ЛЕКЦІЯ 3(Б).
Випадкова величина та її розподіл.

1. Приклади випадкових величин. 2. Визначення випадкової величини. 3. σ-алгебри множин в евклідових просторах. 4. Операції на скінчених сукупностях випадкових величин. 5. Послідовності випадкових величин.

Словник визначає математику, як «*науку про величини*», тобто «*величина*» є головним математичним поняттям, а вимірювання різноманітних *величин* та дослідження їх властивостей – це одне з головних її завдань.

Теорія ймовірностей, як одна серед великої кількості окремих математичних дисциплін, не є виключенням. Головним об'єктом її вивчення є «*випадкова величина*», тобто відповідний для *теорії ймовірностей, спеціальний* тип величини.

Як підкреслювалось, первинним і фундаментальним в теорії ймовірностей є поняття *стохастичного експерименту*. В математичній (аксіоматичній) теорії стохастичний експеримент формалізовано у вигляді *простору елементарних наслідків* Ω. Випадкові події, пов'язані з цим експериментом, виражаються у вигляді певних підмножин цього простору.

На практиці *безпосередньо* будувати такі простори та аналізувати випадкові події на рівні «*елементарних наслідків*» складно, а часто – взагалі неможливо. Маючи на меті математичне вивчення подібних явищ, замість того, щоб «*дослівно*» описувати окремі елементарні наслідки та різноманітні множини, складених з цих наслідків, зручніше було б спробувати поставити їм у відповідність певні *числа* та *числові* множини.

Це дало б можливість, після такої «*трансформації*» простору елементарних наслідків Ω, вдатися до *кількісного* аналізу як окремих елементарних наслідків, так і різноманітних їх множин.

З цією метою і вводиться поняття *випадкової величини*.

Спеціальний характер «*випадкової величини*», що відрізняє її від інших математичних змінних, полягає в тому, що вона безпосередньо пов'язана зі стохастичним експериментом і може існувати *тільки в його контексті*. Сама назва вказує на те, що значення цієї величини залежить від «*випадку*», тобто від того, *яким чином* закінчиться стохастичний експеримент. Тому в найбільш загальній формі випадкову величину можна було б визначити, як:

- Спеціальний спосіб числового *опису*, або числової *презентації* результатів стохастичного експерименту.

1. *Приклади випадкових величин.*

Перш ніж дати формальне математичне визначення випадкової величини, наведемо кілька простих прикладів, що допоможуть прояснити суть та фізичний зміст присутніх в цьому визначенні абстрактних конструкцій.

Приклад 1. В лекції 1, в першому ж прикладі, що пов'язаний з киданням грального кубика, ми фактично визначили випадкову величину.

Тоді спочатку всі можливі результати експерименту були описані за допомогою множини:

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & \bullet & \\ & & \end{pmatrix}; \omega_2 = \begin{pmatrix} & \bullet & \\ & & \\ & \bullet & \end{pmatrix}; \omega_3 = \begin{pmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{pmatrix}; \omega_4 = \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ & & \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix}; \omega_5 = \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ & \bullet & \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix}; \omega_6 = \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix} \right\}.$$

Однак очевидно, що з точки зору вивчення кількісних закономірностей, притаманних цьому експерименту, зручніше було б замість спеціальних «*значків*» ω_i, що представляють його результати, в якості простору елементарних подій вибрати наступну множину:

$$\Omega = \{\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 3,\ \omega_4 = 4,\ \omega_5 = 5,\ \omega_6 = 6\}.$$

Тоді кожна елементарна подія ω_i буде вказувати ту грань кубика, на якій є i очок, тобто буде окремим числом $\omega_i = i$.

