ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2. (*Додаток*).

Аксіоматика теорії ймовірностей та передумови її створення.

1. Операції над випадковими подіями. 2. Класичне визначення ймовірності. 3. Ймовірності на злічених просторах елементарних наслідків. 4. Геометричне визначення ймовірності. 5. Приклади використання геометричного визначення. 6. Геометричні парадокси. 7. Формула повної ймовірності. 8. Формули Байєса.

1. *Операції над випадковими подіями.*

Приклад 1. Довести наступні рівності:

а)

$$A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B) = (A \bigcup B) \setminus B .$$

б)

$$A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C) .$$

***в*)**

$$(A \setminus C) \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus C .$$

Приклад 2. Нехай $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \Im$ – довільні випадкові подій.
Введемо послідовність випадкових подій $B_1, B_2, ... ,B_n, ... \in \Im$ наступним чином:

$$B_1 = A_1;$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1;$$
$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2); ...$$
$$...; B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}).$$

Довести наступні рівності:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ , та } B_k \cap B_l = \varnothing \text{ , якщо } k \neq l.$$

Приклад 3. Нехай

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, якщо\, \omega \in A, \\ 0, якщо\, \omega \notin A \end{cases}.$$

Функцію $\chi_A(\omega)$ називають індикатором події A.

Довести наступні рівності:

а)

$$\chi_{A \cap B}(\omega) = \chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega);$$

б)

$$\chi_{A \cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - \chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega);$$

***в*)**

$$\chi_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \chi_A(\omega) \cdot$$

***г*)**

$$\chi_{A \setminus B}(\omega) = \chi_A(\omega) \cdot (1 - \chi_B(\omega)) \cdot$$

Приклад 4. (*Верхня границя подій*)
Припустимо, що маємо послідовність випадкових подій:

$$A_i,\ i = 1, 2, ..., n, ... ,\ (A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \Im).$$

Верхньою границею послідовності подій $\{A_i,\ i = 1, 2, ..., n, ... \}$ називають таку подію A^*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли серед подій A_i *відбувається* ***нескінчена*** *їх кількість*.

Довести наступну рівність:

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m .$$

Приклад 5. (*Нижня границя подій*)
Припустимо, що маємо послідовність випадкових подій:

$$A_i,\ i = 1, 2, ..., n, ... ,\ (A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathfrak{I}).$$

Нижньою границею послідовності подій $\{A_i,\ i = 1, 2, ..., n, ... \}$ називають таку подію A_*, яка відбувається тоді і тільки тоді, *коли відбувається **всі події*** A_i, ***за винятком скінченої*** *їх кількості*.

Довести наступні рівності:

а)

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m .$$

б)

$$A_* \subseteq A^*.$$

2. *Класичне визначення ймовірності.*

Приклад 6. З іменем Д'Аламбера пов'язують розв'язок наступної задачі:
- Знайти ймовірність того, що при двох киданнях монети принаймні один раз з'явиться «*Орел*».

Відповідь: $P(A) = 3/4$ (Д'Аламбера, вважав що $P(A) = 2/3$).

Приклад 7. (*Кидання двох кубиків*) Наступні два приклади пов'язують з іменем Галілео Галілея.
1. Яка ймовірність того, що сума очок при киданні ***двох гральних кубиків*** дорівнює **9**?

Відповідь: $P(A_{(9)}) = P\{$сума очок дорівнює 9$\} = 1/9$

2. Яка ймовірність того, що сума очок при киданні ***двох гральних кубиків*** дорівнює **10**?

Відповідь: $P(A_{(10)}) = P\{$Сума очок дорівнює 10$\} = 1/12$

Приклад 8. (*Кидання трьох кубиків*)
1. Яка ймовірність того, що сума очок при киданні ***трьох гральних кубиків*** дорівнює **9**?

Відповідь: $P(A_{(9)}) = P\{$сума очок дорівнює 9$\} = 25/216$.

2. Яка ймовірність того, що сума очок при киданні ***трьох гральних кубиків*** дорівнює **10**?

Відповідь: $P(A_{(10)}) = P\{$сума очок дорівнює 9$\} = 27/216$.

Приклад 9. Серед всіх п'ятицифрових натуральних чисел вибираємо випадково одне. Знайти ймовірності наступних подій:

$A = \{$Запис цього числа *не має* цифри «5»$\}$.

$B = \{$Запис цього числа *не має однакових* цифр$\}$.

