Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №5

Чисельні методи в інформатиці

“Сплайни інтерполяція”

Варіант №8

Виконав студент групи ІПС-31
Тесленко Назар Олександрович

Київ - 2025

Постановка задачі:

Варіант №8

1. Побудувати кубічний сплайн для функції $2 * x^7 + 3 * x^6 + 4 * x^5 + 3$ на проміжку [0.. 4] за точками x = 0, 2, 4. Спробувати доповнити систему рівнянь значенням справжньої похідної (другої для кубічного сплайну) функції на краях замість нуля.

2. Побудувати кусково-лінійну та кусково-квадратичну інтерполяцію для цієї ж функції за тими ж точками.

Теоретичний опис та обґрунтування:

Кусково-лінійна інтерполяція

Якщо побудувати поліном першого степеня $L^i_1(x)$ на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, то отримаємо кусково-лінійну інтерполяцію на $[x_0, x_n]$. Розглянемо поліном першого степеня за вузлами x_{i-1}; x_i:

$$L^i_1(x) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x) + f(x_i)(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Для оцінки похибки при наближенні функції за допомогою кусково-лінійної інтерполяції використовується формула:

$$\left|f(x) - L_1(x)\right| \leq \frac{M_2 h^2}{8}$$

Введемо систему функцій :

$$0,\ x \leq x_{i-1};$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i; \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i \le x \le x_{i+1}; \\ 0, & x \ge x_{i+1} \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x_0 \le x \le x_1 \\ 0, & x \ge x_1 \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0, & x \le x_{n-1} \end{cases}$$

Тоді для кусково-лінійної інтерполяції зручно використовувати формулу:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$$

Теорема: Для $f(x) \in C^2[a; b]$, що задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, має місце оцінка

$$|| f^{(k)}(x) - \Phi^{(k)}{}_1(x)||_{C[a;b]} \le 2M_2|h|^{2-k}, \ k = 0, 1,$$

де $|h| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$

Кусково-квадратична інтерполяція

Покладемо сталий крок $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i$: $i = \overline{1, n}$. Якщо побудувати поліном 2-го степеня за вузлами x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , то отримаємо кусково-квадратичну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$:

$$L^i_2(x) = f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} - f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2} + f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}$$

Похибка кусково-квадратичної інтерполяції обраховується за формулою:

$$\left|f(x) - L^i_2(x)\right| \le \frac{M^i_3}{6}|h^3 g(t)| \le \frac{M_3}{6}|h^3(-\frac{2}{3\sqrt{3}})| \le \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3;$$

$$\left|f(x) - L^i_2(x)\right| \le \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3$$

Інтерполяційний природній кубічний сплайн

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:

1. $s(x)$ - поліном степеня 3 для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$
2. $s(x) \in C^2[a; b]$
3. $s(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$
4. $s''(a) = s''(b) = 0$ - умова природності

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: $s'(a) = A$; $s'(b) = B$, або умови періодичності:
$s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),\ c_0 = c_n = 0\,,$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i = f_i;\quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i};\quad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}$$

Хід роботи

1. Починаємо з побудови природнього кубічного сплайну. Для початку знайдеом значення функції у наданих x та занйдемо h_i

```
Вузли та значення функції:
  x_0 = 0.000,   f(x_0) = 3.000
  x_1 = 2.000,   f(x_1) = 579.000
  x_2 = 4.000,   f(x_2) = 49155.000

Кроки h_i = x_i - x_{i-1}:
  h_1 = 2.000 - 0.000 = 2.000
  h_2 = 4.000 - 2.000 = 2.000
```

Далі нам потрібно знайти значення c_i , для цього побудуємо тридіагональну систему рівнянь. За умовою природнього кубічного сплайну $c_0 = c_2 = 0$, отже будемо знаходити значення c_1

```
Формула для внутрішніх коефіцієнтів c_i:
  h_i*c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6[(f_{i+1}-f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i]
```

```
Ліва частина рівняння:
  h1*c0 + 2(h1+h2)*c1 + h2*c2
= 2.0*c0 + 2(2.0+2.0)*c1 + 2.0*c2
= 2.0*c0 + 8.0*c1 + 2.0*c2

Права частина рівняння:
  6[(f2 - f1)/h2 - (f1 - f0)/h1]
= 6[(49155.0 - 579.0)/2.0 - (579.0 - 3.0)/2.0]
= 6[24288.000000 - 288.000000]
= 6*(24000.000000)
= 144000.000000

Отже, рівняння для c1 має вигляд:
  2.0*c0 + 8.0*c1 + 2.0*c2 = 144000.000000
Умови природності:  c0 = 0,   c2 = 0

Після підстановки c0=0, c2=0:
  8.0 * c1 = 144000.000000
  c1 = 144000.000000 / 8.0 = 18000.000000
```

