Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1

Чисельні методи в інформатиці

"Розв'язок нелінійних рівнянь"

Варіант №8

Виконав студент групи ІПС-31
Тесленко Назар Олександрович

Київ - 2025

Постановка задачі:

Знайти розв'язок рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ наступними методами:
Варіант№8

- Модифікований метод Ньютона: $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$
- Метод простої ітерації: $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$

Додати можливість зміни точності

Теоретичний опис та обґрунтування:

<u>Метод простої ітерації:</u>

Ітераційний процес:

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

де $\phi(x) = x + \psi(x)f(x)$

Достатня умова:

$\phi(x)$ задовольняє умовам:

1) $\max\limits_{x \in S} |\phi'(x)| \le q < 1$
2) $|\phi(x_0) - x_0| \le (1 - q)\delta$

Апріорна оцінка:

$$n \ge \left[\frac{\ln(|\phi(x_0) - x_0|/(1-q)\varepsilon)}{ln(1/q)}\right] + 1$$

Умова припинення залежить від q:

$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$, якщо $q < \frac{1}{2}$

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, в інших випадках

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Достатня умова:

Якщо функція $f(x) \in C^2_{[a;b]}$, $f'(x)$, $f''(x)$ $-$ знакосталі на $[a; b]$, $f'(x) \neq 0$ на $[a; b]$ то ітераційни процес збігається

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

Хід роботи

Мова реалізації: Python

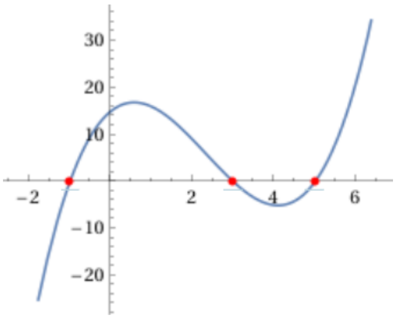
Модифікований метод Ньютона

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$$

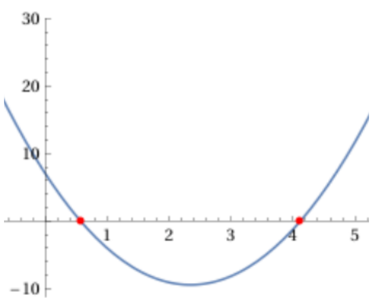
$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 7$$

$$f''(x) = 6x - 14$$

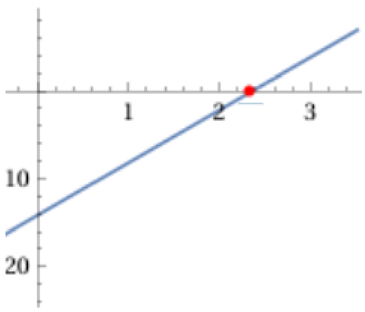
f(x):



f \`(x)



f \`\`(x)



Функція для модифікованого методу Ньютона:

```
def modif_newtons_method(f, df, d2f, a, b, eps)-> tuple[bool,
float, int]:...
```

Рівняння має 3 корені. Обираємо інтервал що містить корінь: [2.5;7]. Якщо на вибраному інтервалі існує кілька розв'язків, програма автоматично звужує інтервал і вибирає той відрізок, який містить єдиний корінь для подальшої роботи алгоритму.

```
MODIFIED NEWTON'S METHOD
============================================================
Equation: f(x) = x**3 - 7*x**2 + 7*x + 15
epsilon = 0.001
============================================================

Finding interval containing root
----------------------------------------
Root found in interval [4.75, 7.00]
Working interval: [4.75, 7.00]
```

Перевіряємо достатні умови:

- $f'(x),\ f''(x)$ – знакосталі на $[a; b]$
- $f'(x) \neq 0$ на $[a; b]$

За невдалих перевірок програма повертає False значення з відповідними логами помилки

```
# Sufficient conditions:
# 1. f'(x), f''(x) - constant sign on the interval [a;b]
# 2. f'(x) != 0 on the [a;b]
x_interval = np.linspace(a, b, 1000)
dfx_values = np.array([df(x) for x in x_interval])
dfx_values[np.abs(dfx_values) < 1e-10] = 0

d2fx_values = np.array([d2f(x) for x in x_interval])
d2fx_values[np.abs(d2fx_values) < 1e-10] = 0

# Check if some of df(x) == 0
if np.any(dfx_values == 0):
    print("f'(x) = 0 at some point - first condition not
    satisfied!")
    return False, None, None
```

```python
# f'(x), f''(x) has to be constant sign on the interval [a; b]
if not (np.all(dfx_values >= 0) or np.all(dfx_values <= 0)):
    print(f"f'(x) doesn't have constant sign on [{a:.2f}, {b:.2f}]")
    return False, None, None

if not (np.all(d2fx_values >= 0) or np.all(d2fx_values <= 0)):
    print(f"f''(x) doesn't have constant sign on [{a:.2f}, {b:.2f}]")
    return False, None, None
```

