

Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2  
з курсу  
**«Управління динамічними системами»**  
на тему:  
**«Аналітичне конструювання регуляторів.  
Побудова фазових портретів»**

Виконав:

студент групи ІПС-21

факультету комп'ютерних наук та кібернетики

**Тесленко Назар Олександрович**

Київ – 2024

## Зміст

Умова задачі згідно з варіантом.....	3
Представлення розв’язку аналітично (в зошиті).....	4
Код програми (Sage).....	6
Результат роботи програми (Sage).....	7
Код програми (Mathematica).....	8
Результат роботи програми (Mathematica).....	9
Код програми (MatLab).....	10
Результат роботи програми (MatLab).....	11

### Умова задачі згідно з варіантом

- Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Розв'язати задачу аналітичного конструювання регуляторів, обравши одне керування з знайдених можливих. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Зобразити фазові портрети особливих точок розімкненої системи та побудованої замкненої системи за допомогою програмних пакетів (бажано Sage). Траєкторії, сепаратиси, ізокліни (де треба) – різний колір та товщина.

#### Варіант №3

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

## Лабораторна робота № 2

Гіссянко Іларі

Варіант 6

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2$$

Людина спектра:

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0 \quad \text{rang}(A - \lambda E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Людина спектра - нестійкий вироджений вузол.

Фазовий портрет:



$$\text{Знайти } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + Bu$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + u_1 + 2u_2 \\ \dot{y} = y - x + 6u_2 \end{cases}$$

$$u = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = (A + BC) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 \\ 0 & 6c_2 \end{pmatrix}$$

$$A + BC = \begin{pmatrix} 3+c_1 & 2c_2+1 \\ -1 & 6c_2+1 \end{pmatrix}$$

Потрібно щоб розв'язок даної системи був асимпт. стійким.

$$\det(A + BC - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3+c_1-\lambda & 2c_2+1 \\ -1 & 6c_2+1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda \underbrace{(3+c_1+6c_2+1)}_K + \underbrace{(3+c_1)(6c_2+1) + (2c_2+1)}_K = 0$$



За матрицю Гурвіца:

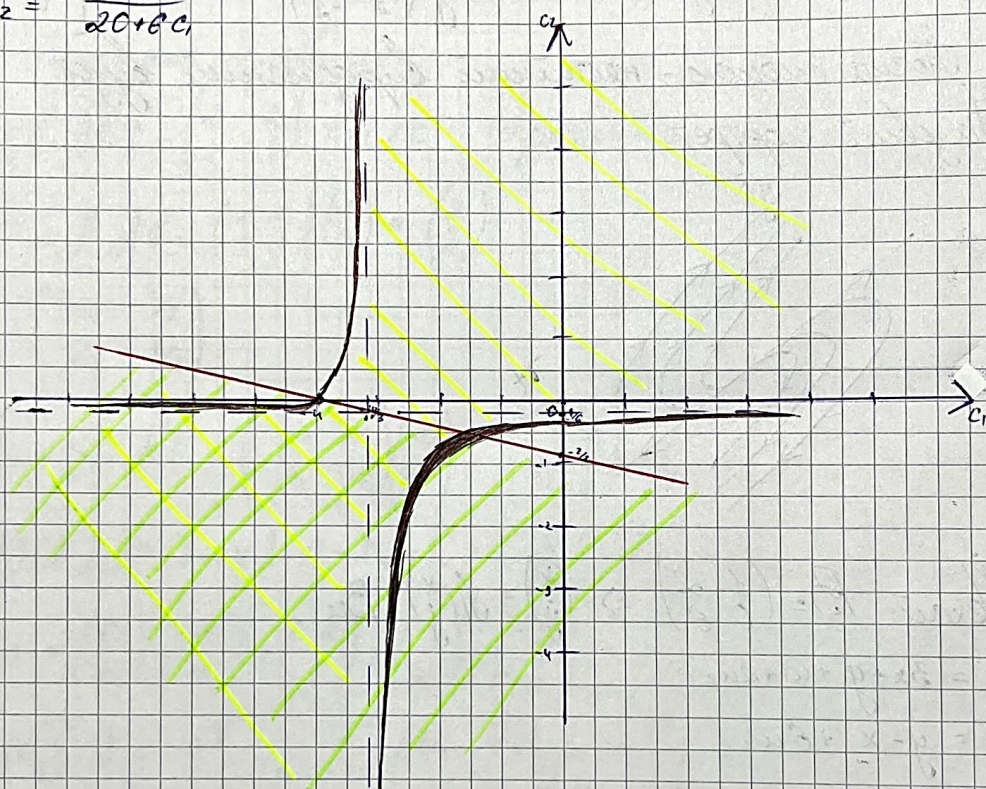
$$H_2 = \begin{vmatrix} -(3+c_1+6c_2+1) & 1 \\ 0 & (3+c_1)(6c_2+1)+(2c_2+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1+6c_2+4) > 0 & c_2 < \frac{-c_1-4}{6} \\ a_2 = -(c_1+6c_2+4)(3+c_1)(6c_2+1)+(2c_2+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -c_1-6c_2-4 > 0 \\ a_2 = (3+c_1)(6c_2+1)+(2c_2+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \neq -\frac{10}{3} \\ c_2 \neq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$c_2 = -\frac{4+c_1}{20+6c_1}$$



