ТАМЛ, Модуль 1
Тесленко Назар
ІПС-21

1. Нехай A і B відрізняються скінченною кількістю елементів. Якщо A – РМ, то B – РМ. Довести.

Маємо таку теорему, що для РМ об'єднання, перетин і доповнення скінченної кількості рекурсивних множин є рекурсивною множиною. Отже будь-яка множина, яка утворюється шляхом обчислювальних операацій над A, також буде РМ.

Оскільки A є РМ ⇒ $A \cap B \subseteq A$, отже $A \cap B$ також є РМ.

За умовою, множини A та B відрізняються лие скінченною кількістю елементів:

- Множина B\A є скінченною
- Множина A\B є скінченною

Тоді множину B можна представити як: $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$

Об'єднання $A \cap B$ та B\A є операціями, що зберігають рекурсивність згідно з теоремою, а отже **B також є РМ**

Характеристична функція множини B, $\chi B(x)$:

Якщо $x \in (A \cap B)$, то $\chi B(x)=\chi A(x)$

Якщо $x \in (B \backslash A)$, то $\chi B(x)=1$

Якщо $x \notin B$, то $\chi B(x)=0$

Всі перевірки є обчислвальними, а отже $\chi B(x)$ хаарктеристина функція РМ.

2. Функція f – ЧРФ, але не РФ. Область визначення функції $\mathbf{g(x) = m_y(f(y) = x)}$ є ПРМ. Довести.

Функція g(x) визначена для таких x, для яких існує y, що f(y)=x. Тобто якщо x належить до області значень таких функції f,то g(x) визначена.

Якщо f приймає лише скінченну множину значень, тоді область визначення функції g, яка збігається з областю значень f, також є скінченою множиною.

Кожна скінченна множина натуральних чисел є ПРМ, що можна показати через побудову її характеристичної функції:

$$\chi(x)=\mathbf{sg}(|x-a_0||x-a_1||x-a_2|\ldots|x-a_n|),$$

де $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ – скінч. множ. натур. чисел є ПРФ

Отже область D_g, що збігається з E_f, яка може бути ПР, є ПРМ

3. Функція не є РФ. Довести.

$$w(x) = \begin{cases} 0, & U(x,x) > 1 \\ 1, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Припустимо , що w(x)- РФ, тоді для неї існує універсальна РФ U(y,x), яка може обчислювати будь-яку РФ за номером y і аргументом x.

Нехай x=y. Тоді: w(y)={0, U(y,y)>1 ; 1, в інших випадках ⇒ w(y)=U(y,y)

Випадки:

Якщо w(y)=0, то за визначенням w(x)=U(y,y)>1

Якщо w(y)=1, то U(y,y)≤ 1 або U(y,y)

Отримаємо суперечність:

Якщо w(y)=0, то U(y,y)>1, але за визначенням w(y)=U(y,y), тобто w(y)=0, що суперечить умові, що U(y,y)>1.

Якщо w(y)=1, то U(y,y)≤ 1, але за визначенням w(y)=U(y,y), це означає, що U(y,y)≤1, що суперечить умові, що w(y)=0 для U(y,y)>1

Через отриману суперечність- припущення, що w(x) є РФ, є хибним. **Отже, функція w(x) не є РФ**

4. Побудувати ПРФ, яка за номерами Кліні функцій f(x) і g(x) обчислює номер Кліні функції f(g(x)).

Нехай n_f - номер f(x), n_g- номер g(x). Ці номери відображають відповідні функції через універсальну функцію Кліні T(x,n), де n-номер функціїб x-її аргумент. Для побудови номера f(g(x)) необхідно виконати кодування пари (n_f, n_g), що можна зробити через ПРФ пари Кантора:

c(a,b)=$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$

Отже обчислватимо номер за формулою $n_{f(g(x))}= c(n_f,n_g)$

Алгоритм кодування пари чисел n_f та n_g за формулою Кантора є ПР, а отже й побудована функція буде також ПР.

5. Множина ЧРФ – злічення. Довести.

Відображення, яке кожній ЧРФ f(x) ставить у відповідність номер n, є ін'єктивним якщо $f(x)\neq g(x)$, то машини T(n,x) і T(m,x) мають різні номери n і m ($n\neq m$).
Крім того, множина M номерів нескінченна, бо
$f_1(x)=x=T(n_1,x)$;
$f_2(x)=x+1=T(n_2,x)$;
……….
Отже з цього маємо бієцкії: $N \leftrightarrow M \leftrightarrow$ ЧРФ