Чисельні методи.   43,44 ПЗ   2016-2017

Самостійна робота

Викладач   Васіна Л.С.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЛАЙНАМИ

Постановка задачі

Поширений спосіб наближеного моделювання нелінійних характеристик полягає в їх кусково-поліноміальній апроксимації, при якій на кожному з обраних інтервалів $[x_i;x_{i+1}]$, ширина яких визначається необхідною точністю апроксимації, нелінійну характеристику заміняють інтерполяційним поліномом $S_i(x)$, $i=0..n-1$. Такі кусково-поліноміальні функції з однорідною структурою називають сплайнами або сплайн-функціями (spline – гнучка лінійка) . Наочно сплайн-функцію можна уявити у вигляді математичної моделі гнучкої пружної лінійки, яка закріплена у вузлових точках і плавно вигинається. Якщо закріпити її у двох сусідніхї вузлах із заданими кутами нахилу, то між точками закріплення ця лінійка (механічний сплайн) набуває форми, яка мінімізує її потенціальну енергію. Якщо форма даної лінійки визначається функцією $y=y(x)$, то рівняння вільної рівноваги $y^{IV}(x)=0$, тобто між кожною парою сусідніх вузлів ця функція є поліномом третього степеня. Тому на практиці застосовуюють, як правило, сплайни, “склеєні “ з поліномів третього степеня - кубічні сплайни. При цьому апарат сплайн-апроксимації дозволяє отримати поліноми, які дають неперервність у вузлових точках не тільки самої функції, а і її перших і других похідних, що забезпечує гладке спряження кривих у вузлових точках.

Інтерполяцію сплайнами застосовують в радіотехніці і при дослідженні імпульсів несиметричної форми, аналітичне представлення яких викликає труднощі (наприклад, при проходженні сигнала через нелінійні інерційні кола або в потужніх транзисторних генераторах в ключовому режимі роботи). Імпульс складної форми можна задати у формі графіка (шляхом осцилографування) або таблиці.

Нехай функцію задано таблично в n- вузлових точках $(x_i;y_i)$, $i=0...n$. Функція $S(x)$ являється кубічним сплайном, якщо існує ($n-1$)- поліном третього степеня виду $S_i(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3$, кожний з яких задовільняє наступні умови :

$$1)\; S(x)=S_i(x), x\in[x_i;x_{i+1}], i=0...n-1;$$

$$2)\; S(x_i)=y_i, i=0...n\;;$$

$$3)\; S_{i-1}'(x_i)=S_i'(x_i);$$

$$4)\; S_{i-1}''(x_i)=S_i''(x_i)\;.$$

Невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i є $4(n-1)$ і для їх визначення необхідно скласти систему $4n$-рівнянь. Перша умова-на кожному відрізку будується поліном, а їх об’єднання дає загальний кубічний сплайн; друга умова-умова неперервності функції : значення побудованих поліномів у вузлах співпадають із значеннями функції, ця умова дає можливість скласти $2n$-рівнянь; третя і четверта умови-умови неперервності першої і другої похідних : забезпечення гладкого спряження поліномів у вузлах, ці умови дають можливість скласти $2(n-1)$- рівнянь. Отже, є $(4n-2)$-рівняння. Два відсутніх рівняння отримуємо, задаючи умови закріплення сплайну на кінцях інтервалу. Зокрема, можна вимагати нульової кривизни функції в точках x_0 та x_n: $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (вільний кубічний сплайн). Розв'язуємо отриману систему $4n$-рівнянь з $4n$-невідомими коефіцієнтами і після їх знаходження будуємо сплайн $S(x)$.

В деяких випадках на практиці виконують апроксимацію лінійними сплайнами – на кожному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ між вузлами функція заміняється прямою, а на відрізку $[x_0; x_n]$-ламаною. При цьому $S(x) = y_i + k_i(x - x_i)$, $k_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, $i = 0...n-1$, де k_i- кутовий коефіцієнт прямої в точці x_i.

