ЛЕКЦІЯ 5(Б).
Параметри випадкової величини.

1. *Числові характеристики випадкової величини*. 2. *Два підходи до визначення базових понять*. 3. *Математичне сподівання – ілюстративний приклад*. 4. *Математичне сподівання дискретної випадкової величини*. 5. *Властивості математичного сподівання дискретної величини*.

1. Числові характеристики випадкової величини.

Неодноразово підкреслювалось, що теорія ймовірностей, подібно як і будь-яка інша математична дисципліна, є «*наукою про величини*», а головним об'єктом її дослідження є «*випадкова величина*». Особливість полягає в тому, що «*випадкова величина*» – це *спеціальний*, характерний тільки для *теорії ймовірностей*, тип величини. Джерело всіх абстрактних понять теорії ймовірностей та мета і спрямованість всіх досліджень знаходяться в практичній площині – що і обумовлює *специфіку* «*випадкової величини*», та відрізняє її від інших математичних змінних.

- *Випадкова величина* безпосередньо пов'язана із стохастичним експериментом і може існувати *тільки в його контексті*.

В результаті ми маємо фактично *два рівнозначних* визначення випадкової величини:

- Абстрактне, що трактує випадкову величину $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, як вимірну ($\{\omega\colon \xi(\omega) < c\} \in \Im$) відносно σ-алгебри $\Im$, дійсну функцію : ($\xi\colon \Omega \to R = (-\infty, +\infty)$), визначену на множині елементарних наслідків ймовірнісного простору $(\Omega, \Im, P)$.

Другий, *рівнозначний* до основного визначення спосіб представлення випадкової величини пов'язаний з її функцією розподілу.

- З точки зору *практичних потреб* випадкова величина є *цілком визначеною*, якщо задана її функція розподілу.

$$F_\xi(x) = P\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} = P\{\xi < x\}, -\infty < x < \infty.$$

Це означає, що всі необхідні для дослідження властивостей відповідної випадкової величини ξ кількісні характеристики можна знайти, використовуючи її функцію розподілу $F_\xi(x)$.

На практиці *безпосередньо* аналізувати стохастичні експерименти, будуючи відповідні ймовірнісні простори та досліджуючи випадкові величини на рівні «*елементарних наслідків*», дуже складно, а часто – взагалі неможливо. Тому, по своїй суті, випадкова величина – це спосіб числового *опису* результатів стохастичного експерименту. А її функція розподілу $F(x)$ є тим інструментом, що дає можливість поєднати *абстрактну математичну теорію* з *конкретною* практикою, *конкретних* стохастичних експериментів, в яких спостерігаємо *конкретні* реалізації, *конкретних* випадкових величин.

При вивченні подібних явищ необхідно аналізувати пов'язані з ними випадкові величини. Теоретично достатньо знати їх функції розподілу, щоб завжди можна було отримати всю необхідну для цього аналізу інформацію. В формальних математичних моделях, однак, випадкові величини, як правило, представляють їх *параметри*, тобто:

- Певні, сталі для конкретних розподілів, *кількісні характеристики*.

Тому з практичних міркувань зручніше заздалегідь дати *визначення* цих *параметрів*. Обчислити їх, проаналізувати та дослідити їх властивості, акцентуючи при цьому увагу на фізичній інтерпретації відповідних кількісних характеристик.

2. Два підходи до визначення базових понять.

Одним з ключових параметрів і одночасно одним з базових понять теорії ймовірностей є поняття *математичного сподівання* випадкової величини. Спосіб його визначення є, в певному розумінні, вихідним пунктом при побудові *формальних конструкцій* математичної теорії ймовірностей.

У випадку *абстрактного* трактування випадкової величини, як функції $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, заданої на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, визначення *математичного сподівання* використовує не менш «*абстрактне*» поняття, яким є інтеграл Лебега.

Звучить воно наступним чином.

Визначення. Припустимо, що ξ є випадковою величиною, заданою на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. *Математичним сподіванням* величини ξ називається число, що позначається символом $E(\xi)$ і обчислюється за формулою:

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$$

Безпосереднє використання базових елементів, абстрактним уособленням яких є компоненти $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ймовірнісного простору, до формулювання визначень всіх інших понять, логічне, виправдане та ефективне з *формальних міркувань*, тобто:

- З точки зору побудови несуперечливої, змістовної математичної теорії ймовірностей.

