мат анал(із)

Інтеграли

1. Обчислити

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$$

2. Обчислити

$$\int \frac{e^{tgt} + ctgt}{\cos^2 t} dt$$

3. Обчислити

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}} dx}{x^3} dx .$$

4. Обчислити інтеграл Рімана

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \, dx.$$

5. Обчислити інтеграл Рімана

$$\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

6. Обчислити інтеграл Рімана

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

7. Обчислити інтеграл Рімана (невласний інтеграл) **((не добавлю))**

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{ctg}^4 x \, dx.$$

8. Оцінити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x^2 - 2x + 2} dx .$$

9. Знайти за допомогою інтеграла Рімана та інтегральних сум Дарбу лол))0):

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{, де } S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

10. Знайти:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) arctg \frac{k^2}{n^4} .$$

Диференціали

1. Знайти перший та другий диференціал та всі частинні похідні
   $F = \operatorname{tg}(xy)$.
2. Знайти перший та другий диференціал та частинні похідні функції
   $F = \ln(x + y^3 - xz)$
3. Знайти перший та другий диференціал та частинні похідні функції
   $U = \ln(x + y^2 - xz)$
4. Знайти перший та другий диференціали та частинні похідні функції
   $U = \ln(x + y^2)$
5. Знайти перший та другий диференціали та частинні похідні функції
   $F(x, y) = 3^x \cdot \operatorname{sh}(5y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
6. Знайти:
   $d^2u, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, якщо $u = 2^x 3^y$.
7. Знайти частинну похідну
   $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $u = (x+1)\sin(1/y^2)$.
8. Знайти градієнт
   $f(x, y, z) = x + yz + x^2yz$ у точці $P_0(1, 1, 1)$.
9. Знайти похідну функції та градієнт
   (10) Знайдіть похідну функції $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ у точці $P_0(1, 1)$ в напрямку вектора $\vec{e}$, що утворює кут $x = \frac{\pi}{4}$ із додатним напрямком вісі Ox, а також величину градієнта функції в цій точці.
10. Обчислити похідну функції в точці **(добавити)**
    Обчисліть $f'_e(1, 1)$, якщо $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ та напрямок e – це одиничний вектор, що співпадає за напрямком із $\operatorname{grad} f(1, 1)$.
11. Знайти похідну функції
    f(x,y,z) = xyz в напрямку орта $e = (\cos a, \cos b, \cos c)$
    в точці M(1,1,1).
12. Знайти :
    Знайти $d^2u, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, якщо $x^3 + y^3 = u^3 + 3xu$.
13. Дослідити на диференційованість функцію:

Локальний, умовний екстремум

1. Дослідити функцію на локальний екстремум

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y$$

2. Дослідити функцію на локальний екстремум

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{2(x+y)}$$

3. Дослідити на екстремуми функцію

$$u(x,y)=(x+2)^2-(y+1)^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію

$$u(x,y)=x+y,\text{ якщо }\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1.$$

Ряди

1. Знайти значення *a*, при якому збігається ряд

$$\sum(1-(\cos(1/n))^{1/n})^{\alpha}$$

2. Знайти значення *a*, при якому збігається ряд

$$\sum(1-n\sin(1/n))^{\alpha}\ .$$

3. Знайти значення *a*, при якому збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)^{\alpha}$$

4. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}.$$

5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{e^{\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}(1000+k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}.$$

7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum\frac{n^{10}}{2^n+5^n}.$$

8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum 7^n \frac{(n!)^2}{n^{2n}}.$$

9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum n^5 \frac{(3n+2)^n}{(4n+3)^n}.$$

10. Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд на R

$$\sum \frac{arctg\,2x}{x^2+n^5}$$

11. Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$

$$h(x) = \mathrm{sh}(2x)$$

12. Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$

$$h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

13. Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$

$$h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

14. Розкласти в степеневий ряд

$$f(x) = \cos^2 x$$

15. Розкласти функцію в степеневий ряд

$$\cos^2(x+a)$$

16. Розкласти в степеневий ряд

$$\cos(x+a)$$

17. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$$

18. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum \left(\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\frac{1}{n} \right)^{n^\alpha} - 1 \right).$$

19. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln\left(2 + \frac{6}{n}\right)^{\beta}.$$

20. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^p}.$$

Таблиця інтегралів

Тригонометричні формули

Маклорен

===== Інтеграли =====

Обчислити інтеграл

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x},\ v = -\frac{1}{tg\,x} \end{matrix} \right| = \left(-\frac{x}{tg\,x}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} +$$

$$+\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{tg\,x} = \left(-\frac{x}{tg\,x}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \left(-\frac{x}{tg\,x} + \ln(\sin x)\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{6}}{2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}.$$

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{e^{tgt} + ctgt}{\cos^2 t} dt$$

$$\int \frac{e^{tgt} + ctgt}{\cos^2 t} dt = \left| \begin{array}{l} x = tgt \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = e^x + \ln|x| + c =$$

$$= e^{tgt} + \ln|tgt| + c.$$

Обчислити

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}} dx}{x^3} dx .$$

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}} dx}{x^3} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x^2} \\ dt = \frac{-2dx}{x^3} \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{x^2}} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{4}} - e \right) = \frac{e - e^{\frac{1}{4}}}{2}.$$

Обчислити інтеграл Рімана

$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\, dx.$

№ 1 Обчислити інтеграл.

