Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1

з курсу

«Управління динамічними системами»

на тему:

«Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь

за допомогою комп’ютерних пакетів програм»

Виконав:

студент групи ІПС-21

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Тесленко Назар Олександрович

Київ – 2024

Зміст

Завдання №1 згідно з варіантом №2

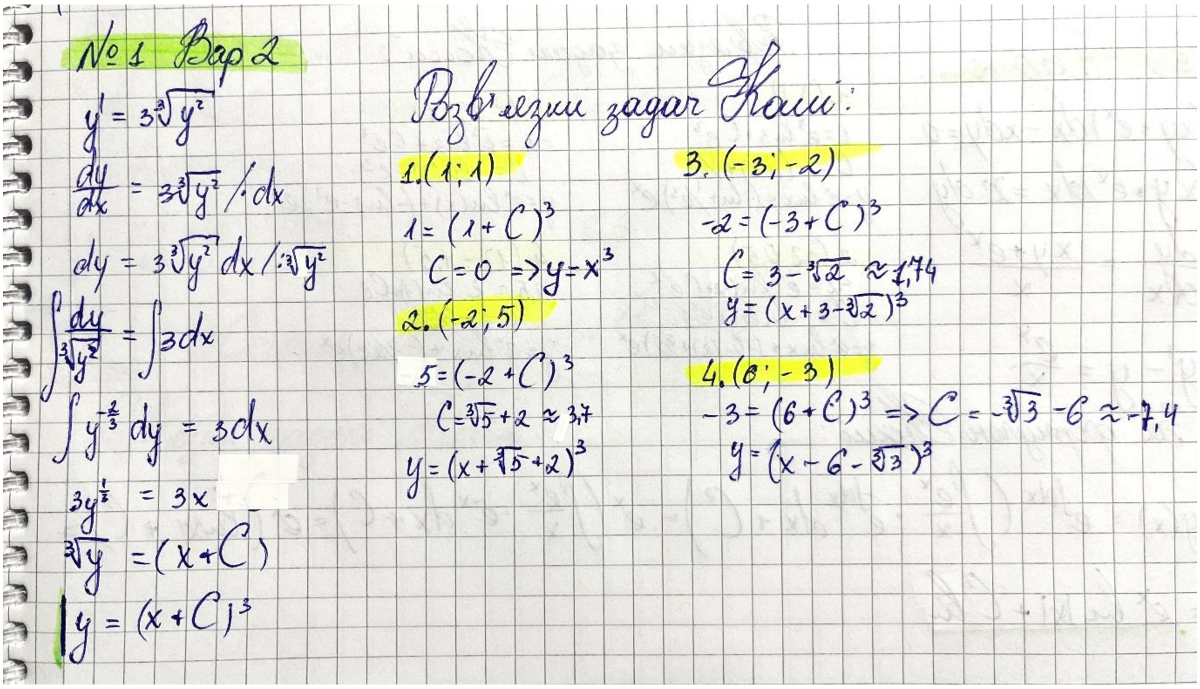
Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$y' = 3 * \sqrt[3]{y^2}$$

Обрані точки:

$M_1[1,1]$ $M_2[-2,5]$ $M_3[-3,-2]$ $M_4[6,-3]$

Розв'язок аналітично:



№1 Вар 2

$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2} \;/\cdot dx$

$dy = 3\sqrt[3]{y^2}\,dx \;/:\sqrt[3]{y^2}$

$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} = \int 3dx$

$\int y^{-\frac{2}{3}}\,dy = 3dx$

$3y^{\frac{1}{3}} = 3x$

$\sqrt[3]{y} = (x+C)$

$y = (x+C)^3$

Розв'язки задач Коші:

1.(1; 1)

$1 = (1+C)^3$

$C = 0 \Rightarrow y = x^3$

2.(-2; 5)

$5 = (-2+C)^3$

$C = \sqrt[3]{5}+2 \approx 3{,}7$

$y = (x+\sqrt[3]{5}+2)^3$

3.(-3; -2)

$-2 = (-3+C)^3$

$C = 3-\sqrt[3]{2} \approx 1{,}74$

$y = (x+3-\sqrt[3]{2})^3$

4.(6; -3)

$-3 = (6+C)^3 \Rightarrow C = -\sqrt[3]{3}-6 \approx -7{,}4$

$y = (x-6-\sqrt[3]{3})^3$

Код програми Sage:

```
#Initialization of func and diff equation
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==3*(y^2)^(1/3)
```

```
#General solution
solution=desolve(de,y)
show("Загальний розв'язок")
solution=solution.simplify_full()
solution=solution.canonicalize_radical()
solution.show()

#Couchy problem solution
points=[[1,1],[-2,5],[-3,-2],[6,-3]]
couchy_solutions=[]
show("Розв'язки задачі Коші з умовами:")
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i]=couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i]=couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    show("Розв'язок", i+1)
    couchy_solutions[i].show()

#Plot for Couchy problem
x,y=var('x y')
f(x,y)=3*(y^2)^(1/3)

r=10
plot=plot_slope_field(f,(x,-r,r+2),(y,-r,r+2), headlength=3,headaxislength=3, axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
points_for_graph=[[1,1],[-2,5],[-3,-2],[6,-3]]
points_printsable=["(1,1)","(-2,5)","(-3,-2)","(6,-3)"]
for i in range(4):
  plot += desolve_rk4(f,y,ics=points_for_graph[i],ivar=x,
    output='plot',end_points=[-r,r], thickness=2,rgbcolor=hue(0.25*i),
    legend_label=points_printsable[i])
show(plot,xmin=-r,xmax=r+2,ymin=-r,ymax=r+2)
```

Загальний розв'язок

$$y(x)^{\frac{1}{3}} = C + x$$

Розв'язки задачі Коші з умовами:

Розв'язок1

$$y(x)^{\frac{1}{3}} = x$$

Розв'язок2

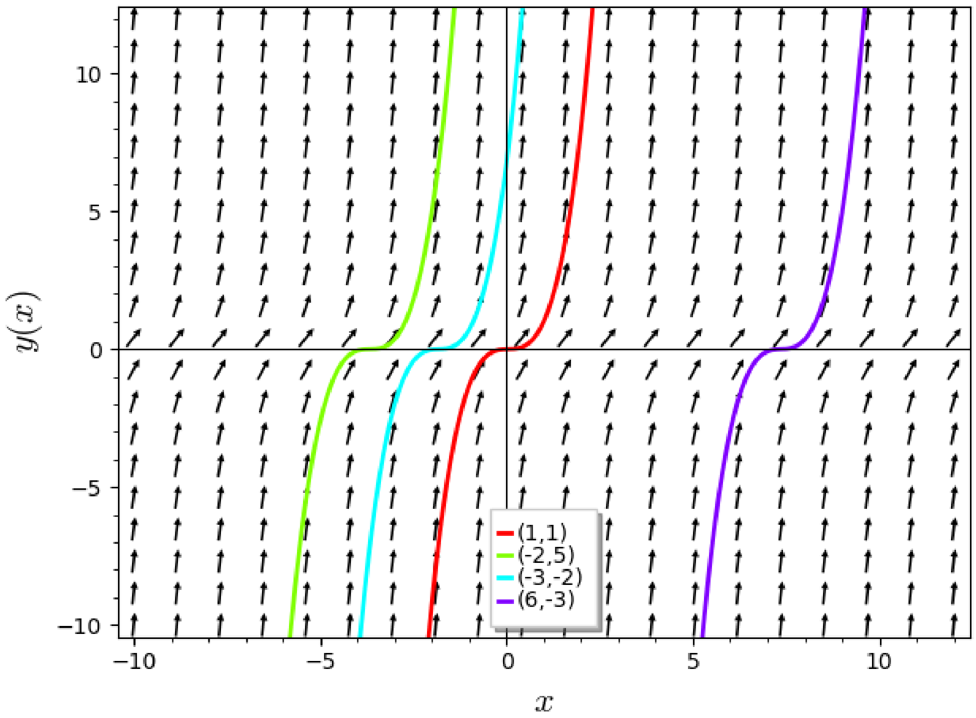
$$y(x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \left(5^{\frac{2}{3}} x + 2 \cdot 5^{\frac{2}{3}} + 5\right)$$

Розв'язок3

$$y(x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{2}{3}} x + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 2\right)$$

