ЛЕКЦІЯ 4(Б).
Випадкові вектори. Дискретні випадкові величини.

1. *Випадковий вектор та його функція розподілу.* 2. *Типи залежності між змінними.* 3. *Незалежні випадкові величини.* 4. *Визначення дискретної випадкової величини.* 5. *Приклади випадкових величин:* Розподіл Бернуллі. Схема випробувань Бернуллі. Біноміальний розподіл**.** Геометричний розподіл. Розподіл Пуассона. 6. *Випадкові вектори дискретного типу.* 7. *Незалежні дискретні випадкові величини.*

1. Випадковий вектор та його функція розподілу.

Очевидно, що з будь-яким стохастичним експериментом може бути пов'язано безліч випадкових величин, тобто змінних, значення яких визначається наслідком експерименту. Тому й на будь-якому ймовірнісному просторі може бути визначено багато випадкових величин.

Якщо в математиці «*звичайні*» змінні, як правило, позначаються латинським літерами, то в теорії ймовірностей випадкові величини прийнято позначати літерами грецької абетки ξ, η, τ, ν, ζ, … . Подібно, як в «*звичайному*» аналізі поряд з поняттям «*числа*» існує багатовимірний його аналог – «*вектор*», так само то в теорії ймовірностей вводиться поняття «*випадкового вектора*».

Визначення. Говоримо, що $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ є багатовимірною (або n-вимірною) випадковою величиною, визначеною на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, якщо всі її координати ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ – випадкові величини, визначені на тому самому просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Багатовимірну випадкову величину $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ називають також *n-вимірним випадковим вектором.*

Визначення. Нехай $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – випадковий вектор, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. Багатовимірною функцією розподілу випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ називається функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що визначається формулою:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\},$$
$$-\infty < x_1 < +\infty,\ -\infty < x_2 < +\infty,\ \dots,\ -\infty < x_n < +\infty.$$

Подібно, як функція розподілу $F_\xi(x)$ *цілком* та *однозначно* визначає відповідну випадкову величину $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, багатовимірна функція розподілу $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *цілком* та *однозначно* визначає відповідний випадковий вектор

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

2. Типи залежності між змінними.

Одним із базових понять теорії ймовірностей, яке стосується випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, є поняття його *стохастичної структури*. Ця структура визначається *розподілом* окремих його координат ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, а також *характером залежності* між ними.

Пригадаємо, яким чином в математиці досліджуються взаємозв'язки різних змінних. Припустимо, що вивчаються дві змінні X і Y та досліджується, чи впливають вони одна на одну, чи ні. Існує два крайні випадки взаємозалежності:

1. Незалежність X та Y, тобто повна відсутність залежності між ними. Така ситуація є свідченням того, що між явищами, які описують змінні X та Y, відсутній будь-який зв'язок. Якщо якимось чином *кількісно* оцінювати *ступінь залежності* змінних, то це буде крайній *знизу*, тобто *найслабший* її прояв.
2. Другий *найсильніший* (тобто крайній *зверху*) тип залежності означає функціональну залежність між змінними X та Y. Характерним для функціональної залежності $y = f(x)$ є те, що значення (x) змінної X *однозначно* визначає значення (y) змінної Y. Тоді явище, яке описує змінна X, вважається *причиною*, а явище, яке описує змінна Y – його *наслідком*, а сама залежність називається ще причино-наслідковою.
3. Існує ще й третій тип залежності між змінними X та Y, в певному розумінні *проміжний* між *повною* незалежністю та залежністю *абсолютною*, тобто причино-наслідковою. Ця залежність називається *статистичною* і її дослідженням, перш за все, займаються теорія ймовірностей та математична статистика.

Однією з різновидностей статистичної залежності є залежність *стохастична*, яка передбачає, що різним значення (x) змінної X відповідають різні *умовні розподіли* (Y_x) змінної Y. Саме теорія ймовірностей пропонує способи *кількісного* вимірювання ступеня залежності між змінними X та Y, що зберігають приведену вище градацію різних її типів.

3. Незалежні випадкові величини.

Одним з найважливіших в теорії ймовірностей є поняття *незалежності* випадкових величин. Припустимо, що на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ визначено випадкові величини ξ та η.

