Модульна контрольна робота з ЧМ

Кисленко Назар ПМС-31

Вариант № 105

№ 1

$x^2 - 3x - \sin\frac{\pi}{5} = 0$

Нехай $a = \sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}58778$

$D = 9 + 4a$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$ $x_1^* \approx 3{,}18457$
$x_2^* \approx -0{,}1845$

Наближення x_2^*

$\delta(x^*) \le 10^{-2}$

$\Delta(x^*) = |x^*| \cdot \delta(x^*) \approx 0{,}00184$

Розв'язання оберненої задачі:

$\Delta(a^*) = \frac{\Delta(x^*)}{|f'(a^*)|}$ $f'(a) = \left(\frac{3-(9+4a)^{1/2}}{2}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{9+4a}}$

Обчисл. знач. похідної в точці:

$|f'(a^*)| = \left|-\frac{1}{\sqrt{9+4\cdot 0{,}5877}}\right| \approx 0{,}2968$

$\Delta(a^*) \le \frac{\Delta(x^*)}{|f'(a^*)|} = \frac{0{,}00184}{0{,}2968} \approx 0{,}0619$

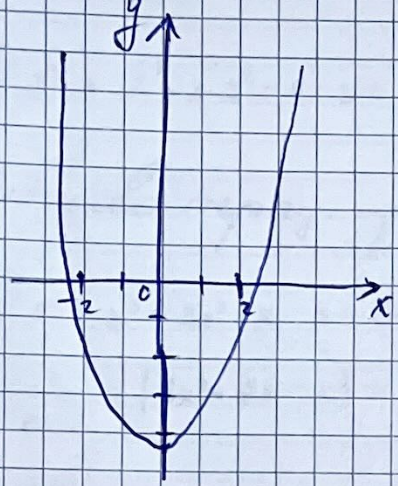
Отже $a \approx 0{,}\underset{I}{5}\underset{II}{8}778$ $a \approx 0{,}58 \le \Delta(a^*)$

Необхідно взяти 2 правильні значущі цифри, щоб похибка наближення кореня не перевищ. 10^{-2}

$\left(\sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}59\right)$

№2

$x^2 + 2e - 10 = 0$



$[2;3]$

$f(2) \approx 2^2 + 2e - 10 \approx -0{,}563$

$f(3) \approx 4{,}43$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} f(2)f(3) < 0$

$x \in [2;3]$

Ітерац. процес: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Достатні умови:

$f(x) = x^2 + 2e - 10$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$x_0 = 2{,}5$

1) $f(x_0) f''(x_0) = 1{,}68 \cdot 2 > 0$

2) $q = \dfrac{2|2{,}5 - x^*|}{2 \cdot 4} = 0{,}125 < 1$

Виконуються

Ітер. процес

$x_0 = 2{,}5$

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2{,}5 - \dfrac{1{,}68}{5} \approx 2{,}164$

$|x_1 - x_0| = |2{,}5 - 2{,}164| > \varepsilon$

$x_2 = 2{,}164 - \dfrac{0{,}119}{4{,}328} = 2{,}1365$

$|x_2 - x_1| = |2{,}164 - 2{,}136| > \varepsilon$

$x_3 = 2{,}136 + \dfrac{0{,}0009}{4{,}272} \approx 2{,}136210$

$|x_3 - x_2| = |2{,}13621 - 2{,}1365| < \varepsilon = 0{,}001$

$x^* = 2{,}1362$

$n \geq \log_2\left(\dfrac{\ln\dfrac{|2{,}5 - 2{,}1362|}{0{,}001}}{\ln(1/0{,}125)} + 1\right) + 1 \approx 3$

№ 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = A^T \ \checkmark$$

Ітерація 1

$$a^0_{i_0 j_0} = |a_{13}| = 3 \quad i_0 = 1 \quad j_0 = 3$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{13}}{a^0_{11} - a^0_{33}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/4$$

$$\cancel{U = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ 0 & \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & 0 & -\sin\varphi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_0 & 0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \qquad \cos\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_1 = U_0^T A U_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad t(A_1) = 2(0^2 + 0^2 + (\sqrt{2})^2) \ 4 > \varepsilon$$