Розв'язок4

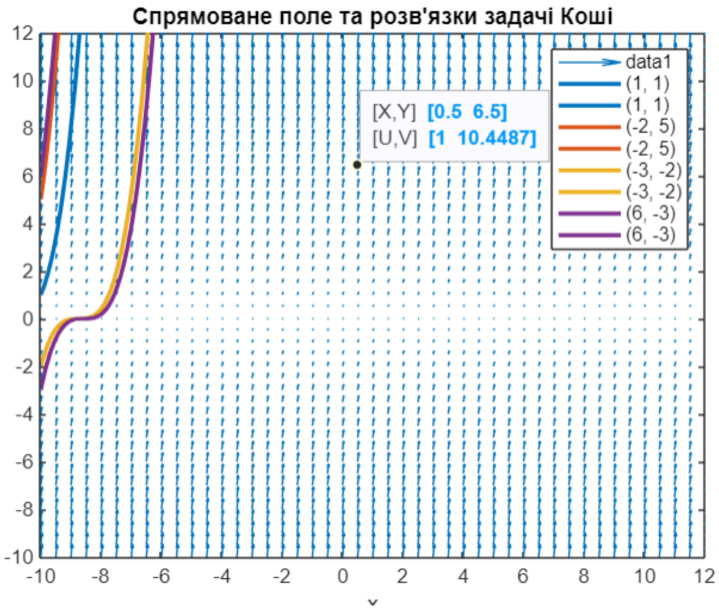
$$y(x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \left(3^{\frac{2}{3}} x - 6 \cdot 3^{\frac{2}{3}} - 3\right)$$



Код програми Matlab:

```
syms y(x)
% Define the differential equation
de = diff(y, x) == 3*(y^2)^(1/3);
% General solution
solution = dsolve(de);
disp('Загальний розв''язок:')
solution = simplify(solution);
disp(solution);
% Cauchy problem solutions
points = [1, 1; -2, 5; -3, -2; 6, -3];
disp('Розв''язки задачі Коші з умовами:')
cauchy_solutions = cell(1, 4);
```

```
for i = 1:4
    cauchy_solutions{i} = dsolve(de, y(points(i,1)) == points(i,2));
    cauchy_solutions{i} = simplify(cauchy_solutions{i});
    fprintf('Розв''язок %d:\n', i);
    disp(cauchy_solutions{i});
end
% Plot for Cauchy problem
f = @(x, y) 3 * (y.^2).^(1/3);
r = 10;
[x_vals, y_vals] = meshgrid(-r:0.5:r+2, -r:0.5:r+2);
dx = ones(size(x_vals));
dy = f(x_vals, y_vals);
figure
quiver(x_vals, y_vals, dx, dy, 'AutoScale', 'on');
hold on
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Спрямоване поле та розв''язки задачі Коші');
points_for_graph = [1, 1; -2, 5; -3, -2; 6, -3];
colors = lines(4);
for i = 1:4
    [X, Y] = ode45(@(x, y) f(x, y), [-r, r], points_for_graph(i, :));
    plot(X, Y, 'LineWidth', 2, 'Color', colors(i, :), 'DisplayName', sprintf('(%d, %d)',
points_for_graph(i, :)));
end
legend show
xlim([-r, r+2]);
ylim([-r, r+2]);
hold off
```

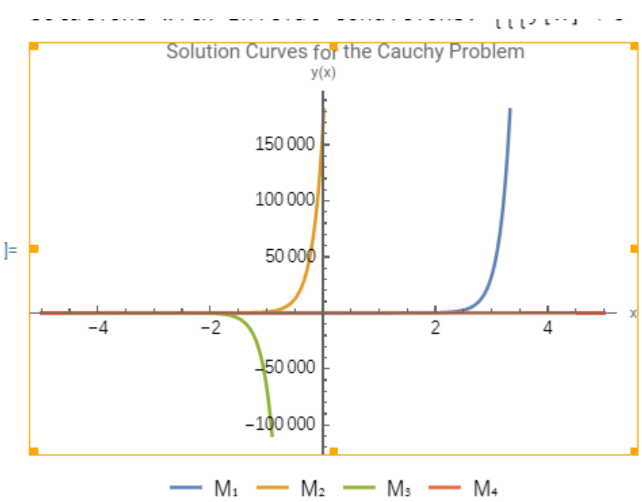


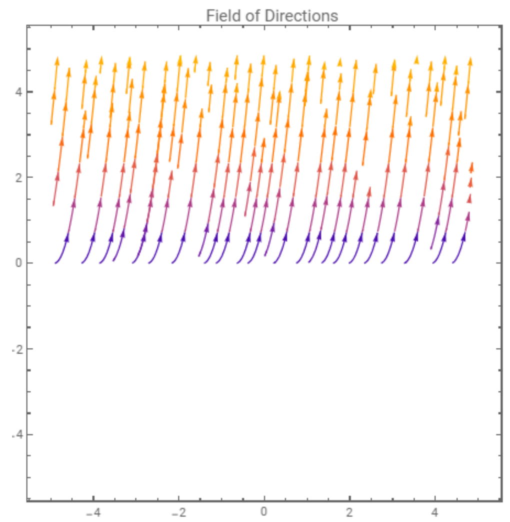
Код для Mathematica:

```
(* Clear variables *)
Clear[y, x];

(* Define the differential equation *)
ode = y'[x] == 3 Sqrt[3 y[x]^2];

(* Solve the general solution *)
sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

(* Define the initial conditions for the Cauchy problem *)
initialConditions = {
  {y[1] == 1},    (* M₁(1, 1) *)
  {y[-2] == 5},   (* M₂(-2, 5) *)
  {y[-3] == -2},  (* M₃(-3, -2) *)
  {y[6] == -3}    (* M₄(6, -3) *)
};

(* Solve the Cauchy problems *)
solutions = Table[
  DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x],
  {i, 1, Length[initialConditions]}
];
Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];

(* Plot the solutions for the Cauchy problems on one plot *)
solutionCurves = Plot[
  Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]],
  {x, -5, 5},
  PlotStyle -> Thick,
  PlotLegends -> Placed[{"M₁", "M₂", "M₃", "M₄"}, Below],
  PlotLabel -> "Solution Curves for the Cauchy Problem",
  AxesLabel -> {"x", "y(x)"}
];

(* Show the solution curves *)
solutionCurves

(* Generate the direction field *)
directionField = StreamPlot[
  {1, 3 Sqrt[3 y]},
```

```
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  StreamStyle -> Arrowheads[Small],
  PlotLabel -> "Field of Directions"
];

(* Show the direction field *)
directionField
```

General Solution: $\{\{y[x] \to e^{3\sqrt{3}\,x+c_1}\}\}$





Завдання №2 згідно з варіантом №2

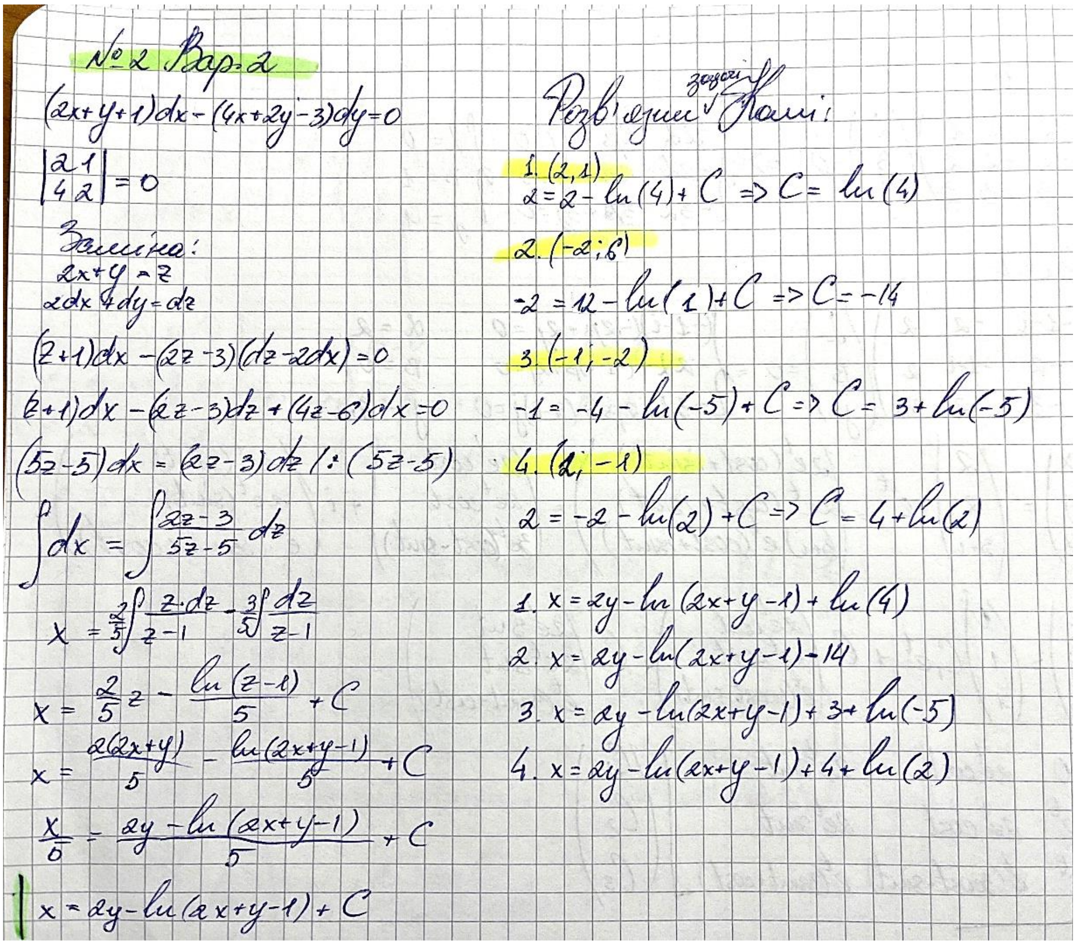
Побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$$