Визначення. Будемо говорити, що випадкові величини ξ та η незалежні, якщо для довільних дійсних чисел x та y виконується наступна рівність:

$$\mathrm{P}\{\xi < x;\ \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\}.$$

Зауваження. В лекції 4 було введено поняття незалежних подій A та B, а саме подій, для яких виконується умова:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Якщо у визначенні незалежних випадкових величин покласти $A = \{\xi < x\}$, а $B = \{\eta < y\}$, то незалежність випадкових величини ξ та η означає незалежність випадкових подій A та B, іншими словами:

- Те, які значення приймає випадкова величина ξ, не впливає на те, які значення приймає випадкова величина η, і навпаки.

Нехай

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, -\infty < x < \infty;$$

та

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\}, -\infty < x < \infty.$$

відповідно функції розподілу випадкових величини ξ та η. А $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$ в свою чергу означає функцію розподілу двовимірної випадкової величини (або випадкового вектора) $(\xi,, \eta)$, тобто функція, що визначається формулою:

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = P\{\xi < x;\ \eta < y\}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

Визначення незалежних випадкових величин означає, що ξ та η будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для довільних дійсних чисел x та y виконується наступна рівність:

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

Отже якщо спільний розподіл $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$ випадкових величини ξ та η відомий, легко перевірити їх незалежність. А саме, приймаючи до уваги визначення функції $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$, а також те, що події:

$$\{\xi < \infty\} = \Omega \text{ та } \{\eta < \infty\} = \Omega$$

напевно відбуваються, тобто

$$P\{\xi < \infty\} = 1 \text{ та } P\{\eta < \infty\} = 1,$$

отримаємо:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi < x \cap \Omega\} = P\{\xi < x;\ \eta < \infty\} = F_{(\xi,\eta)}(x, \infty),$$

де запис $F_{(\xi,\eta)}(x, \infty)$ означає:

$$F_{(\xi,\eta)}(x, \infty) = \lim_{y\to\infty} F_{(\xi,\eta)}(x, y).$$

Подібним чином отримаємо:

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\Omega \cap \eta < y\} = P\{\xi < \infty;\ \eta < y\} = F_{(\xi,\eta)}(\infty, y),$$

де запис $F_{(\xi,\eta)}(\infty, y)$ означає:

$$F_{(\xi,\eta)}(\infty, y) = \lim_{x\to\infty} F_{(\xi,\eta)}(x, y).$$

Критерій перевірки незалежності випадкових величин:

➢ Випадкові величини ξ та η будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для довільних дійсних чисел x та y виконується наступна рівність:

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = F_{(\xi,\eta)}(x, \infty) \cdot F_{(\xi,\eta)}(\infty, y), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

Дискретна випадкова величина.

4. Визначення дискретної випадкової величини.

Припустимо, що ξ випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Визначення. Будемо говорити, що ξ є *дискретною випадковою величиною*, якщо *дискретною* є множина її можливих значень.

Іншими словами, якщо $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ різні значення, які може набувати випадкова величина ξ, то множина X щонайбільше злічена.

Зауваження. Будемо припускати, що значення $x_i \in X$ впорядковані в зростаючому порядку:

$$x_1 < x_2 <\ldots < x_n, < \ldots .$$

Для кожного можливого значення $x_i \in X$ введемо наступну випадкову подію:

$$A_i = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\} = \{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots .$$

Тоді випадкові події $\{A_i, i = 1, 2, \ldots \}$ утворюють повну групу подій, тобто:

1. Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно несумісні:

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ якщо } i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

2. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \Omega$.

Позначимо:

$$p_i = P\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\} = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots .$$

Іншими словами, p_i визначає ймовірність того, що значення випадкової величини ξ буде рівне x_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Приймаючи до уваги властивості випадкових подій A_i, $i = 1, 2, \ldots$, приходимо до висновку, що для чисел $\{p_i, i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ виконуються наступні умови:

1) $p_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$;

2) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1$.

Визначення. Множину пар $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ називають *розподілом ймовірності* випадкової величини ξ.