Оберемо т. виходу з результатів графіку:  
т.  $M(-6; -2)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow |A+BC - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 \\ -1 & -11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 14\lambda + 30$$

$$\lambda_{1,2} = -7 \pm \sqrt{19}$$



Стан рівноваги - стійкий вузол ( $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ )

Сматриваємо:

$$\lambda_1 = -4 - \sqrt{19} : \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{19} & -3 \\ -1 & -(4 + \sqrt{19}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 - \sqrt{19} & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{y = \frac{x}{-4 - \sqrt{19}}} \quad \begin{pmatrix} -15; 1,79449 \\ 15; -1,79449 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -4 + \sqrt{19} : \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{19} & -3 \\ -1 & -(4 - \sqrt{19}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 + \sqrt{19} & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{y = \frac{x}{-4 + \sqrt{19}}} \quad \begin{pmatrix} -15; -41,79449 \\ 15; 41,79449 \end{pmatrix}$$

Знайдемо ізольовані:

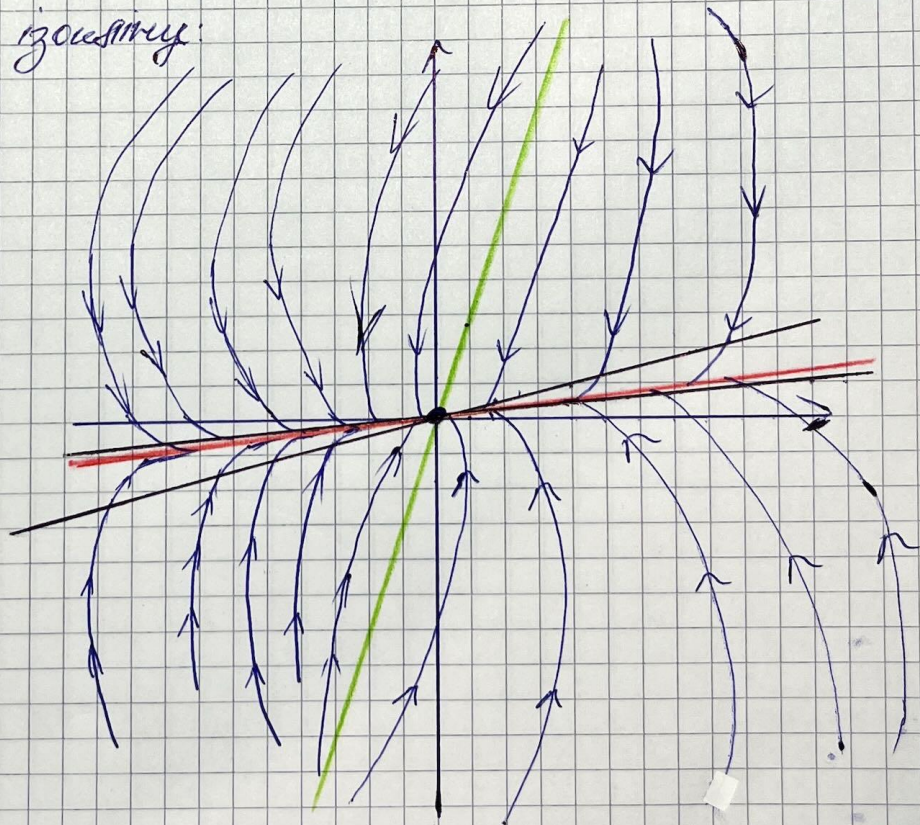
$$y' = 0:$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - 11y}{-3x - 2y} = 0$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{11}x}$$

