ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4.

Випадкові вектори неперервного типу.

1. *Щільність випадкового вектора.*

Неперервні величини ξ та η незалежні, якщо для будь-яких *x та y* виконується рівність: $f_{(\xi;\,\eta)}(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$.

Приклад 1. ([3], с. 90). Випадковий вектор (ξ, η) має рівномірний розподіл в області D, якщо всі точки $(x, y) \in D$ – «*так само ймовірні*».

1) Знайти щільність $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ вектора (ξ, η), що має рівномірний розподіл в квадраті $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

Відповідь: $f_{(\xi,\eta)}(x, y) = 1$, якщо $0 \le x \le 1$; а $0 \le y \le 1$; $f_{(\xi,\eta)}(x, y) = 0$ для всіх інших точок площини.)

2) Перевірити, чи будуть випадкові величини ξ та η незалежними.

Відповідь: ξ та η – незалежні.)

Приклад 2. ([3], с. 130).. Випадковий вектор (ξ, η) має рівномірний розподіл в трикутнику

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}.$$

1) Перевірити, чи будуть величини ξ та η незалежними.

(**Відповідь: ξ та η – залежні.**)

2) Обчислити математичне сподівання $(m_\xi;\ m_\eta) = (E(\xi);\ E(\eta))$ випадкового вектора (ξ, η).

(**Відповідь: $(m_\xi;\ m_\eta) = (1/3;\ 1/3)$.**)

3) Обчислити коваріаційну матрицю випадкового вектора (ξ, η).

Відповідь: $D^2(\xi) = \begin{bmatrix} 1/18 & -1/36 \\ -1/36 & 1/18 \end{bmatrix}$.

4) Обчислити коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$ між ξ та η.

(**Відповідь: $\rho(\xi, \eta) = -0{,}5$.**)

Приклад 3. Випадковий вектор (ξ, η) має неперервний розподіл в квадраті

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}:$$

його щільність $f_{(\xi,\eta)}(x, y) = x + y$, якщо $(x, y) \in D$, та $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$.

1) Знайти щільність $f_\xi(x)$ та $f_\eta(y)$ випадкових величини ξ та η. Чи будуть вони незалежними?

Відповідь: $f_\xi(x) = 0{,}5 + x$; $f_\eta(y) = 0{,}5 + y$.

2) Знайти функцію розподілу $F(x, y)$ випадкового вектора (ξ, η).

Відповідь: $F(x, y) = 0{,}5 \cdot x \cdot y \cdot (x + y)$.

3) Знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$ та $F_\eta(y)$ випадкових величини ξ та η.

Відповідь: $F_\xi(x) = 0{,}5 \cdot x \cdot (x + 1)$; $F_\eta(y) = 0{,}5 \cdot y \cdot (y + 1)$.

Приклад 4. Випадковий вектор (ξ, η) має розподіл з щільністю:

- $f(x, y) = 12 \cdot x \cdot y \cdot (1 - x)$, якщо $(x, y) \in D = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$; та
- $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$.

1) Знайти щільність $f_\xi(x)$ та $f_\eta(y)$ випадкових величини ξ та η. Чи будуть вони незалежними?

2) Знайти $m_\xi = E(\xi)$.

Основні розподіли математичної статистики.

1. Нормальний розподіл. Функція Лапласа Φ(x) в практичних розрахунках.2. Розподіл «*хі-квадрат»* ($\chi^2_{(n)}$). 3. Розподіл «*t-Studenta з n степенями свободи»* ($t_{(n)}$). 4. Імітаційна модель.

1. *Нормальний розподіл. Функція Лапласа Φ(x) в практичних розрахунках.*

Неперервна випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2): $\xi \Leftrightarrow N(m, \sigma^2)$, якщо її щільність $f_\xi(x)$ визначається формулою:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

Розподіл $N(0, 1)$ називається стандартним. Функція

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, -\infty < x < \infty,.$$

називається функцією Лапласа.

Приклад 1. Припустимо, що випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами (**$m = 4$; $\sigma^2 = 0{,}04$**).