В пакеті Mathcad представлено функції інтерполяції **cspline(vx,vy) , lspline(vx,vy) interp(vs,vx,vy,x)**, які дають можливість проводити кубічну і лінійну сплайнову інтерполяцію.

cspline(vx,vy) – повертає вектор коефіцієнтів кубічного сплайна **vs** , який використовується функцією **interp** для побудови кубічного сплайна, апроксимуючого дані, представлені у векторах **vx,vy** . На поведінку сплайна на кінцях інтервалу умови не накладаються;

interp(vs,vx,vy,x) – повертає інтерпольоване значення в точці **x** , отримане за допомогою кубічних сплайнів на основі даних, представлених у векторах **vx,vy**. Вектор **vs –** результат виконання однієї з функцій **cspline(vx,vy) , lspline(vx,vy)** . Кубічна сплайнова інтерполяція проводить криву таким чином, що перша і друга похідні є неперервними в кожній точці. Вона використовує інформацію трьох суміжних точок і формує кубічне поліноміальне проходження через ці точки. Потім всі кубічні многочлени "склеюються" для формування загальної кривої.

Викладач Васіна Л.С.

Приклади побудови лінійних і кубічних сплайнів в ППМП Mathcad та Maple

Проілюструємо побудову кубічного сплайна за даними **задачі 1** (таблиця 1).

Задача 1. Апроксимувати дані вимірювань, наведені в таблиці 1 за допомогою кубічного полінома $I(U) = a_0 + a_1 \cdot U + a_2 \cdot U^2 + a_3 \cdot U^3$.

Таблиця 1

U_i	0	0,05	0,03	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5
I_i	0	2	4	5	4	2	1	2	4

Послідовність дій :

↦ вводимо вектор вихідних даних **M** [кнопка відображення панелі інструментів **Matrix** (Матриці)] ;

↦ подаємо вихідні дані у вигляді векторів **Vx** , **Vy** [кнопка відображення панелі інструментів **Matrix** (Матриці)] ;

↦ визначаємо коефіцієнти кубічного сплайна **Vk** [для виклику **cspline** необхідно: в рядку меню обрати **Insert** (Вставити), **f(x)** (Функція) і в категорії функцій **Interpolation and Prediction** знайти **cspline** і ввести аргументи **Vx , Vy**] ;

↦ визначаємо функцію для розрахунку інтерполяційних значень з використанням кубічного сплайна **Fk(x)** [для виклику **interp** необхідно: в рядку меню обрати **Insert** (Вставити), **f(x)** (Функція) і в категорії функцій **Interpolation and Prediction** знайти **interp** і ввести аргументи **Vk ,Vx , Vy , x**] (для прикладу обчислено значення при $x = 0,25; 0,48$) ;

↦ будуємо графік отриманого кубічного сплайна і заданих точок [курсор на місце графіка, кнопка відображеня панелі інструментів **Graph** (Графіки), **X-Y Plot** (двовимірний декартів графік); у позиції шаблона вносимо відповідні змінні; оскільки вихідні дані представлено точками, то у діалоговому вікні **Formatting Currently Selected**

X-Y Plot (Форматування поточного обраного графіка) у вставці **X-Y Axes** обираємо вигляд координатних осей, у вставці **Traces** обираємо для **trace 1** (зображення точок) пункт **dmnd** першого списку **Symbol** (Символи) та пункт **points** (точки) списку **Type** (Тип), а для зображення графіка інтерполюючої функції **Fk(x)**(**trace 2**) встановлюємо тип і ширину лінії;

Викладач Васіна Л.С.

$\mapsto$ після натискання на **OK** на графіку зявляються вихідні дані, представлені ромбіками та шукана апроксимуюча лінія товщиною 2 одиниці.

! Кожне наступне значення, яке визначається, повинно стояти справа або нижче значень, які входять у розрахункову функцію або оператор.