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin x\, dx = \left| \begin{matrix} u=\arcsin(x) & dv=dx \\ du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x \end{matrix} \right| = \arcsin(x)\cdot x - \overset{①}{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx} =$$

$$① \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} y=\sqrt{1-x^2} \\ dx = 2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{(-2x)} \end{matrix} \right| = \int \frac{x\cdot 2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot(-2x)}dy = \int -1\,dy = -y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$= \arcsin(x)\cdot x + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

Обчислити інтеграл Рімана

$\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$

$$\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{matrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{matrix} \right| = \int \cos t\, dt =$$

$$= \sin t = \sin(\ln x)\Big|_1^e = \sin(\ln e) - \sin(\ln 1) =$$

$$= \sin 1 - 0 = \sin 1.$$

Обчислити інтеграл Рімана

$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -\frac{x}{e^x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x} dx =$$

$$= \left(-\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\ln 2 + 1}{2}.$$

Обчислити інтеграл Рімана (невласний інтеграл)

$\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg}^4 x\, dx.$

Оцінити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x^2 - 2x + 2} dx .$$

№2 Оцінити інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x^2-2x+2} dx = \cos \pi \xi \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1} dx \quad \left| \begin{aligned} x-1&=t \\ dt&=dx \end{aligned} \right| =$$

$$= \cos \pi \xi \int \frac{1}{t^2+1} dt = \cos \pi \xi \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \xi \in [0, 1] \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq J \leq \frac{\pi}{4}$$

або

$$\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x^2-2x+2} dx = \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{(x-1)^2+1} dx$$

$$-1 \leq \cos \pi x \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos \pi x}{(x-1)^2+1} \right| \leq \frac{1}{(x-1)^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1} dx = \left| \begin{aligned} &t = x-1 \\ &dx = dt \\ &x=0,\ t=-1 \\ &x=1,\ t=0 \end{aligned} \right| = \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= \operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4};$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x^2-2x+2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

або

Оцінити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos\pi x}{x^2-2x+2}dx$ $\quad \cos\pi x$ – інтегрована за Ріманом

$\frac{1}{x^2-2x+2}$ – монотонна на $[0, 1]$ не спадає

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\pi x}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{x^2-2x+2}\int\limits_\xi^1 \cos\pi x\,dx = \frac{1}{x^2-2x+2}\left(\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_\xi^1\right)$$

$$\frac{1}{1-2+2}\left(\frac{\cos 0}{\pi}\right) > \int\limits_0^1 \frac{\cos\pi x\,dx}{x^2-2x+2} > \frac{1}{1-2+2}\left(\frac{\cos\pi}{\pi}\right)$$

$$\frac{1}{\pi} > \int\limits_0^1 \frac{\cos\pi x\,dx}{x^2-2x+2} > -\frac{1}{\pi}$$

Знайти за допомогою інтеграла Рімана та інтегральних сум Дарбу

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\Delta x,$$

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x = \frac{k}{n}, \quad k = nx;$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \int\limits_0^1 \sin 0\,\ln(1+0)\,dx = \int\limits_0^1 0\cdot\ln 1\,dx = 0.$$

Знайти ліміт

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)arctg\frac{k^2}{n^4}.$$

№2 $\lim_{n\to\infty} n\sum \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) arctg \frac{k^2}{n^4} \xrightarrow{\text{асимпт.}} n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(\frac{k^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$

$= n\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 + n^2\cdot o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$

або рішення Александрович: (хуйня)

$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) arctg\frac{k^2}{n^4}$; $\quad \frac{k}{n}\to x$

$n\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n\cdot\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2}{n^4} +$

$+ \underset{o(1)\cdot\frac{1}{n^2}}{\underset{\parallel}{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}}\cdot n\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2}{n^2}+$

$+o(1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)x^2\,dx + 0 =$

$= \left| \begin{matrix} u=\ln(x+1), \; du=\frac{1}{x+1}dx \\ dv = x^2dx, \; v=\frac{x^3}{3}\end{matrix}\right| = \frac{x^3\ln(x+1)}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3(x+1)}dx =$

$= \frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}.$

$\int\frac{x^3}{3(x+1)}dx = \left|\begin{matrix}t=x+1\\dx=dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{(t-1)^3}{t}dt =$

$=\frac{1}{3}\int\frac{t^3-3t^2+3t-1}{t}dt = \frac{1}{3}\left(\int\left(t^2-3t-\frac{1}{t}+3\right)dt\right)=$

$=-\frac{\ln t}{3}+\frac{t^3}{9}-\frac{t^2}{2}+t+c = -\frac{\ln(x+1)}{3}+\frac{(x+1)^3}{9}-$

$-\frac{(x+1)^2}{2}+x+1+c = -\frac{\ln(x+1)}{3}+\frac{(x+1)^3}{9}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+c$

==== Диференціали ====

Знайти перший та другий диференціал та всі частинні похідні

F = tg(xy).

$$F(x,y) = tg(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\cos^2 xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2 \sin(xy)}{\cos^3(xy)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\cos^2 xy + \sin(2xy)\cdot xy}{\cos^4 xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\cos^2 xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 \sin xy}{\cos^3(xy)}$$

$$df = \frac{y}{\cos^2 xy}dx + \frac{x}{\cos^2 xy}dy = \frac{1}{\cos^2 xy}(y\,dx + x\,dy)$$

$$d^2 f = \frac{2y^2 \sin(xy)}{\cos^3(xy)}dx^2 + 2\frac{\cos^2 xy + \sin(2xy)xy}{\cos^4 xy}dx\,dy + \frac{2x^2 \sin xy}{\cos^3(xy)}dy^2 =$$

$$= \frac{1}{\cos^3(xy)}\left((2y^2 \sin(xy))dx^2 + \frac{2(\cos^2 xy + \sin(2xy)xy)}{\cos(xy)}dx\,dy + (2x^2 \sin xy)dy^2\right)$$

