# ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4.(Теорія)

## Випадкові вектори неперервного типу.

*1 Щільність та параметри випадкового вектора. 2. Незалежність координат вектора. 3. Випадковий вбір в n-вимірноиу просторі та на площині. 4. Параметри вектора неперервного типу.*

### 1. Щільність та параметри випадкового вектора.

Припустимо, що на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ визначено випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Нехай

$$F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$$

функція розподілу випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

**Визначення.** Будемо говорити, що випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ має неперервний розподіл з щільністю $f_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо для кожного вектора $(x_1, x_1, \dots, x_n) \subset R_n$ мають місце наступні рівності:

$$F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, .. u_n) du_n .. du_1 .$$

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 .. \partial x_n} .$$

Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – випадковий вектор, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$.

**Визначення.** Математичним сподіванням $(E(\xi) = m_\xi)$ випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ називається вектор:

$$m_\xi = E(\xi) = (m(1), m(2), ..., m(n)),$$

координатами якого є математичними сподіваннями $m(i) = E(\xi_i)$ відповідних координат $(\xi_i, i = 1, 2, ..., n)$ вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Параметри *другого порядку* для випадкової величини $\xi$ – це звичайний момент $m_2 = E(\xi^2)$ та її дисперсія $D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$ (або центральний момент $\mu_2$).

Для випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ параметри другого порядку утворюють *коваріаційну матрицю* $D^2(\xi) = [V_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{bmatrix}.$$

На головній діагоналі матриці $D^2(\xi)$ розташовані дисперсії відповідних координат $(\xi_i, i = 1, 2, ..., n)$ вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$:

$$V_{ii} = E((\xi_i - m(i))^2) = D(\xi_i) = \sigma^2_i, \; i = 1, 2, \dots, n.$$

$$V_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i - m(i)) \cdot (\xi_j - m(j)),$$
$$i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n, i \neq j;$$

Тобто $V_{ij}$, $i \neq j$, – це коваріації між окремими координатами вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

- Матриця

$$D^2(\xi) = [V_{ij}] = \begin{bmatrix} D(\xi_1) & Cov(\xi_1,\xi_2) & \cdots & Cov(\xi_1,\xi_n) \\ Cov(\xi_2,\xi_1) & D(\xi_2) & \cdots & Cov(\xi_2,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Cov(\xi_n,\xi_1) & Cov(\xi_n,\xi_2) & \cdots & D(\xi_n) \end{bmatrix}$$

## 2. Незалежність координат вектора.

Нехай

$$F_{(\xi,,\eta)}(x, y) = P\{\xi < x, \ \eta < y\}$$

функція розподілу випадкового вектора $(\xi, \ \eta)$. Було доведено наступний *критерій перевірки незалежності випадкових величин*:

➢ Випадкові величини $\xi$ та $\eta$ будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для довільних дійсних чисел $x$ та $y$ виконується рівність:

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = F_{(\xi,\eta)}(x, \infty) \cdot F_{(\xi,\eta)}(\infty, y), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

**Визначення.** Будемо говорити, що випадковий вектор $(\xi, \ \eta)$ має неперервний розподіл з щільністю $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$, якщо для кожної пари дійсних чисел $(x, y)$ має місце наступна рівність:

$$F_{(\xi,,\eta)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(\xi,\eta)}(u,v)dvdu.$$

Використовуючи визначення неперервної двовимірної випадкової величини легко переконатися в справедливості наступних тверджень:

**Лема 1.** Нехай випадковий вектор $(\xi, \ \eta)$ має неперервний розподіл з щільністю $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$. Тоді:

- Координати $\xi$ та $\eta$ цього вектора будуть *неперервними випадковими величинам*, щільності $f_\xi(x)$ та $f_\eta(y)$ яких відповідно дорівнюють:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy;$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dx.$$

- Координати $\xi$ та $\eta$ вектора $(\xi, \ \eta)$ будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $-\infty < x < +\infty$ та $-\infty < y < +\infty$:

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y).$$

представляє параметри, що визначають стохастичну структуру вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, вказуючи на *силу* та *напрямок* залежності між випадковими величинами $\xi_i$ та $\xi_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

**3. Випадковий вбір в *n*-вимірноиу просторі та на площині.**

В лекції 6(А) була приведена фізична інтерпретація випадкової величини $\rho$, яка має рівномірний розподіл *на проміжку* $[a, b]$:

- Величину $\rho$ можна вважати *математичною моделлю* процедури «*випадкового вибору*» (або «*вибору навмання*») точки на проміжку $[a; b]$.