На рис. 2 представлено результат роботи :

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.05 & 2 \\ 0.09 & 4 \\ 0.1 & 5 \\ 0.15 & 4 \\ 0.2 & 2 \\ 0.3 & 1 \\ 0.4 & 2 \\ 0.5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Vx := M^{\langle 0 \rangle} \qquad Vy := M^{\langle 1 \rangle} \qquad Vk := cspline(Vx, Vy)$$

$$Fk(x) := interp(Vk, Vx, Vy, x) \qquad Fk(0.25) = 1.152 \qquad Fk(0.48) = 3.559$$

$$x := 0..0.5$$

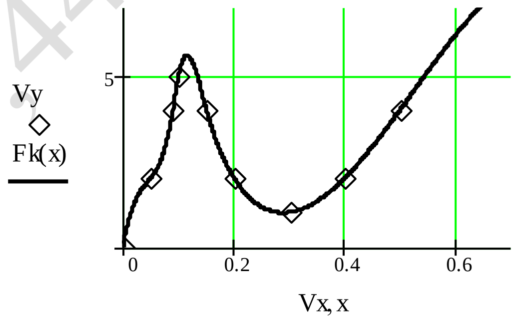

Рис.2

Не зважаючи на високу ефективність сплайнової апроксимації системи Mathcad, вона не виводить частинні поліноми - сплайн-функції, за допомогою яких можна було би проводити інтерполяцію (апроксимацію) без застосування самої системи Mathcad. Використаємо пакет прикладних математичних програм Maple V , який дозволяє явно представити лінійні і кубічні сплайн-функції і графічно проілюструвати лінійний і кубічний сплайни, що проходять через задані точки.

На рис.3 представлено результати обчислень коефіцієнтів кубічного сплайна (аналітичний вигляд кубічного сплайна), який апроксимує систему даних задачі 1 :