Встановимо зв'язок між розподілом ймовірності випадкової величини ξ:

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), , \ldots, (x_i, p_i), \ldots\}$$

та її функцією розподілу:

$$F_\xi(x) =P\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} = P\{\xi < x\}, -\infty < x < \infty.$$

Подію $\{\xi < x\}$ можна записати наступним чином:

$$\{\xi < x_i\} = \bigcup_{i:(x_i<x)} A_i .$$

Оскільки події A_i – несумісні, то очевидно, що

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{i:(x_i<x)} p_i ,\ -\infty < x < \infty.$$

Отже знаючи розподіл дискретної випадкової величини ξ можемо для довільного дійсного $-\infty < x < +\infty$ знайти значення $F_\xi(x)$ її функції розподілу.

А так, як функція розподілу *цілком* та *однозначно* визначає випадкову величину ξ, то у випадку дискретної випадкової величини цю роль виконує її розподіл $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

З іншого боку, аналізуючи останню рівність приходимо до висновку, що $F_\xi(x)$ – неперервна зліва функція, яка зберігає постійне значення на проміжках (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Оскільки згідно з припущенням $x_i < x_{i+1}$, то має місце наступне включення $\{\xi < x_i\} \subset \{\xi < x_{i+1}\}$, і на підставі властивостей ймовірності (див. лекція 2. вл. 3) отримаємо:

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = P(\{\xi < x_{i+1}\}\backslash\{\xi < x_i\}) =$$
$$= P\{\xi < x_{i+1}\} - P\{\xi < x_i\} = F(x_{i+1}) - F(x_i),\ i = 1, 2, \dots .$$

Отже знаючи функцію розподілу $F_\xi(x)$ дискретної випадкової величини ξ можемо відновити її розподіл $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

5. Приклади випадкових величин.

Повернемось до наведених в лекції 4(А) прикладів.

Приклад 1. *Кидання грального кубика*.

1) Елементарна подія $\{\omega_i\}$ вказує ту грань кубика, на якій є i очок:

$$\Omega = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}.$$

Випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, описує результат кидання грального кубика: $\xi = \xi(\omega_i) = \omega_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Це перший описаний в лекції 5 спосіб визначення випадкової величини, тобто безпосереднє вказування відповідних значень $\xi = \xi(\omega)$ для кожного елементарного наслідку $\omega \in \Omega$.

2) Другий рівнозначний спосіб визначення випадкової величини полягає в окресленні її функції розподілу $F_\xi(x)$.

У випадку дискретної випадкової величини це рівнозначно визначенню її розподілу $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

В прикладі, що розглядається, множина можливих значень випадкової величини має вигляд:

$$\xi \in X = \{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6\}.$$

Як було встановлено в прикладі 1 (лек. 5) для довільного значення $x_i \in X$:

$$P\{\xi = x_i\} = 1/6;\ i = 1, 2, \dots, 6.$$

Отже випадкова величина ξ має наступний розподіл:

$$\{(1, 1/6), (2, 1/6), (3, 1/6), (4, 1/6), (5, 1/6), (6, 1/6)\}.$$

Функція розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ випадкової величини ξ визначається наступним чином:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо}\, x \le 1, \\ 1/6, \text{якщо}\ 1 < x \le 2, \\ 1/3, \text{якщо}\ 2 < x \le 3, \\ 1/2, \text{якщо}\ 3 < x \le 4, \\ 2/3, \text{якщо}\, 4 < x \le 5, \\ 5/6, \text{якщо}\ 5 < x \le 6, \\ 1, \text{якщо}\ x > 6. \end{cases}$$

