# ЛЕКЦІЯ 1(Б).

## Передумови створення аксіоматики теорії ймовірностей

1. Операції над випадковими подіями. 2. Принцип повторювальності, частота випадкової події. 3. Властивості частоти. 4. Класичне визначення ймовірності. 5. Приклади використання класичного визначення. 6. Ймовірності на злічених просторах елементарних наслідків.

### 1. *Операції над випадковими подіями.*

Ми встановили, що з кожним стохастичним експериментом можна пов'язати простір елементарних наслідків $\Omega$, а кожну можливу в цьому експерименті випадкову подію $A$ ототожнити з підмножиною $\Omega$ сприятливих для неї елементарних наслідків $A \subseteq \Omega$. Зробимо тепер наступний крок:

- Оскільки ми домовились вважати випадкові події *підмножинами* простору елементарних наслідків, то над ними можна виконувати всі *операції* і дії, притаманні множинам.

Таким чином можемо сформулювати наступні визначення.

✓ *Сума* подій $A$ та $B$, це *подія* $A \bigcup B$, яка, відбувається тоді і тільки тоді, коли відбудеться або подія $A$, або подія $B$.

Приведемо кілька очевидних співвідношень для суми подій:

$$A \cup \varnothing = A,\ A \cup \Omega = \Omega.$$

Подібним чином визначається сума довільної скінченої $\{A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$, або нескінченої $\{A_i,\ i = 1, 2, ..., \}$ кількості подій і використовуються наступні позначення:

- Для скінченої суми $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$ ;
- Для нескінченої суми $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots$ .

✓ *Добуток* подій $A$ та $B$, це *подія* $A \bigcap B$, яка, відбувається тоді і тільки тоді, коли відбудуться одночасно і подія $A$ і подія $B$.

Приведемо кілька очевидних співвідношень для добутку подій:

$$A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap \Omega = A.$$

Подібно як у випадку суми можна визначити добуток довільної скінченої $\{A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$, або нескінченої $\{A_i,\ i = 1, 2, ..., \}$ кількості подій:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n \text{ , та } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots .$$

При цьому, подібно як в теорії множин, операції суми та добутку є дистрибутивними, тобто:

$$A \bigcap \left( \bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i \left( A \bigcap B_i \right),\ A \bigcup \left( \bigcap_i B_i \right) = \bigcap_i \left( A \bigcup B_i \right).$$

- ✓ *Різницею* подій *A* та *B*, називаємо *подію* $A \setminus B$, яка, відбувається тоді і тільки тоді, коли *відбувається* подія *A* і одночасно *не відбувається* подія *B*.
- ✓ *Імплікація*, або *наслідування* $A \subset B$ подій *A* та *B* означає, що реалізація події *A* *призводить* до реалізації події *B* (подія *A* є *частиною* події *B*).

Очевидно, що для довільної події *A*:

$$A \subset \Omega,\ \varnothing \subset A.$$

Крім того, якщо $C \subset (A \cap B)$, то $C \subset A$ і $C \subset B$.

- ✓ Події *A* та *B*, називаємо *несумісними*, якщо $A \cap B = \varnothing$.
- ✓ *Запереченням* події *A*, або подією, *протилежною* до події *A*, називаємо подію $\overline{A}$, яка відбувається тоді, коли *A* *не відбувається*.

Безпосередньо з визначення отримаємо:

$$\overline{A} = \Omega \setminus A;\ A \cup \overline{A} = \Omega;\ A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

З величезної кількості різноманітних властивостей та співвідношень (для запроваджених щойно операцій над випадковими подіями), встановлених в теорії множин, пригадаємо правила де Моргана:

- Протилежною до *добутку* буде сума *протилежних*:

$$\Omega \setminus \left( \bigcap_i A_i \right) = \bigcup_i \left( \Omega \setminus A_i \right);$$

- Протилежною до *суми* буде добуток *протилежних*:

$$\Omega \setminus \left( \bigcup_i A_i \right) = \bigcap_i \left( \Omega \setminus A_i \right).$$

## 2. *Принцип повторювальності, частота випадкової події.*

Головним припущенням на фундаменті якого збудована теорія ймовірностей є *принцип повторювальності*. Це означає, що:

- Будь який стохастичний експеримент, що вивчається, може бути відновлений і незалежно від попередніх його реалізацій повторений в незмінних умовах довільну кількість разів.