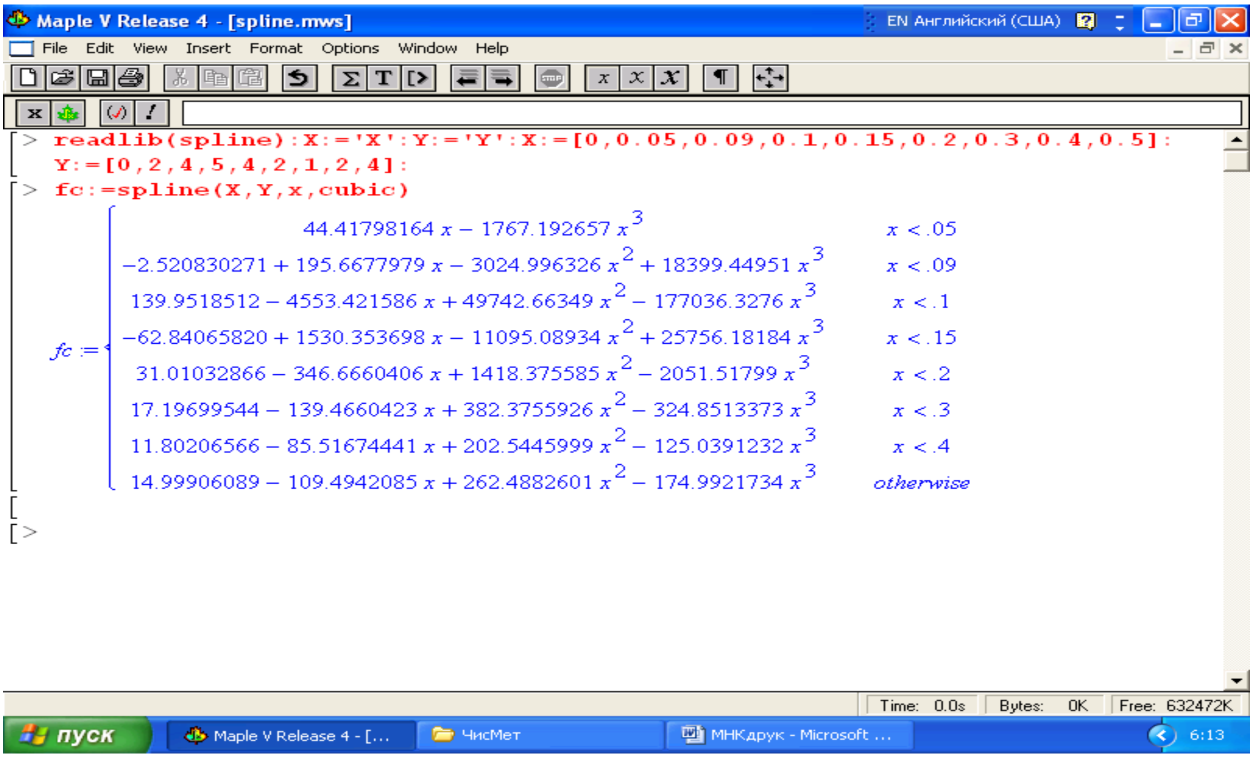

Рис.3

Очевидно, що сплайнова функція представляє собою кускову функцію, визначену на кожному окремому інтервалі і на кожному інтервалі описується окремим поліномом заданого степеня. На рис. 4 – побудовано відповідний лінійний кубічний сплайн та спільний графік отриманих сплайнів **fc (cubic)** та **fl (linear)** , при цьому графік кубічного сплайна - суцільна пряма, графік лінійного - точки.

Для отримання сплайн-функції використовуємо функцію апроксимації пакету Maple V **spline(X,Y,var,d)** , де **X,Y** – одномірні вектори однакового розміру, які містять значення координат вихідних точок в довільному порядку, **var** – імя змінної, відносно якої обчислюється сплайн-функція, параметр **d** – задає вигляд сплайна :**linear** – лінійна функція або поліном першого порядку, **quadratic** – квадратична функція або поліном другого порядку, **cubic** – кубічний сплайн, **quartic** – поліном четвертого порядку. Якщо параметр **d** опущено, то будується кубічний сплайн. Функція побудуви графіків двовимірних графіків **plot** дозволяє будувати сплайнові функції. В графіки можна включати додаткові опції : **color** – колір точок графіка; **style** – використовується для задання інтерполяції кривої по заданим точкам (**line** – виводиться інтерполяційна крива, **point** – виводяться точки); **xthickmarks, ythickmarks** – задають кількість міток на координатних осях; **thickness** – товщину лінії.

На рис. 5 представлено кнопки відображення панелі інструментів, а на рис.6, 7 - фрагменти сплайнової інтерполяціїї в пакеті Mathcad 2000 .