Приклад 2. *Кидання монети*.
Кидаємо монету один раз. Простір елементарних наслідків:
$$\Omega = \{\omega_1 = „О", \omega_2 = „Р"\}.$$
Безпосереднє визначення випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$:
$$\xi(\omega_1) = 0;\ \xi(\omega_2) = 1.$$
Випадкова величина ξ має наступний розподіл:
$$\{(0, 1/2), (1, 1/2)\}.$$
Функція розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ випадкової величини ξ визначається наступним чином:

x	$(-\infty < x \le 0]$	$(0 < x \le 1]$	$(1 < x < \infty)$
$F_\xi(x)$	0	1/2	1

Приклад 3. *Кидання монети*.
Трикратно кидаємо монету. Простір елементарних наслідків в цьому експерименті $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$, складається з восьми елементів:
$$\Omega = \{\omega_1 = «OOO», \omega_2 = «OOR», \omega_3 = «ORO», \omega_4 = «ROO»,$$
$$\omega_5 = «ORR», \omega_6 = «ROR», \omega_7 = «RRO», \omega_8 = «RRR»\}.$$
Випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, показує скільки разів при цьому з'явиться «*Орел*». Безпосереднє визначення випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, презентує наступна таблиця:

ω	РРР	РРО	РОР	ОРР	РОО	ОРО	ООР	ООО
$\xi(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

розподіл $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, 3, 4\}$ та функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, $-\infty < x < \infty$ випадкової величини ξ представляють наступні таблиці:
випадкової величини ξ визначається наступним чином:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

x	$(-\infty, 0]$	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 3]$	$(3, \infty)$
$F_\xi(x)$	0	1/8	1/2	7/8	1

Приклад 4. *Кидання монети*.
Кидаємо монету до тих пір, поки вперше з'явиться «*Орел*». Простір елементарних наслідків – злічена множина:
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\ \omega_3, \omega_4, ...\} = \{«О», «РО», «РРО», «РРРО»,...\}.$$

Випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, визначає, *скільки повторних спроб* (k) триває цей експеримент. В загальному випадку елементарний наслідок ω_k виглядає наступним чином: ω_k = «$\underbrace{PPP...P}_{k-1}O$».

Безпосереднє визначення випадкової величини

$$\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega:\ \xi(\omega_k) = k,\ k = 1, 2, 3, ...\ :$$

Розподіл $\{(x_k, p_k),\ k = 1, 2, 3, ... \}$ в цьому прикладі визначається наступним чином:

$$x_k = k;\ p_k = P\{\xi = k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k},\ k = 1, 2, 3, ...$$

Функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ випадкової величини ξ визначає наступна формула:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо}\ x \le 1, \\ 1/2, \text{якщо}\ 1 < x \le 2, \\ ..., \\ 1/2 + 1/4 + ... + (1/2)^k, \\ \text{якщо}\ k < x \le k+1, \\ ..., \end{cases}.$$

Тобто

$$F_\xi(x) = 0, \text{ якщо } x \le 1;$$

$$F_\xi(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, \text{ якщо } k < x \le k + 1,\ k = 1, 2, 3, ...$$

Зауваження. Розподіл випадкової величини ξ, що розглядалась у цьому прикладі, є частковим випадком одного з основних дискретних розподілів теорії ймовірностей – *геометричного розподілу*:

Визначення. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p, якщо може приймати цілі додатні значення: $\xi \in \{1, 2, 3, … \}$. І при цьому:

$$p_k = P\{\xi = k\} = (1 - p)^{k-1} \cdot p,\ k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Параметр розподілу в прикладі, що розглядалась, дорівнює $p = 1/2$.

Приклади розподілів дискретних випадкових величин.

Приклад 1. (**Розподіл Бернуллі**).

Випадкова величина η має розподіл Бернуллі з параметром p, якщо може приймати тільки два значення:

$$\eta \in \{0, 1\}.$$

При цьому випадкова величина η приймає значення 1 з ймовірністю p:

$$p = P\{\eta = 1\};$$

а значення 0 з ймовірністю $q = 1 - p$:

$$P\{\eta = 0\} = 1 - p = q.$$

$$p + q = 1.$$

З випадковою величиною, яка має розподіл Бернуллі, завжди зустрічаємось, коли йдеться про те, *відбудеться*,чи *ні* певна випадкова подія в досліджуваному стохастичному експерименті. В теорії ймовірності широко використовується поняття «*індикатор* $\chi[A]$ *випадкової події* A», тобто показник того, чи *відбулась* подія A, чи *ні*.

- Якщо в результаті реалізації стохастичного експерименту випадкова подія A *відбулась*, то $\chi[A] = 1$;
- В противному разі $\chi[A] = 0$.