Ітер 2

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(-1,41)}{2+1} = -0,378 \qquad \cos(-0,378) \approx 0,93 \quad \sin(-0,378) = -0,37$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,93 & 0,37 \\ 0 & -0,37 & 0,93 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,93 & -0,37 \\ 0 & 0,37 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,93 & 0,37 \\ 0 & -0,37 & 0,93 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2,56 & 0 \\ 0 & 0 & -1,56 \end{pmatrix}$$

$$t(A_2) = 2(0^2 + 0^2 + 0^2) = 0 \le \varepsilon$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 \approx 2,56 \qquad \lambda_3 \approx -1,56$$

Умова припин.: $t(A_{k+1}) = \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{n} a_{ij}^2 \le \varepsilon$

№4

Спочатку побудуємо $T_3(x)$ на $[-1;1]$

$$T_0(x)=1$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)=2x^2-1$$

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

Для побудови $T_n^{[a;b]}$ зі старш. коеф. 1:

$$T_n^{[a;b]}(x)=(b-a)^n\cdot 2^{1-2n}\cdot T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

$n=3 \quad a=-2 \quad b=3$

$$(b-a)^n\cdot 2^{1-2n}=(3-(-2))^3\cdot 2^{1-2\cdot 3}=\frac{125}{32}$$

$$\frac{2x-(b+a)}{b-a}=\frac{2x-(3+(-2))}{3+2}=\frac{2x-1}{5}$$

$$T_3^{[-2;3]}(x)=\frac{125}{32}\left(4\left(\frac{2x-1}{5}\right)^3-3\left(\frac{2x-1}{5}\right)\right)=\frac{125}{32}\left(\frac{4(2x-1)^3}{125}-\frac{3(2x-1)}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(2x-1)^3-\frac{75}{32}(2x-1)=\left(x^3-\frac{12}{8}x^2+\frac{6}{8}x-\frac{1}{8}\right)-\frac{150}{32}x+\frac{75}{32}$$

$$=x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{63}{16}x+\frac{71}{32}$$

Обчисл. відхил. від 0

$$\left\|T_n^{[a;b]}\right\|=(b-a)^n\cdot 2^{1-2n}$$

$$L=(5)^3\cdot 2^{-5}=\frac{125}{32}\approx 3{,}906$$

В-дь:

Многочлен: $P_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{63}{16}x+\frac{71}{32}$

Відхил.: $\frac{125}{32}$

№ 5

$f'(2h) \approx c_1 f(-2h) + c_2 f(0) + c_3 f(2h)$

Складемо систему: $m = 2$ (3 вузли)

Підставимо замість $f(x)$ $1, x, x^2$

- $f(x) = 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(2h) = 0$

$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 = 0$

- $f(x) = x$ $f'(x) = 1 \Rightarrow f'(2h) = 1$

Знач. у вузлах: $f(-2h) = -2h$ $f(0) = 0$ $f(2h) = 2h$

$c_1(-2h) + c_2 \cdot (0) + c_3(2h) = 1$

- $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2h) = 2(2h) = 4h$

$f(-2h) = 4h^2$ $f(0) = 0$ $f(2h) = 4h^2$

$c_1(4h^2) + c_2 \cdot 0 + c_3 4h^2 = 4h$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -2hc_1 + 2hc_3 = 1 \\ 4h^2 c_1 + 4h^2 c_3 = 4h \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_3 - c_1 = 1/2h \\ c_1 + c_3 = 1/h \end{cases}$$

$2c_3 = 1/2h + 1/h = 3/2h \Rightarrow c_3 = 3/4h$

$2c_1 = 1/h - 1/2h = 1/2h \Rightarrow c_1 = 1/4h$

$c_2 = -(c_1 + c_3) = -(1/4h + 3/4h) = -1/h$

Підставимо коеф.:

$f'(2h) \approx 1/4h\, f(-2h) - 1/h(f(0)) + 3/4h\, f(2h)$