Можемо поширити запропоновану інтерпретацію *випадкового вибору точки на відрізку* на *будь-яку підмножину* $D \subset R_n$ $n$-вимірного простору, ввівши з цією метою поняття *випадкового вектора з рівномірним розподілом* у підмножині $D \subset R_n$.

На «*інтуїтивному*» рівні «*випадковий вибір*», чи «*вибір навмання*» елементу множини $D$ означає, що всі точки $(x_1, x_1, \ldots, x_n) \in D$ є «*однаково ймовірними*», чи «*так само ймовірними*».

**Визначення.** Випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ має *рівномірний розподілом* у підмножині $D \subset R_n$, якщо його щільність $f_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приймає постійне значення ($c$) в області $D$ і дорівнює нулю поза областю $D$, тобто:

$$f_\xi(x_1, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} c, \text{ якщо } (x_1, x_1, \ldots, x_n) \in D \\ 0, \text{ якщо } (x_1, x_1, \ldots, x_n) \notin D \end{cases}.$$

На прикладі двовимірного вектора $(\xi, \eta)$ розглянемо детальніше деякі властивості неперервних розподілів.

1. «***Вибір навмання***» точки на площині.

Якщо випадковий вектор $(\xi, \eta)$ має *рівномірний розподіл* в області $D \subset R_2$, то це означає, що всі точки $(x, y) \in D$ – «*так само ймовірні*». Іншими словами:

**Визначення.** Будемо говорити, що двовимірна випадкова величина $(\xi, \eta)$ має *рівномірний розподіл* в області $D \subset R_2$, якщо її щільність $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ має постійне значення в області $D$ і дорівнює нулю поза областю $D$, тобто:

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} c, \text{ якщо } (x, y) \in D \\ 0, \text{ якщо } (x, y) \notin D \end{cases}.$$

**Приклад 1..** Щільність $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ вектора $(\xi, \eta)$, що має рівномірний розподіл в квадраті $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ визначається рівністю:

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1) \in D \\ 0, \text{ в іншому випадку} \end{cases}.$$

Координати вектора $(\xi, \eta)$ будуть *незалежними* випадковими величинами.

**Доведення.** Використовуючи визначення двовимірної випадкової величини ($\xi$, $\eta$), яка має *рівномірний розподіл* в області $D \subset R_2$, та наступну властивість щільності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dydx = 1,$$

отримаємо:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dydx = c\cdot\int_0^1\int_0^1 dydx = c.$$

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} 1,\ \text{якщо}\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1)\in D \\ 0,\ \text{в іншому випадку} \end{cases}.$$

Використовуючи лему 1 отримаємо:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy = \int_0^1 dy = \begin{cases} 1,\ \text{якщо}\ \ 0\le x\le 1 \\ 0,\ \text{інакше} \end{cases}.$$

Аналогічно:

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dx = \int_0^1 dx = \begin{cases} 1,\ \text{якщо}\ \ 0\le y\le 1 \\ 0,\ \text{інакше} \end{cases}.$$

Тому для будь-яких $-\infty < x < +\infty$ та $-\infty < y < +\infty$ виконується рівність:

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y),$$

що й доводить *незалежність* координат вектора ($\xi$, $\eta$).

**Приклад 2.** Нехай випадковий вектор ($\xi$, $\eta$) має рівномірний розподіл в трикутнику і $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$. Тоді щільність $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ вектора ($\xi$, $\eta$) визначається рівністю:

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} 2,\ \ \text{якщо}\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x \\ 0,\ \text{для інших}\ (x,y) \end{cases}.$$

Координати вектора ($\xi$, $\eta$) будуть *залежними* випадковими величинами.