$$y' = 1:$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x}$$



Код програми для розімкненої та замкнутої систем (Sage)

# Розімкнена система

```
x, y = var('x y')
```

```
f(x, y) = 3*x + y
```

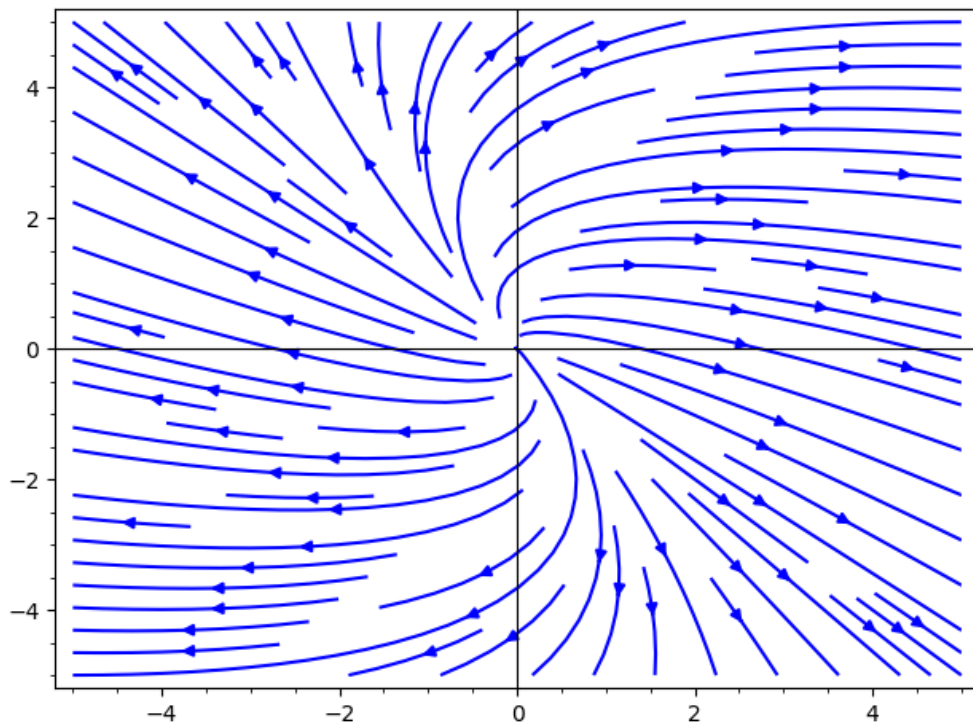
```
g(x, y) = y - x
```

# Побудова фазового портрету з використанням streamline\_plot для вашої системи

```
s = streamline_plot((f, g), (x, -5, 5), (y, -5, 5), density=1, plot_points=1000, color='blue')
```

# Відображення результату

```
show(s, xmin=-5, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```



#Замкнена система

