Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2

з курсу

«Управління динамічними системами»

на тему:

«Аналітичне конструювання регуляторів.

Побудова фазових портретів»

Виконав:

студент групи ІПС-21

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Левківський Євгеній

Київ – 2024

Зміст

Умова задачі згідно з варіантом

- Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Розв'язати задачу аналітичного конструювання регуляторів, обравши одне керування з знайдених можливих. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Зобразити фазові портрети особливих точок розімкненої системи та побудованої замкненої системи за допомогою програмних пакетів (бажано Sage). Траєкторії, сепаратриси, ізокліни (де треба) – різний колір та товщина.

Варіант №3

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Представлення розв'язку аналітично (в зошиті)

Левківський Є

Лабораторна робота № 2

Варіант № 6

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x+y \\ \dot{y} = y-x\end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ - з умови лаб. р.}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2$$

Точка спокою:

$\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$

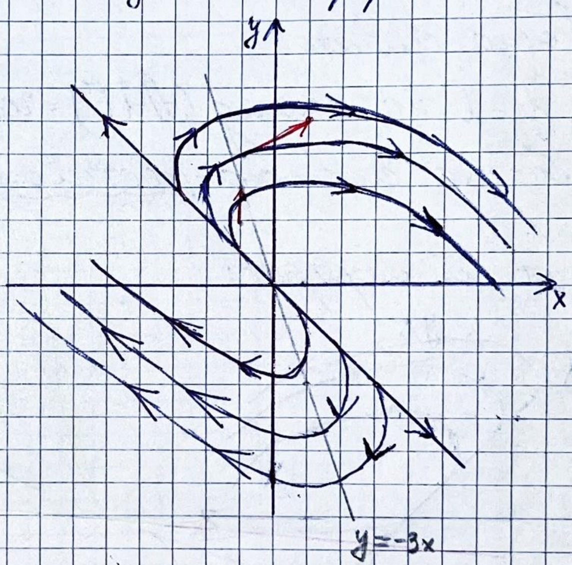
Визнач. матр. Жордана:

$$\text{rang}(A-\lambda E) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Нестійкий вироджений вузол

Фазовий портрет



Нехай $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + Bu$

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x + y + u_1 + 2u_2 \\ \dot{y} = y - x + 6u_2\end{cases}$$

$$u = C^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = (A+BC)x, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 \\ 0 & 6c_2 \end{pmatrix} \qquad A+BC = \begin{pmatrix} 3+c_1 & 2c_2+1 \\ -1 & 6c_2+1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок даної системи має бути асимпт. стійкий.

$$\det(A+BC-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3+c_1-\lambda & 2c_2+1 \\ -1 & 6c_2+1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(3+c_1+6c_2+1) + (3+c_1)(6c_2+1) + (2c_2+1) = 0$$

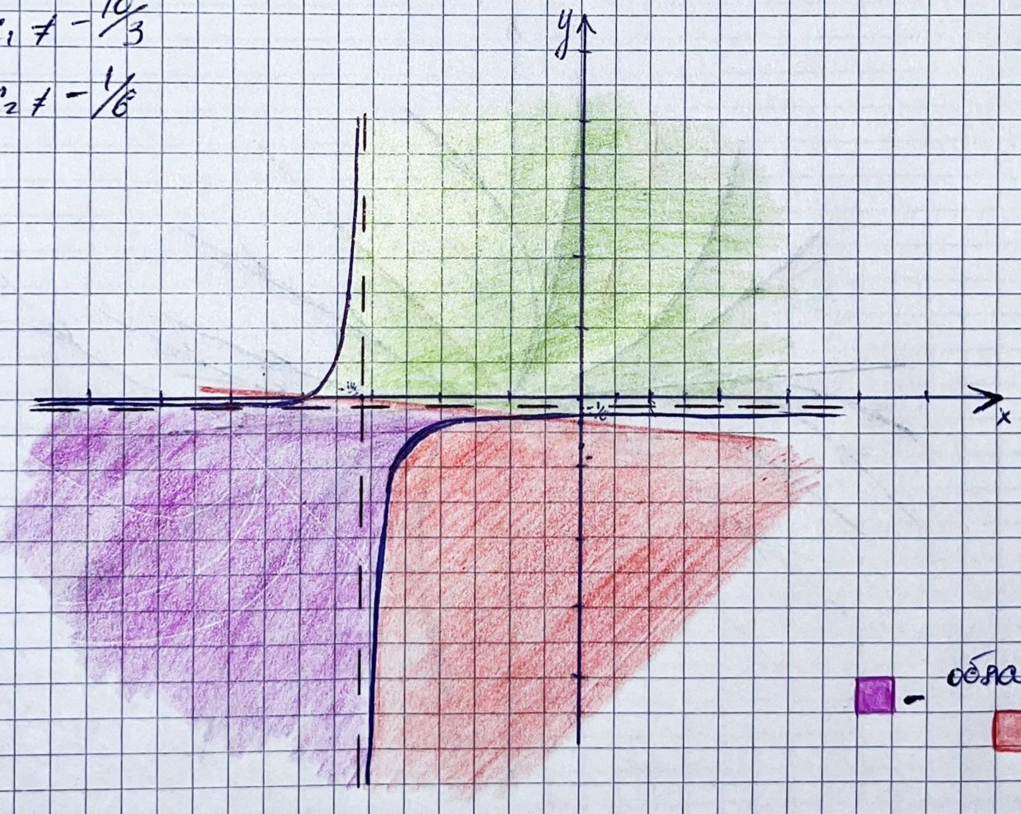
Будуємо матрицю Гурвіца:

$$H_2 = \begin{vmatrix} -(3+c_1+6c_2+1) & 1 \\ 0 & (3+c_1)(6c_2+1)+(2c_2+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = -c_1 - 6c_2 - 4 > 0 \\ a_2 = -(c_1+6c_2+4)(3+c_1)(6c_2+1)+(2c_2+1) > 0 \end{cases} \qquad c_2 < \frac{-c_1-4}{6} \qquad \begin{matrix} (4;0) \\ (0;-\frac{1}{3}) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = -c_1 - 6c_2 - 4 > 0 \\ a_2 = (3+c_1)(6c_2+1)+(2c_2+1) > 0 \end{cases} \qquad c_2 = -\frac{4+c_1}{20+6c_1}$$

$$\begin{cases} c_1 \neq -\frac{10}{3} \\ c_2 \neq -\frac{1}{6} \end{cases}$$



■ - область перетину ■ та ■

З області перетину оберемо т. $P(-12; -2)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow |A+BC-\lambda E| = \begin{vmatrix} -9-\lambda & -3 \\ -1 & -11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 20\lambda + 96 = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -12 \\ \lambda_2 = -8 \end{matrix}$$

Стан рівноваги:

$Re(\lambda_1) \neq Re(\lambda_2)$

$Re(\lambda_1) < Re(\lambda_2) < 0$ $\Rightarrow$ стійкий вузол

Сепаратриси:

$\lambda_1 = -12$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y = x$ $(-20; -20)$ $(20; 20)$

$\lambda_2 = -8$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

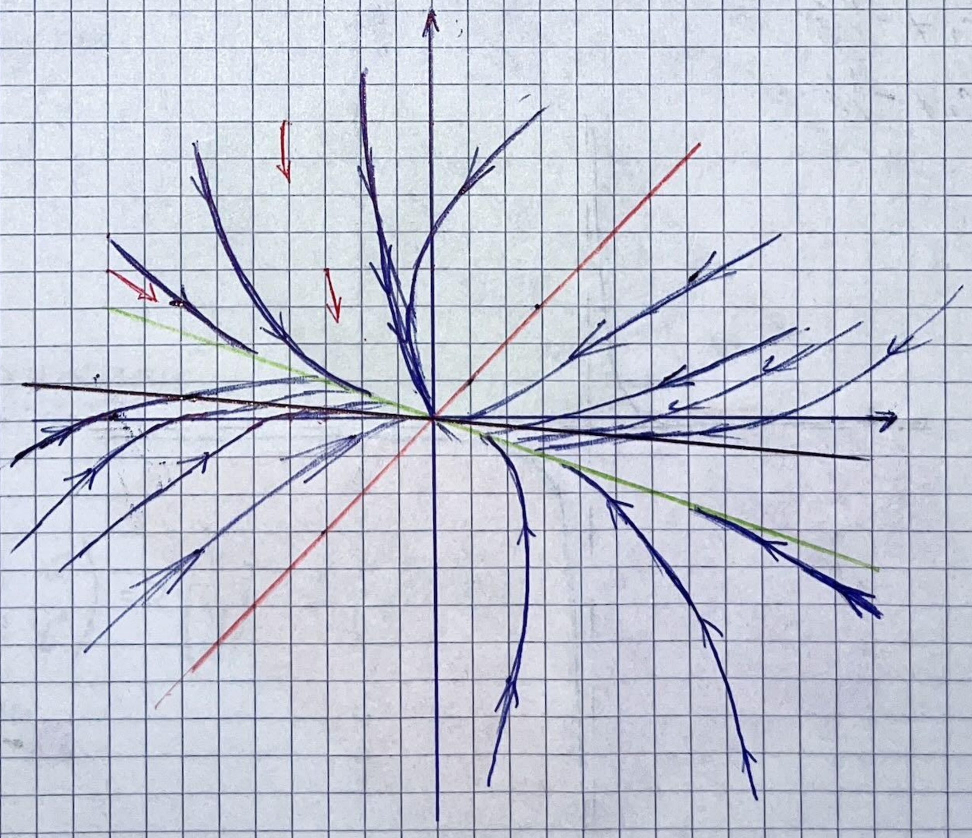
$y = -\frac{x}{3}$ $(-20; \frac{20}{3})$ $(20; -\frac{20}{3})$

Ізокліна:

$y' = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - 11y}{-9x - 3y}$$

$$y = -\frac{x}{11}$$

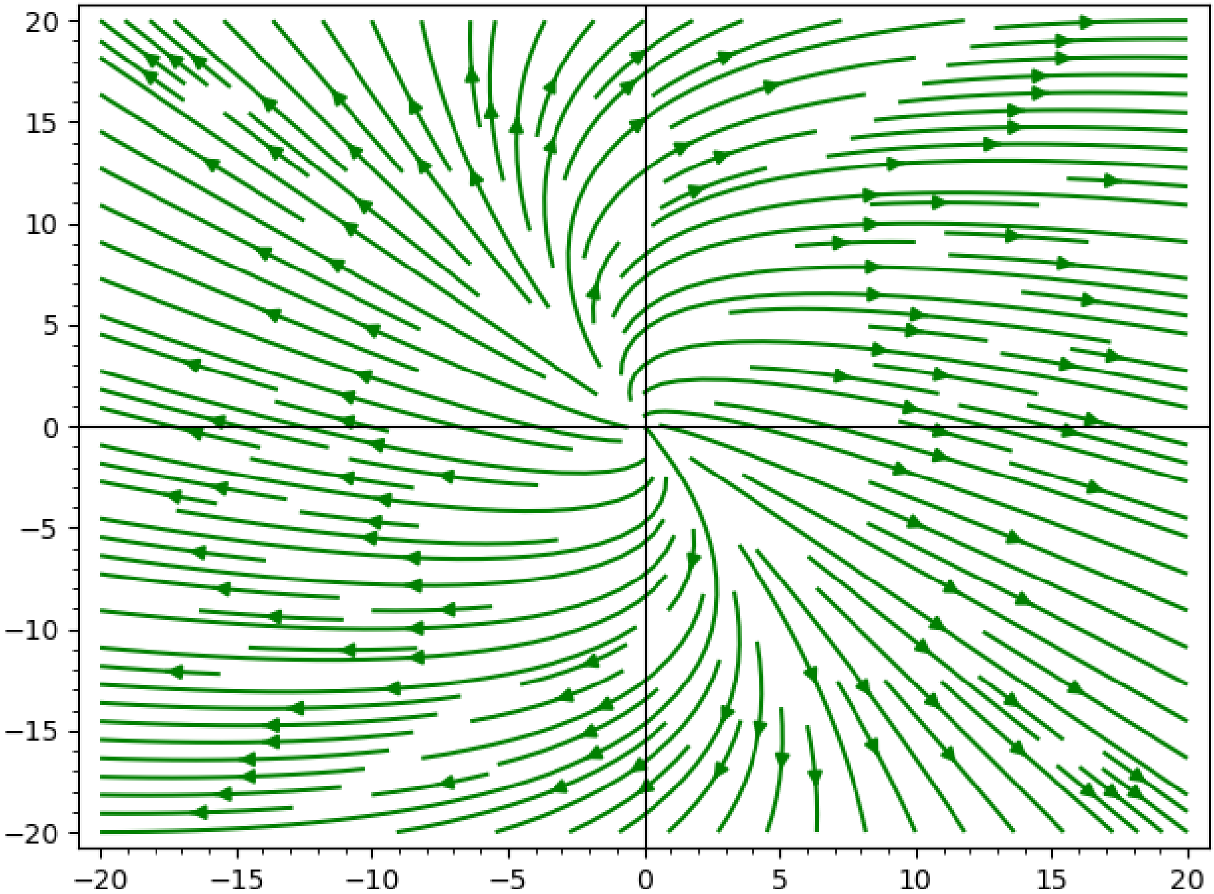


Код програми для розімкненої та замкненої систем (Sage)

```
# Розімкнена система
x, y = var('x y')
f(x, y) = 3*x + y
g(x, y) = y - x

# Побудова фазового портрету
s = streamline_plot((f, g), (x, -20, 20), (y, -20, 20), density=1.5,
color='green')

# Відображення результату
show(s, xmin=-20, xmax=20, ymin=-20, ymax=20)
```




```
#Замкнена система
x,y=var('x,y')

f(x,y)=-9*x-3*y

g(x,y)=-x-11*y

#Сепаратриси

separatrix1 = line([(-20,-20), (20,20)],

rgbcolor=Color('red'),thickness=3, legend_label = 'Separatrix1')

separatrix2 = line([(-20,20/3), (20,-20/3)], rgbcolor=Color('green'),
```

```
thickness=3,legend_label = 'Separatrix 2')
#Ізокліна
isocline = line([(-20,20/11), (20,-20/11)], rgbcolor=Color('black'),
thickness=2, linestyle ='dashed', legend_label = 'Isocline1')
#Відображення
streamline_plot((f,g), (x, -20, 20), (y, -20, 20),
    density=1.5, xmin=-20, xmax=20, ymin=-20, ymax=20,
    axes_labels =["$x(t)$", "$y(t)$"]) + separatrix1 + separatrix2 + isocline
```