

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №4
Чисельні методи в інформатиці
“Інтерполяція”
Варіант №8

Виконав студент групи ІПС-31
Тесленко Назар Олександрович

Київ - 2025

Постановка задачі:

Варіант №8

1. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона за п'ятьма вузлами для функції $2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3$ на проміжку $[0, 4]$. Вузли обрати, як нулі полінома Чебишова того ж порядку для відповідного проміжку. Оцінити похибку інтерполяції.
2. Знайти деякий розв'язок рівняння з попереднього пункту, використовуючи пряму та обернену інтерполяцію. Порядок полінома взяти той же що і у попередньому пункті. Якщо у дослідженому інтервалі є розв'язок – для прямої інтерполяції можна використати вже побудований поліном.

Теоретичний опис та обґрунтування:

Інтерполяція

Задача інтерполяції полягає у відшуванні невідомих значень функції $f(x)$ за її відомими значеннями $f(x_k)$ в точках $x_k \in [a; b]$, $k = \overline{0, n}$, які називають вузлами інтерполяції. Розв'язок шукаємо у вигляді полінома $P_n(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$f(x_k) = P_n(x_k), \quad k = \overline{0, n}$$

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділені різниці:

$$\text{першого порядку } f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

.....

$$(k+1) \text{ порядку: } f(x_i, \dots, x_{i+k+1}) = \frac{f(x_i, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}$$

За допомогою даних формул розділених різниць будуємо однойменну таблицю, а саме - **таблицю розділених різниць**:

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$...	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$...	
...	
...	...	$f(x_{n-1}; x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

На підставі даної таблиці, використовуючи перший її рядок, можемо записати інтерполянт Ньютона вперед:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

або ж скориставшись останнім рядком, дістанемо інтерполяційну формулу Ньютона назад:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_n) \dots (x - x_1)$$

Для оцінки похибки інтерполяції можна використати оцінку залишкового члену у формі Ньютона:

$$|f(x) - P_n(x)| = \omega(x)f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Вибір вузлів (поліном Чебишова)

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}, \quad |x| \geq 1$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1$$

Нулі полінома Чебишова $x \in [-1; 1]$: $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = \overline{0, n-1}$

Поліном Чебишова 1 роду на проміжку $[a; b]$

За допомогою заміни $x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a))$ переведемо проміжок $[-1; 1]$ в $[a; b]$. Тоді поліноми Чебишова запишуться таким чином:

$$T_n^{[a; b]}(x) = T_n^{[-1; 1]}(\frac{2x - (b+a)}{b-a})$$

Його нулі: $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2N}$, $k = \overline{0, N-1}$, N - к-сть вузлів

При використанні цих вузлів похибка має вигляд:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Пряма інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a; b]$, що задана таблично (x_i, y_i) , $i = \overline{0, n}$,

немонотонна. Для знаходження x^* застосовемо алгоритм:

За заданою таблицею (x_i, y_i) , $i = \overline{0, n}$ будемо інтерполяційний поліном

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

та розв'язують нелінійне рівняння

$$P_n(x) = 0$$

На підставі теореми про середнє:

$$f(x) - f(x^*) = f'(\xi)(x - x^*) \text{ одержимо } x - x^* = \frac{f(x) - f(x^*)}{f'(\xi)}.$$

Отже похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \leq \frac{M_{n+1} |\omega(x^*)|}{m_1 (n+1)!},$$

$$\text{де } m_1 = \min_x |f'(x)|, M_{n+1} = \max_n |f^{n+1}(x)|, m_1 \neq 0$$

Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a, b]$, що задана таблично $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$ монотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$ таку таблицю:

$(y_i, x_i), i = \overline{0, n}$. На підставі останньої таблиці інтерполянт набуває вигляду:

$$P_n(y) = x_0 + f(y_0, y_1)(y - y_0) + f(y_0, y_1, y_2)(y - y_0)(y - y_1) + \\ + \dots + f(y_0, y_1, \dots, y_n)(y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{n-1})$$