```
x,y=var('x,y')
```

```
f(x,y)=-3*x-3*y
```

```
g(x,y)=-x-11*y
```

```
#сепаратриси та ізокліна
```

```
separatrix1 = line([(-15,1.79449), (15,-1.79449)],
```

```
rgbcolor=Color('red'),thickness=3, legend_label = 'Separatrix1')
```

```
separatrix2 = line([(-15,-41.79449), (15,41.79449)], rgbcolor=Color('green'),  
thickness=3,legend_label = 'Separatrix 2')
```

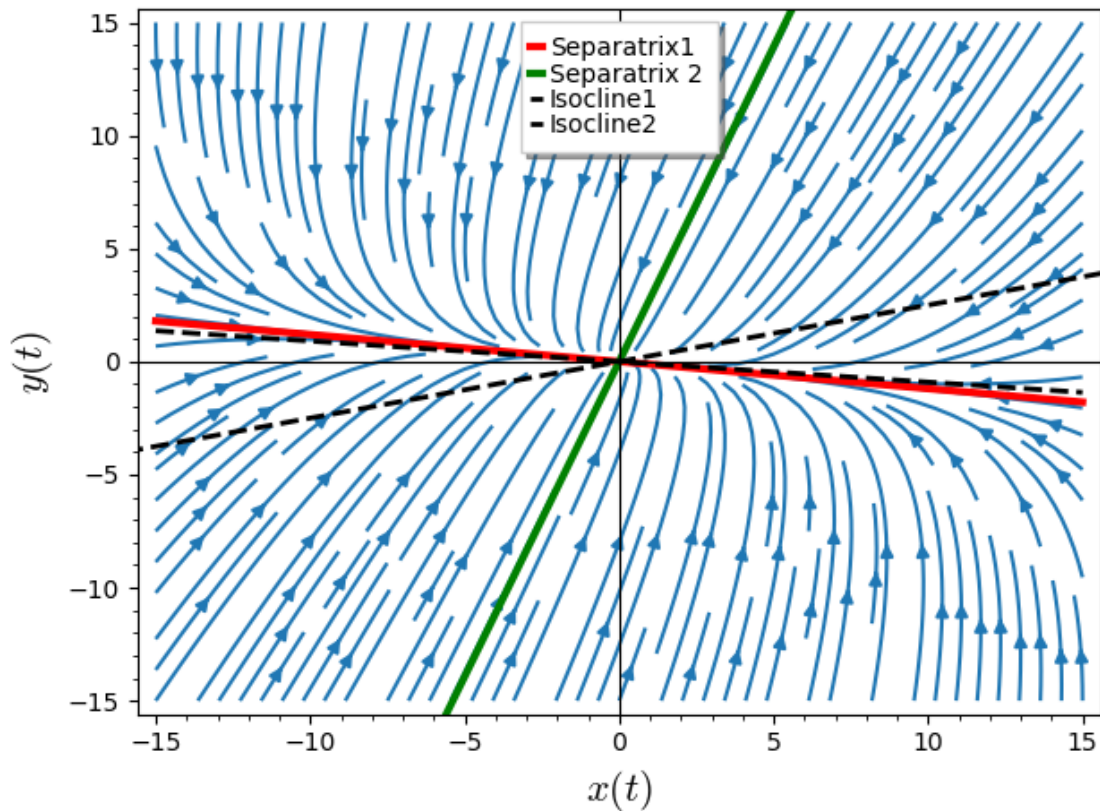
```
isocline = line([(-15,15/11), (15,-15/11)], rgbcolor=Color('black'),  
thickness=2, linestyle ='dashed', legend_label = 'Isocline1')
```

```
isocline1 = line([(-16,-4), (16,4)], rgbcolor=Color('black'),  
thickness=2, linestyle ='dashed', legend_label = 'Isocline2')
```

```
streamline_plot((f,g), (x, -15, 15), (y, -15, 15), density=1.5, xmin=-15,  
xmax=15, ymin=-15, ymax=15,
```