Обрані точки:

M_1 [2,1] M_2[-2,6] M_3[-1,-2] M_4[2,-1]

Розв’язок аналітично:



№2 Вар-2

$(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$

Заміна:

$2x+y=z$

$2dx+dy=dz$

$(z+1)dx-(2z-3)(dz-2dx)=0$

$(z+1)dx-(2z-3)dz+(4z-6)dx=0$

$(5z-5)dx=(2z-3)dz \quad |:(5z-5)$

$\int dx=\int\frac{2z-3}{5z-5}dz$

$x=\frac{2}{5}\int\frac{z\,dz}{z-1}-\frac{3}{5}\int\frac{dz}{z-1}$

$x=\frac{2}{5}z-\frac{\ln(z-1)}{5}+C$

$x=\frac{2(2x+y)}{5}-\frac{\ln(2x+y-1)}{5}+C$

$\frac{x}{5}=\frac{2y-\ln(2x+y-1)}{5}+C$

$x=2y-\ln(2x+y-1)+C$

Розв'язки задачі Коші:

1. $(2,1)$

$2=2-\ln(4)+C \Rightarrow C=\ln(4)$

2. $(-2;6)$

$-2=12-\ln(1)+C \Rightarrow C=-14$

3. $(-1;-2)$

$-1=-4-\ln(-5)+C \Rightarrow C=3+\ln(-5)$

4. $(2;-1)$

$2=-2-\ln(2)+C \Rightarrow C=4+\ln(2)$

1. $x=2y-\ln(2x+y-1)+\ln(4)$
2. $x=2y-\ln(2x+y-1)-14$
3. $x=2y-\ln(2x+y-1)+3+\ln(-5)$
4. $x=2y-\ln(2x+y-1)+4+\ln(2)$

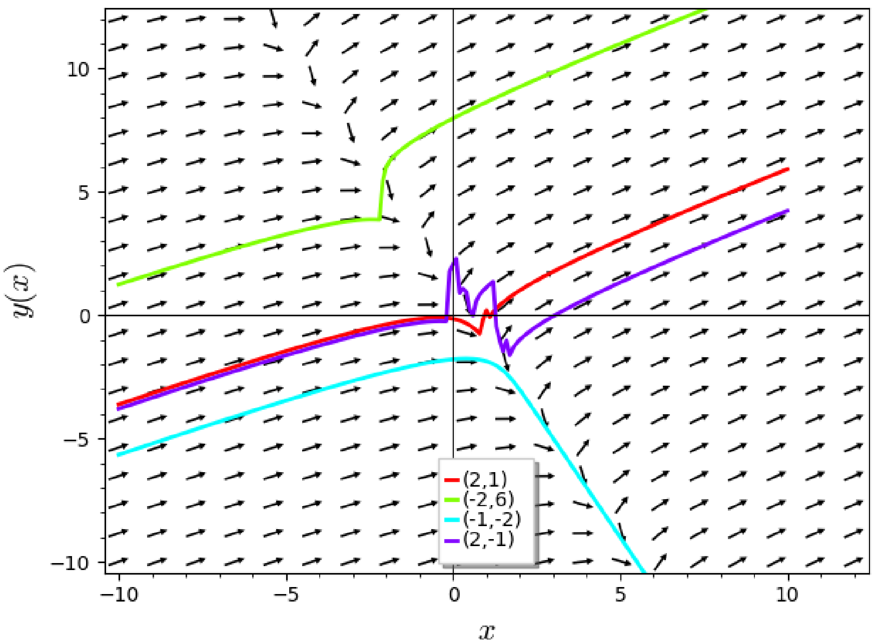
Код програми Sage:

```
# Визначаємо змінні та функцію
x = var('x')
y = function('y')(x)

# Задаємо диференціальне рівняння
de = diff(y, x) == (2*x + y + 1)/(4*x + 2*y - 3)

# Спроба знайти загальний аналітичний розв'язок з параметром contrib_ode=True
solution = desolve(de, y, contrib_ode=True)
show("Загальний розв'язок")
if isinstance(solution, list):
    for sol in solution:
        sol = sol.simplify_full()
        sol = sol.canonicalize_radical()
        sol.show()
else:
    solution = solution.simplify_full()
```

```
    solution = solution.canonicalize_radical()
    solution.show()

# Для задачі Коші використовуємо чисельний метод Рунге-Кутта
# Точки для задачі Коші
points = [[2, 1], [-2, 6], [-1, -2], [2, -1]]

# Будуємо графіки чисельних розв'язків
x, y = var('x y')
f(x, y) = (2*x + y + 1)/(4*x + 2*y - 3)
r = 10
plot = plot_slope_field(f, (x, -r, r+2), (y, -r, r+2), headlength=3, headaxislength=3,
axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
points_printable = ["(2,1)", "(-2,6)", "(-1,-2)", "(2,-1)"]
for i in range(4):
    # Використовуємо метод Рунге-Кутта для чисельного розв'язку
    sol_plot = desolve_rk4(f, y, ics=points[i], ivar=x,
                     output='plot', end_points=[-r, r], thickness=2, rgbcolor=hue(0.25*i),
                     legend_label=points_printable[i])
    plot += sol_plot
# Показуємо побудований графік з чисельними розв'язками задачі Коші
show(plot, xmin=-r, xmax=r+2, ymin=-r, ymax=r+2)
```

Загальний розв'язок

$$\frac{1}{5}\,x + \frac{1}{5}\log\left(2\,x + y\left(x\right) - 1\right) - \frac{2}{5}\,y\left(x\right) = C$$

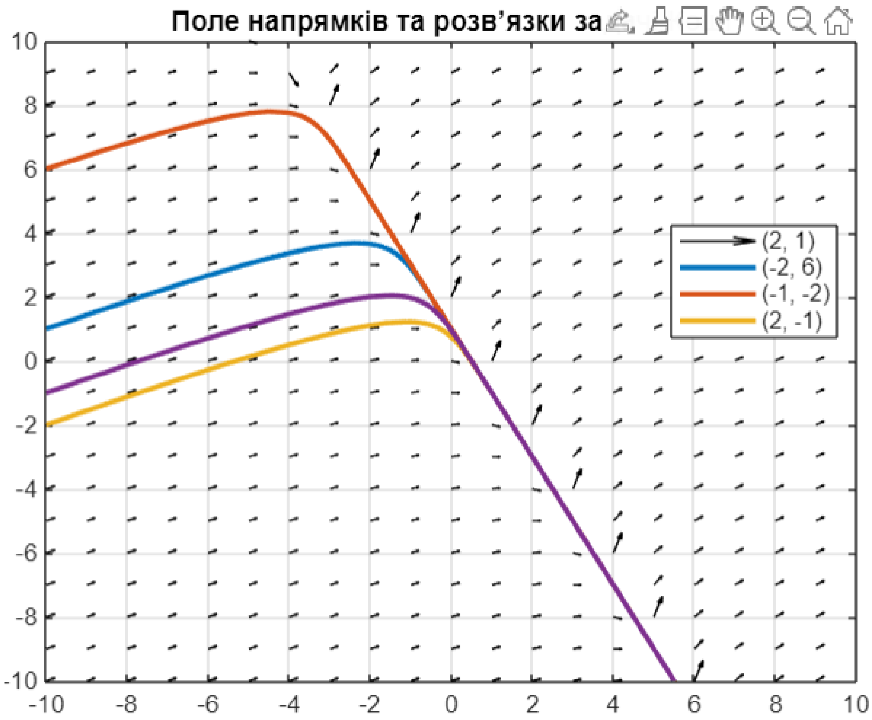


Для певних точок початкові умови не можуть бути застосовані разом з аналітичним розв'язком через обмеження в Maxima. Однак, для чисельних методів (як-от Рунге-Кутта) ці початкові умови працюють.