**Доведення.** Подібно, як при доведенні леми 5, отримаємо:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = c\cdot\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy = c\cdot\int_0^1 (1-x)dx = -c\cdot\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_0^1 =$$

$$= -c\cdot\frac{(1-1)^2-(1-0)^2}{2} = \frac{c}{2}.$$

Тобто:

$$c = 2.$$

Обчислимо щільності $f_\xi(x)$ та $f_\eta(y)$ координат $\xi$ та $\eta$ цього вектора:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy = 2\cdot\int_0^{1-x} dy = \begin{cases} 2\cdot(1-x),\ якщо\ 0\le x\le 1 \\ 0,\ для\ інших\ (x,y) \end{cases}.$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dx = 2\cdot\int_0^{1-y} dx = \begin{cases} 2\cdot(1-y),\ якщо\ 0\le y\le 1 \\ 0,\ для\ інших\ (x,y) \end{cases}.$$

Очевидно, що:

$$2 \neq [2\cdot(1-x)]\cdot[2\cdot(1-y)]$$

для будь-яких $(x, y)$, таких, що $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$. Наприклад:

$$x = 0{,}5,\ y = 0{,}25,\ [2\cdot(1-x)]\cdot[2\cdot(1-y)] = 2\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot 0{,}75 = 1{,}5 \neq 2.$$

Це й доводить те, що координати вектора $(\xi, \eta)$ будуть *залежними* випадковими величинами.

### 4. Параметри вектора неперервного типу.

**Приклад 2.** Нехай випадковий вектор $(\xi, \eta)$ має рівномірний розподіл в трикутнику $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$.

1. Математичне сподівання $(m_\xi; m_\eta) = (E(\xi); E(\eta))$ випадкового вектора $(\xi, \eta)$

$$(m_\xi; m_\eta) = (1/3; 1/3).$$

2. Коваріаційну матрицю випадкового вектора $(\xi, \eta)$ дорівнює:

$$D^2(\xi) = \begin{bmatrix} 1/18 & -1/36 \\ -1/36 & 1/18 \end{bmatrix}.$$

3. Коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$ між $\xi$ та $\eta$ дорівнює:

$$\rho(\xi, \eta) = -0{,}5.$$

**Доведення.**

1. Як випливає з попередніх розрахунків, окремі координати $\xi$ та $\eta$ цього вектора є випадковими величинами неперервного типу з однаковою щільністю:

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = f(x) = \begin{cases} 2\cdot(1-x),\ якщо\ 0\le x\le 1 \\ 0,\ для\ інших\ (x,y) \end{cases}.$$

Використовуючи визначення математичного сподівання отримаємо:

$$m_\xi = m_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = 2\int_0^1 x\cdot(1-x)dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Для обчислення дисперсії випадкових величин $\xi$ та $\eta$ використаємо отриману раніше формулу:

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = m_2 - (m)^2.$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx = 2\int_0^1 x^2\cdot(1-x)dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = m_2 - (m)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} = 0{,}0556.$$

Для обчислення коваріації $Cov(\xi,\ \eta)$ між випадковими величинами $\xi$ та $\eta$ використаємо отриману раніше формулу:

$$Cov(\xi,\ \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Використовуючи щільність $f_{(\xi,\eta)}(x,\ y)$ вектора $(\xi,\ \eta)$, а також визначення математичного сподівання отримаємо:

$$E[(\xi \cdot \ \eta)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{(\xi,\eta)}(x,y)dydx = 2 \cdot \int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} ydy\right)dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^2}{2}dx = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Таким чином:

$$Cov(\xi,\ \eta) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}.$$

3. Використовуючи визначення коефіцієнта кореляції $\rho(\xi,\ \eta)$ між $\xi$ та $\eta$, а також результати попередніх обчислень, отримаємо:

$$\rho(\xi,\ \eta) = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi) \cdot D(\eta)}} = -\frac{18}{36} = -\frac{1}{2}.$$