```
axes_labels =["$x(t)$", "$y(t)$"]) + separatrix1 + separatrix2 +  
isocline+isocline1
```





### Код програми для розімкненої та замкнутої систем (Mathematica)

#### #Розімкнена система

$f[x_, y_] := 3x + y$

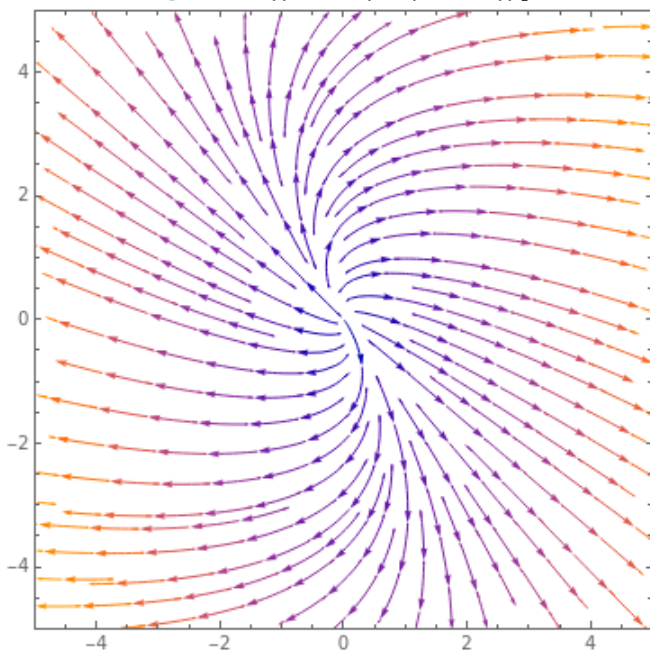
$g[x_, y_] := y - x$

(\* Побудова фазового портрету з правильними параметрами \*)

`StreamPlot[f[x, y], g[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5},`

`StreamColorFunction -> "BlueGreen",`

`PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}`]





### #Замкнена система

$f[x_, y_] := -3*x - 3*y$

$g[x_, y_] := -x - 11*y$

(\* Побудова сепаратрис та ізоклін \*)

separatrix1 = Graphics[{Red, Thick, Line[{{-15, 1.79449}, {15, -1.79449}}]}];

separatrix2 = Graphics[{Green, Thick, Line[{{-15, -41.79449}, {15, 41.79449}}]}];