Припустимо, що користуючись приведеним щойно головним принципом теорії ймовірностей, повторюємо в незмінних умовах певний стохастичний експеримент.

Пов’язуємо з тим експериментом деяку випадкову подію *A* і спостерігаємо, чи відбулась вона в черговому повторенні, чи ні.

Наприклад:

- Кидаємо гральний кубик, та спостерігаємо, чи ні з’явилася «6», чи ні.

В цьому прикладі стохастичний експеримент – це кидання грального кубика, а випадкова подія:

*A* = {*результатом кидання буде* «6»).

Припустимо, що експеримент був повторений $n$ разів і при цьому кількість дослідів, в яких подія $A$ відбулась, дорівнює $\mu_n(A)$.

В прикладі з киданням грального кубика це кількість отриманих результатів «6» протягом $n$ послідовних кидань кубика.

- *Частотою випадкової події* $A$ називається відношення:

$$\nu_n(A) = \frac{\mu_n(A)}{n}.$$

Очевидно, що до закінчення всієї серії з $n$ повторень експерименту неможливо сказати, яке *точно* буде значення $\mu_n(A)$, а отже і $\nu_n(A)$. Тим не менше, досвід показує, що в природі існує певна *закономірність*. Закономірність ця дістала назву *стійкості частот* і полягає на тому, що:

- В великих серіях (тобто тоді, коли $n$ дуже велике) частота $\nu_n(A)$ мало відрізняється від деякого числа $p$, тобто:

$$\nu_n(A) \approx p.$$

Більше того:

- При *збільшенні* $n$ різниця ця (як правил), *зменшується*.

Закономірність ця була помічена дуже давно і багато вчених, зокрема математиків, цікавились нею і перевіряли дослідним шляхом.

Підтвердженням цього є наступна таблиця, яку з давніх часів наводять багато авторів. В ній розміщені результати трьох експериментів пов'язаних з киданням симетричної монети. Варто зауважити, що кожен може доповнити її своїм власним, подібним експериментом і переконатись, що наведена закономірність є свого роду «*об'єктивним законом*», тобто напевно *підтверджується*.

| Дослідник | Кількість кидань | Кількість появ «О» | Частота |
|---|---|---|---|
| Ж. Бюффон | 4040 | 2048 | 0,5080 |
| К. Пірсон | 12000 | 6019 | 0,5016 |
| К. Пірсон | 24000 | 12012 | 0,5005 |

Очевидно також, що таким числом $p$ про яке говориться в закономірності стійкості, та від якого мало відрізняється частота $\nu_n(A)$, в цьому прикладі є $p = 0{,}5$.

Число $p$ можна вважати *ймовірністю* випадкової події $A$, а все сказане може бути використане на підтвердження *гіпотези*, що:

- Ймовірність випадкової події *об'єктивно існує*.

### 3. *Властивості частоти.*

Частота $\nu_n(A)$ випадкової події $A$ може розглядатися як *природня інтерпретація* ймовірності цієї події. Варто підкреслити, що в математичній формалізації теорії ймовірностей ці *евристичні* міркування і описове формулювання принципу *стійкості частот* приймають кшталт чіткого і строгого математичного твердження. В «*Теорії ймовірностей*» це один із ключових математичних результатів – *Закон Великих Чисел*.

На закінчення цього параграфу приведемо без яких-небудь доведень кілька очевидних властивостей частоти $\nu_n(A)$ випадкової події $A$.