Отже можна говорити, що випадковий результат кидання грального кубика описується величиною:

$$\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

значення якої визначається наступним чином:

$$\xi = \xi(\omega_i) = \omega_i = i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Можна вводити різноманітні випадкові події, що пов'язані із значеннями величини ξ, наприклад:

$$\{\xi = 3\},\ \{\xi < 3\},\ \{\xi > 3\}$$

ітп. Використовуючи класичне визначення ймовірності можна, наприклад, стверджувати, що:

$$P(\xi = 3) = 1/6;\ P(\xi < 3) = 1/3;\ P(\xi > 3) = ½.$$

Приклад 2. Припустимо, що кидаємо монету один раз. Простір елементарних наслідків в цьому експерименті $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ складається з двох елементів:

$$\omega_1 = «\text{О}»\ (\textit{орел});\ \omega_2 = «\text{Р}»\ (\textit{решка}).$$

Подібно, як і в попередньому прикладі, при кількісному аналізі результатів багатократного повторення експерименту зручно було б поставити у відповідність кожному із «*спеціальних символів*» ω_1 = „О” та ω_2 = „Р” певні числа, наприклад: „О” $\leftrightarrow$ 0; „ Р” $\leftrightarrow$ 1. Тобто представити результат кидання монети, визначивши на множині $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ функцію $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, наступним чином: $\xi(\omega_1) = 0$; $\xi(\omega_2) = 1$.

Тоді різноманітні випадкові події можна представляти за допомогою величини ξ, наприклад:

$$P(\text{Результатом кидання буде «}\textit{Орел}\text{»}) = P(\xi = 0) = ½,$$

$$P(\text{Результатом кидання буде «}\textit{Решка}\text{»}) = P(\xi = 1) = ½.$$

Приклад 3. Стохастичний експеримент полягає в тому, що *трикратно* кидаємо монету. Елементарний наслідок цього експерименту повинен відображати результат кожного окремого кидання і може мати, наприклад, наступний вигляд ω = «$\omega_1\omega_2\omega_3$», де ω_i = «O» або ω_i = «P». Тому простір елементарних наслідків в цьому експерименті $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$, складається з восьми елементів:

$$\omega_1 = «OOO»,\ \omega_2 = «OOR»,\ \omega_3 = «ORO»,\ \omega_4 = «ROO»,$$
$$\omega_5 = «ORR»,\ \omega_6 = «ROR»,\ \omega_7 = «RRO»,\ \omega_8 = «RRR».$$

Припустимо тепер, що нас цікавить скільки разів в цьому експерименті з'явиться «*Орел*».

Очевидно, що тільки після його проведення можна дати точну відповідь на це питання. Єдине, що можна зробити перед його початком, так це вказати множину {0, 1, 2, 3} можливих появ «*Орла*» в трьох киданнях.

Формально «*точну*» відповідь на питання дає випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, тобто величина, значення якої визначається елементарним наслідком ω. Іншими словами, в цьому випадку природнім чином ставимо у відповідність кожному елементарному наслідку ціле число:

$$\xi(\omega_1) = \xi(«OOO») = 3,\ \xi(\omega_2) = \xi(«OOR») = 2,\ \xi(\omega_3) = \xi(«ORO») = 2,$$
$$\xi(\omega_4) = \xi(«ROO») = 2,\ \xi(\omega_5) = \xi(«ORR») = 1,\ \xi(\omega_6) = \xi(«ROR») = 1,$$
$$\xi(\omega_7) = \xi(«RRO») = 1,\ \xi(\omega_8) = \xi(«RRR») = 0.$$

Приклад 4. Стохастичний експеримент полягає в тому, що кидаємо монету до тих пір, поки вперше не з'явиться «*Орел*». Використовуючи прийняті раніше позначення «О» та «Р» для можливих результатів чергових кидань монети, можемо простір елементарних наслідків $\Omega = \{\omega\}$ в цьому експерименті записати у наступному вигляді:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\ \omega_3, \omega_4, ...\} = \{«О», «РО», «РРО», «РРРО»,...\}.$$