Завдання 1. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(4, 0{,}04)$. Використовуючи таблицю функції Лапласа, визначити число z_1 таким чином, щоб:

$$P\{N(4, 0{,}04) < z_1\} = 0{,}16.$$

Розв'язок. Доведено, що між нормальним розподілом $N(m, \sigma^2)$ та нормальним стандартним розподілом $N(0, 1)$ існує наступний зв'язок:

$$\text{Якщо } \xi \Leftrightarrow N(m, \sigma^2), \text{ то } \eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \Leftrightarrow N(0, 1).)$$

Нехай $\xi \Leftrightarrow N(4, 0{,}04)$, тобто $m = 4$; $\sigma^2 = 0{,}04$. Позначимо $Z_1 = \frac{z_1 - 4}{0{,}2}$. Тоді:

$$P\{N(4, 0{,}04) < z_1\} = P\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < \frac{z_1 - 4}{0{,}2}\right\} = P\{\eta < Z_1\} = 0{,}16.$$

Функція Лапласа має наступну властивість:

1. $\Phi(0) = 0{,}5$.)

Оскільки $\Phi(x) = \mathrm{P}\{N(0, 1) < x\} = \mathrm{P}\{\eta < x\}$, то

$$P\{N(4, 0{,}04) < z_1\} = P\{\eta < Z_1\} = \Phi(Z_1) = 0{,}16 < 0{,}5 = \Phi(0).$$

Таким чином Z_1 – від'ємне число.

Функція Лапласа має наступну властивість:

2. $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$, для довільного $a > 0$.

Знайдемо $\Phi(-Z_1)$:

$$\Phi(-Z_1) = 1 - \Phi(Z_1) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84.$$

Використовуючи таблицю функції Лапласа отримуємо:

$$\Phi(0{,}99) = 0{,}8369 < \Phi(-Z_1) = 0{,}84 < \Phi(1) = 0{,}8413.$$

Враховуючи монотонність функції Лапласа отримаємо нерівність:

$$0{,}99 < -Z_1 < 1.$$

Найкращим наближенням для величини ($-Z_1$) буде середнє арифметичне чисел: 0,99 та 1:

$$-Z_1 \approx \frac{0{,}99+1}{2} = 0{,}995.$$

Таким чином:

$$Z_1 = \frac{z_1 - 4}{0{,}2} = -0{,}995;$$

$$z_1 = 4 - 0{,}2 \cdot 0{,}995 = 4 - 0{,}199 = 3{,}801.$$

(**Відповідь: $z_1 \approx 3{,}801$**)

Завдання 2. Визначити число z_2 таким чином, щоб:

$$P\{N(4,\ 0{,}04) \geq z_2\} = 0{,}04.$$

Розв'язок.

$$P\{N(4,\ 0{,}04) < z_2\} = 1 - P\{N(4,\ 0{,}04) \geq z_2\} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$

Позначимо $Z_2 = \dfrac{z_2 - 4}{0{,}2}$. Тоді:

$$P\{N(4,\ 0{,}04) < z_2\} = P\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < \frac{z_2 - 4}{0{,}2}\right\} = P\{\eta < Z_2\} = 0{,}96.$$

Тобто:

$$\Phi(Z_2) = 0{,}96.$$

Використовуючи таблицю функції Лапласа отримуємо:

$$\Phi(1{,}75) = 0{,}9599 < \Phi(Z_2) = 0{,}96 < \Phi(1{,}76) = 0{,}9608.$$

Враховуючи монотонність функції Лапласа отримаємо нерівність:

$$1{,}75 < Z_2 < 1{,}76.$$

В даному випадку варто вибрати наступне наближення для величини Z_2:

$$Z_2 \approx 1{,}75.$$

Таким чином:

$$Z_2 = \frac{z_2 - 4}{0{,}2} = 1{,}75;$$

$$Z_2 = 4 + 0{,}2 \cdot 1{,}75 = 4 + 0{,}35 = 4{,}35.$$

(**Відповідь: $z_2 \approx 4{,}35$**)

