Теорія ймовірностей

ЛЕКЦІЯ 1(А).
Основні поняття теорії ймовірностей

1. Роль теорії ймовірностей в сучасних наукових дослідженнях. 2. Основні розділи, що зараховуємо до теорії ймовірностей. 3. Коротко про історію розвитку теорії ймовірностей. 4. Стохастичний експеримент. 5. Приклади стохастичних експериментів. 6. Випадкові події.

1. *Роль теорії ймовірностей в сучасних наукових дослідженнях.*

Важко знайти прикладну галузь знань, де б не використовувались методи, окремі факти чи навіть цілі дослідження з використанням *апарату* і *понять теорії ймовірностей* та *математичної статистики*. І це стосується не тільки аналізу *масових явищ*, для вивчення яких ці розділи математики були створені. Сфера застосувань їх досягнень значно ширша і постійно збільшується.

Таку «*популярність*» цих наук можна пояснити тим, що навколо нас (*та й в нас самих*!) немає нічого *певного*, *однозначно окресленого*, *постійного* і *тривалого*. Можна сказати теж, що всі наші знання мають *статистичний характер.*

- Навіть по відношенню до подій *минулих* чи *теперішніх* панує *непевність*, а майбутнє за визначенням може бути тільки *ймовірним*.

Одним із найповажніших «*споживачів*» знань і методів теорії ймовірностей і математичної статистики є науки ***економічні***. Існує нині ціла низка економічних наукових дисциплін, таких, на приклад, як *математична економіка, економетрика, дослідження операцій та прийняття рішень, фінансова математика, економічний ризик, логістика та оптимальне управління запасами*, *актуарна математика, математичні моделі страхування, моделювання екологічних та економічних процесів, теорія масового обслуговування*, *теорія мереж*, та інші, що збудовані на фундаменті методів теорії ймовірностей і математичної статистики.

Існує цілком слушна думка, що основу сучасної *економічної науки* утворює *економетрика* (в широкому розумінні цього терміну), тобто розділ прикладної математики, який об’єднує математично-статистичні методи, що знайшли своє застосування при дослідженні економічних явищ. Серед них можна знайти методи більшості з перелічених щойно математичних дисциплін.

Практичні потреби в найрізноманітніших сферах діяльності були головною причиною, що призвела до появи *теорії ймовірностей*. Без сумніву вони і надалі будуть залишатися постійним джерелом та рушієм її бурхливого розвитку.

2. *Основні розділи, що зараховуємо до теорії ймовірностей.*

Серед великої кількості математичних дисциплін можна виділити *три спеціальні розділи*, які безпосередньо займаються дослідженням випадкових явищ. Ними є:

- ✓ ***Теорія ймовірностей***, (як окремий розділ математики), *що безпосередньо займається дослідженням та викриттям закономірностей, притаманним явищам, на які впливають випадкові чинники.*
- ✓ ***Математична статистика***, *яка займається розробкою методів кількісного дослідження закономірностей, що характерні для масових явищ. Головна її задача – це створенням правил прийняття рішень відносно властивостей цілої популяції на основі інформації, отриманої після вивчення певної, вибраної випадково групи її елементів.*
- ✓ ***Теорія випадкових процесів***, *яка займається дослідженням та викриттям закономірностей, що можна спостерігати, коли явище, на яке впливають випадкові чинники, розгортається в часі. Іншими словами, теорія випадкових процесів вивчає нескінчені множини випадкових величин, що відображають стани певної системи, що випадковим чином змінюються з часом.*

З приведених загальних визначень двох останніх розділів можна зробити очевидний висновок:,

- Методологічний фундамент цих розділів утворюють поняття та інструменти теорії ймовірностей.

І це не дивно, оскільки це досить «*молоді*» (з точки зору формування нових наукових напрямків) математичні дисципліни. Вони довгий залишалися окремими *підрозділами* теорії ймовірностей, аж нарешті сформувалися в самостійні наукові дисципліни та відокремились від неї.

3. *Коротко про історію розвитку теорії ймовірностей.*

Історія виникнення та розвитку теорії ймовірностей дуже цікава і сама може бути предметом наукових досліджень. Те, що випадкові явища, які оточують нас, підлягають певним *закономірностям*, люди помітили здавен. Однак першим друкованим передвісником появи математичної дисципліни, названої пізніше «*Теорія ймовірностей*» і покликаної досліджувати та викрити ці *закономірності*, вважається написана італійським монахом Лукою Пачолі в 1487 р. книжка:

- «*Сума знань з арифметики, геометрії, відношень і пропорціональності*».