Елементарна подія $\omega_k = «\underbrace{PPP...P}_{k-1}O»$ означає, що «*Орел*» з'явиться вперше в k-тим по порядку киданні монети. При цьому k може бути довільним цілим, невід'ємним числом k = 1, 2, 3, ... Отже простір Ω – нескінчений, а першочерговим при дослідженні цього експерименту є питання: *скільки повторних спроб він триває*. Тому логічно поставити у відповідність кожному елементарному наслідку ω_k ціле, невід'ємне число k, тобто визначити випадкову величину $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, наступним чином:

$$\xi(\omega_k) = k,\ \omega_k = «\underbrace{PPP...P}_{k-1}O»\ \omega \in \Omega.$$

2. *Визначення випадкової величини.*

Підсумовуючи можемо виділити наступні елементи, які необхідно врахувати при формально-математичному визначенні випадкової величини.

- Випадкова величина існує виключно в контексті певного стохастичного експерименту.
- Випадкова величина – це один із способів числового опису результатів стохастичного експерименту.
- На відміну від «*звичайних*» величин (чи змінних), які зустрічаємо в інших розділах математики і які інтерпретуємо, як конкретні *фіксовані* значення, випадкова величина (ξ) – це функція елементарного наслідку:

$$\omega: \xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega.$$

Приймаючи до уваги, що математичною формалізацією стохастичного експерименту є ймовірнісний простір (Ω, $\mathfrak{I}$, P), можемо тепер дати визначення випадкової величини.

Визначення. Нехай (Ω, $\mathfrak{I}$, P) деякий ймовірнісний простір. Випадковою величиною, визначеною на цьому ймовірнісному просторі, будемо називати будь-яку дійсну функцію $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, визначену на просторі елементарних наслідків:ξ: $\Omega \to R = (-\infty, +\infty)$, що має наступну властивість:

- Для довільного дійсного числа $-\infty < c < +\infty$

$$A_c = \{\omega: \xi(\omega) < c\} \in \mathfrak{I}.$$

Ця умова в функціональному аналізі означає, що функція $\xi(\omega)$ є *вимірною* відносно σ-алгебри $\mathfrak{I}$, а в теорії ймовірностей по відношенню до випадкової величини це означає:

- що для довільного дійсного числа $-\infty < c < +\infty$, множина

$$A_c = \{\omega: \xi(\omega) < c\}$$

буде випадковою подією і можна визначити її ймовірність.

3. *σ-алгебри множин в евклідових просторах.*

Отже випадкова величина – це спеціальна функція, визначена на ймовірнісному просторі (Ω, $\mathfrak{I}$, P). Аргументом цієї функції $\xi = \xi(\omega)$ являються елементарні наслідки $\omega \in \Omega$.

Як було встановлено, структура простору Ω та вигляд його елементів може бути найрізноманітніший, що теж додає специфічних ознак поняттю «*випадкова величина*» в порівнянні з іншими математичними змінними:

- Як правило, в математичних дисциплінах поняття «*функція* $y = f(x)$» передбачає, що y та x – це конкретні величини, що належать тій самій множині.
- У випадку ж випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$ значенням функції $\xi(\omega)$ є дійсне число $\xi \in (-\infty, +\infty)$, в той час, як аргумент $\omega \in \Omega$ може мати найрізноманітнішу структуру.

Структура простору Ω та вигляд його елементів має також велике значення при визначені випадкових подій та побудові ймовірнісного простору (Ω, $\mathfrak{I}$, P). Тому варто виділити два типи просторів елементарних наслідків $\Omega = \{\omega\}$, які найчастіше зустрічаються в практичних задачах.

1. Ω – дискретна (*скінчена* або *злічена*) множина.

В цьому випадку випадковою подією слід вважати будь-яку підмножину Ω, а $\mathfrak{I}$ – це сукупність всіх підмножин Ω.

Будь-яка випадкова величини $\xi = \xi(\omega)$ визначена на такому просторі може приймати не більше, ніж злічену кількість різних значень.