Завдання 3. Визначити числовий інтервал $[A^*,\ B^*]$ таким чином, щоб ймовірності виходу випадкової величини $N(4,\ 0{,}04)$ за його межі мала «*симетричний*» характер, тобто, щоб виконувались умови:

$$\mathrm{P}\{A^* < N(4,\ 0{,}04) < B^*\} = 0{,}8.$$

І при цьому

$$\mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) < A^*\} = \mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) > B^*\}.$$

Розв'язок. Оскільки інтервали $(-\infty,\ A^*)$, $[A^*,\ B^*)$, $[A^*,\ \infty)$ не перетинаються, то маємо рівність:

$$1 = \mathrm{P}\{-\infty < N(4,\ 0{,}04) < \infty\} =$$
$$= \mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) < A^*\} + \mathrm{P}\{A^* < N(4,\ 0{,}04) < B^*\} + \mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) > B^*\}.$$

Таким чином:

$$\mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) < A^*\} + \mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) > B^*\} =$$
$$= 1 - \mathrm{P}\{A^* < N(4,\ 0{,}04) < B^*\} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Оскільки за умовою:

$$\mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) < A^*\} = \mathrm{P}\{N(4,\ 0{,}04) > B^*\},$$

то

$$P\{N(4,\ 0{,}04) < A^*\} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1; \text{ і } P\{N(4,\ 0{,}04) > B^*\} = 0{,}1.$$

Повторюємо дослівно розв’язок завдання 1, замінюючи ймовірність 0,16, на 0,1. Отримаємо $1{,}28 < -Z_1 < 1{,}29$.

$$-Z_1 \approx \frac{1{,}28+1{,}29}{2} = 1{,}285.\ \ Z_1 = \frac{z_1-4}{0{,}2} = -1{,}285;$$

$$A^* = 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}285 = 4 - 0{,}257 = 3{,}743.$$

Тепер повторюємо дослівно розв’язок завдання 2, замінюючи відповідно ймовірність 0,04 на 0,1. Отримаємо

$$1{,}28 < Z_2 < 1{,}29.\ \ Z_2 \approx \frac{1{,}28+1{,}29}{2} = 1{,}285.$$

$$B^* = 4 + 0{,}2 \cdot 1{,}285 = 4 + 0{,}257 = 4{,}257.$$

(**Відповідь:** $A^* \approx 3{,}743$; $B^* \approx 4{,}257$)

2. *Розподіл «хі-квадрат»* ($\chi^2_{(n)}$).

Вказівка: Випадкова величини $\chi^2_{(n)}$ має розподіл «*хі-квадрат з n степенями свободи*”, якщо її щільності $k_n(x)$ визначається формулою:

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{0{,}5\cdot n}\cdot\Gamma(0{,}5\cdot n)}\cdot x^{n/2-1}\cdot e^{-x/2},\ x > 0,$$

де $\Gamma(x) = \int_0^\infty \left(e^{-t}\cdot t^{x-1}\right)dt$ – гамма функція Ейлера,

Теорема 1.: Якщо $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – незалежні випадкові величини, які мають стандартний нормальний розподіл $\eta_i \Leftrightarrow N(0,\ 1)$, то випадкова величина:

$$\chi^2_{(n)} = (\eta_1)^2 + (\eta_2)^2 + \ldots + (\eta_n)^2$$

має $\chi^2_{(n)}$-розподіл.

Приклад 1. Припустимо, що випадкова величина η має стандартний нормальний розподіл $\eta \Leftrightarrow N(0,\ 1)$. Довести, що $\eta^2 \Leftrightarrow \chi^2_{(1)}$ – має «*хі-квадрат розподіл*» з *одним* степенем свободи. Іншими словами, довести, що щільність випадкової величини η^2 визначається формулою:

$$f_\varsigma(x) = k_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}, & dla\ x > 0 \\ 0, & dla\ x \le 0 \end{cases}.$$

Приклад 2. Припустимо, що випадкова величина $\chi^2_{(5)}$ має «*хі-квадрат розподіл з п’ятьма степенями свободи*”. Використовуючи таблиці розподілу χ^2 розв’язати наступні задачі:

1. Визначити число h_1 таким чином, щоб: $P\{\chi^2_{(5)} < h_1\} = 0{,}017$.