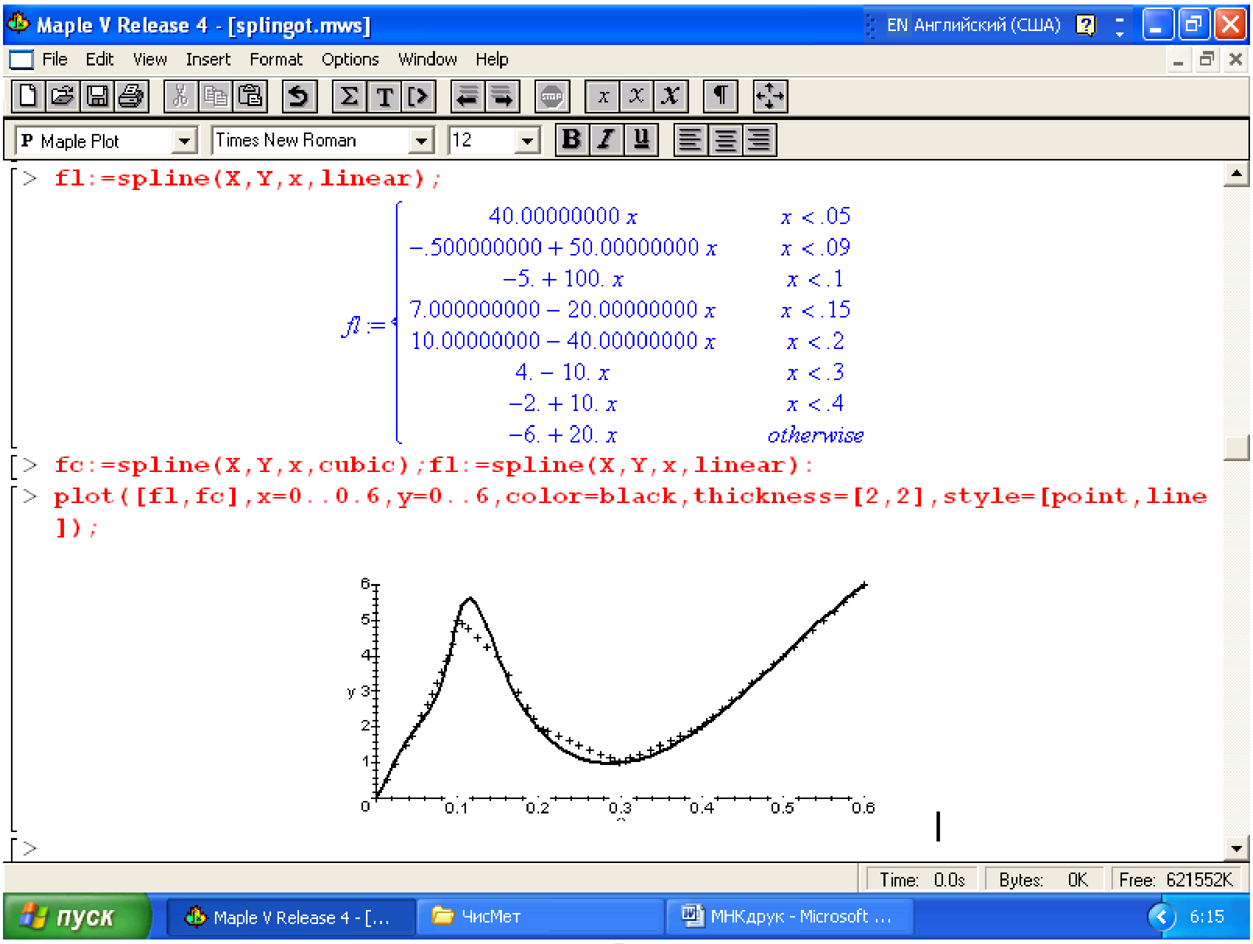

Рис. 4

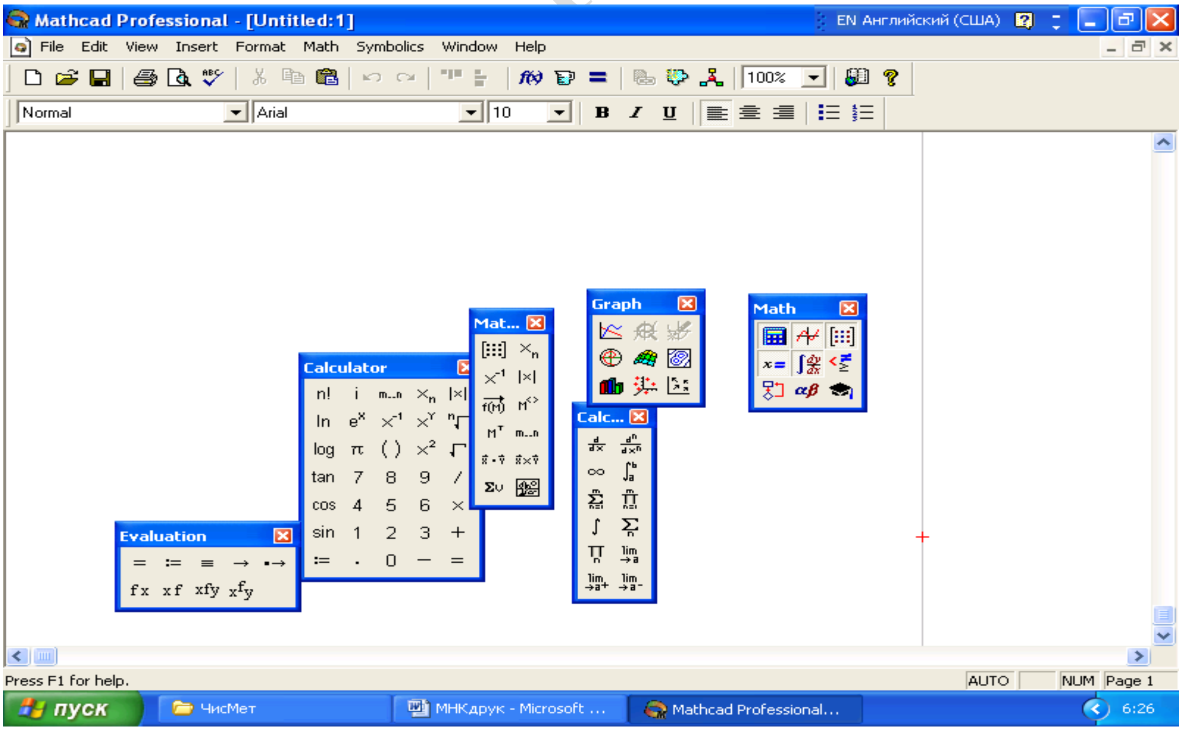