Після того, як були знайдені коефіцієнти c_i , переходимо до пошуку коефіцієнтів a_i , b_i , d_i

```
[Проміжок 1: [0.0, 2.0]]
  a_1 = f(x_1) = 579.000000
  d_1 = (c_1 - c_0) / h_1 = (18000.000000 - 0.000000) / 2.000 = 9000.000000
  b_1 = h_1/2 * c_1 - h_1^2/6 * d_1 + (f_1 - f_0) / h_1
       = 2.000/2*18000.000000 - 2.000^2/6*9000.000000 + (579.000000-3.000000)/2.000
       = 12288.000000

[Проміжок 1: [0.0, 2.0]]
  a_1 = 579.000000
  b_1 = 12288.000000
  c_1 = 18000.000000
  d_1 = 9000.000000
```

```
[Проміжок 2: [2.0, 4.0]]
  a_2 = f(x_2) = 49155.000000
  d_2 = (c_2 - c_1) / h_2 = (0.000000 - 18000.000000) / 2.000 = -9000.000000
  b_2 = h_2/2 * c_2 - h_2^2/6 * d_2 + (f_2 - f_1) / h_2
       = 2.000/2*0.000000 - 2.000^2/6*-9000.000000 + (49155.000000-579.000000)/2.000
       = 30288.000000

[Проміжок 2: [2.0, 4.0]]
  a_2 = 49155.000000
  b_2 = 30288.000000
  c_2 = 0.000000
  d_2 = -9000.000000
```

Після того як були знайдені усі коефіцієнти, за формулою можемо побудувати явний вигляд природного кубічного сплайну на інтервалах:

```
Формули природного кубічного сплайна на кожному проміжку:
Формула:
  s_i(x) = a_i + b_i*(x - x_i) + c_i/2*(x - x_i)^2 + d_i/6*(x - x_i)^3

Проміжок [0.0, 2.0]:
s_1(x) = 579.000000 + 12288.000000 * (x - 2.0) + 9000.000000 * (x - 2.0)^2 + 1500.000000 * (x - 2.0)^3

Проміжок [2.0, 4.0]:
s_2(x) = 49155.000000 + 30288.000000 * (x - 4.0) + 0.000000 * (x - 4.0)^2 + -1500.000000 * (x - 4.0)^3
```

Після знаходження природного кубічного сплайну, виконаємо другу умову завдання 1, а саме побудова кубічного сплайну з використанням значень справжньої похідної функції на краях замість нулів

Початковий алгоритм побудови ідентичний до природного кібчного сплайну. Спочатку знайдемо значення фунції в значеннях x_i та h_i. Для знаходження значень c_0, c_2 знаходимо граничні значення дургої похідної нашої функції:

```
Вузли та значення функції:
  x_0 = 0.000,   f(x_0) = 3.000
  x_1 = 2.000,   f(x_1) = 579.000
  x_2 = 4.000,   f(x_2) = 49155.000

Кроки h_i = x_i - x_{i-1}:
  h_1 = 2.000 - 0.000 = 2.000
  h_2 = 4.000 - 2.000 = 2.000

Значення другої похідної в кінцях:
  f''(x_0) = f''(0.000) = 0.000000
  f''(x_n) = f''(4.000) = 114176.000000
  c_0 = f''(x_0)
  c_n = f''(x_n)
```

Будуємо систему для знаходження c_1:

```
Формула для внутрішнього коефіцієнта c_i:
  h_i*c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6[(f_{i+1}-f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i]\n
Права частина:
  6[(f2 - f1)/h2 - (f1 - f0)/h1]
= 6[(49155.0 - 579.0)/2.0 - (579.0 - 3.0)/2.0]
= 6[24288.000000 - 288.000000]
= 144000.000000

Ліва частина рівняння:
  h1*c0 + 2(h1+h2)*c1 + h2*c2
= 2.0*c0 + 8.0*c1 + 2.0*c2

Підставляємо крайові значення другої похідної:
  c0 = f''(x0) = 0.000000
  c2 = f''(x2) = 114176.000000

Отже рівняння стає:
  2.0*0.000000 + 8.0*c1 + 2.0*114176.000000 = 144000.000000
```

Розв’язуємо відповідне рівняння:

```
Виділимо c1:
-> 8.0*c1 = 144000.000000 - (228352.000000)
-> 8.0*c1 = -84352.000000
-> c1 = -10544.000000
```

Отже, розв’язок системи для c_i має наступний вигляд:

```
c_0 = 0.000000
c_1 = -10544.000000
c_2 = 114176.000000
```