- Частота $\nu_n(A)$ будь якої випадкової події $A$ є невід'ємним числом:

$$\nu_n(A) \geq 0.$$

- Частота $\nu_n(\Omega)$ певної події $\Omega$ дорівнює 1:

$$\nu_n(\Omega) = 1.$$

- Якщо події $A$ та $B$ – *несумісні*, тобто $A \bigcap B = \varnothing$, то

$$\nu_n(A \bigcup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

(оскільки очевидно, що $\mu_n(A \bigcup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)$).

## 4. *Класичне визначення ймовірності.*

Класичне визначення ймовірності було сформульоване в 1812 р. Лапласом. Цим визначенням можна користатись для знаходження ймовірностей випадкових подій у найпростіших стохастичних експериментах. А саме:

1. Припустимо, що простір елементарних подій є скінченою множиною, що складається з $n$ наслідків: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
2. Всі наслідки – рівно можливі, тобто так само правдоподібні.

На практиці це означає, що нема підстав вважати одні серед них більш ймовірними в порівнянню з іншими.

- Якщо кількість сприятливих для випадкової події $A$ наслідків дорівнює $m$, то згідно з класичним визначенням ймовірність $P(A)$ випадкової події $A$ обчислюємо за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Іншими словами, ймовірність випадкової події $A$ дорівнює відношенню кількості сприятливих для неї наслідків до загальної їх кількості.

## 5. *Приклади використання класичного визначення.*

**Приклад 1.** ***Кидання грального кубика.***

Знайдемо ймовірність наступної випадкової події:

$A$ = {результатом кидання грального кубика буде парне число}.

Простір елементарних наслідків в цьому експерименті $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ налічує $n = 6$ наслідків. Сприятливими для події $A$ є наступні наслідки:

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Тобто $m = 3$, а отже згідно з класичним визначенням ймовірність:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Легко пересвідчитись у тому, що обчислена згідно з класичним визначенням ймовірність $P(A)$ випадкової події $A$ має наступні властивості:

- Оскільки $m \geq 0$, а $n > 0$, то $P(A) = \dfrac{m}{n} \geq 0$.
- Оскільки у випадку певної події $\Omega$ $m = n$, то $P(\Omega) = \dfrac{n}{n} = 1$.
- Якщо події $A$ та $B$ – несумісні, тобто $A \cap B = \varnothing$, то у них немає спільних сприятливих наслідків. Таким чином, якщо $m_A$ та $m_B$ кількість сприятливих наслідків відповідно для випадкових подій $A$ та $B$, то подія $(A \cup B)$ буде мати $(m_A + m_B)$ сприятливих наслідки. Таким чином:

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Порівнюючи їх з властивостями частоти $\nu_n(A)$ випадкової події $A$, переконуємось в їх ідентичності.

**Зауваження.** Використання на практиці класичного визначення ймовірності зводиться, як правило, до розв'язування двох комбінаторних задач:

- Перша з них – загальна кількість $n$ всіх наслідків простору $\Omega$.
- Друга – кількість $m$ сприятливих для випадкової події $A$ наслідків.

Найважче при цьому забезпечити виконання другої умови визначення – щоб всі наслідки були рівно можливі. Тобто необхідно таким чином описати всі можливі елементарні події, щоб були вони так само правдоподібні, а це не завжди є простим завданням.

Підтвердженням цього можуть служити наступні *курйозні* випадки, що трапились зі славетними вченими.

**Приклад 2.** З іменем Д'Аламбера пов'язують розв'язок наступної задачі:

- Знайти ймовірність того, що при двох киданнях монети принаймні один раз з'явиться «*Орел*».

