ЛЕКЦІЯ 4(А).
Функція розподілу випадкової величини.

1. *Визначення функції розподілу*. 2. *Характеристичні властивості функції розподілу*. 3. *Необхідність умов.* 4. *Достатність умов.* 5. *Роль функції розподілу в математичній статистиці*. 6. *Функція розподілу в практичних розрахунках.*

В попередній лекції було введено *абстрактне*, тобто формальне, *математично-строге* визначення випадкової величини. Згідно з ним випадкова величина обов'язково повинна бути *безпосередньо пов'язаною* з деяким ймовірнісним простором $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ і визначається, як вимірна відносно σ-алгебри $\mathfrak{F}$ функція $\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega$.

В свою чергу, умова вимірності відносно σ-алгебри $\mathfrak{F}$ означає, що для довільного дійсного числа $-\infty < c < +\infty$, множина

$$A_c = \{\omega\colon \xi(\omega) < c\} \in \mathfrak{F}$$

буде належати до σ-алгебри $\mathfrak{F}$, тобто буде випадковою подією.

Отже для довільного дійсного числа $-\infty < c < +\infty$ можна визначити її ймовірність події A_c.

Зауваження. В теорії ймовірностей використовуються спрощені позначення, пов'язані з випадковою величиною. Перш за все, пам'ятаючи, що випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$ є функцією $\omega \in \Omega$ елементарного наслідку, для неї, однак, вживається скорочене позначення ξ, в якому аргумент ω опускається. В результаті замість детального позначення випадкової події $A_x = \{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ використовуються спрощене $A_x = \{\xi < x\}$.

1. Визначення функції розподілу.

Теорія ймовірностей – це один серед великої кількості абстрактних математичних розділів, побудованих на *аксіоматичних засадах*. Але на відміну від багатьох з них теорія ймовірностей має чітку *практичну спрямованість*. Прикладний характер теорії ймовірностей проявляється, перш за все, в тому, що кожне *абстрактне* поняття, яке зустрічається в ній, має два обґрунтування:

- *Абстрактне* визначення, тобто формальне, *строго-математичне* обґрунтування.

В стосунку до випадкової величини – це трактування її, як абстрактної, визначеної на вимірному просторі $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ функції, що є вимірною відносно σ-алгебри $\mathfrak{F}$.

Друге, еквівалентне обґрунтування, безпосередньо пов'язане з практичним (*емпіричним*) використанням цього поняття, а саме:

- З можливістю *спостерігати* та *вимірювати* окремі значення реально існуючих змінних, не вдаючись при цьому в деталі стохастичного експерименту, в якому ці величини з'являються.

Теоретичну можливість однозначно визначити випадкову величину, спираючись на її спостереження, дає поняття функції розподілу.

Іншими словами, фактично маємо два *рівнозначних* визначення математичного поняття «*випадкова величина*». При цьому в якості *емпіричного варіанту* формального визначення може розглядатися її *функція розподілу*.

Визначення. Нехай $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – випадкова величина визначена на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. Функцією розподілу випадкової величини ξ називається функція $F_\xi(x)$ дійсного аргументу $-\infty < x < +\infty$, що визначається рівністю:

$$F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}, -\infty < x < \infty.$$

Враховуючи зроблене вище зауваження щодо спрощених позначень, які використовуються в теорії ймовірностей, визначення функції розподілу випадкової величини ξ можна записати наступним чином:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, -\infty < x < \infty.$$

Згідно з визначенням випадкової величини, для довільного x множина $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\}$ є випадковою подією, а значить можна говорити про її ймовірність і, таким чином:

- Функція розподілу визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < \infty$.

З іншого боку, оскільки функція розподілу визначає ймовірність випадкової події A_x, то очевидно, що для неї виконується наступна властивість:

$$0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty.$$

Тобто очевидно, що *не будь-яка функція* може бути *функцією розподілу* деякої випадкової величини.

