ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1.

Базові ймовірнісні та статистичні поняття.

1. Базові поняття: стохастичний експеримент, випадкова подія, ймовірність події. 2. Ілюстрація базових понять (приклад простої вибірки). 3. Класичне визначення ймовірності (на прикладі простої вибірки). 4. Використання класичного визначення (на прикладі простої вибірки). 5. Розподіл Бернуллі. Схема випробувань Бернуллі. 6. Біноміальний розподіл. 7. Геометричний розподіл.

Схема простого вибору. Проста вибірка. ([3]. s. 25).

Приклад 1. (*Вибір з поверненням*). В урні знаходиться 10 куль різного кольору. Серед них: ***три*** білих; ***три*** синіх та ***чотири*** чорних. Вибираємо ***випадково*** з урни одну кулю. Записуємо її колір і повертаємо знову до урни, щоб не змінити початкового складу урни. Повторюємо такий вибір ще один раз. Результатом всього експерименту буде ***два записи***, що вказують колір вибраних куль. **Необхідно**:

1) *Збудувати простір елементарних подій* (Ω) *для цього експерименту*.

2) *Використовуючи збудований простір елементарних подій* Ω *описати* (*тобто визначити множину сприятливих для неї наслідків*) *випадкову подію*:

B = {*було вибрано* ***синю*** *та* ***чорну*** *кулі*}.

3) *Знайти ймовірність* ***P{B}*** *події* ***B***.

(**Відповідь: *P*{*B*} = 0,24.**)

Приклад 2. Пов'яжемо з стохастичним експериментом, що описаний в прикладі 1, *випадкову величину* ξ наступним чином:

ξ = {*кількість* ***синіх*** *куль серед двох вибраних*}.

1) Які ***значення*** може приймати випадкова величина ξ?

2) Що називаємо ***розподілом*** випадкової величини ξ?

3) Знайти розподіл величини ξ.

(**Відповідь: {(0; 0,49), (1; 0,42), (2; 0,09)}.**)

Приклад 3. Випадкова величина η теж пов'язана з експериментом, що описаний в прикладі 1 і визначає кількість ***чорних*** куль серед двох вибраних. Розглянемо дві випадкові події, що пов'язані з цим стохастичним експериментом:

A = {*при першому виборі були вибрано* ***синю*** *кулю*}.

B = {*при другому виборі були вибрано* ***чорну*** *кулю*}.

1) Знайти розподіл випадкової величини η.

Відповідь: ***розподіл*** η ***дає наступна таблиця***:

y_i	0	1	2
s_i	0,36	0,48	0,16

2) Чи будуть випадкові події *A* та *B* ***залежні***? Відповідь обґрунтувати.

Відповідь: *Випадкові події A та B незалежні.*

Приклад 4. Нехай ξ та η – випадкові величини пов'язані з стохастичним експериментом прикладу 1, що визначені в прикладах 2 та 3. Випадкова величина ξ означає кількість ***синіх*** куль, а випадкова величина η – кількість ***чорних*** куль серед двох вибраних.

1) Знайти розподіл випадкового вектора (ξ, η).

Відповідь: {[(0; 0), 0,09], [(0; 1), 0,24], [(0; 2), 0,16], [(1; 0), 0,18], [(1; 1), 0,24], [(1; 2), 0]}, [(2; 0), 0,09], [(2; 1), 0], [(2; 2), 0]}.

2) Перевірити, чи будуть випадкові величини ξ та η залежні, чи ні.

Відповідь: *Випадкові величини ξ та η залежні.*

Розподіл Бернуллі. Випадкова величина η має розподіл Бернуллі, якщо може приймати тільки два значення: $\eta \in \{0, 1\}$. Позначимо:

$p = P\{\eta = 1\}$. Тоді $P\{\eta = 0\} = 1 - p$. Нехай $q = 1 - p$; $p + q = 1$.