Переходимо до обчислення коефіцієнтів a_i, d_i, b_i:

```
[Проміжок 1: [0.0, 2.0]]
  a_1 = f(x_1) = 579.000000
  d_1 = (c_1 - c_0) / h_1 = (-10544.000000 - 0.000000) / 2.000 = -5272.000000
  b_1 = h_1/2 * c_1 - h_1^2/6 * d_1 + (f_1 - f_0) / h_1
      = 2.000/2*-10544.000000 - 2.000^2/6*-5272.000000 + (579.000000-3.000000)/2.000
      = -6741.333333

[Проміжок 1: [0.0, 2.0]]
  a_1 = 579.000000
  b_1 = -6741.333333
  c_1 = -10544.000000
  d_1 = -5272.000000
```

```
[Проміжок 2: [2.0, 4.0]]
  a_2 = f(x_2) = 49155.000000
  d_2 = (c_2 - c_1) / h_2 = (114176.000000 - -10544.000000) / 2.000 = 62360.000000
  b_2 = h_2/2 * c_2 - h_2^2/6 * d_2 + (f_2 - f_1) / h_2
       = 2.000/2*114176.000000 - 2.000^2/6*62360.000000 + (49155.000000-579.000000)/2.000
       = 96890.666667

[Проміжок 2: [2.0, 4.0]]
  a_2 = 49155.000000
  b_2 = 96890.666667
  c_2 = 114176.000000
  d_2 = 62360.000000
```

Оскільки вже маємо всі готові дані можемо переходити до побудови кубічного сплайну на інтревалах:

```
Формули кубічного сплайна з крайовими значеннями f''(x):
  s_i(x) = a_i + b_i*(x - x_i) + c_i/2*(x - x_i)^2 + d_i/6*(x - x_i)^3

Проміжок [0.0, 2.0]:
s_1(x) = 579.000000 + -6741.333333*(x - 2.0) + -5272.000000*(x - 2.0)^2 + -878.666667*(x - 2.0)^3

Проміжок [2.0, 4.0]:
s_2(x) = 49155.000000 + 96890.666667*(x - 4.0) + 57088.000000*(x - 4.0)^2 + 10393.333333*(x - 4.0)^3
```

2. Розопчинаємо другу частину завдання, а саме побудова кусково-лінійної інтерполяції та кусково-квадратичної

Для їх побудови використовуємо формули з теорії:

<u>Кусково-лінійна інтерполяці</u>

Формула: $L^{i}_{1}(x) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x) + f(x_i)(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

Знаходимо значення у точках x та знаходимо крок h_i

```
Вузли та значення функції:
  x_0 = 0.000,   f(x_0) = 3.000
  x_1 = 2.000,   f(x_1) = 579.000
  x_2 = 4.000,   f(x_2) = 49155.000

Кроки h_i = x_i - x_{i-1}:
  h_1 = x_1 - x_0 = 2.0 - 0.0 = 2.000
  h_2 = x_2 - x_1 = 4.0 - 2.0 = 2.000
```

```
Будуємо відрізки L_i(x) = k_i * x + b_i на кожному проміжку [x_{i-1}, x_i]:

Текстовий вивід кроків:
[Проміжок 1: [0.0, 2.0]]
  k_1 = (f(x_1) - f(x_0)) / h_1
       = (579.000 - 3.000) / 2.000 = 288.000
  b_1 = f(x_0) - k_1 * x_0
       = 3.000 - 288.000 * 0.000 = 3.000
 L_1(x) = 288.000 * x + 3.000

[Проміжок 2: [2.0, 4.0]]
  k_2 = (f(x_2) - f(x_1)) / h_2
       = (49155.000 - 579.000) / 2.000 = 24288.000
  b_2 = f(x_1) - k_2 * x_1
       = 579.000 - 24288.000 * 2.000 = -47997.000
 L_2(x) = 24288.000 * x + -47997.000
```

Кусково-квадратична інтерполяція

Формула:

$$L^i_2(x) = f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} - f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2} + f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}$$

```
Вузли та значення функції:
  x_0 = 0.000,   f(x_0) = 3.000
  x_1 = 2.000,   f(x_1) = 579.000
  x_2 = 4.000,   f(x_2) = 49155.000

Маємо три вузли, тому кусково-квадратичний поліном визначений на всьому [x0, x2].
Крок h = x1 - x0 = 2.000
```

```
Формула квадратичного інтерполянта L_1^2(x):
L(x) = f(x0)*(x-x1)*(x-x2)/(2*h^2) - f(x1)*(x-x0)*(x-x2)/(h^2) + f(x2)*(x-x0)*(x-x1)/(2*h^2)\n
Підставляємо значення у формулу:
  f(x0) = 3.0
  f(x1) = 579.0
  f(x2) = 49155.0

L(x) = 3.0 * (x-2.0)*(x-4.0) / (2*4.0)
     - 579.0 * (x-0.0)*(x-4.0) / (4.0)
     + 49155.0 * (x-0.0)*(x-2.0) / (2*4.0)

Розкриваємо L(x) у вигляді ax^2 + bx + c:

  a = 3.000000
  b = -11712.000000
  c = 6000.000000

Отже, кусково-квадратичний інтерполянт має вигляд:
L(x) = 3.000000 * x^2 + -11712.000000 * x + 6000.000000
```