Сем 3 Модуль 2 ТДС Тесленко Я.

Варіант I

№ 1

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x \\ y_1(t) = px(t) + \dot{x}(t) \\ y_2(t) = -x(t) + \dot{x}(t) \end{cases}$$

Зробимо заміну:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \to \begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = a^2 x_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = px_1 + x_2 \\ y_2(t) = -x_1 + x_2 \end{cases} \quad y = B^T(t) \cdot x(t) \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ p & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}_2 = [B, A^T B] = \left[\begin{matrix} p & -1 & a^2 & a^2 \\ 1 & 1 & p & -1 \end{matrix}\right] \quad \operatorname{rang}(\tilde{S}_2) = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

При $\begin{cases} p \neq -1 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ спостерігувана

N° 2

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad A \qquad c^t(4, a, 3)$$

$$A^T c = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22+4a \\ -11+3a \\ -4-a \end{pmatrix} \qquad A^{T^2} c = \begin{pmatrix} 118+42a \\ -73+2a \\ -93-23a \end{pmatrix}$$

$$y(t) = 4x_1 + a x_2 + 3x_3$$

$$\tilde{S}_3 = \left(c, A^T c, A^{T^2} c\right)$$

$$\tilde{S}_3 = \begin{vmatrix} 4 & 22+4a & 118+42a \\ a & -11+3a & -73+2a \\ 3 & -4-a & -93-23a \end{vmatrix} = 50a^3 - 30a^2 + 790a + 2000 =$$

$$= 10(5a^3 - 3a^2 + 79a + 200)$$

Система спостережувана при $\tilde{S}_3 \neq 0$:

Тобто для спостереж при $a \notin \{-1,95;\ 1,27 \pm 4,37i\}$

Візьмемо $a = 0$, при якому сист. спостережув.

$$\tilde{S}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 22 & 118 \\ 0 & -11 & -73 \\ 3 & -4 & -93 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\tilde{S}_3^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} =$$

$y =$ Похідна в силу системи:

$$\underbrace{y = 4x_1 + 3x_3}$$

$$y' = 4x_1' + x_3' = 4(7x_1 - 2x_2 - 4x_3) + 3(-2x_1 - x_2 + 4x_3) = \underbrace{22x_1 - 11x_2 - 4x_3}$$

$$y'' = 22x_1' - 11x_2' - 4x_3' = 22(7x_1 - 2x_2 - 4x_3) - 11x_2(4x_1 + 3x_2 - x_3) - 4(-2x_1 - x_2 + 4x_3) =$$

$$= \underbrace{118x_1 - 73x_2 - 93x_3}$$

$$\left(\tilde{S}_3^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{731}{2000} & \frac{-219}{2000} & \frac{33}{2000} \\ \frac{787}{1000} & -\frac{363}{1000} & \frac{41}{1000} \\ -\frac{77}{500} & \frac{73}{500} & -\frac{11}{500} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

№ 3

$$y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$$

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = a \quad a_2 = 4 \quad a_3 = b \quad a_4 = 1$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a > 0$

$\Delta_2 = 4a - b > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 4 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 4ab - a^2 - b^2 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4ab - a^2 - b^2 > 0$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} a > 0 \\ 4a - b > 0 \\ -a^2 + 4ab - b^2 > 0 \end{cases}$$

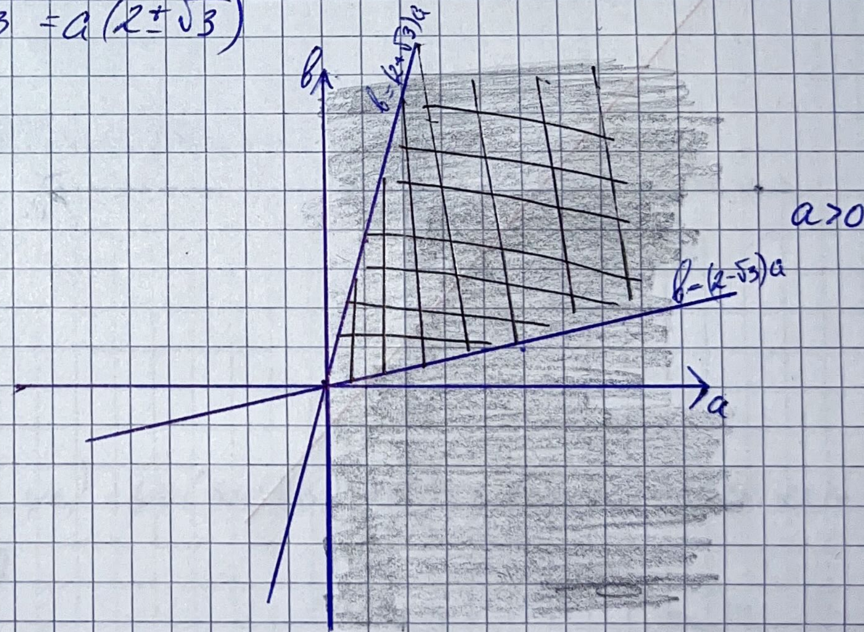
$b^2 - 4ab + a^2 = 0$

$D = 16a^2 - 4a^2 = 12a^2$

$b_{1,2} = \dfrac{4a \pm \sqrt{12a^2}}{2} = 2a \pm a\sqrt{3} = a(2 \pm \sqrt{3})$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} a > 0 \\ a(2-\sqrt{3}) < b < a(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$