Біноміальний розподіл $B(n, p)$ з параметрами n і p. ξ має розподіл $B(n, p)$, якщо всі її значення належать множині $\xi \in \{0, 1, \ldots, n\}$ і при цьому:

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Схемою випробувань Бернуллі з параметром p називається послідовність незалежних між собою повторів того самого стохастичного експерименту, що має тільки ***два*** різних ***наслідки***. Часто один з них *умовно* називають «*УСПІХОМ*» і позначають символом «У». Другий, відповідно, «НЕВДАЧЕЮ» і позначають «Н». При цьому: $P\{«У»\} = p$; і $P\{«Н»\} = 1 - p = q$; $p + q = 1$.

Приклад 5. Нехай випадкова величина ξ визначає кількість «*УСПІХІВ*» в серії n випробувань Бернуллі з параметром p. Довести, що ξ має *біноміальний розподіл з параметрами n і p*, тобто $\xi \Leftrightarrow B(n, p)$.

Приклад 6. Маємо урну, описану в прикладі 1.

1) Застосовуючи схему простого вибору вибираємо ***одну*** кулю. Нехай $\zeta^{(1)}$ означає кількість ***білих*** куль. Який розподіл має випадкова величина $\zeta^{(1)}$?

Відповідь: Бернуллі з параметром p = 0,3.

2) Вибираємо ***три*** кулі, $\zeta^{(3)}$ означає кількість ***білих*** куль. Який розподіл має випадкова величина $\zeta^{(3)}$?

Відповідь: B(3, 0,3).)

Приклад 7. 15% продукції певних виробів – це вироби ІІ-го сорту (ґатунку), решта – вироби І-го сорту. Продано партію товарів, що налічує 3 вироби. Нехай *випадкова величина* ξ визначає кількість виробів ІІ-го ґатунку в проданій партії. Знайти її розподіл.

Відповідь: $\xi \Leftrightarrow B$(3, 0,15), або {(0; 0,614), (1; 0,325), (2; 0,58), (3; 0,003)}.

Приклад 8. Брошура має 20 сторінок. Відомо, що в тексті цієї брошури є ***сім*** помилок. Нехай випадкова величина ξ означає кількість помилок на ***випадково вибраній*** сторінці.

1) Знайти розподіл випадкової величини ξ.

Відповідь: Біноміальний B(7, 0,05).

2) Використовуючи таблиці ***біноміального розподілу*** підрахувати ймовірність наступних випадкових подій:

(A) = {На ***випадково вибраній*** сторінці немає жодної помилки}

(B) = {На ***випадково вибраній*** сторінці є ***точно дві*** помилки}

(C) = {На ***випадково вибраній*** сторінці є ***щонайменше три*** помилки}

Відповідь: $P\{A\}$ = 0,699; $P\{B\}$ = 0,041; $P\{C\}$ = 0,003.

Приклад 9. Кидаємо три рази гральний кубик. Випадкова величину ξ показує, скільки разів в цьому експерименті було отримано результат «6».

1) Знайти розподіл випадкової величини ξ та побудувати на його підставі функцію розподілу $F_\xi(x)$.

Відповідь: *функція розподілу $F_\xi(x)$*:

x_i	$(-\infty; 0]$	(0, 1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 3,5]
$F_\xi(x_i)$	0	0,5887	0,9259	0,9954	1

2) Використовуючи функцію розподілу $F_\xi(x)$ знайти ймовірності таких подій: $A = \{0 < \xi < 3\}$; $B = \{\xi \geq 1{,}5\}$; $C = \{\xi \leq 2\}$.

Відповідь: $P\{A\}$ = 0,4167; $P\{B\}$ = 0,0741; $P\{C\}$ = 0, 9954.

Приклади схем випадкового вибору.

Приклад 10. Маємо дві урни. В першій з них знаходиться 10 куль, серед яких ***дві*** білі кулі та ***вісім*** куль чорних. В другій теж знаходиться 10 куль, серед яких ***шість*** білих куль та ***чотири*** чорні кулі. Вибираємо ***випадково*** з кожної урни по одній кулі.

1) Збудувати для цього експерименту *простір елементарних подій* (Ω).

2) Використовуючи збудований простір Ω описати наступну випадкову подію:

B = {серед вибираних куль є ***біла*** та ***чорна*** кулі}.