Код для MATLAB:

```
syms x y(x)

% Задаємо диференціальне рівняння
de = diff(y, x) == (2*x + y + 1)/(4*x + 2*y - 3);

% Знаходимо аналітичний розв'язок (якщо потрібно)
sol = dsolve(de);
disp('Загальний аналітичний розв’язок:');
disp(sol);

% Чисельний розв'язок для задачі Коші з використанням ode45

% Визначення функції правої частини
f = @(x, y) (2*x + y + 1)./(4*x + 2*y - 3);

% Початкові умови задачі Коші
points = [2, 1; -2, 6; -1, -2; 2, -1];  % точки для задачі Коші
r = 10;  % межі для графіку

% Поле напрямків
[xGrid, yGrid] = meshgrid(-r:1:r, -r:1:r);  % сітка для поля напрямків
slopeX = ones(size(xGrid));  % компоненти X для векторів поля
slopeY = f(xGrid, yGrid);    % компоненти Y для векторів поля

figure;
quiver(xGrid, yGrid, slopeX, slopeY, 'k', 'AutoScaleFactor', 0.5);  % чорне поле напрямків
hold on;

% Задаємо кольори для кожного розв'язку
colors = lines(size(points, 1));  % автоматична генерація різних кольорів

% Розв'язування задачі Коші методом Рунге-Кутта (ode45)
tspan = [-r, r];  % інтервал для чисельного інтегрування

for i = 1:size(points, 1)
   % Використовуємо ode45 для чисельного розв'язку
   [x_vals, y_vals] = ode45(@(x, y) f(x, y), tspan, points(i, 2));  % розв'язок із початковими умовами
   plot(x_vals, y_vals, 'LineWidth', 2, 'Color', colors(i, :));  % побудова графіку з кольором
```

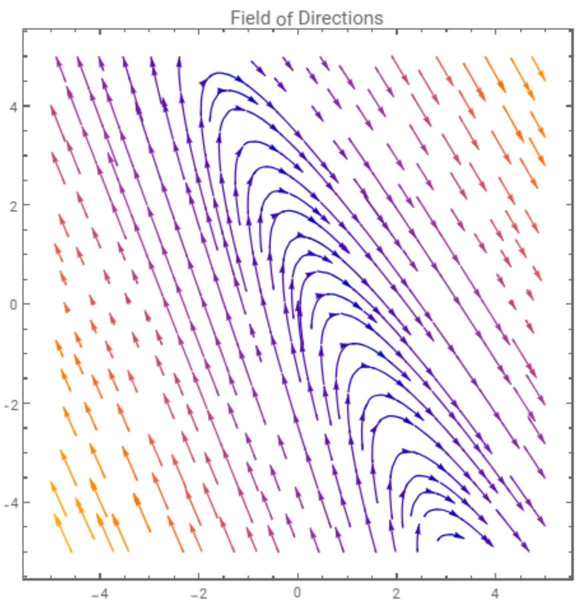
```
end

% Оформлення графіку
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Поле напрямків та розв’язки задачі Коші');
legend('(2, 1)', '(-2, 6)', '(-1, -2)', '(2, -1)', 'Location', 'Best');
grid on;
xlim([-r r]);
ylim([-r r]);
hold off;
```



Код для Mathematica:

```
(* Clear variables *)
Clear[y, x];
(* Define the differential equation *)
ode = (4 x + 2 y[x] - 3) y'[x] == (2 x + y[x] + 1);
(* Solve the general solution *)
sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];
(* Define the initial conditions for the Cauchy problem *)
initialConditions = {
  {y[2] == 1},    (* M1(2, 1) *)
  {y[-2] == 6},   (* M2(-2, 6) *)
  {y[-1] == -2},  (* M3(-1, -2) *)
  {y[2] == -1}    (* M4(2, -1) *)
};
```

```
(* Solve the Cauchy problems *)
solutions = Table[
  DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x],
  {i, 1, Length[initialConditions]}
];
Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];
(* Plot the solutions for the Cauchy problems on one plot *)
solutionCurves = Plot[
  Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]],
  {x, -5, 5},
  PlotStyle -> Thick,
  PlotLegends -> Placed[{"M₁", "M₂", "M₃", "M₄"}, Below],
  PlotLabel -> "Solution Curves for the Cauchy Problem",
  AxesLabel -> {"x", "y(x)"}
];
(* Show the solution curves *)
solutionCurves

(* Generate the direction field *)
directionField = StreamPlot[
  {2 x + y, -(4 x + 2 y - 3)},
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  StreamStyle -> Arrowheads[Small],
  PlotLabel -> "Field of Directions"
];

(* Show the direction field *)
directionField
```



Завдання №3 згідно з варіантом №2

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$(xy + e\hat{\ }x)dx - xdy = 0$$

Обрані точки:

$M_1[3,1]$ $M_2\,[-2{,}0{,}5]$ $M_3\,[-3,-1]$ $M_4\,[1,-1{,}5]$

Розв'язок аналітично:

№3 Вар. 2

$(xy+e^x)dx - xdy = 0$

$(xy+e^x)dx = x\,dy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+e^x}{x}$

$y' - y = \frac{e^x}{x}$

За формулою Коші:

$y(x) = e^{\int dx}\left(\int \frac{e^x}{x} \cdot e^{-\int dx} dx + C\right) = e^x\left(\int \frac{e^x}{x} \cdot e^{-x} dx + C\right) = e^x(\ln|x| + C) =$

$y = e^x \ln|x| + Ce^x$

Розв'язки задачі Коші:

1. $(3,1)$

$1 = e^3 \ln 3 + Ce^3$

$C = -\ln(3) + 1/e^3$

$y = e^x \ln x + (-\ln + 1/e^3)e^x$

2. $(-2, 0{,}5)$

$0{,}5 = e^{-2}\ln(2) + Ce^{-2}$

$C = -\ln(2) + e^2/2$

$y = e^x \ln x + (-\ln(2) + e^2/2)e^x$

3. $(-3; -1)$

$-1 = e^{-3}\ln 3 + Ce^{-3}$

$C = -\ln(3) - e^3$

$y = e^x \ln(x) + (-\ln 3 - e^3)e^x$

4. $(1; -1{,}5)$

$-1{,}5 = e \ln(1) + Ce$

$C = -3/2e$

$y = e^x \ln x + (-3/2e)e^x$

Код програми Sage:

```
# Визначаємо змінні та функцію
x = var('x')
y = function('y')(x)

# Задаємо диференціальне рівняння
de = diff(y, x) == (x*y + exp(x))/x

# Знаходження загального розв'язку
solution = desolve(de, y)
show("Загальний розв'язок")
solution = solution.simplify_full()
```

```
solution = solution.canonicalize_radical()
solution.show()

# Точки для задачі Коші
points = [[3, 1], [-2, 0.5], [-3, -1], [1, -1.5]]
couchy_solutions = []
show("Розв'язки задачі Коші з умовами:")
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de, y, ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    show("Розв'язок", i + 1)
    couchy_solutions[i].show()

# Побудова поля напрямків
x, y = var('x y')
f(x, y) = (x*y + exp(x))/x

r = 10
plot = plot_slope_field(f, (x, -r, r + 2), (y, -r, r + 2), headlength=3, headaxislength=3,
axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
points_for_graph = [[3, 1], [-2, 0.5], [-3, -1], [1, -1.5]]
points_printable = ["(3,1)", "(-2,0.5)", "(-3,-1)", "(1,-1.5)"]
for i in range(4):
    plot += desolve_rk4(f, y, ics=points_for_graph[i], ivar=x,
                        output='plot', end_points=[-r, r], thickness=2, rgbcolor=hue(0.25 * i),
                        legend_label=points_printable[i])
show(plot, xmin=-r, xmax=r + 2, ymin=-r, ymax=r + 2)
```

Загальний розв'язок

$$Ce^{x} + e^{x}\log\left(x\right)$$

Розв'язки задачі Коші з умовами:

Розв'язок1

$$-\left(\left(e^{3}\log\left(3\right) - 1\right)e^{x} - e^{(x+3)}\log\left(x\right)\right)e^{(-3)}$$

Розв'язок2

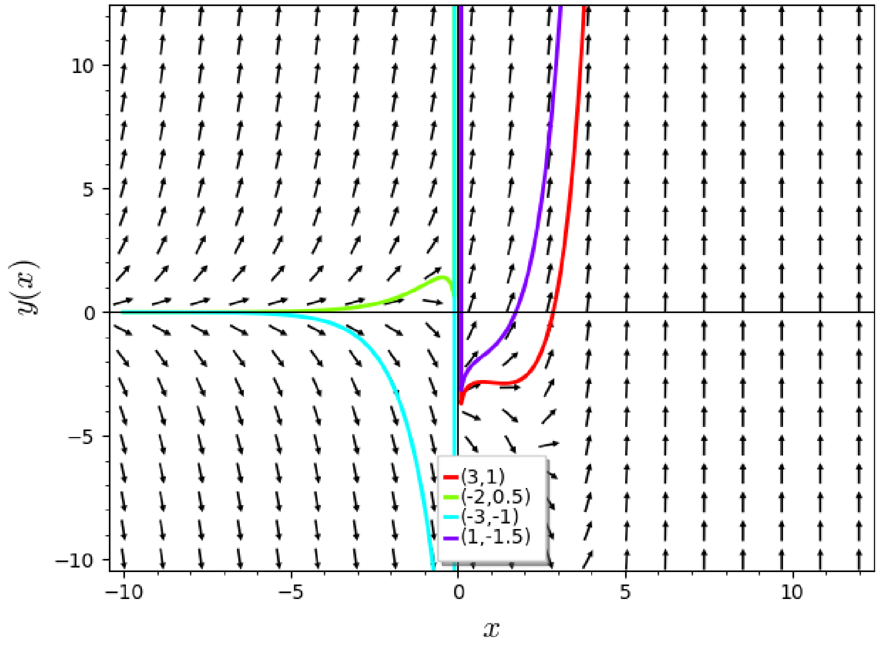
$$\frac{1}{2}\left(-2i\pi + e^{2} - 2\log\left(2\right)\right)e^{x} + e^{x}\log\left(x\right)$$

Розв'язок3

$$\left(-i\pi - e^{3} - \log\left(3\right)\right)e^{x} + e^{x}\log\left(x\right)$$

Розв'язок4

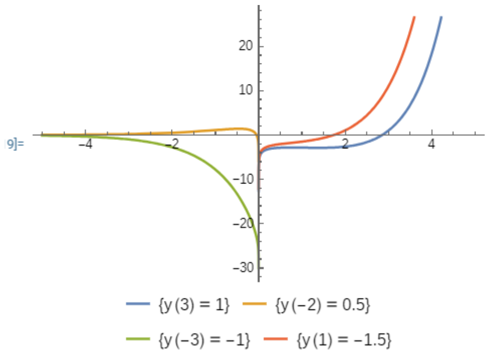
$$\frac{1}{2}\left(2e^{(x+1)}\log\left(x\right) - 3e^{x}\right)e^{(-1)}$$

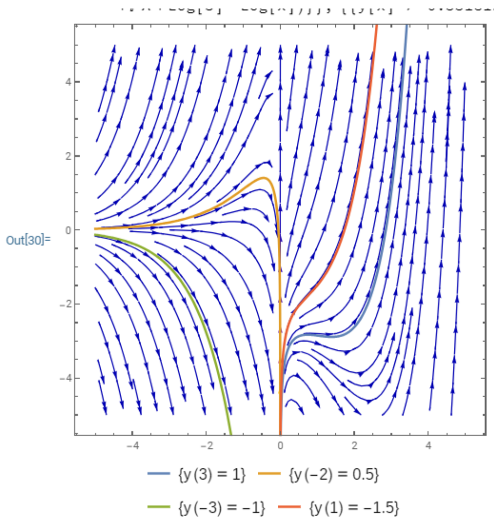


Код для Mathematica:

```
(* Clear variables *)
Clear[y, x];

(* Define the differential equation *)
ode = (x y[x] + Exp[x]) - x y'[x] == 0;

(* Solve the general solution *)
sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

(* Define the initial conditions for the Cauchy problem *)
initialConditions = {{y[3] == 1}, {y[-2] == 0.5}, {y[-3] == -1}, {y[1] == -1.5}};

(* Solve the Cauchy problems *)
solutions = Table[DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x], {i, 1, Length[initialConditions]}];
Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];

(* Plot the direction field *)
directionField = StreamPlot[{1, (x y + Exp[x]) / x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, StreamStyle ->
Arrowheads[Small]];

(* Plot the solutions for the Cauchy problem *)
solutionCurves = Plot[Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]],
  {x, -5, 5}, PlotStyle -> Thick,
  PlotLegends -> Placed[Table[initialConditions[[i]], {i, 1, Length[initialConditions]}], Below]];

(* Combine the direction field and the solution curves *)
Show[directionField, solutionCurves]
```

```
General Solution: {{y[x] → e^x c1 + e^x Log[x]}}
Solutions with Initial Conditions: {{{y[x] → -e^(-3+x) (-1 + e^3 Log[3] - e^3 Log[x])}}, {{y[x] → (3.00138 - 3.14159 i) e^x + e^x Log[x]}}, {{y[x] → -e^x (e^3
    + i π + Log[3] - Log[x])}}, {{y[x] → -0.551819 e^x + e^x Log[x]}}}
```





Завдання №4 згідно з варіантом №2

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$\boldsymbol{y'' - 2y' + 5y = 2x(e\hat{}x) + (e\hat{}x)sin2x}$$

Обрані точки:

$M_1(2, 3)$ $M_2(-2, 1.5)$ $M_3(-1.5, -2.5)$ $M_4(3, -1)$

Розв’язок аналітично:

№4 Вар 2

$$y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$y_{зо} = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

1. Частинний розвязок: $e^x \sin(2x)$

$$y_{чн} = xe^x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

$$y'_{чн} = ((B - 2A)x + B)e^x \sin(2x) + ((2B + A)x + A)e^x \cos(2x)$$

$$y''_{чн} = ((-3B - 4A)x + 2B - 4A)e^x \sin(2x) + ((4B - 3A)x + 4B + 2A)e^x \cdot \cos(2x)$$

Підставивши все і обрахувавши маємо:

$$4B\cos(2x) - 4A\sin 2x = \sin(2x)$$

$$\begin{cases} \cos: 4B = 0 \\ \sin: -4A = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} B = 0 \\ A = -1/4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad чн = -\frac{xe^x \cos 2x}{4}$$