У виданій в 1754 р. Енциклопедії в статті під назвою «*Орел та решка*» Д'Аламбер навів наступний розв'язок:

  - Можливі тільки три результати в такому стохастичному експерименті, а саме - «*Орел – Орел*»; «*Орел – Решка*»; «*Решка – Решка*». Тому на його думку ймовірність цієї події дорівнює 2/3, оскільки *серед трьох* наслідків *є два*, де з'являється «*Орел*».

Помилка Д'Аламбера полягає в тому, що він вважав ці три наслідки рівнозначними, хоч це не так. Очевидно, що наслідки:

«*Орел – Орел*» та «*Орел – Решка*»

не являються так само правдоподібні. Розглядаючи другий з них треба ще враховувати *черговість їх появи*. Такий самий результат отримаємо і у випадку «*Решка – Орел*». Тому фактично в експерименті, який вивчається, треба розглядати, як різні, *чотири наслідки*:

«*Орел – Орел*»; «*Орел – Решка*»; «*Решка – Орел*»; «*Решка – Решка*».

Саме такі наслідки будуть рівнозначними. Серед них сприятливих для даної випадкової події *буде три*. А отже її *ймовірність дорівнює* 3/4.

**Приклад 3.** Наступна задача пов'язана з іменем Галілео Галілея.

Дуже популярними за часів Галілео Галілея були гральні кубики. Існує легенда згідно з якою азартні гравці звернулись до нього з питанням:

- При киданні ***двох*** кубиків суму очок 9 та 10 можна було отримати ***двома*** способами. Для 9 це результати: 9 = 3 + 6 = 5 + 4. Для 10 відповідно: 10 = 4 + 6 = 5 + 5.
- При киданні ***трьох*** кубиків суму очок 9 та 10 можна було отримати ***шістьма*** способами. Для 9 це результати:

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3;$$

Для 10 відповідно:

$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4.$$

Тому ці результати повинні були б з'являтись під час гри *так само часто*.

Досвід, однак показував щось інше:

- При киданні ***двох*** кубиків сума очок 9 з'являлася під час гри частіше, ніж 10.
- В той же час при киданні ***трьох*** кубиків відбувалось супротивне – сума очок 10 з'являлася частіше, ніж 9. ***Чому***?

Щоб дати відповідь Галілео Галілей змушений був написати статтю під назвою: «*Про випадання очок під час гри в кубика*», яка була опублікована між 1613 та 1624 р.

Але, як виявилось, не був він першим, хто зайнявся цим питанням. Майже 100 років раніше зробив це Кардано. Більше того, саме книжка Кардано «*Книжка про гру в кубика*», де знаходиться його розв'язок, вважається історично першою книжкою з області торії ймовірностей. Правда *надрукована* вона була аж в 1663 р.

Кардано, подібно як і Галілео Галілей, звернули увагу на необхідність виділяти *послідовність* появи чергових результатів окремих кидань кубика. Так наприклад у випадку ***двох*** кубиків результати «5 + 4» та «5 + 5» нерівнозначні: перший з них можна отримати двома способами «5 + 4» та «4 + 5», в той час як другий тільки одним «5 + 5».

Правильний розв'язок виглядає наступним чином.

**Кидання *двох* кубиків:** Простором елементарних наслідків є наступна множина $\Omega = \{(i, j), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, яка складається з $n = 36$ пар $(i, j)$. Перше число $i$ вказує кількість очок на *першому* кубику; відповідно $j$ – на *другому*. При такому визначенні простору $\Omega$ всі його елементи будуть так само можливі.