Припустимо, що з стохастичним експериментом пов'язана деяка випадкова подія A. Відомо, що ймовірність події A дорівнює p:

$$P(A) = p.$$

Очевидно, що індикатор $\eta = \chi[A]$ буде випадковою величиною, яка має розподіл Бернуллі з параметром p.

Приклад 2. (**Схема випробувань Бернуллі).**

Розглянемо послідовність n незалежних між собою повторів того самого стохастичного експерименту.

Припустимо, що в кожному з цих повторів нас цікавить випадкова подія A, реалізацію якої будемо називати *успіхом* (або «*виграшем*»).

Випадкову подію $\overline{A}$, протилежну до A (тобто ситуацію, коли в стохастичному експерименті випадкова подія A *не відбулась*) будемо називати «*невдачею*» (або «*поразкою*»).

Припустимо далі, що в кожному експерименті ймовірність події A дорівнює p, а ймовірність протилежної події $\overline{A}$ дорівнює $q = 1 - p$.

Визначення. Описана послідовність n незалежних повторів того самого стохастичного експерименту називається *схемою випробувань Бернуллі* з імовірністю «*успіху*» (або з *параметром*) p.

Іншими словами, кожна незалежна реалізація в незмінних умовах того самого стохастичного експерименту у випадку схеми випробувань Бернуллі має тільки *два* різних *наслідки*. Один з них *умовно* називають «*УСПІХОМ*» і позначають символом «У». Другий, відповідно, «НЕВДАЧЕЮ» і позначають випробувань «Н». При цьому:

$$P\{«У»\} = p; \text{ і } P\{«Н»\} = 1 - p = q;$$

$$p + q = 1.$$

Приклад 3. (**Біноміальний розподіл $B(n, p)$ з параметрами n і p.**).

Визначення. Випадкова величина ξ має *біноміальний розподіл з параметрами* n *і* p ($\xi \Leftrightarrow B(n, p)$), якщо всі її значення належать до множини:

$$\xi \in \{0, 1, \ldots, n\};$$

і при цьому:

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

де C_n^k означає «*кількість комбінацій з n по k*», тобто кількість різних k-елементних підмножин, які можна вибрати з множини, що містить n елементів:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},\ (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Біноміальний розподіл з параметрами (n, p) позначається символом $B(n, p)$, а той факт, що випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами (n, p), позначається $\xi \Leftrightarrow B(n, p)$.

Лема 1. Нехай випадкова величина ξ визначає кількість «*УСПІХІВ*» в серії n випробувань Бернуллі з параметром p. Іншими словами, нехай ξ вказує кількість експериментів (в серії з n виконаних), в яких подія A *відбулась*. Тоді ξ має *біноміальний розподіл з параметрами n і p*, тобто $\xi \Leftrightarrow B(n, p)$.

Доведення. Очевидно, що можливими значеннями випадкової величини ξ є числа, які належать до множини:

$$\xi \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Знайдемо ймовірність p_0 того, що випадкова величина ξ набуде значення $k = 0$, тобто

$$p_0 = P\{\xi = 0\}.$$

Це означає, що серед n експериментальних результатів не було отримано жодного «*УСПІХУ*». Іншими словами, в результаті проведених експериментів було отримано послідовність $(\overline{A}; \overline{A}; \ldots; \overline{A})$ n реалізацій протилежної до A події $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Враховуючи, що $P(\Omega \setminus A) = 1 - p$, а також незалежність реалізацій експериментів, отримаємо:

$$p_0 = P\{\xi = 0\} = P\{(\overline{A}; \overline{A}; \ldots; \overline{A})\} = P\{\overline{A}\} \cdot P\{\overline{A}\} \cdot \ldots \cdot P\{\overline{A}\} =$$
$$= (1 - p)^n = C_n^0 \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-0}.$$