Ця невеличка книжечка, в якій йшлося скоріше про *арифметику* і навіть не було згадки про *випадковість* чи *ймовірність*, відіграла ключову роль в появі і розвитку теорії ймовірностей.

Серед «*традиційних*» арифметичних задач «*на пропорції*» Лука Пачолі сформулював кілька своїх, нових, як на ті часи:

- Що стосувалися «*справедливого поділу*» призового фонду між учасниками гри, якщо гра не може бути проведена до кінця.

Іншими словами, в момент, коли ніхто з гравців ще *не отримав* необхідної кількості перемог в окремих партіях, *щоб виграти* всю гру, гра повинна бути припинена. Сам Лука Пачолі вважав цю задачу типовим прикладом задач «*на пропорції*» і пропонував наступний розв'язок:

- *Поділити приз пропорціональне кількості перемог, отриманих кожним з гравців в окремих партіях.*

Це, несподівано, викликало дуже жваву дискусію в наукових (особливо математичних) колах тих часів. Багато хто не погодився з Лукою Пачолі і пропонував своє рішення. Були навіть ті, хто вважав, що *математика* не має з цією ситуацією нічого спільного – треба йти до *суду*. Дискусія ця точилася майже 200 років. В рамках цієї дискусії відбулося листування двох знаменитих французьких мислителів – Ферма та Паскаля в 1654 році.

- *Це листування і вважається моментом народження нової математичної дисципліни під назвою «Теорія ймовірностей».*

В своїх листах (незалежно один від одного) вони дійшли до *правильного розв'язку* і знайшли (використовуючи при цьому зовсім *різні міркування*) ту саму *правильну відповідь*. Мовою сучасної теорії ймовірностей їх розв'язок звучить наступним чином:

- *Приз необхідно ділити не пропорціональне кількості перемог отриманих кожним з гравців, а пропорціональне ймовірності для кожного з них виграти всю гру.*

Саме 1654 р. вважається роком народження теорії ймовірностей, а листування Ферма та Паскаля – першими її *науковими працями*. До засновників цієї дисципліни зараховують також Якоба Бернуллі (1654 – 1705). З іншого боку, фактично серед *знаменитих* і *відомих* математиків минулого важко знайти когось, хто б не зробив свій внесок в розвиток «*Теорії ймовірностей*». Приведемо кілька найбільш відомих імен:

Гюгенс (1629 – 1695), Муавр (1667 – 1754),
Лаплас (1749 – 1855), Гаус (1777 – 1855),
Пуассон (1793 – 1856), Буняковський (1804 – 1889),
Чебишев (1821 – 1894), Марков (1856 – 1922),
Ляпунов (1857 – 1918), Бернштейн (1880 – 1968),
Лєві (1886 – 1971), Хінчин (1894 – 1959),
Колмогоров (1903 – 1987), Гніденко,.

та багато інших. В останні кілька десятиліть спостерігаємо бурхливий розвиток як безпосередньо теорії ймовірностей, так і цілої низки з нею пов'язаних з нею фундаментальних та прикладних математичних дисциплін. Це в першу чергу викликано *практичними потребами* як в природничій, так і в суспільній сферах.

4. *Стохастичний експеримент.*

Теорія ймовірностей є одним з багатьох математичних розділів побудованих (подібно до *геометрії*) на *аксіоматичних* засадах. Щоб збудувати таку теорію необхідно:

- ➢ Перш за все запровадити певні *початкові* (або *базові*) для неї поняття.

Це поняття, які неможливо *строго визначити* в межах цієї теорії з використанням інших її понять – від чогось необхідно розпочати.

Їх можна тільки якимось чином пояснити, спираючись на наш досвід, або дати їм якусь інтерпретацію. Для прикладу, в геометрії до таких відносяться, наприклад понять *пункту* (*крапки*), *лінії*, ітп.

- ➢ Фундамент теорії утворює множина її *аксіом* (звідки й назва), тобто *початкових*, або *вихідних* тверджень.

Подібно до *базових* понять, *правдивість* аксіом *не можна* довести в межах цієї теорії.

- Припускаємо, що вони не викликають жодних сумнівів, а наш попередній досвід є переконливим доведенням їх правдивості.

Що стосується початкових понять , то до *базових* в теорії ймовірностей зараховуємо наступні три:

- *Стохастичний експеримент*;
- *Випадкова подія*;
- *Ймовірність випадкової події*.

- ➢ *Стохастичним експериментом* називаємо такий дослід, результат якого не можна заздалегідь *точно* передбачити.

Тобто тільки після його завершення можемо *точно* сказати, яким результатом цей дослід закінчився.