Однак, що стосується вивчення *реальних* випадкових явищ, то такий підхід має дуже обмежену область практичного застосування. Формальним виразом стохастичного експерименту в математичній теорії є *простір елементарних наслідків* Ω. Встановити на практиці, як виглядає Ω, та яким чином визначена на ньому функція $\xi(\omega)$, що спостерігається, практично неможливо. Наведений приклад визначення математичного сподівання $E(\xi)$ показує також, що важко зрозуміти *фізичну інтерпретацію* отриманої в результаті формальних обчислень величини.

А от функція розподілу $F_\xi(x)$, її вигляд і властивості, безпосередньо пов'язані із *можливими значеннями* величин, що спостерігаються при вивченні реальних явищ. Тому запропонуємо інше визначення, яке базується на понятті функції розподілу $F_\xi(x)$. В теоретичному плані воно є *еквівалентним* до приведеного, однак з практичних міркувань, без сумніву, є більш зручним та конструктивним.

3. Математичне сподівання – ілюстративний приклад.

Математичне сподівання ($E(\xi)$) величини ξ називають ще її *середнім* значенням. Цей параметр належить до *класичних* міри середнього рівня явища, що вивчається. Якщо шукати його аналог серед *описових параметрів*, то математичному сподіванню відповідає *середнє арифметичне* можливих значень – тобто число, навколо якого громадяться всі спостереження при вивченні реальних явищ.

Перш ніж привести строге визначення математичного сподівання та вивчити його основні властивості, розглянемо один простий приклад. Він допоможе краще зрозуміти фізичний зміст цього параметру та слушність запропонованої його математичної формалізації.

Приклад 1. Припустимо, що ми кидаємо раз за разом гральний кубик та підраховуємо сумарну кількість отриманих таким чином очок. А саме, нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, означають результати перших n кидків, а

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

сума очок, що нас цікавить. Замислимось над питанням:

- На яку величину ($\bar{\xi}$) «*в середньому*» збільшується ця сума в результаті одного кидання грального кубика?

Тобто:

- Яким є значення «*очікуваного приросту*» суми S_n після чергової спроби?

Очевидно, що $\bar{\xi}$ логічно трактувати як *середнє значення* випадкової величини ξ, яка визначає *точну* кількість очок при *одному* киданні грального кубика.

Маючи результати $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ послідовних реалізацій цієї випадкової величини, *наближене* значення $\bar{\xi}$ можна обчислити за формулою:

$$\bar{\xi} \approx \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}.$$

Запишемо цю формулу дещо іншим способом. Позначимо символом $\mu_i(n)$ число кидань грального кубика (серед проведених n спроб) результатом яких було «i» очок ($i = 1, ..., 6$):

$$\mu_1(n) + \mu_2(n) + ... + \mu_6(n) = n.$$

Тоді суму очок S_n можна переписати наступним чином:

$$S_n = 1\cdot\mu_1(n) + 2\cdot\mu_2(n) + \ldots + 6\cdot\mu_6(n).$$

Отже:

$$\bar{\xi} \approx \frac{1\cdot\mu_1(n)+2\cdot\mu_2(n)+\ldots+6\cdot\mu_6(n)}{n}.$$

Нехай числа $\nu_i(n)$ означають *частоту* реалізацій випадкових подій:

A_i = {*результатом кидання грального кубика було «i» очок*}, $i = 1, \ldots, 6$,.

$$\nu_i(n) = \frac{\mu_i(n)}{n},\ i = 1, \ldots, 6.$$

Якщо кількість (n) експериментів є «*достатньо великою*», а гральний кубик «*симетричний*», тобто всі можливі наслідки однаково ймовірні, то:

$$\nu_i(n) \approx 1/6,\ i = 1, \ldots, 6.$$

Таким чином остаточно для *середнього значення* випадкової величини ξ отримаємо наступний результат:

$$\frac{S_n}{n} = 1\cdot\nu_1(n) + 2\cdot\nu_2(n) + \ldots + 6\cdot\nu_6(n) \approx 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \ldots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5 = \bar{\xi}.$$

4. Математичне сподівання дискретної випадкової величини.