№4

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{y} - e^{x} \\ \dot{y} = \sqrt{3x+y^2} - 2 \end{cases}$$

Прирівнюємо до 0: $\begin{cases} e^{y} - e^{x} = 0 \\ \sqrt{3x+y^2} - 2 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Маємо 2 точки рівноваги: $(-4;-4)$ $(1;1)$

$$f(x,y)\Big|_{x_0,y_0} = f(x_0,y_0) + f'_x\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + f'_y\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + o(x_0,y_0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^{x}\Big|_{(-4;-4)}(x+4) + e^{y}\Big|_{(-4;-4)}(y+4) + o(x,y) \\ \dot{y} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(-4;-4)}(x+4) + \dfrac{y}{\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(-4;-4)}(y+4) + o(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^{-4}(x+4) + e^{-4}(y+4) \\ \dot{y} = \frac{3}{4}(x+4) - 2(y+4) \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \dot{x} = -xe^{-4} + ye^{-4} \\ \dot{y} = \frac{3}{4}x - 2y \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -e^{-4}-\lambda & e^{-4} \\ 3/4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda(2+e^{-4}) + 2e - \frac{3}{4}e^{-4} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 \approx -2 \\ \lambda_2 \approx -0{,}01 \end{array}$$

$(\lambda_1 \neq \lambda_2) < 0$ – стійкий вузол

$M_2(1;1)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^x\Big|_{(1;1)}(x-1) + e^y\Big|_{(1;1)}(y-1) + o(x;y) \\ \dot{y} = \frac{3}{2\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(1;1)}(x-1) + \frac{y}{\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(1;1)}(y-1) + o(x;y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e(x-1) + e(y-1) \\ \dot{y} = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \end{cases} \Bigg| \begin{cases} \dot{x} = -xe + ey \\ \dot{y} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -e-\lambda & e \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - e\right) - \frac{e}{2} - \frac{3e}{4} = 0$$

$\lambda_1 = -3{,}26 \quad \lambda_2 = 1{,}04$

$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0; \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ т. сложного сёдло.

№ 5

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=5x_1-2x_2+3u_1\\ \dot{y}=2x_1+2x_2+u_2\end{cases}\qquad u=C^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=(A+BC)x$$

$$BC=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{pmatrix}\qquad A+BC=\begin{pmatrix}5+3C_1 & -2\\ 2 & 2+C_2\end{pmatrix}$$