2. Частинний розвязок: $2xe^x$

$$y_{чн} = e^x(Ax + B)$$

$$y'_{чн} = (Ax + B + A)e^x$$

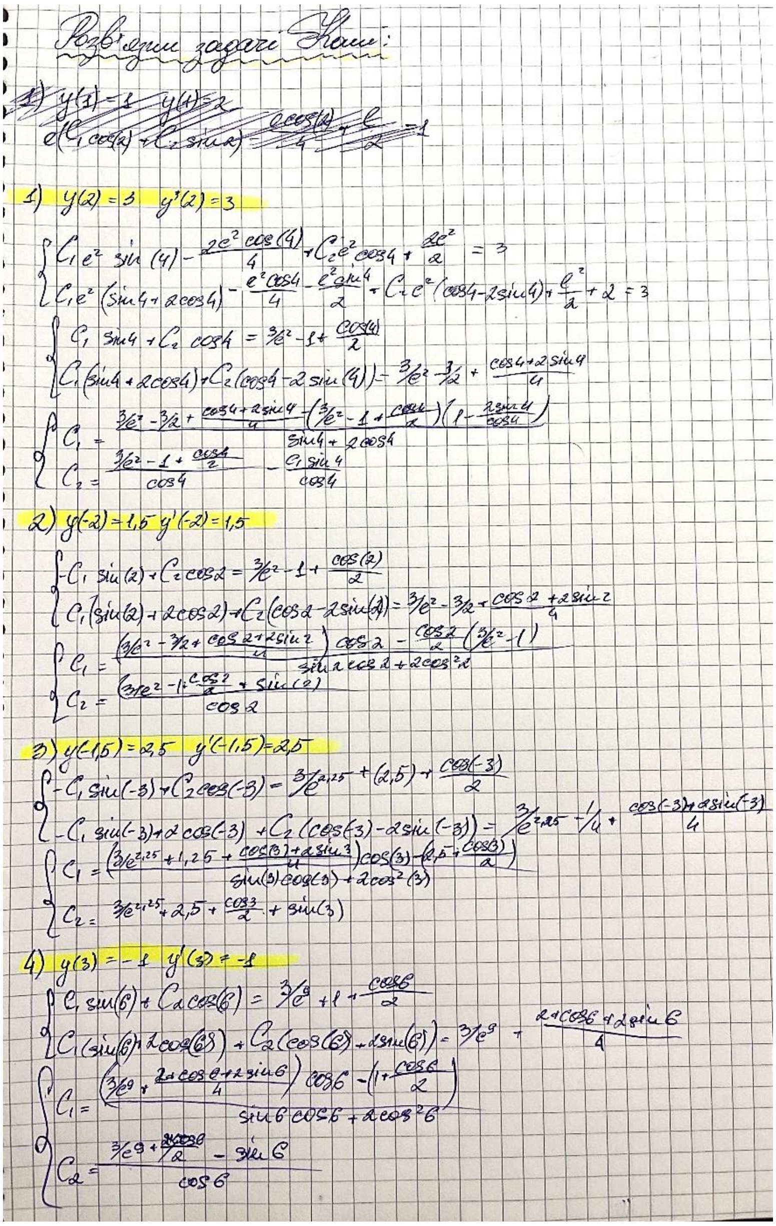
$$y''_{чн} = (Ax + B + 2A)e^x$$

Підставивши і обрахувавши маємо:

$$4Axe^x + 4Be^x = 2xe^x \quad /e^x$$

$$\begin{cases} x^1: 4A = 2 \\ x^0: 4B = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = 1/2 \\ B = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad чн = \frac{e^x \cdot x}{2}$$

$$y_{зно} = e^x C_1 \cos 2x + e^x C_2 \sin(2x) - \frac{xe^x \cos(2x)}{4} + \frac{e^x \cdot x}{2}$$



Код програми Sage:

```
# General solution
y = function('y')(x)
de = diff(diff(y, x), x) - 2 * diff(y, x) + 5*y - 2*x*e^x - e^x*sin(2*x)
solution = desolve(de, y)
solution.show()

# Cauchy problem solutions
# I квадрант: x0=2, y0=3
solution1 = desolve(de, y, ics=[2, 3, -1])
solution1.show()

# II квадрант: x0=-2, y0=1.5
solution2 = desolve(de, y, ics=[-2, 1.5, 0])
solution2.show()
```

```
# III квадрант: x0=-1.5, y0=-2.5
solution3 = desolve(de, y, ics=[-1.5, -2.5, -2])
solution3.show()

# IV квадрант: x0=3, y0=-1
solution4 = desolve(de, y, ics=[3, -1, 1])
solution4.show()

# Direction fields
x, y = var('x y')
f(x, y) = diff(diff(y, x), x) - 2 * diff(y, x) + 5*y - 2*x*e^x - e^x*sin(2*x)
p = plot_slope_field(f, (x, -20, 20), (y, -20, 20), headaxislength=5, headlength=5,
axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])

# Plot of Cauchy problem solutions
p += desolve_rk4(f, y, ics=[2, 3, -1], ivar=x, output='plot', end_points=[-20, 20], thickness=2,
rgbcolor=hue(1))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[-2, 1.5, 0], ivar=x, output='plot', end_points=[-20, 20], thickness=2,
rgbcolor=hue(0.2))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[-1.5, -2.5, -2], ivar=x, output='plot', end_points=[-20, 20],
thickness=2, rgbcolor=hue(0.5))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[3, -1, 1], ivar=x, output='plot', end_points=[-20, 20], thickness=2,
rgbcolor=hue(0.3))
show(p, xmin=-20, xmax=20, ymin=-20, ymax=20)
```

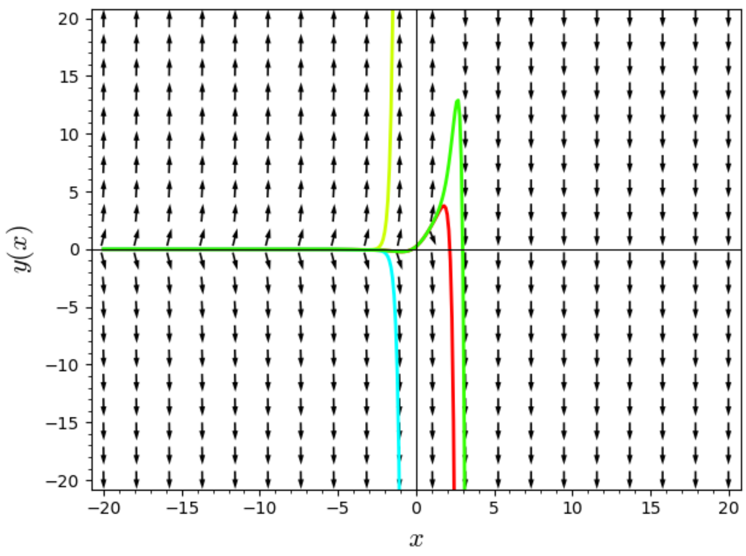
$$-\frac{1}{4}\,x\cos(2\,x)e^{x} + (K_2\cos(2\,x) + K_1\sin(2\,x))e^{x} + \frac{1}{2}\,xe^{x}$$

$$-\frac{1}{4}\,x\cos(2\,x)e^{x} + \frac{1}{2}\,xe^{x} + \frac{1}{8}\left(\frac{\left(4\cos(4)^2e^2 + 4\,e^2\sin(4)^2 - 8\left(e^2-3\right)\cos(4) - \left(\cos(4)e^2 - 2\,e^2 - 16\right)\sin(4)\right)\cos(2\,x)}{\cos(4)^2e^2 + e^2\sin(4)^2} + \frac{\left(\cos(4)^2e^2 - 2\left(e^2+8\right)\cos(4) - 8\left(e^2-3\right)\sin(4)\right)\sin(2\,x)}{\cos(4)^2e^2 + e^2\sin(4)^2}\right)e^{x}$$

$$-\frac{1}{4}\,x\cos(2\,x)e^{x} + \frac{1}{2}\,xe^{x} + \frac{1}{8}\left(\frac{\left(4\left(3\,e^2+2\right)\cos(4) - 4\cos(4)^2 + \left(\cos(4) - 6\,e^2 - 2\right)\sin(4) - 4\sin(4)^2\right)\cos(2\,x)}{\cos(4)^2 + \sin(4)^2} - \frac{\left(2\left(3\,e^2+1\right)\cos(4) - \cos(4)^2 + 4\left(3\,e^2+2\right)\sin(4)\right)\sin(2\,x)}{\cos(4)^2 + \sin(4)^2}\right)e^{x}$$

$$-\frac{1}{4}\,x\cos(2\,x)e^{x} + \frac{1}{2}\,xe^{x} + \frac{1694300683892600}{20756247866741112253315720034063743668423931082424 27}\,(12348599657018841703102755950230620422\,\cos(2\,x) + 9017676661917213013916778122540266 25\,\sin(2\,x))e^{x}$$

$$-\frac{1}{4}\,x\cos(2\,x)e^{x} + \frac{1}{2}\,xe^{x} + \frac{1}{8}\left(\frac{\left(6\cos(6)^2e^3 + 6\,e^3\sin(6)^2 - 4\left(3\,e^3+2\right)\cos(6) - \left(\cos(6)e^3 - 2\,e^3 + 8\right)\sin(6)\right)\cos(2\,x)}{\cos(6)^2e^3 + e^3\sin(6)^2} + \frac{\left(\cos(6)^2e^3 - 2\left(e^3-4\right)\cos(6) - 4\left(3\,e^3+2\right)\sin(6)\right)\sin(2\,x)}{\cos(6)^2e^3 + e^3\sin(6)^2}\right)e^{x}$$