Припустимо, що на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ визначена дискретна випадкова величина ξ, яка має розподіл $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, 3, \ldots\}$:

$$p_i = P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\} = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots .$$

Визначення. Якщо для розподілу $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, 3, \ldots\}$ виконується наступна умова:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\cdot p_i = |x_1|\cdot p_1 + |x_2|\cdot p_2 + \ldots + |x_k|\cdot p_k + \ldots < \infty$$

то число $E(\xi)$, підраховане за формулою:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot p_i = x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + \ldots + x_k\cdot p_k + \ldots$$

називається *математичним сподіванням* випадкової величини ξ.

Як правило, цей параметр позначається символом m:

$$E(\xi) = m.$$

Число m вказує «*середнє*» значення випадкової величини ξ.

Зауваження. Переконаємось, що у випадку дискретної випадкової величини ξ «*абстрактне*» визначення математичного сподівання $E(\xi)$, як інтегралу Лебега від функції $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, співпадає з щойно приведеним. Нехай $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$. Тоді згідно з визначенням інтегралу Лебега:

$$\int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) = x_1\cdot P\{\omega: \xi(\omega) = x_1\} + x_2\cdot P\{\omega: \xi(\omega) = x_2\} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot p_i .$$

Приклад 1. (**Розподіл Бернуллі**). Випадкова величина η має розподіл Бернуллі з параметром p, якщо може приймати тільки два значення: $\eta \in \{0, 1\}$.

$$p = P\{\eta = 1\};\ P\{\eta = 0\} = 1 - p = q.\ (p + q = 1.).$$

$$E(\eta) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Приклад 2. (**Біноміальний розподіл**). Випадкова величина ξ біноміальний розподіл з параметрами n і p ($\xi \Leftrightarrow B(n, p)$), якщо всі її значення належать множині $\xi \in \{0, 1, \dots, n\}$ і при цьому:

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

де C_n^k означає «*кількість комбінацій з* ***n*** *по* ***k***», тобто кількість різних k-елементних підмножин, які можна вибрати з множини, що містить n елементів:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n),\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Використовуючи визначення *математичного сподівання дискретної* випадкової величини отримаємо:

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p.$$

5. Властивості математичного сподівання дискретної величини.

Властивість 1. Математичне сподівання константи C дорівнює тій самій константі, тобто якщо з ймовірністю 1 $\xi \equiv C$, то

$$E(\xi) = C.$$

Властивість 2. Математичне сподівання *невід'ємної* випадкової величини теж *невід'ємне*, тобто якщо з ймовірністю 1 $\xi \ge 0$, то

$$E(\xi) \ge 0.$$

Доведення. Нехай $\{(x_i, p_i),\ i = 1, 2, 3, \dots\}$ означає розподіл дискретної випадкової величини ξ. Умова: «$\xi \ge 0$ *з ймовірністю* 1» означає, що $x_i \ge 0$ для будь-якого $i = 1, 2, \dots$. Оскільки $p_i = P\{\xi = x_i\} \ge 0$, то на підставі визначення *математичного сподівання дискретної* випадкової величини отримаємо:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k + \dots \ge 0.$$

Властивість 3. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання, тобто якщо існує $E(\xi)$, то для будь-якого дійсного числа a існує також $E(a \cdot \xi)$, і при цьому виконується рівність:

$$E(a\cdot\xi) = a\cdot E(\xi).$$

Доведення. Для $a = 0$ ця рівність є очевидною.

Припустимо, що $a \neq 0$. Якщо $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, \}$ – розподіл випадкової величини ξ, то випадкова величина $(a\cdot\xi)$ має розподіл

$$\{((a\cdot x_i), p_i), i = 1, 2, \ldots, \},$$

тобто:

$$P\{a\cdot\xi = (a\cdot x_i)\} = p_i,\ i = 1, 2, \ldots .$$

Збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p_i < \infty$ означає також збіжність ряду

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a\cdot x_i|\, p_i = |a|\cdot\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p_i < \infty .$$

Тому математичне сподівання випадкової величини $(a\cdot\xi)$ існує і використовуючи його визначення отримаємо:

$$E(a\cdot\xi) = \sum_{i=1}^{\infty}(a\cdot x_i)\cdot p_i = (a\cdot x_1)\cdot p_1 + (a\cdot x_2)\cdot p_2 + \ldots + (a\cdot x_n)\cdot p_n + \ldots =$$

$$= a\cdot(x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + \ldots + x_n\cdot p_n + \ldots) = a\cdot\sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot p_i = a\cdot E(\xi).$$