isocline = Graphics[{Black, Dashed, Thick, Line[{{-15, 15/11}, {15, -15/11}}]}];

isocline1 = Graphics[{Black, Dashed, Thick, Line[{{-16, -4}, {16, 4}}]}];

(\* Побудова фазового портрету з StreamPlot та додавання ліній \*)

streamPlot = StreamPlot[{f[x, y], g[x, y]}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15},

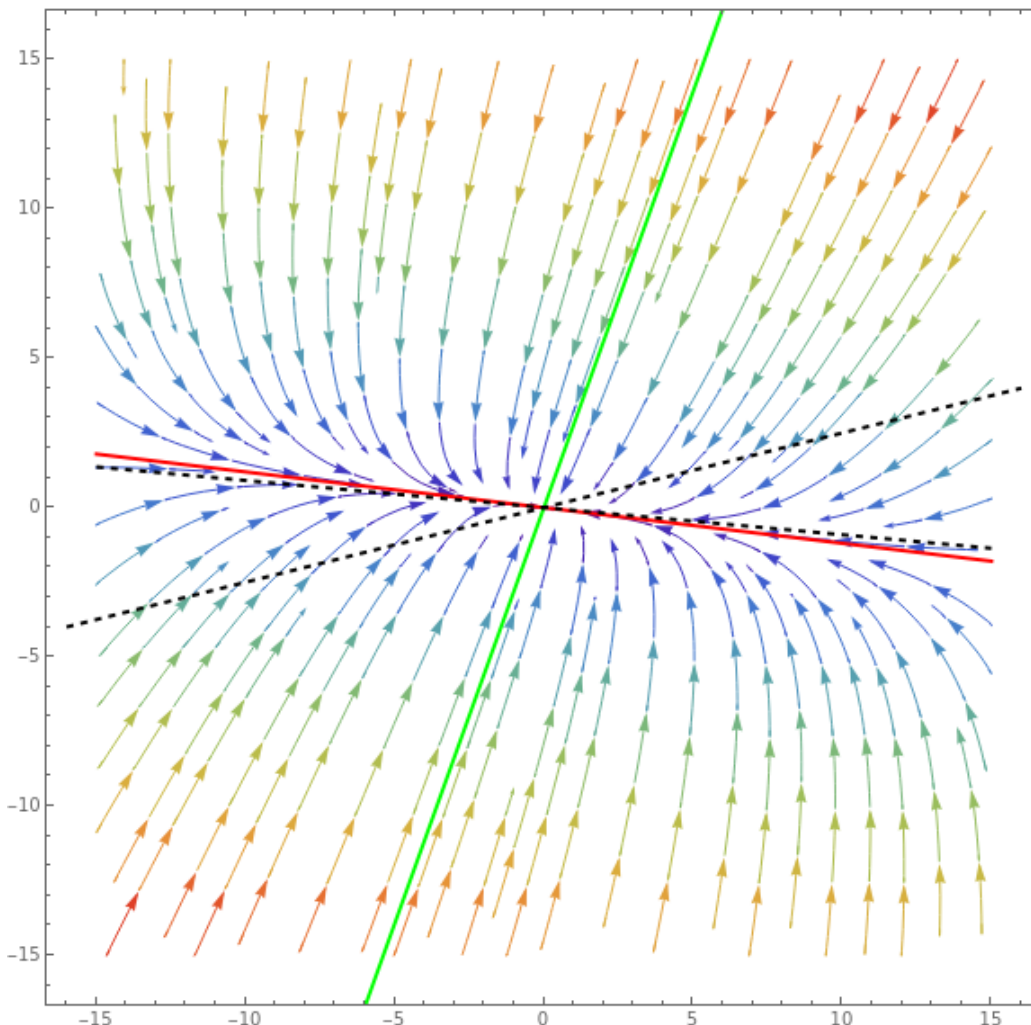
StreamColorFunction -> "Rainbow",

AxesLabel -> {"x(t)", "y(t)"}]

Show[streamPlot, separatrix1, separatrix2, isocline, isocline1,

PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}},

ImageSize -> Large]



## Код програми для розімкненої та замкненої систем (MatLab)

### #Розімкнена система

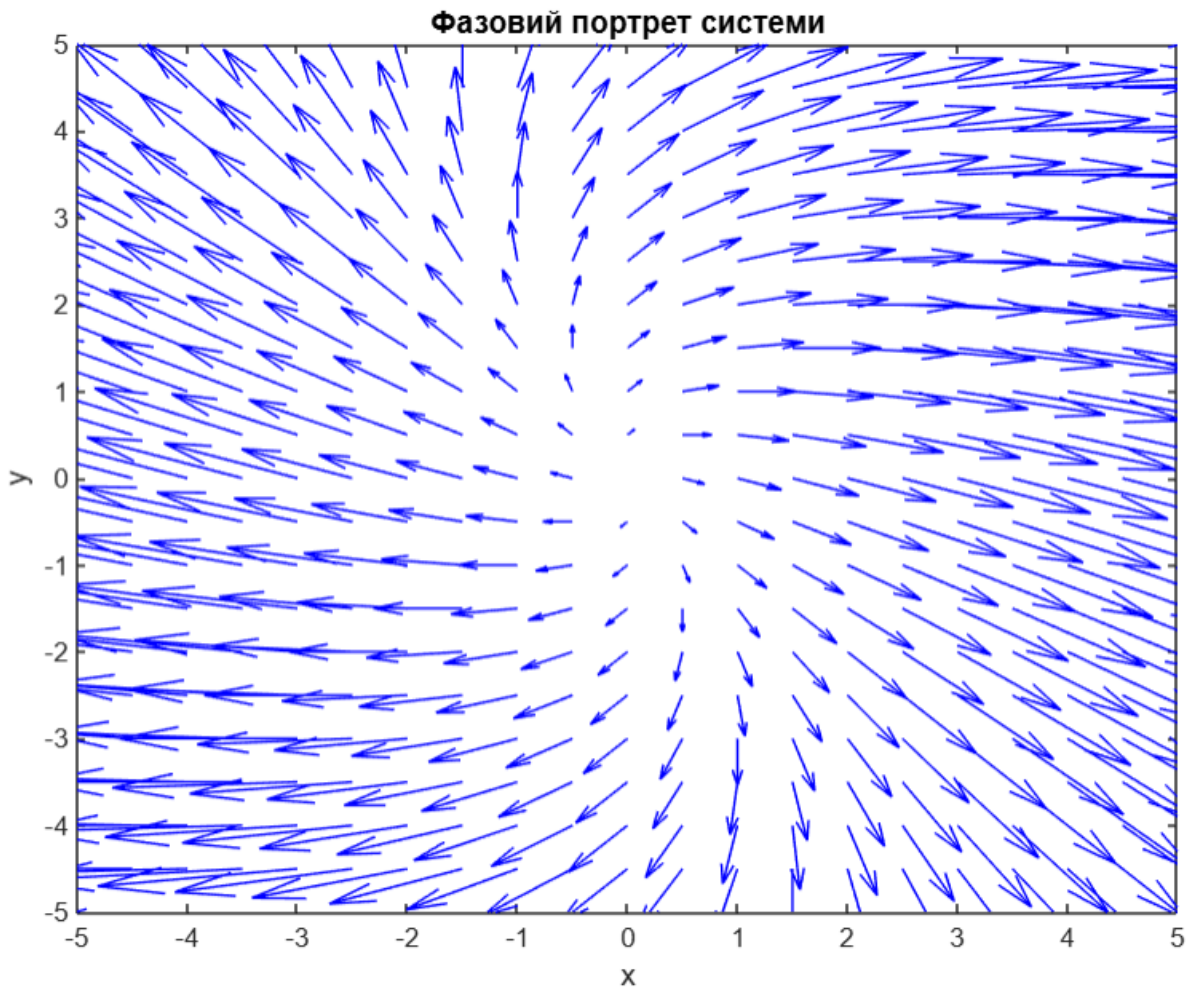
% Визначення сітки з більшим кроком для меншої кількості стрілок