Рис. 5

Викладач *Васіна Л.С.*

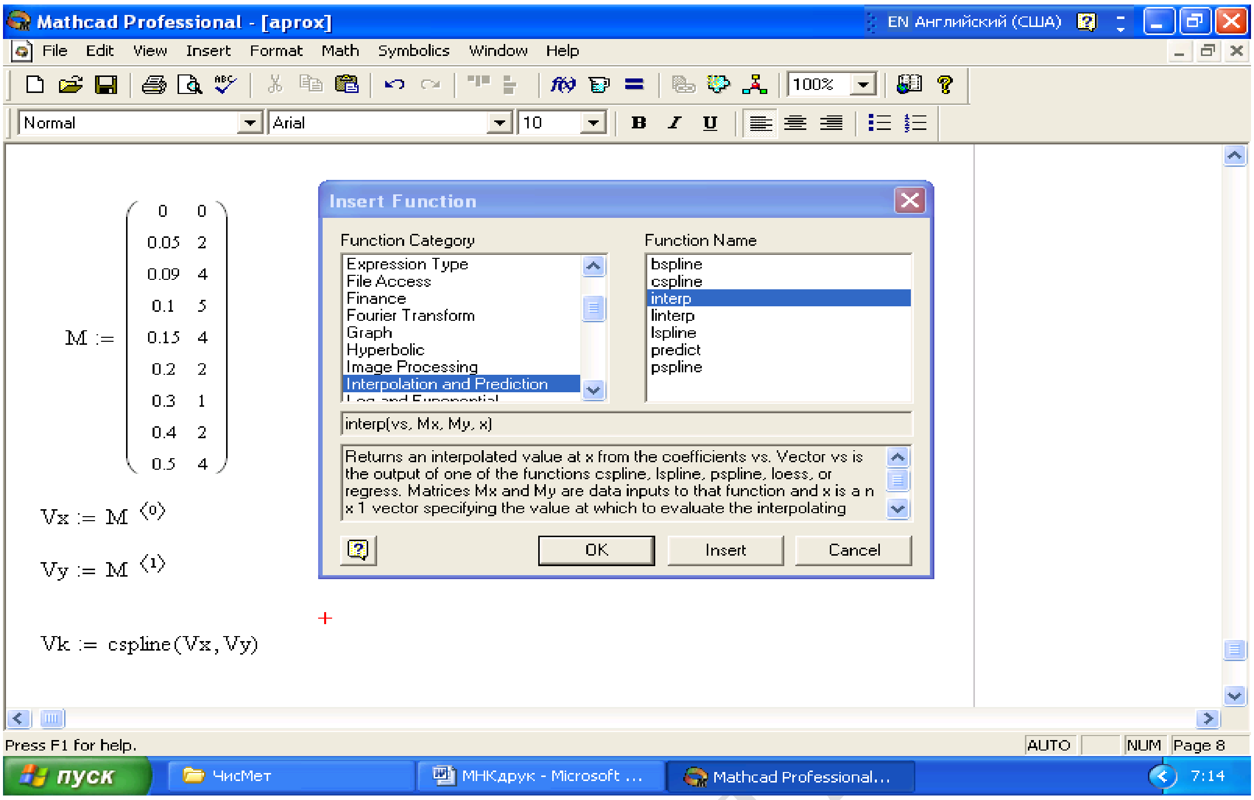