Так само очевидно, що це не єдина «*специфічна*» властивість *функції розподілу*, обумовлена безпосереднім її зв'язком з випадковою величиною.

2. Характеристичні властивості функції розподілу.

Виділимо найважливіші, або характеристичні властивості *функції розподілу*, що виділяють її як окреме, самостійне математичне поняття. Говорячи математичною мовою – сформулюємо *необхідні і достатні умови*, які задовольняє будь-яка функція розподілу.

Теорема. Функція $F(x)$ дійсного аргументу $-\infty < x < \infty$, може бути функцією розподілу деякої випадкової величини ξ тоді і тільки тоді, коли вона має наступні властивості:

➢ **Властивість (а).**

$F(x)$ – *не спадна* функція, тобто, якщо для довільних дійсних чисел x_1 та x_2 виконується нерівність $x_1 < x_2$, то

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

➢ **Властивість (б).**

$F(-\infty) = 0$, тобто:

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} P(\xi < x) = 0;$$

$F(\infty) = 1$, тобто:

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} P(\xi < x) = 1.$$

➢ **Властивість (в).**

$F(x)$ є неперервною зліва функцією, тобто: якщо $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ – послідовність дійсних чисел, така, що:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

то

$$\lim_{n\to-\infty} F(x_n) = F(x).$$

Доведення. З детальним доведенням цього фундаментального в теорії ймовірностей твердження можна ознайомитьс в рекомендованих підручниках [1], [4]. Прокоментуємо лише кільках найбільш суттєвих аспектів, пов'язаних з цією теоремою.

По-перше, наведені в теоремі умови є *необхідними* і *достатніми*, щоб функція $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, могла бути функцією розподілу деякої випадкової величини.

3. Необхідність умов.

- ***Необхідність* умов (а), (б), (в).**

Нехай $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$ – функція розподілу випадкової величини ξ, Треба довести, що для неї виконуються умови (а), (б), (в).

Властивість (а). Якщо $x_1 < x_2$, то має місце наступна імплікація випадкових подій:

$$\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\}.$$

А отже на підставі доведених раніше властивостей ймовірностей (див. лекція 3. вл. 4) можемо записати:

$$P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\},$$

тобто:

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

Властивість (б). Нехай $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ – послідовність дійсних чисел, така, що:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Введемо послідовність випадкових подій:

$$A_n = \{\xi < x_n\},\ n = 1, 2, ..., n, ...$$

Очевидно, що: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ...$, та $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

Спираючись на властивість неперервності ймовірності (див. лекція 3. вл. 9) отримаємо:

$$0 = P\{\varnothing\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to-\infty} P(A_n) = \lim_{n\to-\infty} P(\xi < x_n) = \lim_{n\to-\infty} F(x_n) = F(-\infty).$$

Подібним чином можна довести рівність $F(\infty) = 1$.

Припустимо, що послідовність дійсних чисел $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$, така, що $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Введемо послідовність випадкових подій:

$$A_n = \{\xi < x_n\},\ n = 1, 2, ..., n, ...$$

Очевидно, що:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ....$$

Оскільки за визначенням випадкової величини для будь-якого $\omega \in \Omega$ значення $\xi(\omega) < \infty$ - скінчене, то існує такий номер n, для якого $\xi(\omega) < x_n$. Отже маємо наступну рівність:

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Посилаючись тепер на властивість неперервності ймовірності (див. лекція 3. вл. 8) отримаємо:

$$1 = P\{\Omega\} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to-\infty} P(A_n) = \lim_{n\to-\infty} P(\xi < x_n) = \lim_{n\to-\infty} F(x_n) = F(\infty),$$

що й треба було довести.

Властивість (в). Припустимо, що послідовність дійсних чисел $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$, така, що $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Введемо послідовність випадкових подій:

$$A_n = \{\xi < x_n\},\ n = 1, 2, ..., n, ...$$

Очевидно, що: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ....$.

