Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №4

Чисельні методи в інформатиці

"Інтерполяція"

Варіант №8

Виконав студент групи ІПС-31
Тесленко Назар Олександрович

Київ - 2025

Постановка задачі:

Варіант №8

1. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона за п'ятьма вузлами для функції $2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3$ на проміжку [0, 4]. Вузли обрати, як нулі полінома Чебишова того ж порядку для відповідного проміжку. Оцінити похибку інтерполяції.

2. Знайти деякий розв'язок рівняння з попереднього пункту, використовуючи пряму та обернену інтерполяцію. Порядок полінома взяти той же що і у попередньому пункті. Якщо у дослідженому інтервалі є розв'язок – для прямої інтерполяції можна використати вже побудований поліном.

Теоретичний опис та обґрунтування:

Інтерполяція

Задача інтерполяції полягає у відшуканні невідомих значень функції $f(x)$ за її відомими значенями $f(x_k)$ в точках $x_k \in [a; b],\ k = \overline{0, n}$, які називають вузлами інтерполяції. Розв'язок шукаємо у вигляді полінома $P_n(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$f(x_k) = P_n(x_k),\ k = \overline{0, n}$$

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділені різниці:

першого порядку $f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

…………

(k+1) порядку: $f(x_i,\ \dots,\ x_{i+k+1}) = \frac{f(x_i, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}$

За допомогою даних формул розділених різниць будуємо однойменну таблицю, а саме - **таблицю розділених різниць:**

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0;\ x_1)$	$f(x_0,\ x_1,\ x_2)$	$\cdots$	$f(x_0,\ x_1,\ \dots,x_n)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1;\ x_2)$	$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$	$\cdots$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2;\ x_3)$	$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$f(x_{n-1};\ x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

На підставі даної таблиці, використовуючи перший її рядок, можемо записати інтерполянт Ньютона вперед:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1)(x - x_0) + f(x_0,\ x_1,\ x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+\dots + f(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n)(x - x_0)(x - x_1) *\dots* (x - x_{n-1})$$

або ж скориставшись останнім рядком, дістанемо інтерполяційну формулу Ньютона назад:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1},\ x_n)(x - x_n) + \dots + f(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n)(x - x_n)\dots(x - x_1)$$

Для оцінки похибки інтерполяції можна використати оцінку залишкового члену у формі Ньютона:

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| = \omega(x) f(x, x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n)$$

Вибір вузлів (поліном Чебишова)

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}, \ |x| \geq 1$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ |x| \leq 1$$

Нулі полінома Чебишова $x \in [-1; 1]$: $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \ k = \overline{0, n-1}$

Поліном Чебишова 1 роду на проміжку [a;b]

За допомогою заміни $x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a))$ переведемо проміжок [-1;1] в [a;b]. Тоді поліноми Чебишова запишуться таким чином:

$T_n^{[a;b]}(x) = T_n^{[-1;1]}(\frac{2x-(b+a)}{b-a})$

Його нулі: $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2N}, \ k = \overline{0, N-1}$, N - к-сть вузлів

При використанні цих вузлів похибка має вигляд:

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Пряма інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a;b]$, що задана таблично $(x_i, y_i), \ i = \overline{0, n}$, немонотонна. Для знаходження x^* застосовемо алгоритм:

За заданою таблицею $(x_i, y_i), \ i = \overline{0, n}$ будуємо інтерполяційний поліном

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) * ... * (x - x_{n-1})$$

та розв'язують нелінійне рівняння

$$P_n(x) = 0$$

На підставі теореми про середнє:

$f(x) - f(x^*) = f'(\xi)(x - x^*)$ одержимо $x - x^* = \frac{f(x)-f(x^*)}{f'(\xi)}$.

Отже похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \le \frac{M_{n+1}|\omega(x^*)|}{m_1(n+1)!},$$

де $m_1 = \min\limits_x |f'(x)|$, $M_{n+1} = \max\limits_n \left|f^{n+1}(x)\right|$, $m_1 \ne 0$

Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a, b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$ монотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$ таку таблицю: (y_i, x_i), $i = \overline{0, n}$. На підставі останньої таблиці інтерполянт набуває вигляду:

$$P_n(y) = x_0 + f(y_0, y_1)(y - y_0) + f(y_0, y_1, y_2)(y - y_0)(y - y_1) +$$
$$+ \ldots + f(y_0, y_1, \ldots, y_n)(y - y_0)(y - y_1) * \ldots * (y - y_{n-1})$$