Відповідь: $h_1 = 0{,}7$.

2. Визначити число h_2 таким чином, щоб: $P\{\chi^2_{(5)} \ge h_2\} = 0{,}033$.

Відповідь: $h_2 = 12{,}13$.

3. Визначити ймовірність наступної події: $\{0{,}7 \le \chi^2_{(5)} < 12{,}13\}$.

Відповідь: $P\{0{,}7 \le \chi^2_{(5)} < 12{,}13\} = 0{,}95$.

4. Визначити «*симетричний*» числовий інтервал $[h^*_1, h^*_2]$ таким чином, щоб виконувались умови:

$$\mathrm{P}\{h^*_1 \le \chi^2_{(5)} < h^*_2\} = 0{,}95;\ \mathrm{P}\{\chi^2_{(5)} < h^*_1\} = \mathrm{P}\{\chi^2_{(5)} > h^*_2\}.$$

Відповідь: $[h^*_1, h^*_2] = [0{,}83; 12{,}83]$.

5 (Додатково). Визначити числа h_1, h_2, знайти ймовірність події: $P\{0{,}7 \le \chi^2_{(5)} < 12{,}13\}$ та побудувати «*симетричний*» числовий інтервал $[h^*_1, h^*_2]$ застосовуючи статистичні функції («*ХИ2.РАСП*» та «*ХИ2.ОБР*») аркушу «*Excel*».

Відповідь: $h_1 = 6994$; $h_2 = 12{,}134$; $P\{0{,}7 \le \chi^2_{(5)} < 12{,}13\} = 0{,}95$; $[h^*_1, h^*_2] = [0{,}8312; 12{,}134]$.

3. Розподіл «*t-Studenta з n степенями свободи*» ($t_{(n)}$).

***Вказівка* 1**: Випадкова величини $t_{(n)}$ має розподіл «*t–Стьюдента з n степенями свободи*», якщо її щільності $s_n(x)$ визначається формулою:

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < x < \infty.$$

де $\Gamma(x)$ – гамма функція Ейлера.

Теорема 2.: Припустимо, що ζ та $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – незалежні випадкові величини, які мають стандартний нормальний розподіл:

$$\zeta \Leftrightarrow N(0, 1);\ \text{та}\ \eta_k \Leftrightarrow N(0, 1),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді випадкова величина:

$$t_{(n)} = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2\right)}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_{(n)}}}$$

буде мати $t_{(n)}$-*розподіл*, тобто «*Стьюдента з n степенями свободи*».

***Вказівка* 2**: Розподіл t–Стьюдента з n степенями свободи має наступні властивості:

В. 1.

$$\mathrm{P}\{t_{(n)} > 0\} = \mathrm{P}\{t_{(n)} < 0\} = 0{,}5.$$

В. 2. Для довільного числа $-\infty < t < \infty$ виконується наступна рівність:

$$\mathrm{P}\{t_{(n)} < t\} = \mathrm{P}\{t_{(n)} > -t\}.$$

В. 3. Для довільного від’ємного числа $t < 0$ виконується наступна рівність:

$$\mathrm{P}\{t_{(n)} > t\} = \mathrm{P}\{t_{(n)} < |t|\}.$$

Якщо позначити символом $S_{(n)}(x)$ функцію розподілу величини $t_{(n)}$:

$$S_n(x) = \mathrm{P}\{t_{(n)} < x\},\ -\infty < x < \infty,$$

то властивості **В. 1, В. 2, В. 3** можна записати наступним чином:

В. 1.

$$S_n(0) = 1 - S_n(0) = 0{,}5.$$

В. 2.

$$S_n(t) = 1 - S_n(-t),\ \text{для довільного числа}\ -\infty < t < \infty.$$

В. 3.

$$S_n(|t|) = 1 - S_n(t),\ \text{для довільного від’ємного числа}\ t < 0.$$

Приклад 3. Припустимо, що випадкова величина $t_{(5)}$ має t–Стьюдента розподіл *з п’ятьма* степенями свободи. Використовуючи таблиці розподіл t–Стьюдента *з п’ятьма* степенями свободи розв’язати наступні задачі:

1. Знайти ймовірність наступної події: $P\{-0{,}1 < t_{(5)} < 0{,}7\}$.