Знайти перший та другий диференціал та частинні похідні функції

$$F = \ln(x + y^3 - xz)$$

$$F = \ln(x + y^3 - xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-z}{x+y^3-xz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-(1-z)^2}{(x+y^3-xz)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-3y^2+3y^2z}{(x+y^3-xz)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{x+y^3-xz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6xy-3y^4-6xyz}{(x+y^3-xz)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{-x-y^3+xz+x-xz}{(x+y^3-xz)^2} = -\frac{y^3}{(x+y^3-xz)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x}{x+y^3-xz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{-x^2}{(x+y^3-xz)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{3xy^2}{(x+y^3-xz)^2}$$

$$df = \frac{1-z}{x+y^3-xz}dx + \frac{3y^2}{x+y^3-xz}dy - \frac{x}{x+y^3-xz}dz = \frac{1}{x+y^3-xz}\left((1-z)dx + 3y^2dy - x\,dz\right)$$

$$d^2 f = \frac{-(1-z)^2}{(x+y^3-xz)^2}dx^2 + \frac{6xy-3y^4-6xyz}{(x+y^3-xz)^2}dy^2 - \frac{x^2}{(x+y^3-xz)^2}dz^2 - \frac{3y^2+3y^2z}{(x+y^3-xz)^2}dx\,dy - \frac{y^3}{(x+y^3-xz)^2}dx\,dz$$

$$+ \frac{3xy^2}{(x+y^3-xz)^2}dy\,dz$$

Знайти перший та другий диференціал та частинні похідні функції

$$U = \ln(x + y^2 - xz)$$

$$F(x,y,z) = \ln(x+y^2-xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-z}{x+y^2-xz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{z^2-2z+1}{(x+y^2-xz)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2y(1-z)}{(x+y^2-xz)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2-xz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x-2y^2-2xz}{(x+y^2-xz)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{-y^2}{(x+y^2-xz)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{x+y^2-xz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{-x^2}{(x+y^2-xz)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{2xy}{(x+y^2-xz)^2}$$

$$\text{I} \quad \partial f = \frac{1-z}{x+y^2-xz}dx + \frac{2y}{x+y^2-xz}dy - \frac{x}{x+y^2-xz}dz = \frac{1}{x+y^2-xz}\left((1-z)dx + 2y\,dy - x\,dz\right)$$

$$\text{II} \quad \partial^2 f = -\frac{z^2-2z+1}{(x+y-xz)^2}dx^2 + \frac{2x-2y^2-2xz}{(x+y^2-xz)^2}dy^2 - \frac{x^2}{(x+y^2-xz)^2}dz^2 + \frac{4y(1-z)}{(x+y^2-xz)^2}dx\,dy -$$

$$- \frac{2y^2}{(x+y^2-xz)^2}dx\,dz + \frac{4xy}{(x+y^2-xz)^2}dy\,dz$$

Знайти перший та другий диференціали та частинні похідні функції

$$U = \ln(x + y^2)$$

№5 $F(x,y,z) = \ln(x+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x+2y^2-4y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{-2y^2+2x}{(x+y^2)^2}$$

$$\text{I} \quad \partial f = \frac{1}{x+y^2}dx + \frac{2y}{x+y^2}dy = \frac{1}{x+y^2}(dx + 2y\,dy$$

$$\text{II} \quad \partial^2 f = -\frac{1}{(x+y^2)^2}dx^2 - \frac{4y}{(x+y^2)^2}dx\,dy - \frac{2y^2+2x}{(x+y^2)^2}dy^2 = -\frac{1}{(x+y^2)^2}\left(dx^2 + (4y)dx\,dy + (2y^2-2x)dy^2\right)$$

Знайти перший та другий диференціали та частинні похідні функції

$F(x, y) = 3^x \cdot \mathrm{sh}(5y)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

$F(x,y) = 3^x \cdot \mathrm{sh}(5y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln 3 \cdot 3^x\, \mathrm{sh}(5y);$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 5 \cdot 3^x\, \mathrm{ch}(5y);$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \ln 9 \cdot 3^x \mathrm{sh}(5y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5 \ln 3 \cdot 3^x \mathrm{ch}(5y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 25 \cdot 3^x \mathrm{sh}(5y)$

$F' = \ln 3 \cdot 3^x \mathrm{sh}(5y)\, dx + 5 \cdot 3^x \mathrm{ch}(5y)\, dy;$

$F'' = \ln 9 \cdot 3^x \mathrm{sh}(5y)\, dx^2 + 5 \ln 3 \cdot 3^x \mathrm{ch}(5y)\, dx\, dy +$
$+ 25 \cdot 3^x \mathrm{sh}(5y)\, dy^2.$

Знайти:

$d^2u,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, якщо $u = 2^x 3^y$.