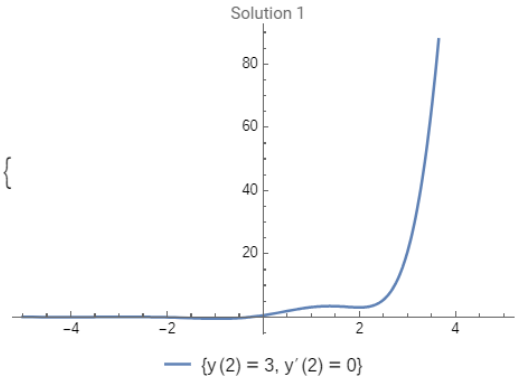
Код для Mathematica:

```
(* Clear variables *)
Clear[y, x];

(* Define the second-order differential equation *)
ode = y''[x] - 2 y'[x] + 5 y[x] == 2 x Exp[x] + Exp[x] Sin[2 x];

(* Solve the general solution *)
sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

(* Define the initial conditions for the Cauchy problem *)
initialConditions = {
  {y[2] == 3, y'[2] == 0},    (* M1(2, 3) *)
  {y[-2] == 1.5, y'[-2] == 0}, (* M2(-2, 1.5) *)
  {y[-1.5] == -2.5, y'[-1.5] == 0}, (* M3(-1.5, -2.5) *)
  {y[3] == -1, y'[3] == 0}    (* M4(3, -1) *)
};
(* Solve the Cauchy problems *)
solutions = Table[
  DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x],
  {i, 1, Length[initialConditions]}
];
Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];
(* Plot the solutions for each Cauchy problem separately *)
solutionCurves = Table[
  Plot[Evaluate[y[x] /. solutions[[i]]], {x, -5, 5},
    PlotStyle -> Thick,
    PlotLabel -> "Solution " <> ToString[i],
    PlotLegends -> Placed[{initialConditions[[i]]}, Below]],
  {i, 1, Length[solutions]}
];
(* Display separate solution curves *)
solutionCurves

(* Generate the field of directions for the differential equation *)
(* Since this is a second-order equation, the direction field is better visualized as a phase plot *)

directionField = StreamPlot[
  {y, 2 y - 5 y + (2 x Exp[x] + Exp[x] Sin[2 x])},
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, StreamStyle -> Arrowheads[Small],
  PlotLabel -> "Field of Directions"
];

(* Display the direction field *)
```

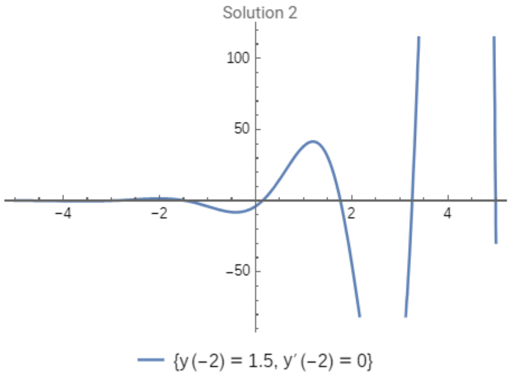
directionField

General Solution: $\{\{y[x] \to e^x c_2 \operatorname{Cos}[2x] + e^x c_1 \operatorname{Sin}[2x] + \frac{1}{16} e^x (-4x \operatorname{Cos}[2x] + 8x \operatorname{Cos}[2x]^2 - 2 \operatorname{Cos}[2x]^2 \operatorname{Sin}[2x] + 8x \operatorname{Sin}[2x]^2 + \operatorname{Cos}[2x] \operatorname{Sin}[4x])\}\}$

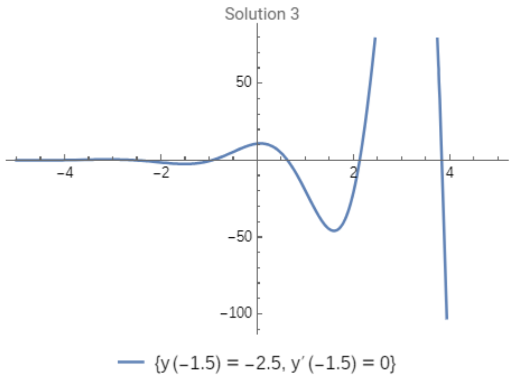
{



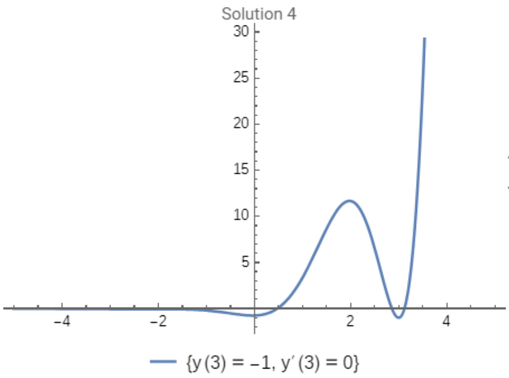
,



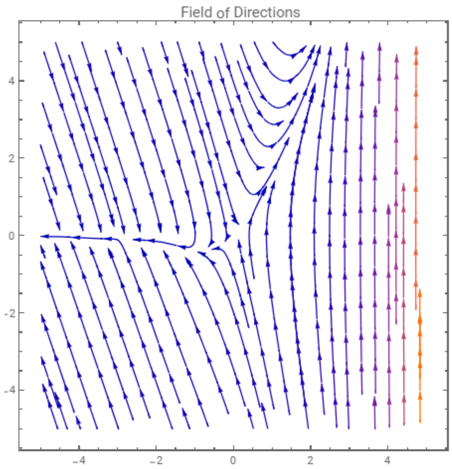
,



,



}



Завдання №5 згідно з варіантом №2

Розв’язати системи рівняннь (показати вигляд загального розв’язку), побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{matrix}$$

Обрані точки:

$$M_1=\left(-1, \begin{matrix} -e \\ 0 \\ -e \end{matrix}\right) \quad M_2=\left(1, \begin{matrix} -\frac{e^2+1}{e} \\ \frac{e^2+1}{e} \\ \frac{e^2+1}{e} \end{matrix}\right) \quad M_3=\left(-1, \begin{matrix} 0 \\ 2e \\ 2e \end{matrix}\right) \quad M_4=\left(1, \begin{matrix} e \\ -(e^2+e) \\ -(e^2+e) \end{matrix}\right)$$

Розв’язок аналітично:

№5 Вар 2

$$\dot{x} = Ax \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 =$$

$$= (\lambda-2)(1-\lambda)(1+\lambda)$$

$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-1$

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta - 5\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

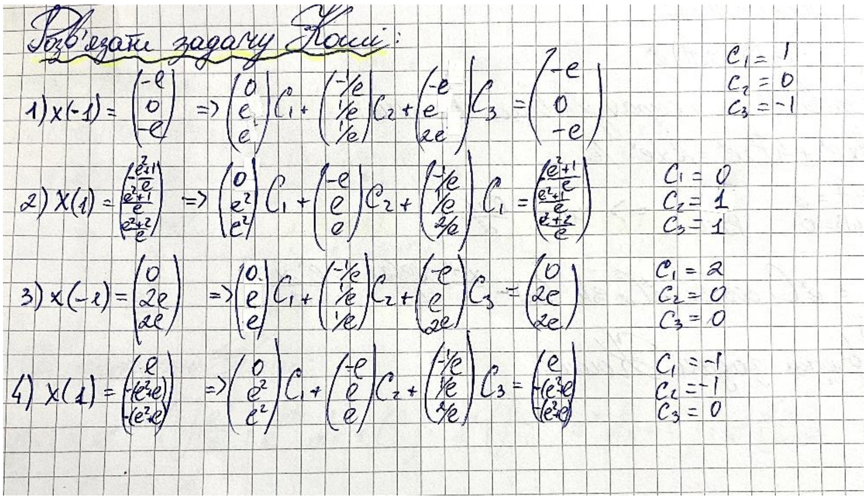
$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta - 4\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$