```
[x, y] = meshgrid(-5:0.5:5, -5:0.5:5);  
u = 3*x + y;  
v = y - x;
```

% Масштабування стрілок  
scaleFactor = 4;

```
figure;  
quiver(x, y, u, v, scaleFactor, 'b');
```

% Налаштування меж та підписів осей  
xlim([-5, 5]);  
ylim([-5, 5]);  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
title('Фазовий портрет системи');



## #Замкнена система

```
% Визначення сітки для фазового портрету
[x, y] = meshgrid(-15:1:15, -15:1:15);
% Визначення функцій для замкнутої системи
u = -3*x - 3*y;
v = -x - 11*y;

% Масштабування стрілок (для бажаного розміру)
scaleFactor = 2;
figure;
quiver(x, y, u, v, scaleFactor, 'Color', [0.3, 0.3, 1]);

hold on;

% Сепаратиси
plot([-15, 15], [1.79449, -1.79449], 'r', 'LineWidth', 3, 'DisplayName', 'Separatrix 1');
plot([-15, 15], [-41.79449, 41.79449], 'g', 'LineWidth', 3, 'DisplayName', 'Separatrix 2');
% Ізокліни
plot([-15, 15], [15/11, -15/11], 'k--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Isocline 1');
plot([-16, 16], [-4, 4], 'k--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Isocline 2');
% Налаштування осей та відображення легенди
xlim([-15, 15]);
ylim([-15, 15]);
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex');
legend('show');
title('Фазовий портрет замкнутої системи');
hold off;
```