Єдине, що можемо в цьому напрямку зробити, так це вказати певну *множину*, елементи якої дають *вичерпну* відповідь на питання:

- *Чим взагалі може цей дослід закінчитись*.

Іншими словами – кожний окремий *елемент* цієї множини *точно і в подробицях* представляє один із можливих результатів експерименту.

- ➢ Кожний такий *елемент* називається *елементарною подією*.
- ➢ Множина всіх елементарних подій називається *простором* елементарних *подій* (або *простором* елементарних *наслідків*).

Як правило, простір елементарних подій позначається символом Ω (велика грецька літера «*омега*»).

Для позначення елементарних подій вживається мала грецька літера «*омега*» – ω.

Символічно простір елементарних подій позначається:

$$\Omega = \{\omega_i\}.$$

➢ Елементарні події $\omega_i \in \Omega$ є *неподільними* результатами стохастичного експерименту, або – *спостереженнями*.

Теорія ймовірностей не накладає жодних обмежень а ні на *зміст* стохастичного експерименту, а ні на вигляд та структуру *простору* елементарних подій. Є тільки одна вимога:

- Елементарні події, що складають цю множину, повинні дати *вичерпну інформацію* про всі можливі результати стохастичного експерименту.

5. *Приклади стохастичних експериментів.*

Приведемо кілька найпростіших («*класичних*») прикладів.

Приклад 1. ***Кидання грального кубика.***

В цьому випадку простором елементарних подій може бути наступна множина:

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} & & \\ & \bullet & \\ & & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} & \bullet & \\ & & \\ & \bullet & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ & & \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ & \bullet & \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix} \right\}$$

Це скінчена множин, яка складається з шести елементів:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & \bullet & \\ & & \end{pmatrix}, \ldots, \omega_6 = \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix},$$

для якої виконується сформульована вище вимога:

- Вона представляє *всі можливі результати* описаного стохастичного експерименту.

Тобто, якщо ми тримаємо кубик в руці і поки що його не кинули, то *єдине*, що можемо стверджувати *напевно*, та це те, що результатом кидання *буде одним з цих наслідків*.

Як правило, в цьому випадку поступають простіше і в якості простору елементарних подій вибирають наступну множину:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

При цьому:

$$\omega_1 = 1; \ldots; \omega_i = i; \ldots; \omega_6 = 6,$$

тобто елементарна подія $\omega_i = i$; вказує ту грань кубика, на якій є $\{i\}$ очок

Приклад 2. ***Кидання грального кубика до моменту, аж з'явиться «6».***

В цьому випадку елементарну подію, що *точно і в подробицях* представляє один із можливих результатів експерименту, можна побудувати наступним чином. Скористаємось попереднім прикладом і результати чергових «*кидків*» будемо позначати цифрами:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Нехай символ «*» означає результат, що відрізняється від очікуваної «6», тобто один з можливих наслідків $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ чергового кидка. Тоді простором елементарних подій стохастичного експерименту, що розглядається, може бути наступна множина:

$$\Omega = \{«6», «*6», «**6», \ldots, «*\underset{k-1}{\ldots}*6», \ldots\}.$$

В цьому випадку простір елементарних наслідків $\Omega = \{\omega_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, буде *нескінченою*, але *зліченою* множиною. Елементарний наслідок:

$$\omega_k = «*\underset{k-1}{\ldots}*6», k = 1, 2, 3, \ldots$$

представляє наступний результат експерименту:

- Результат «6» перший раз з'явиться *точно* після k –го по порядку кидання грального кубика.

Приклад 3. Перша вимога в закладі обслуговування.

Припустимо, що вивчаємо роботу певної фірми, що займається обслуговуванням клієнтів. Цікавить нас момент, коли перша вимога вплине до цієї системи, припускаючи, що може це статись в будь яку мить.

Розглянемо невід'ємну піввісь числової осі $[0, +\infty)$ і будемо трактувати точку «0» як початок роботи системи. Тоді число $t \in [0, +\infty)$ можна інтерпретувати як подію:

{*Перша вимога надійшла до закладу в момент часу* t}.

Тому для стохастичного експерименту, що розглядається, простором елементарних подій може бути *незлічена множина*:

$$\Omega = [0, +\infty).$$

Приклад 4. Броунівський рух.

Розглянемо матеріальну частинку, яка знаходиться в стані «*броунівського руху*» та припустимо, що вивчається її «*поведінка*» на проміжку $[0, T]$.

З цією метою введемо прямокутну систему координат таким чином, щоб її початок співпадав з положенням частинки в момент $t = 0$.