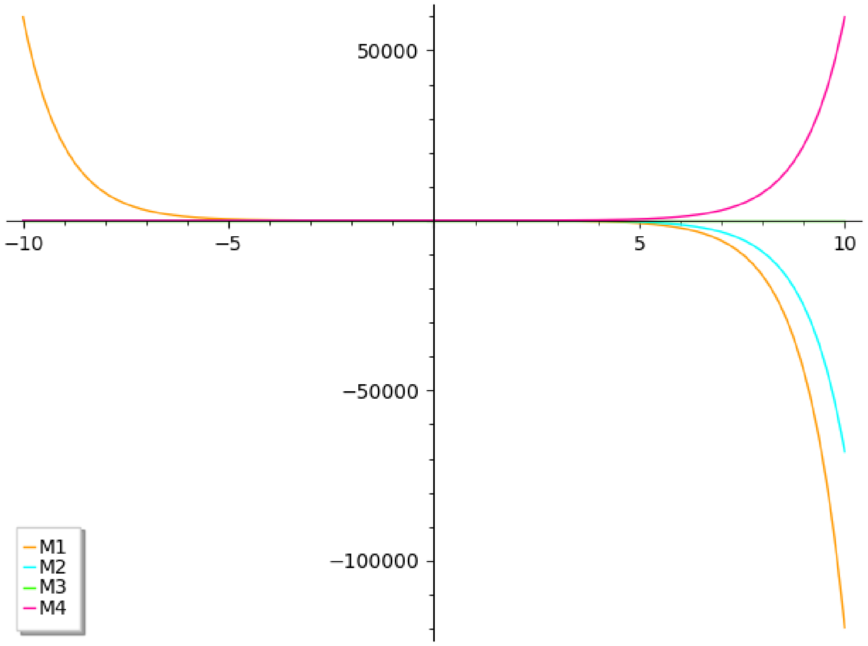
Код програми Sage:

```
# Задаємо матрицю A
t = var('t')
x1 = function('x1')(t)
x2 = function('x2')(t)
x3 = function('x3')(t)
# Задаємо систему диференціальних рівнянь
de1 = diff(x1, t) == x1 - 2*x2 + 2*x3
de2 = diff(x2, t) == x1 + 4*x2 - 2*x3
de3 = diff(x3, t) == x1 + 5*x2 - 3*x3
# Загальний розв'язок
sol = desolve_system([de1, de2, de3], [x1, x2, x3], ivar=t)
solx1, solx2, solx3 = sol[0].rhs(), sol[1].rhs(), sol[2].rhs()
solx = matrix([[solx1], [solx2], [solx3]])
show("Загальний розв'язок:", solx)
# Визначаємо обрані точки для задачі Коші
points = [
    [0, -e, 0, -e],  # M1: t=0, x1=-e, x2=0, x3=-e
    [0, -(exp(2) + 1)/e, (exp(2) + 1)/e, (exp(2) + 1)/e],  # M2
    [0, 0, 2*e, 2*e],  # M3
    [0, e, -(exp(2) + e), -(exp(2) + e)]  # M4
]
# Графіки розв'язків задачі Коші
r = 10
plots = []
colors = [hue(0.1), hue(0.5), hue(0.3), hue(0.9)]
# Для виводу розв'язків задачі Коші
couchi_solutions = []
for i in range(4):
    # Визначаємо початкові умови для кожної точки
    ics = points[i]  # Значення для t, x1, x2, x3
```

```
    # Розв'язуємо задачу Коші
    sol = desolve_system([de1, de2, de3], [x1, x2, x3], ics=ics, ivar=t)
    solx1, solx2, solx3 = sol[0].rhs(), sol[1].rhs(), sol[2].rhs()
    # Додаємо розв'язки до списку
    couchi_solutions.append((solx1, solx2, solx3))

    # Додаємо графік розв'язку до списку
    plots.append(plot(solx1, (t, -r, r), color=colors[i], legend_label=f'M{i+1}'))
# Виводимо розв'язки задачі Коші
for i, (solx1, solx2, solx3) in enumerate(couchi_solutions):
    show(f"Розв'язок задачі Коші для M{i+1}:")
    show(f"x1(t) = {solx1}")
    show(f"x2(t) = {solx2}")
    show(f"x3(t) = {solx3}")
# Показуємо всі графіки на одному малюнку
show(sum(plots))
```

Загальний розв'язок: $\left(\begin{array}{r} (x_2(0) - x_3(0))e^{(-t)} + (x_1(0) - x_2(0) + x_3(0))e^{t} \\ (x_1(0) + x_2(0))e^{(2t)} - (x_2(0) - x_3(0))e^{(-t)} - (x_1(0) - x_2(0) + x_3(0))e^{t} \\ (x_1(0) + x_2(0))e^{(2t)} - 2(x_2(0) - x_3(0))e^{(-t)} - (x_1(0) - x_2(0) + x_3(0))e^{t} \end{array}\right)$

```
Розв'язок задачі Коші для M1:
x1(t) = -2*e^(t + 1) + e^(-t + 1)
x2(t) = -e^(2*t + 1) + 2*e^(t + 1) - e^(-t + 1)
x3(t) = -e^(2*t + 1) + 2*e^(t + 1) - 2*e^(-t + 1)
Розв'язок задачі Коші для M2:
x1(t) = -(e^2 + 1)*e^(t - 1)
x2(t) = (e^2 + 1)*e^(t - 1)
x3(t) = (e^2 + 1)*e^(t - 1)
Розв'язок задачі Коші для M3:
x1(t) = 0
x2(t) = 2*e^(2*t + 1)
x3(t) = 2*e^(2*t + 1)
Розв'язок задачі Коші для M4:
x1(t) = e^(t + 1)
x2(t) = -e^(2*t + 2) - e^(t + 1)
x3(t) = -e^(2*t + 2) - e^(t + 1)
```



Код для Mathematica:

```
(* Clear variables *)
Clear[x, t];
(* Define the matrix A *)
A = {{1, -2, 2}, {1, 4, -2}, {1, 5, -3}};

(* Define the system of differential equations x'[t] = A . x[t] *)
ode = Thread[D[{x1[t], x2[t], x3[t]}, t] == A . {x1[t], x2[t], x3[t]}];

(* Solve the general solution *)
sol = DSolve[ode, {x1[t], x2[t], x3[t]}, t];
Print["General Solution: ", sol];

(* Define the initial conditions for each Cauchy problem *)
initialConditions = {
  {x1[-1] == -Exp[1], x2[-1] == 0, x3[-1] == -Exp[1]},  (* M1 *)
  {x1[1] == -(Exp[2] + 1)/Exp[1], x2[1] == (Exp[2] + 1)/Exp[1], x3[1] == (Exp[2] + 1)/Exp[1]},  (* M2 *)
  {x1[-1] == 0, x2[-1] == 2 Exp[1], x3[-1] == 2 Exp[1]},  (* M3 *)
  {x1[1] == Exp[1], x2[1] == -(Exp[2] + Exp[1]), x3[1] == -(Exp[2] + Exp[1])}  (* M4 *)
};


(* Solve the Cauchy problems *)
solutions = Table[
  DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, {x1[t], x2[t], x3[t]}, t],
```

```
  {i, 1, Length[initialConditions]}
];
Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];

(* Plot the solutions for the Cauchy problems on one plot *)
solutionCurves = Plot[
  Evaluate[
    Table[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]
  ], {t, -5, 5},
  PlotStyle -> Thick,
  PlotLegends -> Placed[{"M₁", "M₂", "M₃", "M₄"}, Below],
  PlotLabel -> "Solution Curves for the Cauchy Problem",
  AxesLabel -> {"t", "x(t)"}
];

(* Show the solution curves *)
solutionCurves
(* Generate the direction field *)
(* For a system of differential equations, we can generate a phase plot for the first two variables x1 and x2 *)
directionField = StreamPlot[
  {x1'[t] /. sol[[1]], x2'[t] /. sol[[1]]},
  {x1, -5, 5}, {x2, -5, 5},
  StreamStyle -> Arrowheads[Small],
  PlotLabel -> "Field of Directions (Phase Plot)"
];
```

General Solution: $\{\{x1[t] \to e^{t} c_1 - e^{-t}(-1+e^{2t}) c_2 + e^{-t}(-1+e^{2t}) c_3,\ x2[t] \to e^{t}(-1+e^{t}) c_1 + e^{-t}(-1+e^{2t}+e^{3t}) c_2 - e^{-t}(-1+e^{2t}) c_3,\ x3[t] \to e^{t}(-1+e^{t}) c_1 + e^{-t}(-2+e^{2t}+e^{3t}) c_2 - e^{-t}(-2+e^{2t}) c_3\}\}$

Solutions with Initial Conditions: $\{\{\{x1[t] \to -e^{-t}(-1+2e^{2+2t}),\ x2[t] \to -e^{-t}(1-2e^{2+2t}+e^{3+3t}),\ x3[t] \to -e^{-t}(2-2e^{2+2t}+e^{3+3t})\}\},\ \{\{x1[t] \to -e^{-2+t}(1+e^{2}),\ x2[t] \to e^{-2+t}(1+e^{2}),\ x3[t] \to e^{-2+t}(1+e^{2})\}\},\ \{\{x1[t] \to 0,\ x2[t] \to 2e^{3+2t},\ x3[t] \to 2e^{3+2t}\}\},\ \{\{x1[t] \to e^{t},\ x2[t] \to -e^{t}(1+e^{t}),\ x3[t] \to -e^{t}(1+e^{t})\}\}\}$