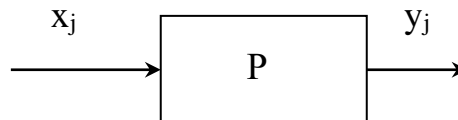


Лабораторна робота №2

Побудова лінійної моделі з допомогою псевдообернених операторів.

Будемо вважати, що на вхід системи перетворення, математична модель якої невідома, поступають послідовно дані у вигляді $m-1$ вимірних векторів \mathbf{x}_j . На виході системи спостерігається сигнал у вигляді вектора \mathbf{y}_j розмірності p .



Постановка задачі: Для послідовності вхідних сигналів \mathbf{x}_j , $j=1,2,\dots,n$ та вихідних сигналів \mathbf{y}_j , $j=1,2,\dots,n$ знайти оператор P перетворення вхідного сигналу у вихідний.

Будемо шукати математичну модель оператора об'єкту в класі лінійних операторів

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_j \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}_j, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1)$$

Невідома матриця \mathbf{A} математичної моделі об'єкту розмірності $p \times n$. Систему (1) запишемо у матричній формі

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n),$$

або

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (2)$$

де $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – матриця вхідних сигналів розмірності $m \times n$,

$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ – матриця вихідних сигналів розмірності $p \times n$.

Матрицю \mathbf{X} будемо інтерпретувати як двовимірне вхідне зображення, а матрицю \mathbf{Y} вихідне зображення.

Тоді

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^+ + \mathbf{V}\mathbf{Z}^T(\mathbf{X}^T),$$

де матриця

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{(1)}^T \\ \mathbf{v}_{(2)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{(p)}^T \end{pmatrix},$$

розмірності $p \times m$, $\mathbf{Z}(\mathbf{X}^T) = \mathbf{I}_m - \mathbf{X}\mathbf{X}^+$.

Формула Гревіля для псевдообернення матриці:

Якщо для матриці A відома псевдообернена (обернена) матриця A^+ , то для розширеної матриці $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}$ справедлива формула

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \begin{pmatrix} A^+ - \frac{Z(A)aa^T A^+}{a^T Z(A)a} : \frac{Z(A)a}{a^T Z(A)a} \end{pmatrix}, & \text{if } a^T Z(A)a > 0 \\ \begin{pmatrix} A^+ - \frac{R(A)aa^T A^+}{1 + a^T R(A)a} : \frac{R(A)a}{1 + a^T R(A)a} \end{pmatrix}, & \text{if } a^T Z(A)a = 0 \end{cases},$$

де $Z(A) = E - A^+ A$, $R(A) = A^+ (A^+)^T$.

Для першого кроку алгоритму $(a_1^T)^+ = \frac{a_1}{a_1^T a_1}$, де $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$.

Формула Мура - Пенроуза для знаходження оберненої (псевдооберненої) матриці:

$$A^+ = \lim_{\delta^2 \rightarrow 0} \left\{ (A^T A + \delta^2 E_n)^{-1} A^T \right\} = \lim_{\delta^2 \rightarrow 0} \left\{ A^T (A A^T + \delta^2 E_m)^{-1} \right\}.$$

матриця A розмірності $m \times n$.

Варіанти вхідних на вихідних сигналів, для яких потрібно побудувати лінійний оператор перетворення вхідного сигналу у вихідний:

- 1) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y1.bmp
- 2) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y2.bmp
- 3) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y3.bmp
- 4) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y4.bmp
- 5) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y5.bmp
- 6) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y6.bmp
- 7) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y7.bmp
- 8) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y8.bmp
- 9) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y9.bmp
- 10) Вхідний сигнал – x2.bmp, вихідний сигнал – y5.bmp
- 11) Вхідний сигнал – x2.bmp, вихідний сигнал – y2.bmp
- 12) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y3.bmp
- 13) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y6.bmp
- 14) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y8.bmp
- 15) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y1.bmp
- 16) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y2.bmp
- 17) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y4.bmp
- 18) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y10.bmp
- 19) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y5.bmp
- 20) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y4.bmp