$F = 2^x 3^y\,, \ (x,y) \in R^2$

$f'_x = 3^y \cdot \ln 2 \cdot 2^x$ $\quad f''_{xy} = \ln 2 \ln 3\; 2^x 3^y$ $\quad f''_{xx} = 3^y (\ln 2)^2\, 2^x$

$f'_y = 2^x \cdot \ln 3\; 3^y$ $\quad f''_{yx} = \ln 2 \ln 3\; 2^x 3^y$ $\quad f''_{yy} = (\ln 3)^2\, 3^y 2^x$

II диф $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3^y (\ln 2)^2 2^x + 2 (\ln 2)(\ln 3) 3^y 2^x + (\ln 3)^2 3^y 2^x =$

$= 3^y 2^x \left((\ln 2)^2 + 2 \ln 2 \ln 3 + \ln 3^2 \right) = 3^y 2^x (\ln 2 + \ln 3)^2 = 3^y 2^x (\ln 6)^2$

I диф $df = 3^y 2^x \ln 6$

Знайти частинну похідну

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $u = (x+1)\sin(1/y^2)$.

№4 Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$: $u = (x+1)\sin(1/y^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(1/y^2) + 0$ $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$

Знайти градієнт

$f(x, y, z) = x + yz + x^2yz$ у точці $P_0(1, 1, 1)$.

Знайти градієнт:

$f(x,y,z) = x + yz + x^2yz$ $\qquad$ т. $P_0(1;1;1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2xyz\Big|_{P_0} = 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = z + x^2 z\Big|_{P_0} = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = y + x^2 y\Big|_{P_0} = 2$$

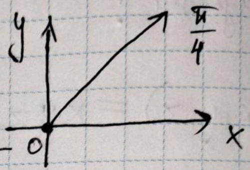
$$\operatorname{grad} f = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} = (3;2;2)$$

Знайти похідну функції та градієнт

(10) Знайдіть похідну функції $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ у точці $P_0(1,1)$ в напрямку вектора $\vec{e}$, що утворює кут $x=\frac{\pi}{4}$ із додатним напрямком вісі Ox, а також величину градієнта функції в цій точці.

$f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ $P_0(1,1)$

$\bar{e}$;



$$\boxed{\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\sin\alpha}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=1\cdot\cos\frac{\pi}{4}+1\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2};$$

$$\operatorname{grad} f=(1,1)=\bar{i}+\bar{j}.$$

Обчислити похідну функції в точці

Обчисліть $f'_e(1,1)$, якщо $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ та напрямок e – це одиничний вектор, що співпадає за напрямком із $\operatorname{grad} f(1,1)$.

Знайти похідну функції в точці M(1,1,1).

f(x,y,z) = xyz в напрямку орта e = (cos a, cos b, cos c)

$f(x,y,z) = xyz \qquad M(1;1;1) \qquad e = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz\Big|_M = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz\Big|_M = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\Big|_M = 1$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$

Знайти d^2u :

Знайти d^2u, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, якщо $x^3+y^3=u^3+3xu$.

$x^3+y^3=u^3+3xu$

Розглянемо спочатку, як фме $F(x,y,u)$ $x^3+y^3-u^3-3xu=0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3u \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial u}=-3u^2-3x \quad \xrightarrow{u(x,y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}=\frac{-3x^2+3u}{-3u^2-3x}=\frac{x^2-u}{u^2+x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}=\frac{-3y^2}{-3u^2-3x}=\frac{y^2}{u^2+x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(u^2+x)\frac{\partial}{\partial x}(x^2-u)-(x^2-u)\frac{\partial}{\partial x}(u^2+x)}{(u^2+x)^2}=\frac{(u^2+x)\left(2x-\frac{\partial u}{\partial x}\right)-(x^2-u)\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+1\right)}{(u^2+x)^2}=$$

$$=\frac{(u^2+x)\left(2x-\frac{x^2-u}{u^2+x}\right)-(x^2-u)\left(1+2u\left(\frac{x^2-u}{u^2+x}\right)\right)}{(u^2+x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(u^2+x)\frac{\partial}{\partial y}(x^2-u)-(x^2-u)\frac{\partial}{\partial y}(u^2+x)}{(u^2+x)^2}=\frac{(u^2+x)\left(-\frac{y^2}{u^2+x}\right)-(x^2-u)\left(2u\left(\frac{y^2}{u^2+x}\right)\right)}{(u^2+x)^2}=$$

$$=\frac{-y^2(u^2+x)-2uy^2(x^2-u)}{(u^2+x)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(u^2+x)\frac{\partial}{\partial y}(y^2)-(y^2)\frac{\partial}{\partial y}(u^2+x)}{(u^2+x)^2}=\frac{(u^2+x)\cdot 2y-(y^2)\left(2u\left(\frac{y^2}{u^2+x}\right)\right)}{(u^2+x)^2}$$

$$d^2u=\frac{(u^2+x)\left(2x-\frac{x^2-u}{u^2+x}\right)-(x^2-u)\left(1+2u\left(\frac{x^2-u}{u^2+x}\right)\right)}{(u^2+x)^2}dx^2+2\left(\frac{y^2(u^2+x)-2uy^2(x^2-u)}{(u^2+x)^3}\right)dx\,dy+$$

$$+\frac{2y(u^2+x)-(y^2)\left(2u\left(\frac{y^2}{u^2+x}\right)\right)}{(u^2+x)^2}dy^2$$

Дослідити на диференційованість функцію:

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №2

Дослідіть функцію $f: \mathbb{R}^2 \to R$ на диференційованість на D_f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x = \dfrac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{4x^5+4x^3y^2-2x^5-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ f'_y = \dfrac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{4y^5+4x^2y^3-2yx^4-2y^5}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$x=y=0$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x^4}{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x) = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{\Delta y^4}{\Delta y^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}(\Delta y) = 0$$

Похідні існують, перевіримо диференційованість в (0,0)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(f'_x(0,0)\cdot x - f'_y(0,0)\cdot y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