Відповідь: $P\{-0{,}1 < t_{(5)} < 0{,}7\} = 0{,}2803$.

2. Визначити число A таким чином, щоб виконувалась умова:

$$P\{t_{(5)} < A\} = 0{,}835.$$

тобто знайти число A з умови: $S_5(A) = 0{,}835$.

Відповідь: $A = 1{,}075$.

3. Визначити число B таким чином, щоб виконувалась умова:

$$P\{|t_{(5)}| < B\} = 0{,}835.$$

Іншими словами, для числа B повинна виконуватись наступна умова:

$$S_5(B) - S_5(-B) = 0{,}835.$$

Відповідь: $B = 1{,}625$.

***Вказівка* 3**: Використовуючи властивість **В. 2**: $P\{t_{(5)} < B\} = P\{t_{(5)} > -B\}$, вивести наступну рівність: $P\{|t_{(5)}| < B\} = 2\cdot P\{t_{(5)} < B\} - 1$.

4. Визначити число t таким чином, щоб виконувалась умова:

$$P\{t_{(5)} > t\} = 0{,}83.$$

Тобто знайти число t з умови: $1 - S_5(t) = 0{,}83$.

Відповідь: $t = -1{,}055$.

***Вказівка* 4**: Оскільки згідно властивості **В. 1**: $P\{t_{(5)} > 0\} = 0$, то $t < 0$ є від'ємним числом. Використовуючи властивість **В. 3** маємо:

$$P\{t_{(5)} > t\} = P\{t_{(5)} < |t|\} = S_5(-t).$$

5 (Додатково). Знайти ймовірність події: $P\{-0{,}1 < t_{(5)} < 0{,}7\}$, визначити числа A, B, та t застосовуючи статистичні функції («*СТЬЮДЕНТ.РАСП*» та «*СТЬЮДЕНТ.ОБР*») аркушу «*Excel*».

Відповідь: $P\{-0{,}1 < t_{(5)} < 0{,}7\} = 0{,}28031$; $A = 1{,}07867$; $B = 1{,}62543$; $t = -1{,}0543$.

4. (Додатково). ***Імітаційна модель.***

Приклад 4. (Додатково). Збудувати імітаційну модель та здійснити експериментальну перевірку теореми 1, тобто переконатися, що сума квадратів n незалежних випадкових величин, які мають нормальний стандартний розподіл, має „*хі-квадрат*" розподіл *з n степенями свободи*.

Завдання 1. Використовуючи програму «*Генерування псевдовипадкових чисел*» аркушу „*Excel*", згенерувати вибірку

$$\{(\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \ldots, \eta_n^{(i)}),\ i = 1, 2, \ldots, N\},$$

для вектора $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, координати якого – незалежні випадкові величин, що мають стандартний нормальний розподіл:

$$\eta_1 \Leftrightarrow N(0, 1),\ \eta_2 \Leftrightarrow N(0, 1),\ \ldots,\ \eta_n \Leftrightarrow N(0, 1).$$

Значення параметрів ***n*** та ***N*** знаходяться в аркуші **„*Excel*"**.

Завдання 2. Використовуючи приведену теорему 1 побудувати в аркуші „*Excel*" вибірку $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ для випадкової величини $\chi^2_{(n)}$, яка має розподіл „*хі-квадрат з n степенями свободи*" за формулою:

$$x_i = (\eta_1^{(i)})^2 + (\eta_2^{(i)})^2 + \ldots + (\eta_n^{(i)})^2,\ i = 1, 2, \ldots, N.$$