Обираємо початкове наближення

$x_0 = \frac{a+b}{2} = 5.875$, на інтервалі $[4.75; 7]$

Та перевіряємо на умову: $f'(x_0)f''(x_0) > 0$

Починаємо ітераційни процес:

```
Iteration process
--------------------------------------------------
Iter    x_n         f(x_n)      x_n+1       f(x_n+1)
--------------------------------------------------
1       5.8750      17.2949     5.2638      3.7408
2       5.2638      3.7408      5.1316      1.7201
3       5.1316      1.7201      5.0708      0.8903
4       5.0708      0.8903      5.0394      0.4847
5       5.0394      0.4847      5.0222      0.2707
6       5.0222      0.2707      5.0127      0.1532
7       5.0127      0.1532      5.0072      0.0874
8       5.0072      0.0874      5.0042      0.0500
9       5.0042      0.0500      5.0024      0.0287
10      5.0024      0.0287      5.0014      0.0165
```

```
11     5.0014     0.0165     5.0008     0.0095
12     5.0008     0.0095     5.0005     0.0055
----------------------------------------------------
Final approximation: x* = 5.00046
=====================================================
FINAL RESULTS
=====================================================
Root found: x* = 5.00045554
Verification: f(x*) = 0.00546810
Iterations: 12
```

Отже, отримані результати демонструють, що реалізований алгоритм модифікованого методу Ньютона коректно знайшов розв’язок рівняння з заданою точністю ε

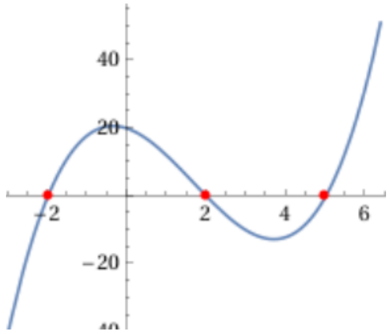
Метод простої ітерації

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$

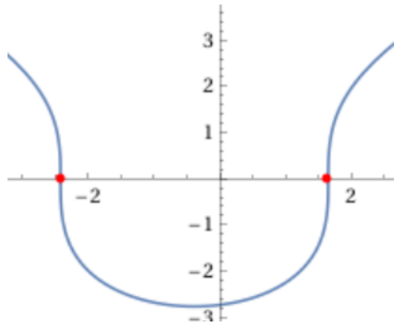
$\varphi(x) = \sqrt[3]{5x^2 + 4x - 20}$

$\varphi'(x) = \frac{10x+4}{3\sqrt[3]{(5x^2+4x-20)^2}}$

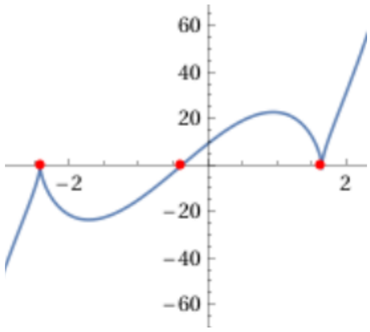
$f(x)$:



$\varphi(x)$:



$\varphi'(x)$:



Функція для методу простої ітерації:

```
def method_of_simple_iteration(f, phi, dphi, a, b, eps)->
tuple[bool, float, float, int]:
```

Рівняння має 3 дійсних корені. Обираємо інтервал що містить корінь: [1;6]. Якщо на вибраному інтервалі існує кілька розв'язків, програма автоматично звужує інтервал і вибирає той відрізок, який містить єдиний корінь для подальшої роботи алгоритму.

```
SIMPLE ITERATION METHOD
============================================================
Equation: f(x) = x**3 - 5*x**2 - 4*x + 20
epsilon = 0.001
============================================================

Finding interval containing root
----------------------------------------
Root found in interval [3.50, 6.00]
Working interval: [3.50, 6.00]
```

Як бачимо, функція скоротила інтервал до [3.5;6]

Обираємо функцію $\varphi(x)$

Знаходимо $x_0 = \frac{a+b}{2} = 4.75$

Знаходимо δ: `delta = max(|x0-a|, |b-x0|) = 1.250`

Перевіримо достатні умови збіжності:

- $\max_{x \in S} |\phi'(x)| \leq q < 1$
- $|\phi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta$

```
Checking convergence conditions

First condition satisfied: q = max|phi'(x)| = 0.896 < 1

Second condition: |phi(x0)) - x0| <= (1-q)*delta
 |4.82 - 4.75| ≤ (1-0.896)·1.250
   0.068 ≤ 0.130

Second condition satisfied!
```

Достатні умови виконуються, отже виконуємо ітераційний процес:

```
 Iteration process
---------------------------------------------
Iter   x_n          x_n+1         f(x_n+1)
---------------------------------------------
1     4.7500       4.8176       -3.5039
2     4.8176       4.8674       -2.6111
3     4.8674       4.9039       -1.9273
4     4.9039       4.9304       -1.4128
5     4.9304       4.9497       -1.0305
6     4.9497       4.9637       -0.7489
7     4.9637       4.9738       -0.5429
8     4.9738       4.9811       -0.3928
9     4.9811       4.9864       -0.2838
10    4.9864       4.9902       -0.2048
11    4.9902       4.9929       -0.1477
12    4.9929       4.9949       -0.1065
13    4.9949       4.9963       -0.0768
14    4.9963       4.9974       -0.0553
15    4.9974       4.9981       -0.0398
---------------------------------------------
Final approximation: x* = 4.99810
==================================================
FINAL RESULTS
==================================================
Root found: x* = 4.99810108
Prior estimate: 60.0
Posteriori estimate: 15
```

Отримані результати показують, що реалізований алгоритм методу простої ітерації забезпечив збіжність до розв’язку з заданою точністю ε

Реалізований код: [GitHub]