- Для випадкової події $A_{(9)}$ = { сума очок дорівнює 9} сприятливих буде $m_{(9)} = 4$ наслідки: $\{(3, 6), (6, 3), (5, 4), (4, 5)\}$. А отже

$$P(A_{(9)}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

- Для випадкової події $A_{(10)}$ = { сума очок дорівнює 10} сприятливих буде $m_{(10)} = 3$ наслідки: {(4, 6), (6, 4), (5, 5)}. А отже:

$$P(A_{(10)}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

**Кидання *трьох* кубиків:** Подібні міркування приводять до наступних результатів: Простором елементарних наслідків: $\Omega = \{(i, j, k), i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, яка складається з $n = 216$ наборів $i, j, k$). Для випадкової події $B_{(9)}$ = { сума очок дорівнює 9} сприятливих буде $m_{(9)} = 25$ наслідків: {(1, 2, 6), (1, 6, 2), (6, 1, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 2, 1), (2, 2, 5), (2, 5, 2), (5, 2, 2), (1, 3, 5), (1, 5, 3), (5, 1, 3), (3,1, 5), (3, 5, 1), (5, 3, 1), (1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (4, 2, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 3, 2), (3, 3, 3)}. А отже

$$P(B_{(9)}) = \frac{25}{216}.$$

Для випадкової події $B_{(10)}$ = { сума очок дорівнює 10} сприятливих буде $m_{(10)} = 27$ наслідків: {(1, 3, 6), (1, 6, 3), (6, 1, 3), (3, 1, 6), (3, 6, 1), (6, 3, 1), (2, 2, 6), (2, 6, 2), (6, 2, 2), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (5, 1, 4), (4, 1, 5), (4, 5, 1), (5, 4, 1), (2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (2, 3, 5), (2, 5, 3), (5, 2, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 3, 2), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (4, 3, 3)}. А отже

$$P(B_{(10)}) = \frac{27}{216}.$$

Розглянемо ще кілька загальних *класичних моделей*, де використовується класичне визначення до розв'язування конкретних задач.

**Приклад 4.** Серед всіх п'ятицифрових натуральних чисел вибираємо випадково одне. Знайти ймовірності наступних подій:

$A$ = {запис цього числа *не має* цифри «5»}.

$B$ = {запис цього числа *не має однакових* цифр}.

**Розв'язок.** Побудуємо простір елементарних наслідків для цього стохастичного експерименту.

Його елементами будуть п'ятицифрові натуральні числа

$$k = i_1 i_2 i_3 i_4 i_5,$$

де $i_s$, $s = 1, 2, 3, 4, 5$ послідовні їх цифри.

Оскільки п'ятицифрове число не може розпочинатись цифрою «0», то для цифри $i_1$ маємо 9 можливих значень: від 1 до 9.

Для наступних чотирьох цифр $i_s$, $s = 2, 3, 4, 5$ можливі всі 10 значень: від 0 до 9.

Таким чином, використовуючи один з головних в комбінаториці: «*принцип множення*» приходимо до висновку, що простір елементарних наслідків $\Omega$ налічує:

$$n = 9{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10 = 90000$$

елементарних подій і має вигляд:

$$\Omega=\{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5),\ i_1 = 1, ..., 9;\ i_k = 0, 1, ..., 9,\ k = 2, 3, 4, 5\}.$$

Кількість $m_A$ сприятливих для випадкової події $A$ наслідків дорівнює:

$$m_A = 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^4.$$

Таким чином:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{8 \cdot 9^4}{90000} = 0{,}5832.$$

Кількість $m_B$ сприятливих для випадкової події $B$ наслідків дорівнює:

$$m_B = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$$

Таким чином:

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{27216}{90000} = 0{,}3024.$$

**Приклад 5.** З колоди карт, яка містить 52 карти, вибираємо випадково *чотири* карти. Знайти ймовірність наступної події:

$C$ = {Серед вибраних буде ***два короля***}.

**Розв'язок.** Простір елементарних наслідків $\Omega$ налічує

$$n = C_{52}^4 = \frac{52!}{4!{\cdot}48!} = \frac{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 270725$$

елементарних подій. Для того, щоб утворити сприятливий для випадкової події $C$ наслідок необхідно: спочатку вибрати серед чотирьох королів – двох, що можна зробити $C_4^2$ різними способами; gотім з 48 карт, які залишились, вибрати ще дві. Це можна зробити $C_{48}^2$ різними способами.

