ЛЕКЦІЯ 6(Б).
Міри змінності.

1. Міри змінності: дисперсія та стандартне відхилення. 2. Звичайні та центральні моменти. 3. Деякі рівності для числових параметрів.

1. Міри змінності: дисперсія та стандартне відхилення.

Другу групу параметрів випадкової величини, подібно, як і в описовій статистиці, утворюють *міри змінності*.

Визначення. Дисперсією випадкової величини ξ називається математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини ξ від її математичного сподівання, тобто число $D(\xi)$, що визначається наступним чином:

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2.$$

Дисперсія дискретної випадкової величини.

Якщо ξ дискретна випадкова величина, що має розподіл:

$$\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots\}, \; p_i = P\{\xi = x_i\}, \; i = 1, 2, \ldots ,$$

то дисперсію обчислюємо за формулою:

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 \cdot p_i ,$$

де $m = E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$ – її математичне сподівання.

Математичне сподівання – це число (m), навколо якого розташовані всі можливі значення випадкової величини, а різниці ($x_i - m$), $i = 1, 2, \ldots$, вказують, «*як сильно*» відхиляються окремі її значення від середньої величини.

- Сумарне значення таких «*відхилень*» можна трактувати як загальне *розпорошення* випадкової величини і використовувати в якості міри *змінності*.

Але серед значень x_i напевно будуть як менші від m так і більші від нього. Тому серед різниць ($x_i - m$), $i = 1, 2, \ldots$, є як додатні, так і від'ємні числа.

- Тому піднесення відхилення ($x_i - m$) до *квадрату* у визначенні дисперсії – це вимушений, технічний крок, що дозволяє уникнути *редукції* доданків, зберігаючи при цьому інтерпретацію обчисленої суми, як міри загального *розпорошення* значень випадкової величини.

В результаті для дисперсії $D(\xi)$ виконуються всі необхідні умови, що дозволяють використати її в якості міри змінності, а саме:

- Дисперсії випадкової величини – це невід'ємне число $D(\xi) \geq 0$. Щоб підкреслити цю обставину, дисперсія часто позначається символом σ^2.

- Нульове значення дисперсії є свідченням *повної відсутності змінності*. Якщо дисперсія рівна 0, то випадкова величина зберігає постійне значення, яке дорівнює m.
- Більше значення дисперсії $D(\xi)$ означає «*сильніше*» відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання m, а отже більшу її змінність.

Дисперсія неперервної випадкової величини.

Визначення дисперсії дискретної випадкової величини зберігають свою силу та фізичну інтерпретацію і у випадку неперервних випадкових величин. А саме:

- Дисперсією неперервної випадкової величини ξ називається число $\sigma^2 = D(\xi)$, що визначається наступним чином:

$$\sigma^2 = D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2.$$

Єдине, що необхідно конкретизувати у випадку неперервних випадкових величин, так це формулу для обчислення дисперсії (σ^2) на підставі її щільності $f_\xi(x)$. Тому, використовуючи визначення математичного сподівання, отримуємо:

$$\sigma^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 \cdot f_\xi(x)dx\text{, де } m = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)dx.$$

Приклад. [***Дисперсія нормального розподілу***].

Аналізуючи максимум $f_\xi(m) = \dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}$ щільності нормального розподілу $N(m, \sigma^2)$ бачимо, що він буде *більший*, чим *менша* величина параметр σ^2. І навпаки, як видно на малюнку 1, чим *більше* значення σ^2, тим графік щільності $f_\xi(x)$ буде більш *сплющений*. Форма кривої щільності вказує на рівень змінності відповідної випадкової величини: *витягнутий* графік відповідає розподілам з *невеликою* змінністю, а *плоский* - з *високою*. Отже приходимо до висновку:

- Чим *більше* значення σ^2, тим *вищий* рівень змінності розподілу $N(m, \sigma^2)$.

Доведемо, що ці міркування цілком обґрунтовані, а

$$\sigma^2 = D(N(m, \sigma^2)).$$

Якщо неперервна випадкова величина має щільність $f_\xi(x)$, $m = E(\xi)$, то її дисперсія обчислюється за формулою:

$$\sigma^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 \cdot f_\xi(x)dx.$$

Нехай $v = e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, тоді:

$$D(N(m, \sigma^2)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = -\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} zde^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = -\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} zdv .$$

Так, як $\int_a^b zdv = z \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdz$, то після простих перетворень отримаємо:

$$D(N(m, \sigma^2)) = -\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \right) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sigma^2.$$

На практиці, коли маємо справу з величинами, яким відповідають конкретні одиниці міри, присутність «*квадрату*» у визначенні дисперсії створює деякі *технічні* незручності та ускладнює її безпосереднє використання в розрахунках. Оскільки квадратний корінь є монотонно зростаючою, невід'ємною функцією, то добуваючи корінь з дисперсії позбавляємось цих незручностей, зберігаючи при цьому всі необхідні властивості міри змінності.