Рис. 6

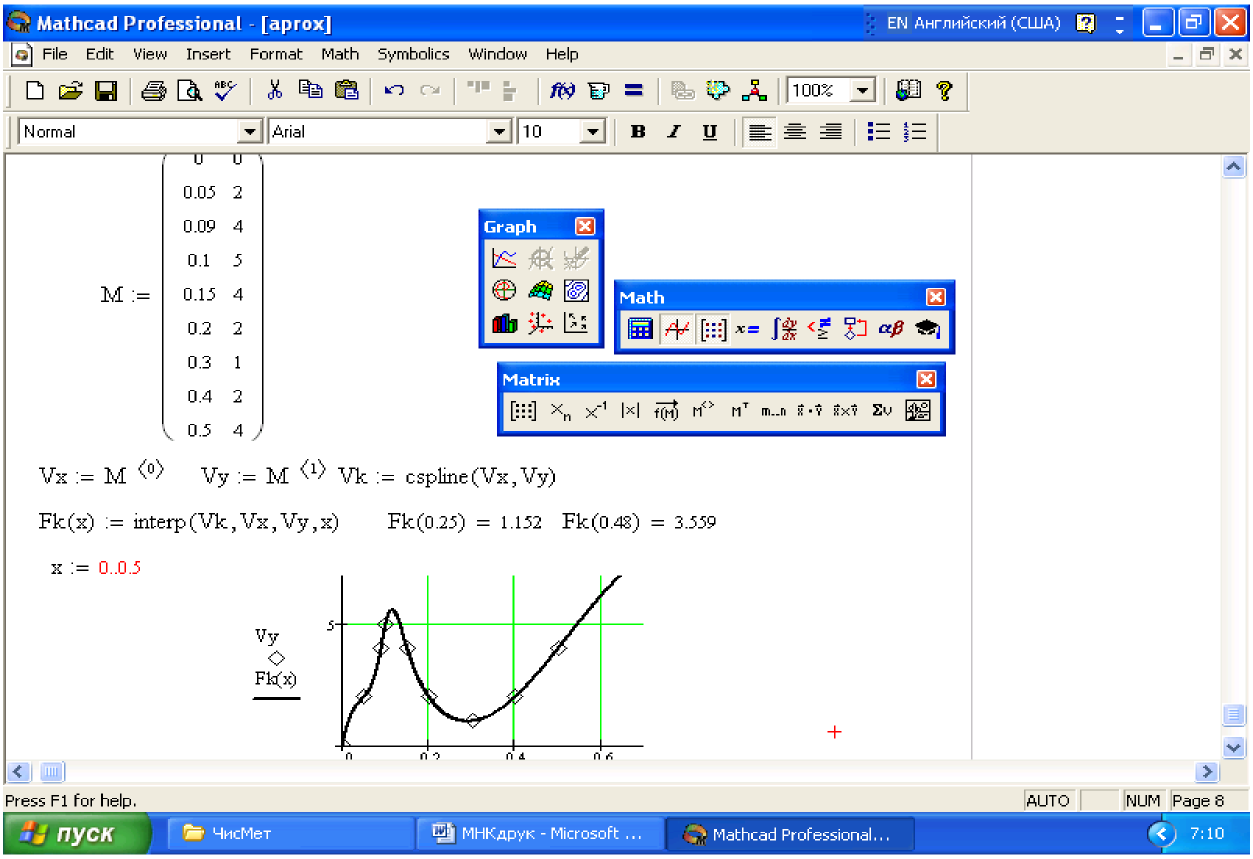

Рис. 7

Викладач *Васіна Л.С.*