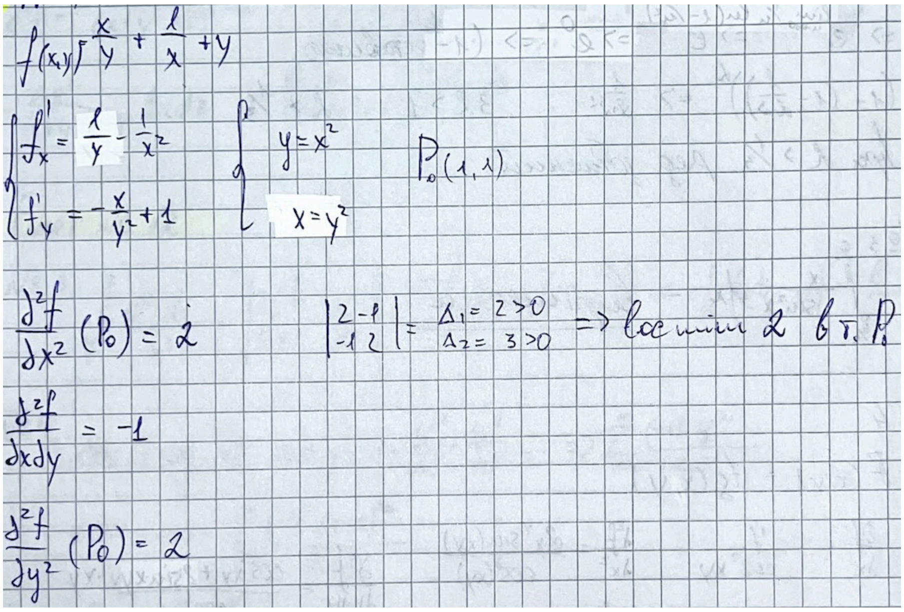
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+k^4x^4}{(k^2x^2+x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^{2\cdot 3/2}} \frac{1+k^4}{(1+k^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1+k^4}{(1+k^2)^{3/2}} = 0$$

Отже функція диференційована на $\mathbb{R}$

==== Екстремум ====

Дослідити функцію на локальний екстремум

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y$$



$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y$

$\begin{cases} f'_x=\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2} \\ f'_y=-\frac{x}{y^2}+1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$ $P_0(1,1)$

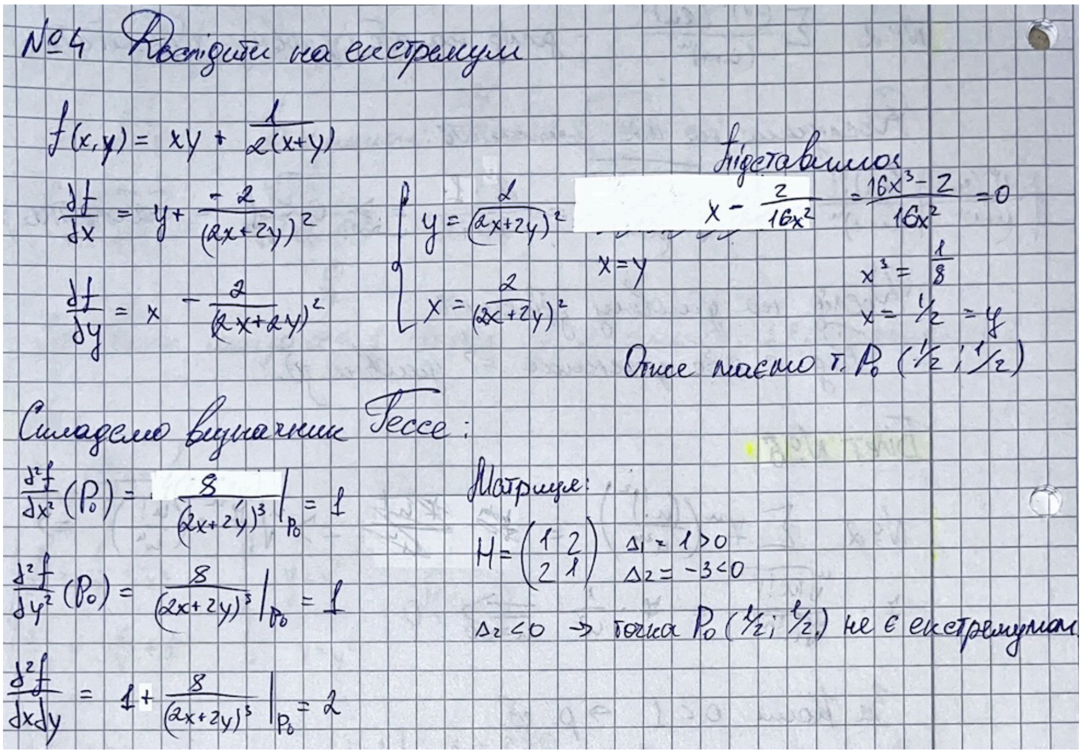
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=2$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{matrix}\Delta_1=2>0 \\ \Delta_2=3>0\end{matrix}$ => loc min 2 в т. P_0

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=2$

Дослідити функцію на локальний екстремум

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{2(x+y)}$$



№4 Дослідити на екстремум

$f(x,y)=xy+\frac{1}{2(x+y)}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y+\frac{-2}{(2x+2y)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=x-\frac{2}{(2x+2y)^2}$

