ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2. (*Додаток*).

Параметри випадкових величин. Випадкові вектори.

6. Додаток. Розв'язки прикладів.

2. Властивості математичного сподівання дискретної величини. 3. Коваріація та коефіцієнт кореляції.

2. *Властивості математичного сподівання та дисперсії.*

Приклад 4. Довести наступні властивості математичного сподівання:

1) $E(a \cdot \xi) = a \cdot E(\xi)$.

Розв'язок: Для $a = 0$ ця рівність є очевидною.

Припустимо, що $a \neq 0$. Якщо $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, \}$ – розподіл випадкової величини ξ, то випадкова величина $(a \cdot \xi)$ має розподіл$\{((a \cdot x_i), p_i), i = 1, 2, \ldots, \}$, тобто:

$$P\{a \cdot \xi = (a \cdot x_i)\} = p_i,\ i = 1, 2, \ldots .$$

Збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p_i < \infty$ означає також збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} |a \cdot x_i|\, p_i$ = $|a| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p_i < \infty$. Тому математичне сподівання випадкової величини $(a \cdot \xi)$ існує і використовуючи його визначення отримаємо:

$$E(a \cdot \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (a \cdot x_i) \cdot p_i = (a \cdot x_1) \cdot p_1 + (a \cdot x_2) \cdot p_2 + \ldots + (a \cdot x_n) \cdot p_n + \ldots =$$

$$= a \cdot (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n + \ldots) = a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i = a \cdot E(\xi).$$

Словами властивість 1 можна сформулювати наступним чином:

Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання

2) $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$.

Розв'язок: Нехай $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, та $\{(y_j, s_j), j = 1, 2, \ldots, m\}$, розподіли відповідно випадкової величини ξ, та η де:

$$p_i = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots, ;\ s_j = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, \ldots, .$$

Множиною можливих значень випадкової величини $(\xi + \eta)$ буде множина всіх чисел, які мають вигляд:

$$(\xi + \eta) \in \{(x_i + y_j),\ i = 1, 2, \ldots, n \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, m, \ldots\}.$$

Тому використовуючи визначення математичного сподівання отримаємо:

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left[x_i \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} + y_j \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\}\right).$$

Як було встановлено, для ймовірностей $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, $i = 1, 2, \ldots, , j = 1, 2, \ldots$, справедливі наступні рівності:

$$p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots,$$

$$s_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\xi = x_i; \eta = y_j\} = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, \ldots,.$$

Таким чином:

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P\{\xi = x_i\} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot s_j =$$

$$= E(\xi) + E(\eta),$$

що й треба було довести.

Словами властивість 2 можна сформулювати наступним чином:

Математичне сподівання суми випадкових величин
дорівнює сумі їх математичних сподівань.

3) $E(c_1 \cdot \xi_1 + c_2 \cdot \xi_2 + \ldots + c_n \cdot \xi_n) = c_1 \cdot E(\xi_1) + c_2 \cdot E(\xi_2) + \ldots + c_n \cdot E(\xi_n)$.

Розв'язок: Доведення отримаємо поєднуючи властивості 1 та 2.

Словами властивість 3 можна сформулювати наступним чином:

Математичне сподівання лінійної комбінації випадкових величин
$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *дорівнює лінійній комбінації їх математичних сподівань*.

4) Якщо ξ та η ***незалежні випадкові величини***, то справедлива наступна рівність:

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Розв'язок:

Нехай $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, та $\{(y_j, s_j), j = 1, 2, \ldots, m\}$, розподіли відповідно випадкової величини ξ та η де:

$$p_i = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots,\ s_j = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, \ldots .$$

Згідно з визначенням дискретні випадкові величини ξ та η будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для довільних значень x_i та y_j виконується наступна рівність:

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_j\} = p_i \cdot s_j,\ i = 1, 2, \ldots\ j = 1, 2, \ldots .$$

Множиною можливих значень випадкової величини $(\xi \cdot \eta)$ буде множина всіх чисел, які мають вигляд:

$$(\xi \cdot \eta) \in \{(x_i \cdot y_j), i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots\}.$$

Тому використовуючи визначення математичного сподівання отримаємо:

$$E(\xi \cdot \eta) = \sum_{(i,j)} x_i \cdot y_j \cdot P\{\xi = x_i, \eta = y_i\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j \cdot p_i \cdot s_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i \cdot p_i) \cdot (y_j \cdot s_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i \cdot p_i)\right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \cdot (y_j \cdot s_j)\right) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta).$$

Словами властивість 4 можна сформулювати наступним чином:

Математичне сподівання добутку ***незалежних*** *випадкових величин*
дорівнює добутку їх математичних сподівань.