Оскільки $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, то умова: $\xi(\omega) < x$ означає, що для цього елементарного наслідоку $\omega \in \Omega$ існує такий номер n, для якого $\xi(\omega) < x_n$.

Тому для підмножин множини Ω (або інакше – *для випадкових подій*) можемо записати наступну рівність:

$$\{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

А отже спираючись на властивість неперервності ймовірності (див. лекція 3. вл. 8) отримаємо:

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) < x\} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

$$= \lim_{n\to-\infty} P(A_n) = \lim_{n\to-\infty} P(\xi < x_n) = \lim_{n\to-\infty} F(x_n),$$

що й треба було довести.

4. Достатність умов.

- ***Достатність* умов (а), (б), (в).**

Дуже важливим і (в певному розумінні фундаментальним в теорії ймовірностей) є друге, зворотне твердження цієї теореми. З детальним його доведенням можна ознайомитьс в рекомендованих підручниках.

Це твердження можна переформулювати наступним чином:

➢ Припустимо, що функція $F(x)$ має три перелічені **властивості (а), (б), (в)**. Тоді можна побудувати ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, P)$, визначити на цьому просторі випадкову величину:

$$\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

таким чином, що $F(x)$ буде її функцією розподілу. Тобто рівність:

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

буде виконуватись для довільного дійсного значення $-\infty < x < \infty$:

Це в свою чергу буде означати, що функція розподілу *цілком* і *однозначно* визначає відповідну випадкову величину. Тому з практичної точки зору випадкову величину ξ можна задати двома *рівнозначними* способами.

1) Побудувати ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, P)$ та визначити на ньому $\Im$-вимірну функцію $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.
2) Визначити функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, $-\infty < x < \infty$, випадкової величини ξ.

Доведення. Доведення цього факту спирається на досить складні результати з області функціонального аналізу, тому виходить за рамки програми нашого курсу. Прокоментуємо кільках найбільш суттєвих аспектів, пов’язаних з цією теоремою та коротко опишемо схему доведення, обминаючи формальні абстрактні математичні деталі.

Доведення полягає на тому, що будується *конкретний* ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, P)$, на ньому визначається *конкретна* функція $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, така, що для довільного дійсного числа x:

$$F(x) = P(\xi < x),\ -\infty < x < \infty.$$

А саме, в якості простору елементарних наслідків вибираємо числову пряму:

$$\Omega = (-\infty, \infty) = R,$$

Множиною $\Im$ випадкових подій будуть всі *борелівські* множини на прямій, тобто $\Im$ визначається як σ-алгебра $\Im = B(R)$ борелевських множин на числовій прямій $-\infty < x < \infty$.

Нагадаємо, що $B(R)$ це мінімальна σ-алгебра, яка містить всі напів замкнутих інтервали $[a, b)$ числової прямої: $-\infty < a \le x < b < \infty$:

$$[a, b) = \{-\infty < a \le x < b < \infty\}.$$

Залишилось для кожної події $A \in \Im$ визначити її ймовірність $P(A)$. Якщо $A = [a, b) \in B(R)$ – замкнутий зліва інтервал $a \le x < b$ числової прямої, то покладемо: $\hat{P}([a,b)) = F(b) - F(a)$. Спираючись на неперервність зліва функції $F(x)$ доводимо, що $\hat{P}([a,b))$ буде σ-адитивною мірою на *алгебр*і всіх *напівзамкнутих інтервалів* $a \le x < b$ числової прямої.

Використовуючи теорему *Каратеодорі* про продовження міри з *алгебри* на мінімальну *σ-алгебру*, яка включає цю алгебру, отримаємо ймовірнісну міру P, на *σ-алгебрі борелевських множин* $B(R)$.