де $P(y^*) \approx x^*$

Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями x та y, а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції. Похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \le \frac{\overline{M}_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(y^*)|; \ \overline{M_{n+1}} = \max_y \left|\frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y)\right|$$

За допомогою інтерполяції можна знаходити корені нелінійних рівнянь, для цього знаходять x^* при $y^* = 0$

Хід роботи

Функція: $2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3$

Досліджувати функцію будемо на проміжку [0;4] (за умовою)

1. Пошук вузлів, як нулів полінома Чебишова

Оскільки за умовою потрібно взяти 5 вузлів (N=5) ⇒ максимальний степінь поліном дорівнює 4 (n=4)

За формулою знайдемо 5 вузлів і відповідне значення функції у даних точках:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2N},\ k = \overline{0,\ N-1},$$ N - к-сть вузлів

```
Choosing 5 nodes by Chebyshov polynomial
k   xk         f(xk)
0   3.902      41762.813
1   3.176      10884.204
2   2.000      579.000
3   0.824      5.983
4   0.098      3.000
```

2. Після того як отримали результати переходимо до етапу побудови таблиці розділених різниць та побудови інтерполяційного поліному методом Ньютона:

```
Divided differences table:
i            | x          | f(x0)        | f(x0,x1)     | f(x0,x1,x2)  | f(x0,x1,x2,x3) | f(x0,x1,x2,x3,x4)
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------
0            | 3.9021     | 41762.8133   | 42500.7602   | 17735.3448   | 4618.4757      | 935.0000
1            | 3.1756     | 10884.2035   | 8766.1297    | 3521.1382    | 1061.5243      | 0.0000
2            | 2.0000     | 579.0000     | 487.4372     | 254.1023     | 0.0000         | 0.0000
3            | 0.8244     | 5.9832       | 4.1059       | 0.0000       | 0.0000         | 0.0000
4            | 0.0979     | 3.0000       | 0.0000       | 0.0000       | 0.0000         | 0.0000
```

Обираємо перший рядок як коефіцієнти полінома та отримуємо:

```
P4(x)=
41762.81 +
42500.76*(x - 3.902) +
17735.34*(x - 3.902)*(x - 3.176) +
4618.48*(x - 3.902)*(x - 3.176)*(x - 2.000) +
935.00*(x - 3.902)*(x - 3.176)*(x - 2.000)*(x - 0.824)
```

Після приведення до нормального вигляду поліном має наступний вигляд:

$$P_4(x) = 935x^4 - 4639.89x^3 + 7625.916x^2 - 4043.763x + 338.9039$$

3. Знайшовши інтерполяційний поліном, оцінимо похибку інтерполяції

Потрібно взяти 5 похідну від нашої початкової функції:

```
def max_der(x):
    return 5040*x**2+2160*x+480
```

```
====== Interpolation Check ======
Test point x = 2.4
Function value f(x)        = 1812.108173
Newton polynomial P(x)     = 1422.136000
Absolute difference         = |f(x) - P(x)| = 389.972173
Theoretical error bound     = 1496.000000
=================================
Interpolation error is within the theoretical bound.
```

Отже був знайдений інтерполяційний поліном за методом Ньютона, що задовільняє інтерполяційну похибку.

Перейдемо до другої частини лабораторної роботи, а саме знаходження кореня за використання прямої та оберненої інтерполяції:

Попередній аналіз поведінки заданої функції $2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3$ на початковому проміжку [0; 4] показує, що функція набуває виключно додатних значень (мінімальне значення f(0)=3). Внаслідок монотонного зростання та додатності функції на цьому відрізку, рівняння f(x)=0 не має на ньому дійсних коренів.

Для виконання завдання змінюємо інтервал дослідження на такий, що гарантує наявність кореня

Використаємо чисельний метод бісекції для знаходження кореня:

```
====== Root Found ======
x ≈ -0.9999990463
f(x) ≈ 0.0000152588
========================
```

Отже, обираємо інтервал $[-2; 0]$

Пряма інтерполяція

Для застосування методу прямої інтерполяції було обрано новий інтервал [-2; 0], на якому функція змінює знак, що гарантує існування кореня.