де $P(y^*) \approx x^*$

Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями x та y , а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції. Похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \leq \frac{\overline{M}_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(y^*)|; \overline{M}_{n+1} = \max_y \left| \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y) \right|$$

За допомогою інтерполяції можна знаходити корені нелінійних рівнянь, для цього знаходять x^* при $y^* = 0$

Хід роботи

Функція: $2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3$

Досліджувати функцію будемо на проміжку $[0;4]$ (за умовою)

1. Пошук вузлів, як нулів полінома Чебишова

Оскільки за умовою потрібно взяти 5 вузлів ($N=5$) \Rightarrow максимальний степінь поліном дорівнює 4 ($n=4$)

За формулою знайдемо 5 вузлів і відповідне значення функції у даних точках:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad N - \text{к-сть вузлів}$$

Choosing 5 nodes by Chebyshev polynomial

k	x _k	f(x _k)
0	3.902	41762.813
1	3.176	10884.204
2	2.000	579.000
3	0.824	5.983
4	0.098	3.000

2. Після того як отримали результати переходимо до етапу побудови таблиці розділених різниць та побудови інтерполяційного поліному методом Ньютона:

Divided differences table:

i	x	f(x ₀)	f(x ₀ ,x ₁)	f(x ₀ ,x ₁ ,x ₂)	f(x ₀ ,x ₁ ,x ₂ ,x ₃)	f(x ₀ ,x ₁ ,x ₂ ,x ₃ ,x ₄)
0	3.9021	41762.8133	42500.7602	17735.3448	4618.4757	935.0000
1	3.1756	10884.2035	8766.1297	3521.1382	1061.5243	0.0000
2	2.0000	579.0000	487.4372	254.1023	0.0000	0.0000
3	0.8244	5.9832	4.1059	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0979	3.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Обираємо перший рядок як коефіцієнти полінома та отримуємо:

```
P4(x)=
41762.81 +
42500.76*(x - 3.902) +
17735.34*(x - 3.902)*(x - 3.176) +
4618.48*(x - 3.902)*(x - 3.176)*(x - 2.000) +
935.00*(x - 3.902)*(x - 3.176)*(x - 2.000)*(x - 0.824)
```

Після приведення до нормального вигляду поліном має наступний вигляд:

$$P_4(x) = 935x^4 - 4639.89x^3 + 7625.916x^2 - 4043.763x + 338.9039$$

3. Знайшовши інтерполяційний поліном, оцінимо похибку інтерполяції

Потрібно взяти 5 похідну від нашої початкової функції:

```
def max_der(x):  
    return 5040*x**2+2160*x+480  
  
===== Interpolation Check =====  
Test point x = 2.4  
Function value f(x)           = 1812.108173  
Newton polynomial P(x)        = 1422.136000  
Absolute difference            = |f(x) - P(x)| = 389.972173  
Theoretical error bound        = 1496.000000  
=====   
Interpolation error is within the theoretical bound.
```

Отже був знайдений інтерполяційний поліном за методом Ньютона, що задовільняє інтерполяційну похибку.

Перейдемо до другої частини лабораторної роботи, а саме знаходження кореня за використання прямої та оберненої інтерполяції:

Попередній аналіз поведінки заданої функції $2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3$ на початковому проміжку $[0; 4]$ показує, що функція набуває виключно додатних значень (мінімальне значення $f(0)=3$). Внаслідок монотонного зростання та додатності функції на цьому відрізку, рівняння $f(x)=0$ не має на ньому дійсних коренів.

Для виконання завдання змінюємо інтервал дослідження на такий, що гарантує наявність кореня

Використаємо чисельний метод бісекції для знаходження кореня:

```
===== Root Found =====  
x ≈ -0.9999990463  
f(x) ≈ 0.0000152588  
=====
```

Отже, обираємо інтервал $[-2; 0]$

Пряма інтерполяція

Для застосування методу прямої інтерполяції було обрано новий інтервал $[-2; 0]$, на якому функція змінює знак, що гарантує існування кореня.