2. $\Omega \subset R = (-\infty, +\infty)$ – незлічена підмножина на числовій прямій (або в евклідовому просторі $\Omega \subset R^k$).

В цьому випадку виникають проблеми, пов'язані з тим, що не для всякої сукупності підмножин простору R^k можна *коректно визначити* ймовірнісну міру P.

Прикладом такої σ-алгебри подій може бути множина $\mathfrak{I}(R^k)$ всіх підмножин в R^k.

Ось чому необхідно визначити сукупність $\mathfrak{I}$ випадкових подій таким чином, щоб:

- З одного боку, ця сукупність була достатньо чисельною і можна було б збудувати змістовну математичну теорію, яка має практичний сенс.
- З іншого боку – сукупність ця *не повинна* бути «*занадто*» чисельною і була можливість в *коректний* спосіб визначити ймовірність $P(A)$ для кожної події $A \in \mathfrak{I}$.

Найчастіше в практичних застосуваннях таку сукупність $\mathfrak{I}$ виступає *σ-алгебра борелівських множин*.

Визначення. *σ-алгеброю множин Бореля* (або *σ-алгеброю борелівських множин*) на числовій прямій $R = (-\infty, +\infty)$ називається мінімальна σ-алгебра $B(R)$, яка містить в собі всі лівостороннє-замкнені інтервали:

$$B(R) = \sigma\{[a, b)/a \in R, b \in R, a < b\},$$

де

$$[a, b) = \{x \in R: a \le x < b\}.$$

Визначення. *σ-алгеброю множин Бореля* (або *σ-алгеброю борелівських множин*) в евклідовому просторі R^k називається мінімальна σ-алгебра $B(R^k)$, яка містить в собі всі лівостороннє-замкнені k-вимірні паралелепіпеди:

$$B(R^k) = \sigma\{\Pi[a_i, b_i), a_i < b_i \in R, i = 1, \ldots, k\},$$

де

$$\Pi[a, b) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R^k: a_i \le x_i < b_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

Лема 1. Нехай ξ буде випадковою величиною, визначеною на імовірнісному просторі (Ω, $\mathfrak{I}$, P). Тоді для довільних дійсних чисел $a < b$, $a \in R$, $b \in R$, наступні множини:

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq a\} \in \Im, \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq a\} \in \Im, \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > a\} \in \Im,$$
$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = a\} \in \Im, \{\omega \in \Omega: a \leq \xi(\omega) < b\} \in \Im,$$

будуть випадковими подіями.

Доведення теореми випливає безпосередньо з визначення σ-алгебри та визначення випадкової величини. Наприклад

$$\{\xi(\omega) \geq a\} = \Omega \backslash \{\xi(\omega) < a\} \in \Im,$$

і тп.

Лема 2. Нехай ξ буде випадковою величиною, визначеною на імовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$. B_R – борелівська σ-алгебра в просторі R. Тоді для будь-якої множини $B \in B_R$ множина $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\} \in \Im$ є випадковою подією.

Доведення. Розглянемо сімейство множин B, для яких виконується умова:

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\} \in \Im,$$

Необхідно довести, що до цього сімейства належать всі борелівські множини $B \in B_R$. Легко перевірити, що:

- З одного боку, введене сімейство множин утворює σ-алгебру.
- З іншого боку, виходячи з леми 1, можемо стверджувати, що це сімейство містить інтервали типу $[a, b)$ (тобто лівосторонне-замкнені інтервали).

Таким чином, воно містить також мінімальну σ-алгебру B_R, утворену на основі таких інтервалів, тобто σ-алгебру борелівськіх множини.

Подібним чином можна довести більш загальне твердження.

Лема 3. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ – скінчена сукупність випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$. $B_{R(k)}$ – борелівська σ-алгебра в просторі R^k. Тоді для будь-якої множини $B \in B_{R(k)}$ множина:

$$\{\omega \in \Omega: (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega)) \in B\} \in \Im$$

є випадковою подією.