За вузлами Чебишова на цьому проміжку побудовано інтерполяційний поліном Ньютона 4-го степеня:

```
Newton interpolation polynomial P(x):
3.00 +
0.10*(x - -0.049) +
-5.19*(x - -0.049)*(x - -0.412) +
31.63*(x - -0.049)*(x - -0.412)*(x - -1.000) +
-58.75*(x - -0.049)*(x - -0.412)*(x - -1.000)*(x - -1.588)

Searching for root of P(x)=0 on interval:
[-2, 0]

Applying bisection to P(x)=0...
```

Ітерації при знаходженні кореня та результат:

```
iter  1: mid=-1.5000000, P(mid)=-26.2343750
iter  2: mid=-1.2500000, P(mid)=-5.3115234
iter  3: mid=-1.1250000, P(mid)=-1.5182495
iter  4: mid=-1.0625000, P(mid)=-0.5576591
iter  5: mid=-1.0312500, P(mid)=-0.2376506
iter  6: mid=-1.0156250, P(mid)=-0.1096055
iter  7: mid=-1.0078125, P(mid)=-0.0526275
iter  8: mid=-1.0039062, P(mid)=-0.0257859
iter  9: mid=-1.0019531, P(mid)=-0.0127630
iter 10: mid=-1.0009766, P(mid)=-0.0063492
iter 11: mid=-1.0004883, P(mid)=-0.0031666
iter 12: mid=-1.0002441, P(mid)=-0.0015813
iter 13: mid=-1.0001221, P(mid)=-0.0007901
iter 14: mid=-1.0000610, P(mid)=-0.0003949
iter 15: mid=-1.0000305, P(mid)=-0.0001974
iter 16: mid=-1.0000153, P(mid)=-0.0000987
iter 17: mid=-1.0000076, P(mid)=-0.0000494
iter 18: mid=-1.0000038, P(mid)=-0.0000247
iter 19: mid=-1.0000019, P(mid)=-0.0000123
iter 20: mid=-1.0000010, P(mid)=-0.0000062
```

```
========== Result =========
Root of P(x)=0 : x ≈ -1.0000004768
P(x) ≈ -0.0000030845
=============================
```

В результаті обчислень отримано наближене значення кореня $x \approx -1$ Це значення з високою точністю співпадає з точним коренем $x = -1$, знайденим на етапі попереднього аналізу функції.

<u>Обернена інтерполяція</u>

Для знаходження кореня рівняння $f(x) = 0$ методом оберненої інтерполяції виконуємо наступні дії:

- Знаходимо вузлу та значення функції в цих точках

```
=========== Inverse Interpolation Method ===========
Choosing 5 nodes by Chebyshov polynomial
k   xk        f(xk)
0   -0.049    3.000
1   -0.412    2.963
2   -1.000    0.000
3   -1.588    -40.179
4   -1.951    -159.846

Building polynomial x(y) (swapping x and y)...
```

- Формуємо таблицю розділених різниць, де значення y_i прийнято за вузли інтерполяції, а x_i - за значення функції
- Будуємо поліном за отриманими даними. Шуканий корінь знаходимо шляхом підстановки значення $y = 0$, у побудований поліном

```
Divided differences table:
i             | x           | f(x0)         | f(x0,x1)      | f(x0,x1,x2)   | f(x0,x1,x2,x3) | f(x0,x1,x2,x3,x4)
----------------------------------------------------------------------------------------------------
0             | 3.0000      | -0.0489       | 9.8360        | 3.2125        | 0.0743        | 0.0005
1             | 2.9631      | -0.4122       | 0.1984        | 0.0043        | 0.0000        | 0.0000
2             | 0.0000      | -1.0000       | 0.0146        | 0.0001        | 0.0000        | 0.0000
3             | -40.1795    | -1.5878       | 0.0030        | 0.0000        | 0.0000        | 0.0000
4             | -159.8461   | -1.9511       | 0.0000        | 0.0000        | 0.0000        | 0.0000

P_4:
-0.0489 +
9.8360*(x - 3.0000) +
3.2125*(x - 3.0000)*(x - 2.9631) +
0.0743*(x - 3.0000)*(x - 2.9631)*(x - 0.0000) +
0.0005*(x - 3.0000)*(x - 2.9631)*(x - 0.0000)*(x - -40.1795)

========== Result (Inverse) =========
Approximation for f(x) = 0
Root x ≈ -1.0000000000
Check f(x_root) ≈ 0.0000000000
====================================
```

Аналізуючи результати прямої та оберненої інтерполяцій, можемо прийти до висновку що корінь інтерполяційного поліному був знайдений коректно: $x = -1$