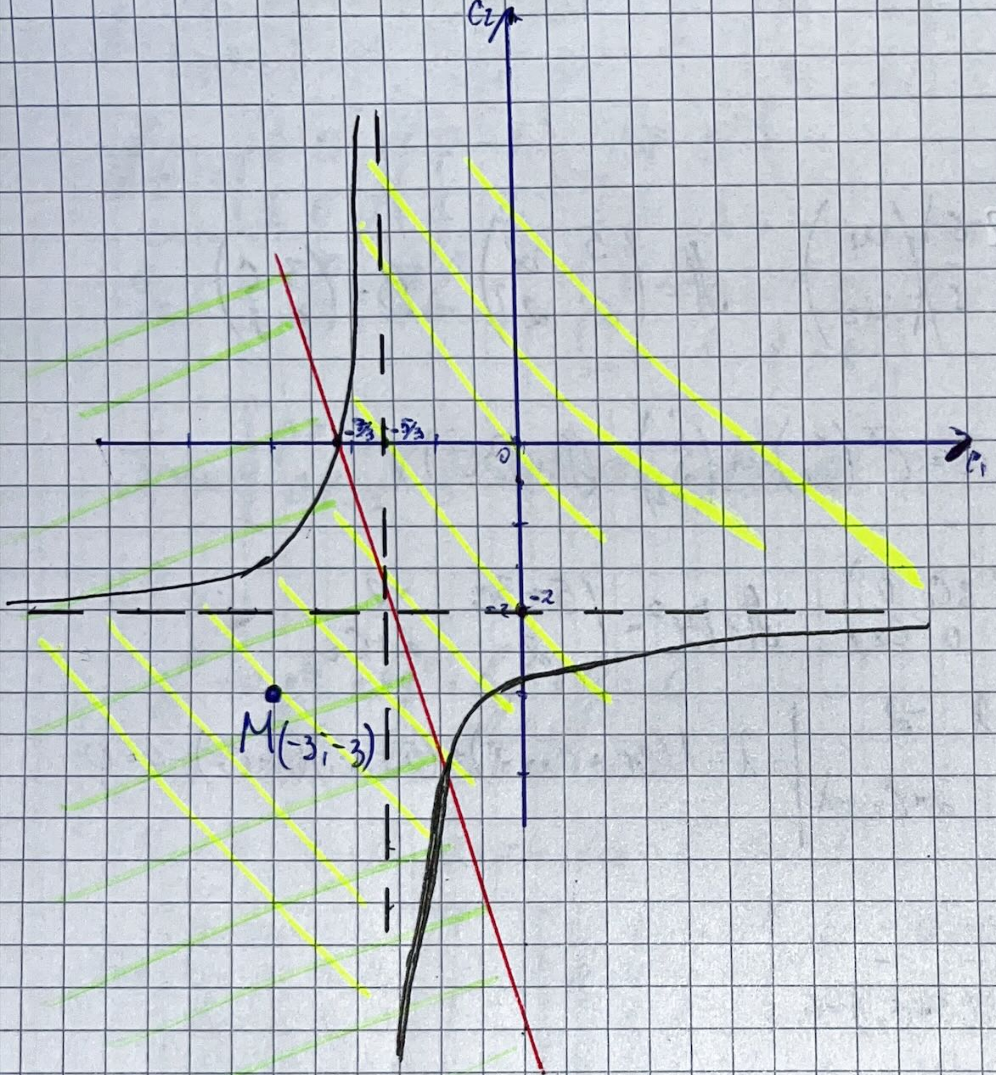
$$\det(A+BC-\lambda E)=\begin{vmatrix}5+3C_1-\lambda & -2\\ 2 & 2+C_2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda(3C_1+C_2+7)+(5+3C_1)(2+C_2)-4=0$$

$$H_2=\begin{vmatrix}-3C_1-C_2-7 & 1\\ 0 & (5+3C_1)(2+C_2)-4\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}a_1=-3C_1-C_2-7>0\\ a_2=(5+3C_1)(2+C_2)-4>0\end{cases}$$

$$C_2=-3C_1-7\qquad \begin{cases}C_1\neq-5/3\\ C_2\neq-2\end{cases}$$

$$C_2=\frac{-6C_1-14}{3C_1+5}$$



$M(-3; -3)$

$A+BC = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A+BC-\lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+5\lambda+8=0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

Точка рівноваги: ($\lambda_{1,2} = \alpha \mp \beta i$, $\alpha<0$, $\beta\neq 0$) $\Rightarrow$ асимпт. стійкий фокус

№ 6

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1 \\ \dot{x}_2 = 3\cos(-4x_2) + 4u_2 \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 (\sin^2(x_1) + u_2^4)\,dt + \cos^4(2x_2(1)) \to \min_u$$

$\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_0 - const$

Функція Гамільтона:

$$H(x_1, x_2, u_1, u_2, t, \psi_1, \psi_2, \psi_0) = \psi_0(\sin^2(x_1) + u_2^4) + \psi_1(\sin(x_2) - \cos x_1 - u_1) +$$
$$+ \psi_2(3\cos(-4x_2) + 4u_2)$$

Покладемо $\psi_0 = -1$

$-\frac{\partial H}{\partial x_i}$ $i = \overline{1,n}$
$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2\sin(x_1)\cos(x_1) - \sin(x_1)\psi_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\cos(x_2)\psi_1 + 12\sin(4x_2) \end{cases}$$

$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$
$$\begin{cases} H'_{u_1} = -\psi_1(t) = 0 & \to u_1(t) \text{ - довільна} \\ H'_{u_2} = -4u_2^3(t) + 4\psi_2(t) = 0 & \Rightarrow u_2(t) = \sqrt[3]{\psi_2(t)} \end{cases}$$

Підставимо керув. $u_1(t), u_2(t)$ в систему. Оскільки $u_1(t)$ - довільне керув., покладемо $u_1(t) = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sin(x_2) - \cos(x_1) \\ \dot{x}_2(t) = 3\cos(-4x_2) + 4\sqrt[3]{\psi_2(t)} \\ \dot{\psi}_1 = 2\sin(x_1)\cos(x_1) - \sin(x_1)\psi_1 \\ \psi_2 = -\cos(x_2)\psi_1 + 12\sin(4x_2) \\ \text{Лівий кінець:} \\ \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \\ \text{Правий кінець: } \psi(t_N) - \psi_0 \frac{\partial \Phi(x(t_N))}{\partial x_i} = 0 \\ \psi_1(1) = 0 \\ \psi_2(1) - 8\cos^3(2x_2(1)) \cdot \sin(2x_2(1)) = 0 \end{cases}$$

Умови трансверсальності