За вузлами Чебишова на цьому проміжку побудовано інтерполяційний поліном Ньютона 4-го степеня:

```
Newton interpolation polynomial P(x):
3.00 +
0.10*(x - -0.049) +
-5.19*(x - -0.049)*(x - -0.412) +
31.63*(x - -0.049)*(x - -0.412)*(x - -1.000) +
-58.75*(x - -0.049)*(x - -0.412)*(x - -1.000)*(x - -1.588)

Searching for root of P(x)=0 on interval:
[-2, 0]

Applying bisection to P(x)=0...
```

Ітерації при знаходженні кореня та результат:

```
iter 1: mid=-1.500000, P(mid)=-26.2343750
iter 2: mid=-1.250000, P(mid)=-5.3115234
iter 3: mid=-1.125000, P(mid)=-1.5182495
iter 4: mid=-1.062500, P(mid)=-0.5576591
iter 5: mid=-1.031250, P(mid)=-0.2376506
iter 6: mid=-1.015625, P(mid)=-0.1096055
iter 7: mid=-1.007812, P(mid)=-0.0526275
iter 8: mid=-1.003906, P(mid)=-0.0257859
iter 9: mid=-1.001953, P(mid)=-0.0127630
iter 10: mid=-1.000976, P(mid)=-0.0063492
iter 11: mid=-1.000488, P(mid)=-0.0031666
iter 12: mid=-1.000244, P(mid)=-0.0015813
iter 13: mid=-1.000122, P(mid)=-0.0007901
iter 14: mid=-1.000061, P(mid)=-0.0003949
iter 15: mid=-1.000030, P(mid)=-0.0001974
iter 16: mid=-1.000015, P(mid)=-0.0000987
iter 17: mid=-1.000007, P(mid)=-0.0000494
iter 18: mid=-1.000003, P(mid)=-0.0000247
iter 19: mid=-1.000001, P(mid)=-0.0000123
iter 20: mid=-1.000001, P(mid)=-0.0000062
```

```
===== Result =====
Root of P(x)=0 : x ≈ -1.000004768
P(x) ≈ -0.0000030845
=====
```

В результаті обчислень отримано наближене значення кореня $x \approx -1$. Це значення з високою точністю співпадає з точним коренем $x = -1$, знайденим на етапі попереднього аналізу функції.

Обернена інтерполяція

```
===== Inverse Interpolation Method =====
Choosing 5 nodes by Chebyshev polynomial
k   xk      f(xk)
0   -0.049   3.000
1   -0.412   2.963
2   -1.000   0.000
3   -1.588   -40.179
4   -1.951   -159.846

Building polynomial x(y) (swapping x and y)...
```

```
Divided differences table:
i      | x          | f(x0)      | f(x0,x1)    | f(x0,x1,x2)  | f(x0,x1,x2,x3) | f(x0,x1,x2,x3,x4)
-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----
0      | 3.0000     | -0.0489    | 9.8360      | 3.2125       | 0.0743         | 0.0005
1      | 2.9631     | -0.4122    | 0.1984      | 0.0043       | 0.0000         | 0.0000
2      | 0.0000     | -1.0000    | 0.0146      | 0.0001       | 0.0000         | 0.0000
3      | -40.1795   | -1.5878    | 0.0030      | 0.0000       | 0.0000         | 0.0000
4      | -159.8461  | -1.9511    | 0.0000      | 0.0000       | 0.0000         | 0.0000

===== Result (Inverse) =====
Approximation for f(x) = 0
Root x ≈ -1.0000000000
Check f(x_root) ≈ 0.0000000000
=====
```

Аналізуючи результати прямої та оберненої інтерполяцій, можемо прийти до висновку що корінь інтерполяційного поліному був знайдений коректно: $x = -1$