Визначення. *Стандартним відхиленням* випадкової величини ξ називається число $S(\xi)$, що визначається наступним чином:

$$S(\xi) = \sqrt{D(\xi)} .$$

2. Звичайні та центральні моменти.

Нехай ξ – визначена на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ випадкова величина,. Подібно, як в описовій статистиці, можна тепер ввести поняття *моментів* випадкової величини.

Визначення. Звичайним моментом порядку s для випадкової величини ξ називається число m_s, що визначається наступним чином:

$$m_s = E(\xi^s),\ s = 1, 2, 3, \ldots .$$

- Якщо ξ дискретна випадкова величина, $\{(x_i, p_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ – розподіл випадкової величини ξ, то звичайний момент m_s, $s = 1, 2, 3, \ldots$ підраховуємо за формулою:

$$m_s = E(\xi^s) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^s \cdot p_i = (x_1)^s \cdot p_1 + (x_2)^s \cdot p_2 + \ldots + (x_k)^s \cdot p_k + \ldots,\ s = 1, 2, \ldots ,$$

(при умові, що відповідні ряди збігаються).

- Якщо ξ – неперервна випадкова величина, $f_\xi(x)$ – її щільність, то звичайний момент m_s, $s = 1, 2, 3, \ldots$ підраховуємо за формулою:

$$m_s = E(\xi^s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \cdot f_\xi(x)dx,\ s = 1, 2, 3, \ldots$$

(при умові, що відповідні інтеграли збігаються).

Зауваження. Звичайний момент першого порядку (m_1) – це математичне сподівання:

$$m_1 = m = E(\xi).$$

Визначення. Центральним моментом порядку s для випадкової величини ξ називається число μ_s, що визначається наступним чином:

$$\mu_s = E(\xi - E(\xi))^s,\ s = 1, 2, 3, \ldots .$$

- Якщо $\{(x_i, p_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ – розподіл дискретної випадкової величини ξ, то центральний момент μ_s, $s = 1, 2, 3, \ldots$, підраховуємо за формулою:

$$\mu_s = E(\xi - E(\xi))^s = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^s \cdot p_i,\ s = 1, 2, 3, \ldots .$$

(при умові, що відповідні ряди збігаються).

- Якщо $f_\xi(x)$ – щільність неперервної випадкова величини ξ, то центральний момент μ_s, $s = 1, 2, 3, \ldots$, підраховуємо за формулою:

$$\mu_s = E(\xi - E(\xi))^s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^s \cdot f_\xi(x)dx,\ s = 1, 2, 3, \ldots .$$

(при умові, що відповідні інтеграли збігаються).

Зауваження. Центральний момент другого порядку (μ_2) – це дисперсія випадкової величини ξ:

$$\mu_2 = D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2.$$

3. Деякі рівності для числових параметрів.

Наведемо деякі найважливіші з огляду на практичні використання властивості введених параметрів.

Лема 1. (*Формула для підрахунку дисперсії.*) Дисперсія випадкової величини ξ визначається наступною рівністю:

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = m_2 - (m_1)^2.$$

Доведення. Використовуючи визначення дисперсії та доведені в лекції 5 властивості математичного сподівання отримаємо:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= E(\xi - E(\xi))^2 = E(\xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot E(\xi) + (E(\xi))^2) = \\ &= E(\xi^2) - E(2 \cdot \xi \cdot E(\xi)) + E((E(\xi))^2) = \\ &= E(\xi^2) - 2 \cdot E(\xi) \cdot E(\xi) + (E(\xi))^2 = \\ &= E(\xi^2) - 2 \cdot (E(\xi))^2 + (E(\xi))^2 = E(\xi^2) - (E(\xi))^2. \end{aligned}$$

Словами доведену в лемі 1властивість можна сформулювати наступним чином:

- *Дисперсія дорівнює різниці другого звичайного моменту та квадрату першого звичайного моменту.*

Лема 2. Нехай ξ – деяка випадкова величина, a означає довільне дійсне число. Тоді виконується наступна рівність:

$$D(a\cdot\xi + b) = a^2\cdot D(\xi).$$

Доведення. Використовуючи визначення дисперсії та доведені в лекції 5 властивості математичного сподівання отримаємо:

$$\begin{aligned} D(a\cdot\xi + b) &= E((a\cdot\xi + b) - E(a\cdot\xi + b))^2 = \\ &= E(a\cdot\xi + b - E(a\cdot\xi) - b))^2 = \\ &= E(a\cdot(\xi - E(\xi)))^2 = E(a^2\cdot(\xi - E(\xi))^2) = \\ &= a^2\cdot E(\xi - E(\xi))^2 = a^2\cdot D(\xi). \end{aligned}$$