Таким чином ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, P) = ((-\infty, \infty), B(R), P)$ побудовано. Залишилось визначити на ньому випадкову величину ξ, для якої $F(x)$ є функцією розподілу. Покладемо: $\xi(\omega) = \omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. Тоді для довільного дійсного числа x:

$$P\{A_x\} = P\{\omega\in\Omega\text{: } \xi(\omega) < x\} = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega\text{: } \omega < x\} =$$
$$= \mathrm{P}\{[-\infty, x)\} = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

5. Роль функції розподілу в математичній статистиці.

Необхідно спеціально підкреслити ту виняткову роль, яку відіграє функція розподілу випадкової величини в теорії ймовірностей і особливо в математичній статистиці.

- Функція розподілу $F(x)$ є тим інструментом, що поєднує абстрактну математичну теорію, збудовану на аксіоматичних підвалинах, з *конкретною* практикою *конкретних* стохастичних експериментів в яких спостерігаємо *конкретні* реалізації *конкретних* випадкових величин.

Наведена теорема дозволяє розглядати функцію розподілу, як *рівнозначний* до основного визначення спосіб представлення випадкової величини.

- З точки зору практичних потреб, що виникають при вивченні випадкових величин, всю необхідну інформацію можна отримати, аналізуючи їх функції розподілу, тобто випадкова величина є цілком визначеною, якщо задана її функція розподілу.

Використовуючи функцію розподілу $F(x)$ можемо визначити всі необхідні з практичної точки зору параметри та інші числові характеристики, що пов’язані з відповідною випадковою величиною. Цей факт і обумовлює *велику практичну значимість* абстрактної математичної дисципліни якою є *теорія ймовірностей*.

Досить складний характер базових понять теорії ймовірностей, а також абстрактний спосіб їх формального визначення, суттєво обмежує їх *безпосереднє* використання до вивчення *реальних* випадкових явищ. Встановити, як в конкретній ситуації, що досліджується, виглядає Ω, та яким чином визначена на ньому функція $\xi(\omega)$, що спостерігається, практично неможливо.

А от функцію розподілу $F(x)$, її вигляд і властивості, маємо можливість встановити саме на підставі отриманих спостережень. І тим самим використати до вивчення відповідного явища весь створений за допомогою *абстрактних*, *формальних* математичних понять і методів потужний арсенал теорії ймовірностей.

6. Функція розподілу в практичних розрахунках.

Використаємо властивості ймовірностей і встановимо кілька корисних з практичної точки зору співвідношень для функції розподілу.

Властивість 4. $P(\xi \geq x) = 1 - F(x)$.

Доведення. Оскільки $\Omega \backslash \{\xi < x\} = \{\xi \geq x\}$, то:

$$P\{\xi \geq x\} = P\{\Omega \setminus \{\xi < x\}\} = 1 - P\{\xi < x\} = 1 - F(x).$$

Властивість 5. Для довільного на пів замкнутого інтервалу $[x_1, x_2) \subset R$:

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Доведення. Для довільних дійсних чисел x_1 та x_2, таких, що $x_1 < x_2$, виконується співвідношення:

$$\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \{\xi < x_2\} \setminus \{\xi < x_1\}.$$

Крім того має місце наступна імплікація випадкових подій:

$$\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\}.$$

Отже:

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = P\{\xi < x_2\} - P\{\xi < x_1\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Властивість 6. $P(\xi \leq x) = F(x_{+0})$.

Доведення. Нехай $x_1 > x_2 > ... > x_n > ...$ – послідовність дійсних чисел, така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Введе послідовність подій $A_n = \{\xi < x_n\}$, $n = 1, 2, ...,$. Очевидно, що $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ....$. А отже:

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Використовуючи властивість неперервності ймовірності отримаємо:

$$P\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to-\infty} P(A_n) = \lim_{n\to-\infty} F(x_n) = F(x_{+0}).$$

Властивість 7. $P(\xi = x) = F(x_{+0}) - F(x)$.

Доведення цієї властивості випливає з очевидної рівності:

$$\{\xi = x\} = \{\xi \leq x\} \backslash \{\xi < x\}.$$