$\begin{cases} y=\frac{2}{(2x+2y)^2} \\ x=\frac{2}{(2x+2y)^2} \end{cases}$ $x=y$

Підставимо: $x-\frac{2}{16x^2}=\frac{16x^3-2}{16x^2}=0$

$x^3=\frac{1}{8}$

$x=\frac{1}{2}=y$

Отже маємо т. $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Складемо визначник Гессе:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=\frac{8}{(2x+2y)^3}\Big|_{P_0}=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=\frac{8}{(2x+2y)^3}\Big|_{P_0}=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=1+\frac{8}{(2x+2y)^3}\Big|_{P_0}=2$

Матриця:

$H=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=-3<0$

$\Delta_2<0$ -> точка $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ не є екстремумом

Дослідити на екстремуми функцію

$u(x, y) = (x+2)^2 - (y+1)^2, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

$$f(x,y) = (x+2)^2 - (y+1)^2, \quad (x,y) \in R^2;$$

$$\begin{cases} f'_x = 2(x+2) = 0 \\ f'_y = -2(y+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \qquad P(-2,-1)$$

$f''_{xx} = 2;$ Складаємо визначник Сильвестра:

$f''_{xy} = 0;$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ $A_1 = 2$, $A_2 = -4$ $\Rightarrow$ extr в т. P: $\nexists$

$f''_{yy} = -2;$

Другий головний мінор $< 0 \Rightarrow$ екстремума не існує в точці $P(-2,-1)$.

Дослідити на умовні екстремуми функцію

$u(x, y) = x + y$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

$f(x,y) = x+y$, при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ $\quad x \neq 0,\ y \neq 0;$

$F = x+y+\lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1\right)$ — складаємо функцію Лагранжа

Необхідні умови:

$$\begin{cases} F'_x = 1 - \dfrac{2\lambda}{x^3} = 0 & x^3 = 2\lambda,\ x = (2\lambda)^{\frac{1}{3}} \\ F'_y = 1 - \dfrac{2\lambda}{y^3} = 0 & y^3 = 2\lambda,\ y = (2\lambda)^{\frac{1}{3}} \\ F'_\lambda = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0 & \end{cases}$$

ці значення підст. у третє рівн. системи

$$\frac{2}{(2\lambda)^{\frac{2}{3}}} = 1,\quad 2 = 2^{\frac{2}{3}}\lambda^{\frac{2}{3}},\quad 2^{\frac{1}{3}} = \lambda^{\frac{2}{3}},\quad \lambda^2 = 2,$$

$\boxed{\lambda = \pm\sqrt{2}}$, отже маємо дві точки:

$P_1\left((2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}, (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right)$

$P_2\left((-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}, (-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right)$

Достатні умови;

$$dF = dx + dy - 2\lambda\left(\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}\right)$$

$$d^2F = 2\lambda\left(-\frac{3dx^2}{x^4} - \frac{3dy^2}{y^4}\right)$$

$$\begin{cases} d^2F(P_1) = 6\sqrt{2}\left(\dfrac{dx^2}{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}} + \dfrac{dy^2}{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}}\right) > 0 \quad \forall dx, dy \Rightarrow \\ -\dfrac{2}{x^3}dx - \dfrac{2}{y^3}dy = 0 \qquad \text{в т. } P_1 \text{ ум. min} \\ \lambda = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2F(P_2) = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{3dx^2}{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{3dy^2}{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}}\right) < 0 \quad \forall dx, dy \Rightarrow \\ -\dfrac{dx}{2\sqrt{2}} - \dfrac{dy}{2\sqrt{2}} = 0 \qquad \text{в т. } P_2 \text{ ум. max} \\ \lambda = -\sqrt{2} \end{cases}$$

====== Ряди ======

Знайти значення *a*, при якому збігається ряд

$$\sum (1-(\cos(1/n))^{1/n})^{\alpha}$$

№2 $\sum (1-\cos(1/n))^{1/n})^{\alpha}$ При якому α - збіжний.

Перевіримо обов'язкову умову: $a_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1-(\cos 1/n)^{1/n} = 1 - e^{1/n \ln(\cos 1/n)} = 0$ – виконується

За асимпт. замін. $\cos(1/n)$: $\left(1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{1/n}\right)^{\alpha} \Rightarrow \left(1-\left(e^{1/n \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)}\right)\right)^{\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{1/n\left(-\frac{1}{2n^2}\right)} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2n^3}} \overset{\text{асимп.}}{\Rightarrow} 1-\frac{1}{2n^3} \Rightarrow$ Підставимо

$\left(1-\left(1-\frac{1}{2n^3}\right)\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2n^{3\alpha}}$ $\quad 3\alpha > 1 \quad \alpha > 1/3$

При $\alpha > 1/3$ ряд збіжний

Знайти значення *a*, при якому збігається ряд

$$\sum (1-n\sin(1/n))^{\alpha}.$$

$\sum \left(1-n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}$ За асимпт: $\sin(1/n) \approx 1/n$

$(1-n/n)^{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Візьмемо $\sin(1/n) \approx 1/n - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

тоді отримаємо $\left(1-1+\frac{1}{6n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{6n^{2\alpha}}$

За ознакою порівн. зі степенем $2\alpha > 1$ $\quad \alpha > \frac{1}{2}$

або

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$

Асимптотика: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

$1-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{\alpha} =$

$= \left(\frac{1}{6}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha} \sim \frac{1}{6^{\alpha}}\frac{1}{n^{2\alpha}}$

$\frac{1}{6^{\alpha}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ буде збіжним при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Знайти значення *a*, при якому збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)^{\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{tg\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{tg\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha}=\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha}=\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^{\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha}}$$

За ознакою порівн. зі степенем, ряд є збіжним при $\alpha>1$.

Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}.$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos(\frac{1}{n^2})}$ Необх. умова: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos(\frac{1}{n^2})}=\frac{1}{\cos(0)}=1\neq 0$ => ряд розбіжн.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n}}=\left|\left(1+1/n\right)^{n}=e\right|=\sum\frac{1}{e}\neq 0$ => ряд розбіжн.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}=$ | Необх умова: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{100}\neq 0$ ряд. розбіжн.

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

№5

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Перевіримо необхідну умову ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \left| \begin{array}{l} e^{\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)} = 1+\frac{\pi^2}{n^2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1-\frac{\pi^2}{2n^2} \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)\underbrace{\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}\right)^{-1}}_{\text{за асимпт.}} = \left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{\pi^2}{2n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1+\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{\pi^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\pi^2+2n^2}{2n^2} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

Необхідна умова не викон. => ряд розбіжний.

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(1000+k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}.$$

$$\sum \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1000+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}$$

Для перевірки на збіжність перевіримо необхідну умову: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1000+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)} = \frac{(1001)\cdot(1002)\dots(1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)} \approx \frac{1000+n}{2n-1} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

Необхідна умова не виконується, отже ряд розбіжний.

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum \frac{n^{10}}{2^n + 5^n}.$$

Дописати необхідну умову

№ 3 Дослідити на збіжність!

$\sum \frac{n^{10}}{2^n+5^n}$ За ознакою Коші: $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$\sqrt[n]{\frac{n^{10}}{2^n\left(1+\left(\frac{5}{2}\right)^n\right)}} = \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{2^n}\sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{5}{2}\right)^n\right)}} = \frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5}{2}$$

За Коші якщо $a<1 \Rightarrow$ ряд зб. Маємо $\frac{1}{5}<1 \Rightarrow$ ряд збіжний.

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum 7^n \frac{(n!)^2}{n^{2n}}.$$

№ 2 $\sum 7^n\left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}}\right) = 7^n\left(\frac{n!}{n^n}\right)^2 \Rightarrow \sqrt[n]{7^n\cdot\left(\frac{n!}{n^n}\right)^2} \Rightarrow$

$$7\cdot\frac{\sqrt[n]{(n!)^2}}{\sqrt[n]{n^{2n}}} = 7\cdot\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

За Коші $0<1 \Rightarrow$ р. зб.

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum n^5 \frac{(3n+2)^n}{(4n+3)^n}.$$

$$\sum n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} n^5 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

За озн. Даламбера: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{(n+1)^5 \cdot \frac{(3n+5)^{n+1}}{(4n+7)^{n+1}}}{n^5 \cdot \frac{(3n+2)^n}{(4n+3)^n}} = \frac{(n+1)^5 (3n+5)^{n+1} (4n+3)^n}{n^5 (4n+7)^{n+1} (3n+2)^n}$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \cdot \left(\frac{3n+5}{4n+7}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{4n+3}{3n+2}\right)^n \Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{4n+7}\right)^{n+1}}_{3/4} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{3n+2}\right)^n}_{4/3} =$$

$$\approx 3/4$$

За ознакою маємо $3/4 < 1 \Rightarrow$ ряд збіжний.

Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд на R

$$\sum \frac{arctg\,2x}{x^2+n^5}$$

№ 3. Дослідити на рівномірну збіжність: $\sum \frac{arctg\,2x}{x^2+n^5}$ на R

За ознакою Абеля:

a_n – монотон. обмеж. послідовн. $\Rightarrow$ ряд збіжний

b_n – $\sum b_n$ – збіжна

a_n: $arctg\,2x$ $(x \in R \mid (-\pi/2; \pi/2)) \Rightarrow$ монот та обмеж

b_n: $\frac{1}{x^2+n^5}$ |За озн. порівн.| $\le \frac{1}{n^5}$ |За озн. порівн. зі степ.| $\Rightarrow 5 > 1 \Rightarrow$ ряд збіжн

За Абелем ряд збіжний

За Веєрштрасом: Існує $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що $\forall n \ge n_0\ \forall x \in X$: $|f_n(x)| \le a_n \Rightarrow$ рівн зб.

$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^5}$

$|f_n(x)| \rightrightarrows$ рівномір. зб. за Веєрштрасом.

Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$

$$h(x) = \mathrm{sh}(2x)$$

$$f(x) = \mathrm{sh}(2x) \qquad x_0 = 0$$

$$\mathrm{sh}\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{sh}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$

$$h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad x_0 = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$

$$h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad x_0 = 0$

Маклорен: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

або

Розкласти функцію $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ у степеневий ряд в околі $x_0 = 0$

Використаємо готове розвинення $\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sum^{\infty} \frac{(-1)^k \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2k}}{(2k)!}$$

Знайдемо радіус:

$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+1)!}{2n!}\right) = \infty$ Отже, функція збіжна на $|x - \frac{\pi}{3}| < \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$

Розкласти в степеневий ряд

$$f(x) = \cos^2 x$$

№4 $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Розкласти функцію в степеневий ряд

$$\cos^2(x+a)$$

Розкласти в степеневий ряд $\cos^2(x+a)$

$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2t$ $\quad \cos y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} = |k=2t| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2^{2k} t^{2k}}{(2k)!}$

