

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1
Чисельні методи в інформатиці
“Розв’язок нелінійних рівнянь”
Варіант №8

Виконав студент групи ІПС-31
Тесленко Назар Олександрович

Київ - 2025

Постановка задачі:

Знайти розв'язок рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ наступними методами:

Варіант №8

- Модифікований метод Ньютона: $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$
- Метод простої ітерації: $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$

Додати можливість зміни точності

Теоретичний опис та обґрунтування:

Метод простої ітерації:

Ітераційний процес:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

де $\Phi(x) = x + \Psi(x)f(x)$

Достатня умова:

$\Phi(x)$ задовольняє умовам:

$$1) \max_{x \in S} |\Phi'(x)| \leq q < 1$$

$$2) |\Phi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta$$

Апріорна оцінка:

$$n \geq \left\lceil \frac{\ln(|\Phi(x_0) - x_0|/(1-q)\varepsilon)}{\ln(1/q)} \right\rceil + 1$$

Умова припинення залежить від q :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon, \text{ якщо } q < \frac{1}{2}$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon, \text{ в інших випадках}$$

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Достатня умова:

Якщо функція $f(x) \in C^2_{[a;b]}$, $f'(x)$, $f''(x)$ — знакосталі на $[a; b]$,

$f'(x) \neq 0$ на $[a; b]$ то ітераційний процес збігається

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

Хід роботи

Мова реалізації: Python

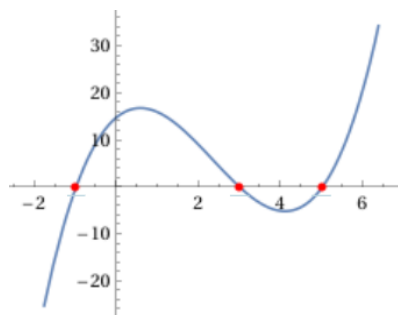
Модифікований метод Ньютона

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$$

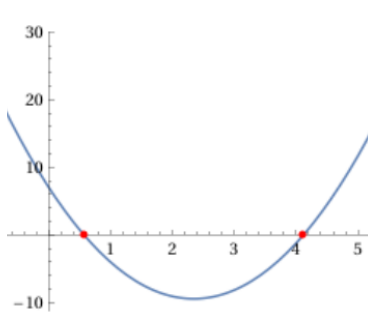
$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 7$$

$$f''(x) = 6x - 14$$

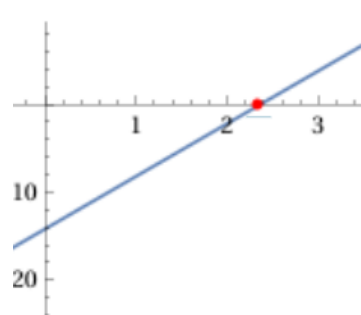
$f(x)$:



$f'(x)$



$f''(x)$



Функція для модифікованого методу Ньютона:

```
def modif_newtons_method(f, df, d2f, a, b, eps) -> tuple[bool, float, int]:...
```

Рівняння має 3 корені. Обираємо інтервал що містить корінь: [2.5;7]. Якщо на вибраному інтервалі існує кілька розв'язків, програма автоматично звужує інтервал і вибирає той відрізок, який містить єдиний корінь для подальшої роботи алгоритму.

```
MODIFIED NEWTON'S METHOD
=====
Equation: f(x) = x**3 - 7*x**2 + 7*x + 15
epsilon = 0.001
=====

Finding interval containing root
-----
Root found in interval [4.75, 7.00]
Working interval: [4.75, 7.00]
```

Перевіряємо достатні умови:

- $f'(x)$, $f''(x)$ — знакосталі на $[a; b]$
- $f'(x) \neq 0$ на $[a; b]$

За невдалих перевірок програма повертає False значення з відповідними логами помилки

```
# Sufficient conditions:
# 1. f'(x), f''(x) - constant sign on the interval [a;b]
# 2. f'(x) != 0 on the [a;b]
x_interval = np.linspace(a, b, 1000)
dfx_values = np.array([df(x) for x in x_interval])
dfx_values[np.abs(dfx_values) < 1e-10] = 0

d2fx_values = np.array([d2f(x) for x in x_interval])
d2fx_values[np.abs(d2fx_values) < 1e-10] = 0

# Check if some of df(x) == 0
if np.any(dfx_values == 0):
    print("f'(x) = 0 at some point - first condition not satisfied!")
    return False, None, None
```

```
# f'(x), f''(x) has to be constant sign on the interval [a;
b]
if not (np.all(dfx_values >= 0) or np.all(dfx_values <= 0)):
    print(f"f'(x) doesn't have constant sign on [{a:.2f},
{b:.2f}]")
    return False, None, None

if not (np.all(d2fx_values >= 0) or np.all(d2fx_values <=
0)):
    print(f"f''(x) doesn't have constant sign on [{a:.2f},
{b:.2f}]")
    return False, None, None
```

Обираємо початкове наближення

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 5.875, \text{ на інтервалі } [4.75; 7]$$

Та перевіряємо на умову: $f'(x_0)f''(x_0) > 0$

Починаємо ітераційний процес:

Iteration process

-			
Iter	x_n	f(x_n)	x_{n+1}
	f(x_{n+1})		