Приклад 5. Довести наступні властивості дисперсії:
1) Формула для підрахунку:

$$D(\xi) = E(\xi)^2 - (E(\xi))^2.$$

Розв'язок: Використовуючи визначення дисперсії та доведені в прикладі 1 властивості математичного сподівання отримаємо:

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = E(\xi^2 - 2\cdot\xi\cdot E(\xi) + (E(\xi))^2) =$$

$$= E(\xi^2) - E(2\cdot\xi\cdot E(\xi)) + E((E(\xi))^2) = E(\xi^2) - 2\cdot E(\xi)\cdot E(\xi) + (E(\xi))^2 =$$

$$= E(\xi^2) - 2\cdot(E(\xi))^2 + (E(\xi))^2 = E(\xi^2) - (E(\xi))^2.$$

Словами властивість 1 можна сформулювати наступним чином:

Дисперсія дорівнює різниці другого звичайного моменту
та квадрату першого звичайного моменту

2) $D(a\cdot\xi + b) = a^2\cdot D(\xi)$.
Розв'язок: Використовуючи визначення дисперсії та доведені в прикладі 1 властивості математичного сподівання отримаємо:

$$D(a\cdot\xi + b) = E((a\cdot\xi + b) - E(a\cdot\xi + b))^2 = E(a\cdot\xi + b - E(a\cdot\xi) - b))^2 =$$

$$= E(a\cdot(\xi - E(\xi)))^2 = E(a^2\cdot(\xi - E(\xi))^2) = a^2\cdot E(\xi - E(\xi))^2 = a^2\cdot D(\xi).$$

Словами властивість 2 можна сформулювати наступним чином:

*Сталий доданок не впливає на величину дисперсії, натомість сталий множник можна виносити «**з квадратом**» за знак дисперсії.*

3) ***Нерівність Чебишева***. Для довільної випадкової величини ξ та довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ справедлива наступна нерівність:

$$P\{|\xi - E(\xi)| > \varepsilon\} \le \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Розв'язок: Доведемо нерівність для неперервної випадкової величини ξ, що має щільність $f_\xi(x)$, $-\infty < x < \infty$. В цьому випадку згідно з визначенням дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f_\xi(x)dx.$$

Оскільки щільність $f_\xi(x) \ge 0$ – невід'ємна функція для довільного о числа $-\infty < x < \infty$, то інтеграл від функції $(x - E(\xi))^2 \cdot f_\xi(x)$ може лише зменшитись, якщо область інтегрування зменшується. Тому замінимо всю числову вісь $(-\infty < x < \infty)$ лише такою її підмножиною, для якої виконується умова: $|x - E(\xi)| > \varepsilon$. Тоді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f_\xi(x)dx \ge \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon} (x - E(\xi))^2 f_\xi(x)dx \ge$$

$$= \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon} \varepsilon^2 \cdot f_\xi(x)dx \ge \varepsilon^2 \cdot \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon} f_\xi(x)dx.$$

Пояснюючи фізичний зміст щільності ми встановили справедливість наступної *формальної* рівності:

$$P\{\xi = x\} = f_\xi(x)\cdot dx.$$

Точніше її можна записати наступним чином:

- Для довільної підмножини $A \subset (-\infty; \infty)$ справедлива наступна рівність:

$$\int_A f_\xi(x)dx = P\{\xi \in A\}.$$

В нашому випадку:

A = {множина чисел x для яких виконується нерівність: $|x - E(\xi)| > \varepsilon$}.

Тому:

$$D(\xi) \geq \varepsilon^2 \cdot \int_{|x-E(\xi)|>\varepsilon} f_\xi(x)dx = \varepsilon^2 \cdot P\{|\xi - \mathrm{E}(\xi)| > \varepsilon\}.$$

Тобто

$$P\{|\xi - E(\xi)| > \varepsilon\} \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

3. *Коваріація та коефіцієнт кореляції.*

Приклад 3. Довести наступні властивості коваріації:

1) Формула для підрахунку:

$$Cov(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Розв'язок: Використовуючи визначення коваріації та доведені в прикладі 1 властивості математичного сподівання отримаємо:

$$Cov(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi))\cdot(\eta - E(\eta)) =$$

$$=E(\xi\cdot\eta - \xi\cdot E(\eta) - \eta\cdot E(\xi) + E(\xi)\cdot E(\eta)) =$$

$$= E(\xi\cdot\eta) - E(\xi)\cdot E(\eta) - E(\eta)\cdot E(\xi) + E(\xi)\cdot E(\eta)) =$$

$$= E(\xi\cdot\eta) - E(\xi)\cdot E(\eta).$$

2) $D(\xi + \eta) = D(\xi) + 2\,Cov(\xi, \eta) + D(\eta)$.

Розв'язок: Використовуючи визначення дисперсії та доведені в прикладі 1 властивості математичного сподівання отримаємо:

$$D(\xi + \eta) = E((\xi + \eta) - E(\xi + \eta))^2 = E((\xi - E(\xi)) + (\eta - E(\eta))^2 =$$

$$= E((\xi - E(\xi))^2 + 2(\xi - E(\xi))\cdot(\eta - E(\eta)) + (\eta - E(\eta))^2) =$$

$$= E((\xi - E(\xi))^2) + 2\,E((\xi - E(\xi))\cdot(\eta - E(\eta))) + E((\eta - E(\eta))^2) =$$

$$= D(\xi) + 2\,Cov(\xi, \eta) + D(\eta).$$

3) Наслідок: якщо ξ та η некорельовані, то:

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

4) Незалежні випадкові величини будуть некорельованими:

$$Cov(\xi, \eta) = 0.$$

Розв'язок: Для незалежних випадкових величин

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Таким чином:

$$Cov(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E(\xi) \cdot E(\eta) = E(\xi) \cdot E(\eta) - E(\xi) \cdot E(\eta) = 0.$$