Заміниму $t = x+a$ $\quad \cos^2 t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2^k t^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$

$$\cos^2(x+a) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1} (x+a)^{2k}}{(2k)!}$$

За даламбером знайдемо радіус:

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n+1)(2n+1)}{4}\right) = \infty \Rightarrow$ $|x-a| < \infty$, $-\infty < x < \infty$

Отже ряд збіжний на $x \in (-\infty; +\infty)$

Розкласти в степеневий ряд

$$\cos(x+a)$$

$\cos(x+a) \Rightarrow \cos y = 1 - \dfrac{y^2}{2!} + \dfrac{y^4}{4!} - \dots \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}$

$$\cos(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+a)^{2n}}{(2n)!}$$

Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$$

№ 2 $\sum \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$ – дослід на абс і умовну збіжність:

Дослідимо на абс. збіжність:

$$\left|\frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}\right| = \frac{(2n)!!}{(n+1)^n} \overset{\text{Коші}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{\frac{2^n \cdot n!}{(n+1)^n}} = \frac{2 \cdot 1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} 0 < 1$$ – абсолютно збіжн

Дослід. на умовну збіжність

Ряд є абс. збіжним $\Rightarrow$ умовно зб.

Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum\left(\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1\right).$$

$$\sum\left(\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1\right)$$

Дослідимо на абсолютну збіжність та умовну зб.

$\cancel{\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

$$\left|\left(\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1\right)\right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} \end{matrix} \right| \Rightarrow \left(\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1\right) = 1 + \frac{n^\alpha}{2n^2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^\alpha}{2n^2} = \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$$

Тоді отримаємо такі випадки:

За степен. ознакою ряд збіжний при $2-\alpha > 1$:

$\alpha < 1$ – ряд збіжний

$\alpha \geq 1$ – ряд розбіжний

Ряд не є умовно збіжним, оскільки при $\alpha < 1$ як a_n, так і $|a_n|$ є збіжними, що суперечить умові умовної збіжності.

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln\left(2+\frac{6}{n}\right)^{\beta}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\left(\underset{\to \ln 2}{\ln\left(2+\frac{6}{n}\right)}\right)^{\beta} \qquad \beta>0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\ln 2\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)^{\beta} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\ln 2+\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\beta} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}(\ln 2)^{\beta}\left(1+\frac{3}{n\ln 2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\beta}$$

$$=(\ln 2)^{\beta}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1+\frac{3\beta}{\ln 2\cdot n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=(\ln 2)^{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{3\beta}{\ln 2\cdot n^{\frac{4}{3}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right) \Rightarrow \text{розбіжний.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ – розбіжний, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ – збіжний

(розбіжний + збіжний = розбіжний)

Ас. формули:

$$\ln(1+x) = x + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x\to 0)$$

Отже, незалежно від значення β ряд розбіжний. І, оскільки ряд додатній, питання абсолютної чи умовної збіжності одразу відпадає.

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^p}.$$

... значень параметру $\alpha \in \mathbb{R}$ ... ряд $p \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^p}$$

Абсолютна збіжність

$|x_n| = \left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}$ числовий ряд $\frac{1}{n^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ збіжний при $p>1$

Ряд $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n^p}$ є абсолютно збіжним при $p>1$

Умовна збіжність

Нехай $b_n = \sin(n\alpha)$;

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha) \Rightarrow |S_n| = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, тобто S_n - обмеж

$a_n = \frac{1}{n^p}$ монотонно збігається до 0 при $p>0$

Отже $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^p}$ умовно збігається при $p \in (0,1]$

та $\alpha \ne \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=1,2..$, бо при $\alpha = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ряд перетворюється у гармонічний і розбігається

=== Таблиця інтегралів ===

Таблиця інтегралів

1.	$\int 0\,dx = C$	$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
	$\int dx = x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
2.	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
3.	$\int \log_a x\,dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$	$\int \ln x\,dx = x \ln \frac{x}{e} + C$
4.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
	$\int \frac{1}{\sin x} dx = -\frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right\rvert + C$
	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
5.	$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$	
	$\int \arccos x\,dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$	
	$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1} + C$	
	$\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x \operatorname{arcctg} x + \ln\sqrt{x^2+1} + C$	
6.	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
7.	Нехай $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx$, тоді $I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right)$	
8.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$
9.	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$	
	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$	
10.	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$
11.	$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$	
	$\int e^{ax} \cos px\,dx = \frac{1}{a^2+p^2} e^{ax} (a \cos px + p \sin px) + C$	

= Тригонометричні формули =

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

Найпростіші співвідношення

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

Формули додавання

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

Формули подвійних та потрійних аргументів

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x};$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

Формули половинного аргументу

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}; \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}; \quad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}; \quad \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$$

Формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$
$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$
$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$
$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$$

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \ldots + \cos(x+ny) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} y\right) \cos\left(\frac{n}{2} y + x\right)}{\sin \frac{y}{2}}, \; y \neq 2\pi k$$

===== Маклорен =====

Функция	**Многочлен Маклорена**	**Остат.**
$P_n(x)$	$P_n(x)$	0
$(1+x)^\alpha,\ \alpha \notin \mathbb{N}$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$o(x^n)$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdot+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$o(x^{2n+1})$
$\arcsin x$	$x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\dots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$	$o(x^{2n+2})$
$\operatorname{arctg} x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$o(x^{2n+2})$
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$	$o(x^n)$
$\operatorname{ch} x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$o(x^{2n+1})$
$\operatorname{sh} x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$o(x^{2n+2})$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$o(x^n)$