Словами властивість 3 можна сформулювати наступним чином:

➢ *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання.*

Властивість 4. Якщо існують $E(\xi)$ та $E(\eta)$, то існує також математичне сподівання суми цих величин і при цьому виконується рівність:

$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta).$$

Доведення. Нехай $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, та $\{(y_j, s_j), j = 1, 2, \ldots, m\}$, розподіли відповідно випадкової величини ξ, та η де:

$$p_i = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots, ;$$
$$s_j = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, \ldots, .$$

Сума $(\xi + \eta)$ цих величин теж буде *дискретною* випадковою величиною, при цьому множиною можливих її значень будуть всі числа, які мають вигляд:

$$(\xi + \eta) \in \{(x_i + y_j), i = 1, 2, \ldots, n \ldots, j = 1, 2, \ldots, m, \ldots\}.$$

Тому використовуючи визначення математичного сподівання отримаємо:

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i + y_j)\cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[x_i\cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} + y_j\cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} \right).$$

Як було встановлено в попередніх лекціях (**див. лекція 7**) для ймовірностей

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\},\ i = 1, 2, \ldots, ,\ j = 1, 2, \ldots,$$

справедливі наступні рівності:

$$p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots,$$

$$s_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, \ldots,.$$

Таким чином:

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P\{\xi = x_i\} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot s_j =$$

$$= E(\xi) + E(\eta),$$

що й треба було довести.

Словами властивість 4 можна сформулювати наступним чином:

- *Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань.*

Визначення. Припустимо, що ξ та η – випадкові величини, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. a та $b \in R$ – деякі дійсні числа. Тоді сума:

$$a\cdot\xi + b\cdot\eta$$

називається *лінійною комбінацією випадкових величин* ξ та η. Якщо $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – скінчена множина випадкових величин, а $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – відповідно скінчена множина дійсних чисел, то сума:

$$c_1\cdot\xi_1 + c_2\cdot\xi_2 + \ldots + c_n\cdot\xi_n$$

називається *лінійною комбінацією випадкових величин* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Поєднуючи властивості 3 та 4, отримаємо наступне твердження.

Лема 1. 1) Припустимо, що ξ та η деякі випадкові величини, а a та $b \in R$ – деякі дійсні числа. Якщо існують $E(\xi)$ та $E(\eta)$, то існує також математичне сподівання *лінійні комбінації* $(a\cdot\xi + b\cdot\eta)$ цих величин і при цьому виконується рівність:

$$E(a\cdot\xi + b\cdot\eta) = a\cdot E(\xi) + b\cdot E(\eta).$$

2) Припустимо, що $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – скінчена множина випадкових величин, а $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – відповідно скінчена множина дійсних чисел. Якщо для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n$, існують $E(\xi_i)$, то існує також математичне споді-

вання *лінійної комбінації* $(c_1{\cdot}\xi_1 + c_2{\cdot}\xi_2 + \ldots + c_n{\cdot}\xi_n)$ цих величин і при цьому виконується рівність:

$$E(c_1{\cdot}\xi_1 + c_2{\cdot}\xi_2 + \ldots + c_n{\cdot}\xi_n) = c_1{\cdot}E(\xi_1) + c_2{\cdot}E(\xi_2)+ \ldots + c_n{\cdot}E(\xi_n).$$

Словами зміст леми 1 можна сформулювати наступним чином:

- *Математичне сподівання лінійної комбінації випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ дорівнює лінійній комбінації їх математичних сподівань*.

Приклад 3 (продовження прикладу 2**)**. (**Біноміальний розподіл**). Припустимо, що випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами n і p ($\xi \Leftrightarrow B(n, p)$). Приводячи її інтерпретацію в контексті «*схеми випробувань Бернуллі*», ми показали, що ξ вказує кількість «*УСПІХІВ*» в серії, що складається з n *випробувань*, при умові, що $p = P\{$*УСПІХУ*$\}$. Результат одного такого експерименту описує випадкова величина η, яка має розподіл Бернуллі з параметром p. Нехай множина випадкових величин $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ представляє послідовні результати всієї серії, що складається з n *випробувань*. Тоді очевидно, що виконується наступна *стохастична рівність*:

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n.$$

В прикладі 1 було показано, що для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n$, існують $E(\eta_i) = p$. Тому використовуючи лему 1 отримаємо:

$$E(\xi) = E(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n) = E(\eta_1)+ E(\eta_2) + \ldots + E(\eta_n) = np,$$

що підтверджує результат, отриманий в прикладі 2.