-			
1	5.875000	17.294922	5.263805
	3.740756		
2	5.263805	3.740756	5.131608
	1.720137		
3	5.131608	1.720137	5.070819
	0.890303		

4	5.070819	0.890303	5.039356
	0.484722		
5	5.039356	0.484722	5.022226
	0.270674		
6	5.022226	0.270674	5.012660
	0.153210		
7	5.012660	0.153210	5.007246
	0.087373		
8	5.007246	0.087373	5.004158
	0.050038		
9	5.004158	0.050038	5.002390
	0.028726		
10	5.002390	0.028726	5.001375
	0.016513		
11	5.001375	0.016513	5.000791
	0.009500		
12	5.000791	0.009500	5.000456
	0.005468		

-

Final approximation: $x^* = 5.00046$

=====
=

FINAL RESULTS

=====
=

Root found: $x^* = 5.00045554$

Verification: $f(x^*) = 0.00546810$

Iterations: 12

Отже, отримані результати демонструють, що реалізований алгоритм модифікованого методу Ньютона коректно знайшов розв'язок рівняння з заданою точністю ε

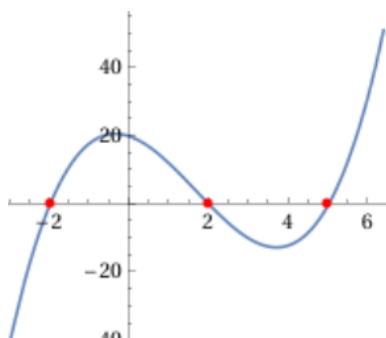
Метод простої ітерації

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$$

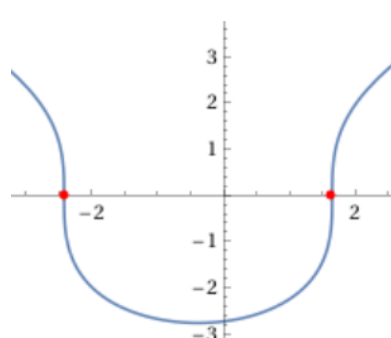
$$\varphi(x) = \sqrt[3]{5x^2 + 4x - 20}$$

$$\varphi'(x) = \frac{10x+4}{3\sqrt[3]{(5x^2+4x-20)^2}}$$

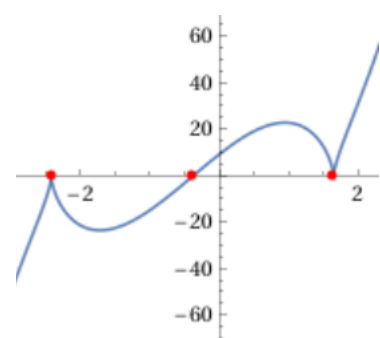
$f(x)$:



$\varphi(x)$:



$\varphi'(x)$:



Функція для методу простої ітерації:

```
def method_of_simple_iteration(f, phi, dphi, a, b, eps)->
tuple[bool, float, float, int]:
```

Рівняння має 3 дійсних корені. Обираємо інтервал що містить корінь: $[1;6]$. Якщо на вибраному інтервалі існує кілька розв'язків, програма автоматично звужує інтервал і вибирає той відрізок, який містить єдиний корінь для подальшої роботи алгоритму.

```

SIMPLE ITERATION METHOD
=====
Equation: f(x) = x**3 - 5*x**2 - 4*x + 20
epsilon = 0.001
=====

Finding interval containing root
-----
Root found in interval [3.50, 6.00]
Working interval: [3.50, 6.00]

```

Як бачимо, функція скоротила інтервал до [3.5;6]

Обираємо функцію $\phi(x)$

Знаходимо $x_0 = \frac{a+b}{2} = 4.75$

Знаходимо δ : $\delta = \max(|x_0 - a|, |b - x_0|) = 1.250$

Перевіримо достатні умови збіжності:

- $\max_{x \in S} |\phi'(x)| \leq q < 1$
- $|\phi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta$

```

Checking convergence conditions

First condition satisfied: q = max|phi'(x)| = 0.896 < 1

Second condition: |phi(x0) - x0| <= (1-q)*delta
|4.82 - 4.75| <= (1-0.896)*1.250
0.068 <= 0.130

Second condition satisfied!

```

Достатні умови виконуються, отже виконуємо ітераційний процес:

Iteration process

Iter	x_n	x_{n+1}	f(x_{n+1})
1	4.7500	4.8176	-3.5039
2	4.8176	4.8674	-2.6111
3	4.8674	4.9039	-1.9273

4	4.9039	4.9304	-1.4128
5	4.9304	4.9497	-1.0305
6	4.9497	4.9637	-0.7489
7	4.9637	4.9738	-0.5429
8	4.9738	4.9811	-0.3928
9	4.9811	4.9864	-0.2838
10	4.9864	4.9902	-0.2048
11	4.9902	4.9929	-0.1477
12	4.9929	4.9949	-0.1065
13	4.9949	4.9963	-0.0768
14	4.9963	4.9974	-0.0553
15	4.9974	4.9981	-0.0398

Final approximation: $x^* = 4.99810$

=====

=

FINAL RESULTS

=====

=

Root found: $x^* = 4.99810108$

Prior estimate: 60.0

Posteriori estimate: 15

Отримані результати показують, що реалізований алгоритм методу простої ітерації забезпечив збіжність до розв'язку з заданою точністю ε