Використаємо, як і в попередньому прикладі, «*принцип множення*» комбінаторики і знайдемо кількість $m_C$ сприятливих для випадкової події $C$ наслідків:

$$m_C = C_4^2 \cdot C_{48}^2 = \frac{4!}{2!{\cdot}2!} \cdot \frac{48!}{2!{\cdot}46!} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{47 \cdot 48}{1 \cdot 2} = 6768.$$

Таким чином на підставі класичного визначення:

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{6768}{270725} = 0{,}025.$$

## 6. *Ймовірності на злічених просторах елементарних наслідків.*

Умови, що створюють можливість скористатись з класичного визначення, дуже жорсткі. Тому поле його застосування дуже обмежене. Серед чотирьох наведених раніше *найпростіших стохастичних експериментів* тільки для одного вони виконуються.

В другому прикладі множина $\Omega$ буде *нескінченою, зліченою множиною*, тобто не виконуються *обидва обмеження*. Як неодноразово підкреслювалось, навіть у випадку *скінчених просторів* елементарних наслідків необхідно уважно слідкувати, щоб всі вони були «*так само правдоподібні*». Тому для різноманітних стохастичних експериментів були створенні окремі, відповідні для них визначення ймовірності.

Наведемо кілька прикладів.

Припустимо, що простір елементарних наслідків – злічена множина:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\} = \{\omega_i, .i \in N\},$$

де $N$ означає множину натуральних чисел.

Тоді ймовірності пов'язаних з таким експериментом подій можна визначити наступним чином.

- Визначимо спочатку *ймовірність елементарних подій*, тобто кожному наслідку $\omega_i \in \Omega$ припишемо якесь додатне число $p_i > 0$, яке будемо вважати його ймовірністю:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i,\ i \in N.$$

- Оскільки P(Ω) = 1, то подбаємо, щоб $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Кожна пов'язана з цим експериментом подія $A$ є підмножиною Ω і може бути записана наступним чином:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\} = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots$$

де $i_1, i_2, \dots \in N$, а $\{\omega_{i_1}\}$, $\{\omega_{i_1}\}$, … – сприятливі для $A$ елементарні наслідки. Тому ймовірність події $A$ визначимо

- Як суму ймовірностей сприятливих для $A$ елементарних подій.

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\}) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots) = ..$$
$$= P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots$$

**Приклад 6**. Повернемось до прикладу 2 (**Лекція 1(А)**). В ньому простором елементарних подій була наступна множина:

$$\Omega = \{«6», «*6», «**6», \dots, «*\underset{k-1}{\dots}*6», \dots\},$$

яка описувала кількість кидання грального кубика до моменту появи результату «6». Для елементарного наслідку $\omega_k$ = «$*\underset{k-1}{\dots}*$6», який представляє результат експерименту, коли «6» з'явиться перший раз *точно* після $k$–го по порядку кидання грального кубика, необхідно прийняти:

$$p_k = P(\omega_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6},\ k = 1, 2, 3, \dots$$

В цьому виразі множник $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ визначає ймовірність того, що $(k-1)$ перших кидань не принесуть бажаного результату «6», а $\frac{1}{6}$ визначає ймовірність того, що на $k$ –му киданні з'явиться «6»-ка. Очевидно, що виконані умови:

1) $p_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

2) $\sum_1^\infty p_k = 1$

Наприклад, подія:

$B$ = {відбудеться ***не більше*** 4 кидань}

має наступні сприятливі наслідки:

$B$ = {«6», «*6», «**6», «***6»} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Тому:

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}5177.$$

Легко переконатись, що визначена таким чином ймовірність, подібно, як і у випадку класичного визначення, має наступні властивості:

- $P(A) \geq 0$ для довільної події $A \subseteq \Omega$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Якщо події $A$ та $B$ – несумісні, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.