4. *Операції на скінчених сукупностях випадкових величин.*

Наступне дуже важливе питання, пов'язане з визначенням випадкової величини, стосується *допустимих операцій*, які можуть виконуватися з випадковими величинами. Виявляється, множина таких операцій досить широка та різноманітна.

Визначення. Борелівською функцією однієї дійсної змінної $x \in R$ називається така функція $f(x)$, для якої виконується наступна умова:

- Для будь-якого дійсного числа $c \in R$

$$\{x \in R: f(x) < c\} \in B_R.$$

Визначення. Борелівською функцією багатьох змінних $x_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, називається така функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для якої виконується наступна умова:

- Для будь-якого дійсного числа $c \in R$

$$\{(x_1, x_2,\dots, x_k) \in R^k: f(x_1, x_2,\dots, x_k) < c\} \in B_{R(k)}.$$

Варто відзначити, що сімейство функцій Бореля досить широке. У будь-якому випадку, всі елементарні функції та функції, що зустрічаються в практичних моделях, є борелівськими.

Лема 4. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ – скінчена сукупність випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. $f(x_1, x_2,\dots, x_k)$ – деяка борелівська функція. Тоді $\eta = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ буде випадковою величиною, визначеною на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Доведення. З визначення борелівської функції випливає, що для будь-якого дійсного числа c множина:

$$B = \{(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega)): f(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega)) < c\}$$

буде борелівською множиною: $B \in B_{R(k)}$.

Таким чином, на підставі леми 3, для будь-якого дійсного числа c множина:

$$\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) < c\} = \{\omega \in \Omega: (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega)) \in B\} \in \mathfrak{I}$$

буде випадковою подією.

5. *Послідовності випадкових величин.*

Отже різноманітні перетворення скінченої кількості випадкових величин, визначених на тому самому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, дають в результаті випадкову величину на тому ж просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Залишилось розглянути основні математичні операції, що виконуються з *нескінченими сукупностями*, або послідовностями:

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...,$$

Лема 5. Нехай $\xi_1, \xi_2, ...,$ – нескінчена послідовність випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. Тоді:

(*а*) множина таких $\omega \in \Omega$, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ існує, є випадковою подією;

(*б*) множина таких $\omega \in \Omega$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, є випадковою подією;

(*в*) результати наступних операцій щодо послідовності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ...$

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_n(\omega),\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_n(\omega),\ \inf_n \xi_n(\omega),\ \sup_n \xi_n(\omega)$$

будуть випадковими величинами, визначеними на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Доведення. У випадку твердження (*а*) на основі теореми Коші, границя послідовності $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega), ...$ існує тоді, і тільки тоді, коли для будь-якого натурального числа k існує таке число N, що для будь-якого числа $n > N$ і для будь-якого числа $m > N$ виконується нерівність:

$$|\xi_n(\omega)-\xi_m(\omega)|<\frac{1}{k}.$$

З доведених результатів випливає, що будь-яких конкретних чисел k, n, m, множина

$$B_{n,m}^k=\left\{|\xi_n(\omega)-\xi_m(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}\in\mathfrak{I}$$

буде випадковою подією.

Таким чином, використовуючи операції над подіями, ми отримуємо наступну рівність:

$$\{\omega\in\Omega \text{ такі, що границя } \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega) \text{ існує}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N+1}^{\infty}\bigcap_{m=N+1}^{\infty}B_{n,m}^k.$$

А оскільки $\mathfrak{I}$ є σ-алгеброю, то приходимо до висновку, що

$$\{\omega\in\Omega \text{ такі, що границя } \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega) \text{ існує}\}\in\mathfrak{I}.$$

Подібним чином доводяться також твердження (*б*) та (*в*) леми 5.