Властивість 5. Припустимо, що ξ та η – випадкові величини, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$. Якщо існують $E(\xi)$ та $E(\eta)$, а також з ймовірністю 1 $\xi \geq \eta$, тобто: $P\{\omega\colon \xi(\omega) \geq \eta(\omega)\} = 1$, то:

$$E(\xi) \geq E(\eta).$$

Доведення. Очевидно, що $\xi - \eta \geq 0$ з ймовірністю 1. Тому на підставі властивості 2 можемо стверджувати, що:

$$E(\xi - \eta) \geq 0.$$

Використовуючи тепер лему 1 отримаємо:

$$E(\xi - \eta) = E(\xi) - E(\eta) \geq 0, \text{ тобто } E(\xi) \geq E(\eta).$$

Властивість 6. Якщо існує математичне сподівання $E(\xi)$, то виконується наступна нерівність:

$$|E(\xi)| \leq E(|\xi|).$$

Доведення. Очевидно, що справедлива наступна подвійна нерівність:

$$-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|.$$

Тому на підставі властивостей 3 та 5 можемо стверджувати, що:

$$-E(|\xi|) \leq E(\xi) \leq E(|\xi|), \text{ тобто } |E(\xi)| \leq E(|\xi|).$$

Властивість 7. Припустимо, що ξ – дискретна випадкова величина з розподілом $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, \}$. $g(x)$ – деяка дійсна функція, така, що:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| \cdot p_i < \infty .$$

Тоді існує математичне сподівання $E(g(\xi))$ випадкової величини $\eta = g(\xi)$, яке можна обчислити за формулою:

$$E(\eta) = E(g(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i \ .$$

Доведення. Якщо ξ дискретна випадкова величина з розподілом $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, \}$, то $\eta = g(\xi)$ теж буде *дискретною* випадковою величиною. При цьому множиною можливих її значень $\eta \in \{y_i, i = 1, 2, \ldots, \}$ будуть всі числа, які мають вигляд: $y_j = g(x_i), i = 1, 2, \ldots$. Відповідно ймовірності:

$$s_j = P\{\eta = y_j\} = P\{g(\xi) = g(x_i)\} = P\{\xi = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \ldots .$$

Тому використовуючи визначення математичного сподівання дискретної випадкової величини отримаємо:

$$E(g(\xi)) = E(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot s_i = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i \ .$$

Властивість 8. Якщо ξ та η ***незалежні дискретні випадкові величини***, існують $E(\xi)$ та $E(\eta)$, то існує також математичне сподівання $E(\xi \cdot \eta)$ добутку цих величин і при цьому виконується рівність:

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Доведення. Нехай $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, та $\{(y_j, s_j), j = 1, 2, \ldots, m\}$, розподіли відповідно випадкової величини ξ та η де:

$$p_i = P\{\xi = x_i\}, i = 1, 2, \ldots , s_j = P\{\eta = y_j\}, j = 1, 2, \ldots .$$

Згідно з визначенням, дискретні випадкові величини ξ та η будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для довільних значень x_i та y_j виконується наступна рівність:

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_j\} = p_i \cdot s_j, i = 1, 2, \ldots j = 1, 2, \ldots .$$

Множиною можливих значень випадкової величини $(\xi \cdot \eta)$ буде множина всіх чисел, які мають вигляд:

$$(\xi \cdot \eta) \in \{(x_i \cdot y_j), i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots \}.$$

Тому використовуючи визначення математичного сподівання отримаємо:

$$E(\xi \cdot \eta) = \sum_{(i,j)} x_i \cdot y_j \cdot P\{\xi = x_i, \eta = y_i\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j \cdot p_i \cdot s_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i \cdot p_i) \cdot (y_j \cdot s_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i \cdot p_i)\right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \cdot (y_j \cdot s_j)\right) = E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Словами властивість 8 можна сформулювати наступним чином:

- *Математичне сподівання добутку* ***незалежних*** *випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань*.