Введемо тепер трьохвимірний вектор:

$$\boldsymbol{w}(t) = (w_x(t), w_y(t), w_z(t)),$$

що визначає координати частинки в момент t. Оскільки траєкторія руху частинки *непередбачувана*, але – *неперервна*, то *простором елементарних подій* в цьому стохастичному експерименті буде незлічена множина всіх трьохвимірних векторів:

$$\Omega = \{\boldsymbol{w}(t) = (w_x(t), w_y(t), w_z(t)), 0 \le t \le T\},$$

де $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$ – неперервні функції на проміжку $[0, T]$.

6. *Випадкові події.*

З кожним стохастичним експериментом пов'язуємо множину всіх подій, що *можуть відбутись в цьому експерименті*.

➢ Такі події називаємо *випадковими*.

Підкреслимо, що про випадкову подію можна говорити тільки в контексті деякого стохастичного експерименту. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. ***Кидання грального кубика.***

Розглянемо наступну подію:

{*Результат кидання буде парним числом*},

Очевидно, що вона *може відбутись в цьому експерименті*. Отже є *випадковою подією, пов'язаною зі стохастичним експериментом прикладу* 1.

Випадкові події прийнято позначати великими латинськими літерами, наприклад:

A = {*Результатом кидання кубика буде парним числом*}.

Встановити, чи відбулась ця подія, чи ні, можемо тільки після проведення експерименту, причому простір елементарних наслідків:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

поділиться на дві частини:

- *Множина* $A' = \{2, 4, 6\}$ *парних наслідків експерименту*,

тобто наслідків, що *сприяють* події A. Якщо кидання грального кубика скінчиться елементарним наслідком, який належить до A', то подія A *відбулась*.

- *Множина* $\overline{A}' = \{1, 3, 5\}$ непарних наслідків,

що їй не *сприяють*. Якщо кидання грального кубика скінчиться елементарним наслідком, який належить до $\overline{A}'$, то подія A *не відбулась*.

При цьому

$$\Omega = A' \bigcup \overline{A}'.$$

Подібні приклади можна привести і по відношенню до інших описаних стохастичних експериментів.

Приклад 2. ***Кидання кубика до першої «6»-ки.***

Подія

B = {*Відбудеться* ***не більше*** 4 *кидань до першої появи* «6»}

пов'язана зі стохастичним експериментом прикладу 2, є випадковою, а множина наслідків, що їй сприяють, має вигляд:

B' = {«6», «*6», «**6», «***6»}.

Приклад 3. Перша вимога в закладі обслуговування.

C = {*Перша вимога вплине не раніше, ніж через пів години*}.

Множина наслідків, що їй сприяють, має вигляд:

$$C' = \{t: t \geq 0{,}5\} = [0{,}5;+\infty).$$

Приклад 4. Броунівський рух.

D = {*Частинка весь час знаходиться в верхньому півпросторі*}.

Множина наслідків, що їй сприяють, має вигляд:

$$D' = \{\mathbf{w(t)} \in \Omega: w_z(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq T\}.$$

З кожним стохастичним експериментом пов'язуємо простір елементарних наслідків Ω, а кожна пов'язана з ним випадкова подія A ділить Ω на дві частини $\Omega = A' \bigcup \overline{A}'$:

- Множину A' наслідків, що сприяють події A. Та

- Множину $\overline{A}'$ наслідків, що їй не сприяють.

- Перший крок в математичній формалізації «*теорії ймовірностей*» полягає на тому, що вона ототожнює *випадкову подію* A з множиною *сприятливих* для неї наслідків A'.

Тобто покладаємо, що:

$$A = A'.$$

Тим самим «*фізичний*», чи «*реальний*» стохастичний експеримент *ототожнюємо* з простором елементарних наслідків Ω.

Тоді, *формально*, будь яка пов'язана з цим експериментом випадкова подія A буде підмножиною простору елементарних наслідків Ω:

$$A \subseteq \Omega.$$

Серед всіх випадкових подій виділяємо дві, в певному розумінні «*крайніх*», яким надаємо спеціальних назв:

- *Певна* подія.

Тобто така, яка відбувається *завжди*.

- *всі* елементарні наслідки сприятливі для неї: $A = \Omega$.

Тому *певна подія* позначається символом Ω.

- *Неможлива* подія.

Ця подія не відбувається *ніколи*. Тобто *немає* елементарних наслідків, які б їй сприяли. Ця множина є *порожньою*: $A = \varnothing$. Тому неможливу подію позначають символом $\varnothing$ порожньої множини.