Знайти *ймовірність* $P\{B\}$ події B. **Відповідь:** $P\{B\} = 0{,}56$.

Приклад 11. Пов'яжемо з стохастичним експериментом, що описаний в прикладі 10, *випадкову величину* ξ наступним чином:

ξ = {*кількість **білих** куль серед двох вибраних*}.

1) Які ***значення*** може приймати випадкова величина ξ?

2) Знайти розподіл випадкової величини ξ. **Відповідь:** ***розподіл*** ξ:

x_i	0	1	2
p_i	0,32	0,56	0,12

3) Знайти *ймовірність* наступних подій:

$$A = \{0 < \xi < 4\};\ B = \{\xi \geq 1{,}5\};\ C = \{\xi < 2\}.$$

Відповідь: **P{A} = 0,68; P{B} = 0,12; P{C} = 0,88.**

4) Збудувати ***функцію розподілу*** випадкової величини ξ та намалювати її графік.

Відповідь: ***функція розподілу*** $F_\xi(x)$:

x_i	$(-\infty;0]$	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 2{,}2]$
$F_\xi(x_i)$	0	0,32	0,88	1

5) Використовуючи функцію розподілу $F_\xi(x)$ розв'язати **завд. 3)**, тобто знайти *ймовірність* подій A, B і C та дати графічну ілюстрацію розв'язку.

Геометричний розподіл.

Дискретна випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p, якщо може приймати цілі невід'ємні значення $\xi \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. І при цьому:

$$p_k = P\{\xi = k\} = (1-p)^k \cdot p,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Приклад 12. ([3]. s. 181) Нехай випадкова величина ξ визначає кількість повторів експерименту ***до появи*** першого «*УСПІХУ*» (***не враховуючи*** цього «*УСПІХУ*»).

Довести, що ξ має геометричний розподіл *з параметром* p.

Приклад 13. ([3]. s. 182) Нехай випадкова величина ξ має геометричний розподіл *з параметром* p.

Довести що тоді для будь-яких цілих $n \in \{1, 2, \ldots,\}$ та $k \in \{1, 2, \ldots,\}$, виконується наступна рівність:

$$P\{\xi = n + k / \xi \geq n\} = P\{\xi = k\} = (1-p)^k \cdot p,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Приклад 14. ([1]. s. 115) Нехай дискретна випадкова величина ξ приймає цілі невід'ємні значення: $\xi \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Якщо для будь-яких цілих $n \in \{1, 2, \ldots,\}$ та $k \in \{1, 2, \ldots,\}$, виконується наступна рівність:

$$P\{\xi > n + k / \xi > n\} = P\{\xi > k\},$$

то величина ξ має геометричний розподіл *з параметром* p, де p визначається рівністю:

$$p = P\{\xi = 0\}.$$

Приклад 15. Нехай випадкова величина ξ визначає кількість *кидань грального кубика до моменту, аж з'явиться* «6» (***не враховуючи*** цього останнього *кидання*).

1. Побудувати простір елементарних наслідків цього стохастичного експерименту.

$$\Omega = \{\omega\}.$$

2. Визначити для кожного елементарного наслідку $\omega \in \Omega$ ймовірність:

$$p_\omega = P\{\omega\}.$$

3. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

4. На підставі знайденого розподілу збудувати функцію розподілу $F_\xi(x)$ та побудувати її графік.

5. Як називається цей розподіл та який його параметр?

Відповідь: ξ має геометричний розподіл з параметром p = 1/6.

1. **Война О.А.**: *Статистичний аналіз та прогнозування в економічних моделях*. Частина 1. *Вступ до описової статистики, теорії ймовірностей та математичної статистики*. Кошалін. ПК. 2003. – 305 с.

2. **Война О.А.**: *Лекції з основ статистики*. Частина 1. *Описова статистика*. Кошалін. ПК. 2011. – 250 с.

3. **Война О.А.**: *Лекції з основ статистики*. Частина 2. *Елементи прийняття статистичних рішень та математичні методи вимірювання ризику.* Кошалін. ПК. 2015. – 375 с.