Словами доведену в лемі 2 властивість можна сформулювати наступним чином:

- *Сталий доданок не впливає на величину дисперсії, натомість сталий множник можна виносити «**з квадратом**» за знак дисперсії.*

Лема 3. (***Нерівність Чебишева***.) Для довільної випадкової величини ξ та довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ справедлива наступна нерівність:

$$P\{|\xi - E(\xi)| > \varepsilon\} \le \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доведення. Доведемо нерівність для неперервної випадкової величини ξ, що має щільність $f_\xi(x)$, $-\infty < x < \infty$. В цьому випадку (як це випливає безпосередньо з визначення) дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(\xi))^2\cdot f_\xi(x)dx\,.$$

Оскільки щільність $f_\xi(x) \ge 0$, є невід'ємною функцією для довільного дійсного числа $-\infty < x < \infty$, то інтеграл від функції:

$$(x - E(\xi))^2\cdot f_\xi(x)$$

може лише зменшитись, якщо область інтегрування зменшується. Тому замінимо в інтегралі правої частини рівності всю числову вісь ($-\infty < x < \infty$) лише такою її підмножиною, для якої виконується умова:

$$|x - E(\xi)| > \varepsilon.$$

Тоді:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x - E(\xi))^2\cdot f_\xi(x)dx \ge \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon}(x - E(\xi))^2 f_\xi(x)dx \ge$$

$$= \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon}\varepsilon^2\cdot f_\xi(x)dx \ge \varepsilon^2\cdot\int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon} f_\xi(x)dx\,.$$

Пояснюючи в лекції 5 фізичний зміст щільності ми встановили справедливість наступної *формальної* рівності:

$$P\{\xi = x\} = f_\xi(x)\cdot dx.$$

Точніше її можна записати наступним чином:

- Для довільної *борелівської* підмножини $A \subset (-\infty; \infty)$ справедлива наступна рівність:

$$\int_A f_\xi(x)dx = P\{\xi \in A\}.$$

В нашому випадку такою множиною є:

A = {множина чисел x для яких виконується нерівність: $|x - E(\xi)| > \varepsilon$}.

Тому:

$$D(\xi) \geq \varepsilon^2 \cdot \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon} f_\xi(x)dx \cdot = \varepsilon^2 \cdot P\{|\xi - E(\xi)| > \varepsilon\}.$$

Тобто

$$P\{|\xi - E(\xi)| > \varepsilon\} \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},$$

що й треба було довести.

Лема 4. Нехай ξ – деяка випадкова величина. Якщо для неї існують звичайні моменти m_s, $s =$ 1, 2, 3, 4, та центральні моменти μ_s, $s =$ 1, 2, 3, 4, то для них справедливі наступні рівності:

$$\mu_2 = m_2 - (m_1)^2;$$
$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 \cdot m_2 + 2(m_1)^3;$$
$$\mu_4 = m_4 - 4 \cdot m_1 \cdot m_3 + 6 \cdot (m_1)^2 \cdot m_2 - 3 \cdot (m_1)^4.$$

Доведення. Перша з цих рівностей вже доведена в лемі 1. Це не що інше, як «*формула для підрахунку дисперсії*».

Доведення всіх інших проводиться подібним чином, з використанням визначення відповідних звичайних і центральних моментів, формули *бінома Ньютона* та доведених в лекції 5 властивостей математичного сподівання.

Наприклад:

$$\mu_3 = E(\xi - E(\xi))^3 = E(\xi^3 - 3 \cdot \xi^2 \cdot E(\xi) + 3 \cdot \xi \cdot ((E(\xi))^2) - (E(\xi))^3) =$$
$$= E(\xi^3) - E(3 \cdot \xi^2 \cdot E(\xi)) + E(3 \cdot \xi \cdot ((E(\xi))^2)) - E((E(\xi))^3)) =$$
$$= m_3 - 3 \cdot m_1 \cdot E(\xi^2) + 3 \cdot (m_1)^2 \cdot E(\xi) - E((m_1)^3) =$$
$$= m_3 - 3 \cdot m_1 \cdot m_2 + 3 \cdot (m_1)^2 \cdot m_1 - (m_1)^3 =$$
$$= m_3 - 3m_1 \cdot m_2 + 2(m_1)^3.$$

Доведення останньої рівності радимо провести самостійно. Більше того, низку подібних співвідношень легко подовжити та прийти до висновку:

- *Центральний момент будь-якого порядку s* для випадкової величини ξ можна виразити через *звичайні моменти менших та рівних s* порядків.