№ 1

а) L_{ar} : "існує рівно з парних числа, що є точними кубами"

$P(x)$: $\exists y\,((1+1)\times y = x)$ — x - парне число

$F(x)$: $\exists a\,(a \times a \times a = x)$ — x - точний куб

$R(x)$:

$$\exists x\,\exists y\,\exists z\,\big((P(x)\,\&\,P(y)\,\&\,P(z))\,\&\,(F(x)\,\&\,F(y)\,\&\,F(z))\big)\,\&$$
$$\&\,\forall a\,\big((P(a)\,\&\,F(a)) \to a=x \lor a=y \lor a=z$$

б) L_{set} : $X \cap Y = Z \setminus S$

$$\forall x\,\Big(\big(x \in X\,\&\,x \in Y\big) \leftrightarrow \big(x \in Z\,\&\,\neg(x \in S)\big)\Big)$$

№ 2 Сколемівська форма

замін. щоб не плутати

$$\forall z\,\exists y\,\big(\forall x\,\exists y^{a}\,A(x,\overset{a}{y},z)\,\wedge\,\neg\exists x^{b}\,B(\overset{b}{x},y)\big) \to \forall x^{d}\,\exists y^{e}\,C(\overset{d}{x},\overset{e}{y})$$

$$\forall z\,\exists y\,\big(\forall x\,\exists a\,A(x,a,z)\,\wedge\,\neg\exists b\,B(b,y)\big) \to \forall d\,\exists e\,C(d,e)$$

$$\forall z\,\exists y\,\forall b\,\forall x\,\exists a\,\big(A(x,a,z)\,\wedge\,\neg B(b,y)\big) \to \forall d\,\exists e\,C(d,e)$$

$$\exists z \, \forall y \, \exists b \, \exists x \, \forall a \, \forall d \, \exists e \, \big((A(x,a,z) \wedge \neg B(b,y)) \to C(d,e)\big)$$

$c \to z$, где c — константа

$g(y) \to b$

$k(y) \to x$

$r(y,a,d) \to e$

$$\forall y \, \forall a \, \forall d \, \big((A(k(y), a, C) \wedge \neg B(g(y), y)) \to C(d, r(y,a,d))\big)$$

№ 3 Секвенц. числ.

$$\exists x (A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$$

$$\vdash \exists x(A(x) \to B(x)) \,,\; \vdash (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$$

$\vdash \exists$

$$\vdash (A(y) \to B(y)) \,,\; \vdash (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$$

$\vdash \to$

$$\vdash \forall x A(x) \,,\; \vdash \exists x B(x) \,,\; \vdash A(y) \to B(y)$$

$\vdash \exists \,,\; \vdash \forall$

$$\vdash A(y) \,,\; \vdash B(y) \,,\; \vdash A(y) \to B(y) \,,\; \vdash \forall x(\ldots) \,,\; \vdash \exists x(\ldots)$$

$\vdash \to$

$\vdash A(y) \,,\; \vdash A(y) \,,\; \ldots$ $\vdash B(y) \,,\; \vdash B(y) \,,\; \ldots$

×   ×

Отримали замкнене секв. дерево.

№4 Арифметичні ієрархії:

$$"D_x \neq E_x"$$

$$\exists a \left(\left(a \in D_x \ \& \ \neg (a \in E_x) \right) \vee \left(a \in E_x \ \& \ \neg (a \in D_x) \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\exists a \Big(\exists k \left(P_x(a) \downarrow \ \text{на кр. } k \right) \ \& \ \forall b \ \forall m \ \neg \left(P_x(b) = a \ \text{на кр. } m \right) \vee$$

$$\vee \ \exists c \ \exists l \left(P_x(c) = a \ \text{на кр. } l \right) \ \& \ \forall n \ \neg \left(P_x(a) \downarrow \ \text{на кр. } n \right) \Big)$$

$$\underline{\exists a \ \exists k} \ \underline{\forall b \ \forall m \ \forall n} , \ \underline{\exists c \ \exists l} , \ (\ldots \ldots)$$

$$\boxed{\bigodot \Sigma_3}$$

РП

№5

X – людина

$P(x) - x - $ політик

$R(x) - x \in$ шахраєм

$C(x) - x \in$ розумним

$$\left(\exists x \left(P(x) \ \& \ \neg R(x) \right) \ \& \ \forall x \left(R(x) \Rightarrow C(x) \right) \right) \to \exists \left(P(x) \ \& \ \neg C(x) \right)$$

існують політики
не шахраї

всі шахраї – розумні

існують не розумні
політики