Відповідь: $P(A) = 0{,}5832$; $P(B) = 0{,}3024$.

Приклад 10. З колоди карт, яка містить 52 карти, вибираємо випадково *чотири* карти. Знайти ймовірність наступної події:

$C = \{$Серед вибраних буде ***два короля***$\}$.

Відповідь: $P(C) = 0{,}025$.

3. *Ймовірності на злічених просторах елементарних наслідків.*

Приклад 11. Стохастичний експеримент полягає у ***киданні грального кубика до першої* «6»-ки.** Необхідно знайти ймовірність наступної події:

B = {*Відбудеться* ***не більше*** 4 *кидань до першої появи* «6»}

Відповідь: $P(B) = 0{,}5177$.

4-6. *Геометричне визначення ймовірності.*

Приклад 12. (***Задача про зустріч***). Припустимо, що дві особи $\mathbf{O_1}$ і $\mathbf{O_2}$ домовилися зустрітися в проміжку часу $[0, T]$. Той, хто приходить першим, чекає зустрічі протягом τ одиниць часу, а потім залишає місце зустрічі.

Припускаючи, що моменти прибуття осіб на зустріч є незалежними точками, випадково вибраними в інтервалі $[0, T]$, слід знайти ймовірність наступної події: D = {*Запланована зустріч відбудеться*}.

Відповідь: $P(D) = 1 - \left(1 - \dfrac{\tau}{T}\right)^2$.

Приклад 13. (***Задача Бюффона***). Припустимо, що площину покривають паралельні прямі, які проходять на відстані $2a$ один від одної.

Голку довжиною $2l$, ($l < a$) кидаємо випадковим чином на цю площину.

Знайти ймовірність наступної події:

C = {*Голка перетне одну з прямих*}.

Відповідь: $P(C) = \dfrac{2l}{a\pi}$.

Приклад 14. «***Парадокс Бертрана***».

- Маємо задане коло.
- «*Випадковим чином*» вибираємо в цьому колі хорду.

Якою буде ймовірність наступної події:

H = «Довжина *хорди більша* довжини *сторони* вписаного в це коло *рівностороннього трикутника*».

Варіант 1. (H_1) Вибираємо «*випадковим чином*» конкретний напрямок хорди.

Відповідь: $P(H_1) = 1/2$.

Варіант 2. (H_2) «*Закріплюємо*» «*випадковим чином*» на колі один кінець хорди.

Відповідь: $P(H_2) = 1/3$.

Варіант 3. Визначаємо «*випадковим чином*» в крузі, обмеженому цим колом, середину хорди.

Відповідь: $P(H_3) = 1/4$.

7. *Формула повної ймовірності.*

Вказівка: Якщо випадкові події:
1) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій; І крім того: 2) для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ $P(H_i) > 0$. Тоді для довільної події $B \in \mathfrak{I}$ виконується наступна рівність:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/H_i)\cdot P(H_i).$$

Приклад 15. Припустимо, що в урні знаходиться n куль невідомого кольору серед яких *можуть* бути *білі* кулі. Не маємо ніякої інформації про те, якого кольору і скільки куль кожного кольору є в урні. Витягуємо випадковим чином одну кулю з урни. Знайти ймовірність наступної події:

B = {Витягнута куля – *біла*}.

Відповідь: $P(B) = 1/2$.

8. *Формули Байєса.*

Вказівка: Формули Байєса:

$$P(H_k/B) = P(B/H_k)\cdot P(H_k)\Big/\sum_{i=1}^{n} P(B/H_i)\cdot P(H_i).$$

Приклад 16. Припустимо, що в умовах прикладу 15 витягнута випадковим чином куля виявилась *білою*. Яким чином вплине ця інформація на ймовірність $P(H_k)$ гіпотези H_k, згідно з якою на початку експерименту в урні серед n куль було точно k білих куль. Іншими словами – знайти умовні ймовірності $P(H_k/B)$, $k = 1, \ldots, n$.

Відповідь: $P(H_k/B) = 2k/(n\cdot(n+1))$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Приклад 17. **([3]. s. 179)** В урні знаходиться 10 куль, серед яких 6 білих та 4 чорні. Витягаємо випадковим чином 2 кулі. Знайти ймовірність наступної події: B = {Витягнуті кулі різного кольору}.

а) Використати *класичне визначення ймовірності.*

б) Використати *формулу множення ймовірностей.*

Відповідь: $P(B) = 8/15$.