исключить f можно подвесить цилиндр с известными размерами и массой:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (12)$$

2 Измерения и обработка данных

2.1 Исследование зависимости скорости прецессии от момента сил

Отклонив рычаг на 5-6 градусов вверх и подвесив к нему груз, найдем скорость регулярной прецессии и скорость опускания рычага. Результаты измерения с постоянным моментом сил (для измерения погрешности измерений) и разными представлены в таблице 2.1

Из результатов таблицы 2.1 можно найти систематическую составляющую погрешности Ω , связанную с неточностью определения времени:

Таблица 1: Измерения с разными моментами сил

m, г	N оборотов	T, с	Ω , 1/с	$\Delta\alpha$, 1/с
57	2	364	0.035	0.306
92	2	220	0.057	0.168
92	2	223	0.057	0.113
92	2	221	0.057	0.118
92	2	217	0.058	0.173
92	2	221	0.057	0.135
116	3	261	0.072	0.206
142	3	215	0.088	0.19
180	4	224	0.112	0.201
219	5	232	0.135	0.19
273	6	223	0.169	0.157
341	8	236	0.213	0.206
74	2	271	0.046	0.124

Таблица 2: Измерения момента инерции ротора

N оборотов цилиндра	N обор. ротора	T вращения ротора, с	T вращ. цилиндра,с
11	10	3	3.955
10	10	3	4
10	10	3.26	4
10	10	3	4
10	10	3	4

$$\frac{\sigma_{\Omega}}{\Omega} = 0.027 \quad (13)$$

Исходя из полученной случайной погрешности и результатов в таблице (2.1) построим график зависимости Ω от M (рис. 3)

2.2 Измерение момента инерции ротора

Характерные размеры цилиндра: $m = 1617.8$ г, $d = 78.1$ мм

Из таблицы ?? можно сказать, что $I_{\text{ц}} = 0.00123349$ кг · м² Результаты измерений периода крутильных колебаний с ротором и цилиндром представлены в таблице 2

Из приведенных измерений можно сказать, что:

$$I_0 = (0.78 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad (14)$$

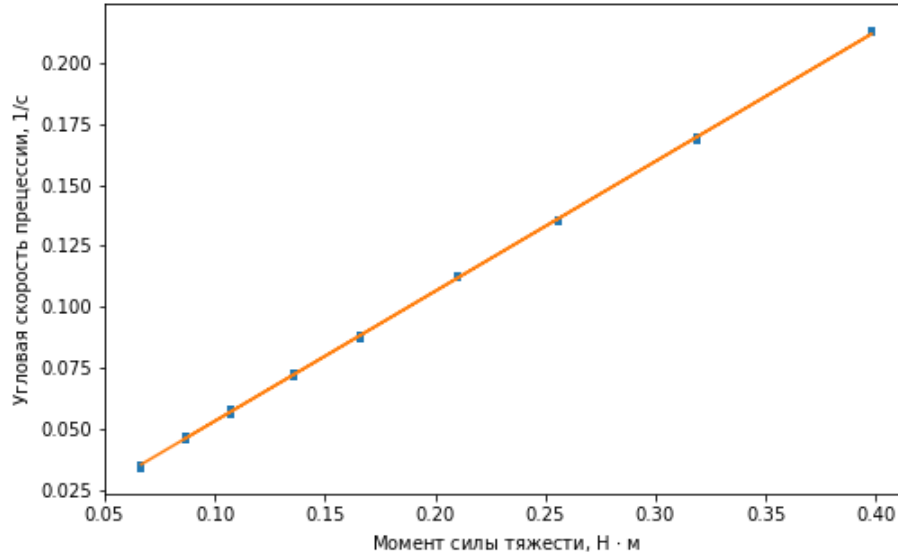


Рис. 3: Зависимость Ω от M

2.3 Расчет частоты вращения и момента сил трения

По формуле 10 можно понять, что ν_0 (частота вращения)- величина, обратно пропорциональная наклону графика на рис. 3. С помощью МНК найдем наклон графика a , а из него ν_0 :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi \cdot a I_0} = 385.71 \pm 12.73 \text{ c}^{-1}$$

Определим момент сил трения. Для каждого эксперимента будем измерять высоту опускания груза, тем самым измерив угол опускания за период измерения.

$$M_{\text{тр}} = \frac{mgl\Delta\alpha}{2\pi N}, \quad (15)$$

где $\Delta\alpha$ - угол опускания за N оборотов регулярной прецессии. Данные об измерения в таблице 2.1. Погрешность измерения $\Delta\alpha$ определим исходя из полученных значений при неизменной массе груза, а следовательно и момента силы тяжести. В связи с неточным определением смещения по высоте и времени, погрешность момента силы трения сравнительно остальных измерений высока:

$$M_{\text{тр}} = 1.37 \pm 0.26 \text{ мН} \cdot \text{м} \quad (16)$$

2.4 Определение частоты вращения ротора по фигурам Лиссажу

Если на один вход осциллографа подать ЭДС во второй обмотке статора гироскопа, а на второй - напряжение с генератора, то при совпадении частот можно увидеть эллипс. Для достижения более неподвижного эллипса, можно на короткое время выключить питание гироскопа, чтобы ток первой обмотки не мешал измерениям. Таким образом:

$$\nu = 395 \text{ Гц} \quad (17)$$

Данное значение частоты лежит в пределах погрешности частоты, измеренной с помощью эксперимента с вращением гироскопа.

Проверим справедливость соотношения: $L_{\Omega} \ll L_{\omega_0}$. Значения моментов инерции ротора по разным осям не отличаются по порядку, а угловые скорости:

$$\Omega \approx 0.06 \text{ 1/c} \ll \omega_0 \approx 2400 \text{ 1/c}$$

поэтому предположенное соотношение верно.

3 Вывод

Установлена зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определена скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.