Подібно, як і в попередньому випадку, подія $\{\xi = 1\}$ означає, що серед n експериментальних результатів було отримано *рівно один успіх*. Іншими словами, результатом експериментів є послідовність з n елементів, де подія A відбулася *один раз*, а $(n - 1)$ разів відбулася протилежна до A подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Наприклад $(A; \overline{A}; \overline{A}; \ldots; \overline{A})$. Імовірність такої послідовності елементарних подій, при умові, що окремі реалізації незалежні між собою, дорівнює:

$$P\{(A; \overline{A}; \overline{A}; \ldots; \overline{A})\} = P\{A\} \cdot P\{\overline{A}\} \cdot \ldots \cdot P\{\overline{A}\} = p \cdot (1 - p)^{n-1}.$$

Для того, щоб знайти ймовірність події $\{\xi = 1\}$, необхідно врахувати, *скількома способами* можна отримати *рівно один успіх* серед n повторень експериментів, а саме:

$$p_1 = P\{\xi = 1\} = P\left\{\left(A; \overline{A}; \ldots; \overline{A}\right) \cup \left(\overline{A}; A; \overline{A}; \ldots; \overline{A}\right) \cup \ldots \cup \left(\overline{A}; \overline{A}; \ldots; \overline{A}; A\right)\right\} =$$
$$= P\left\{\left(A; \overline{A}; \ldots; \overline{A}\right)\right\} + P\left\{\left(\overline{A}; A; \overline{A}; \ldots; \overline{A}\right)\right\} + \ldots + P\left\{\left(\overline{A}; \overline{A}; \ldots; \overline{A}; A\right)\right\} =$$
$$= n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} = C_n^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1}.$$

У загальному випадку подія $\{\xi = k\}$ означає, що серед n результатів експериментів було отримано k *успіхів* і $(n - k)$ *невдач*. Іншими словами, результатом експериментів є послідовність з n елементів, де подія A відбулася k *разів*, а $(n - k)$ разів відбулася протилежна до A подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Наприклад $\left\{\underbrace{A,\ldots,A}_{(k\ разів)},\ \underbrace{\overline{A},\ldots,\overline{A}}_{(n-k\ разів)}\right\}$. Імовірність такої послідовності елементарних подій, при умові, що окремі реалізації незалежні між собою, дорівнює:

$$P\left\{\underbrace{A,\ldots,A}_{(k\ разів)},\ \underbrace{\overline{A},\ldots,\overline{A}}_{(n-k\ разів)}\right\} = P\{A\} \cdot \ldots \cdot P\{A\} \cdot P\{\overline{A}\} \cdot \ldots \cdot P\{\overline{A}\} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Для того, щоб обчислити ймовірність події $\{\xi = k\}$, необхідно знайти, *скільки* існує *різних способів* її реалізації. Тобто необхідно знайти:

- *Скількома різними способами* можна розмістити k літер A на n місцях.

Вона дорівнює «*кількості комбінацій з n по k*»: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Тому

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Приклад 4. (***продовження прикладу* 3**). **(Біноміальний розподіл).**

Зауваження. Припустимо, що випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами n і p ($\xi \Leftrightarrow B(n, p)$). Приводячи в лемі 1 її інтерпретацію в контексті «*схеми випробувань Бернуллі*», ми показали:

- Що ξ вказує кількість «*УСПІХІВ*» в серії, яка складається з n *випробувань*. При цьому $p = P\{$*УСПІХУ*$\}$.

Результат одного такого експерименту описує випадкова величина η, яка *має розподіл Бернуллі з параметром p*.

Нехай множина випадкових величин $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ представляє послідовні результати всієї серії, що складається з n *випробувань*. Тобто випадкова величина η_k є *індикатором* результату k-того по порядку *випробування* $k = 1, 2, \ldots, n$:

  - $\eta_k = 1$, якщо в i-тому *випробуванні* був «*УСПІХ*»;
  - $\eta_k = 0$, в противному разі.

Тоді очевидно, що виконується наступна *стохастична рівність*:

$$B(n, p) \Leftrightarrow \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n.$$

При цьому η_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ – незалежні випадкові величини, що мають такий самий розподіл Бернуллі з параметром p:

$$\eta_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

$$P\{\eta_k = 1\} = p, P\{\eta_k = 0\} = q = 1 - p, p + q = 1, k = 1, 2, \ldots, n..$$

Приклад 5. (**Геометричний розподіл**).

Визначення. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p, якщо може приймати цілі додатні значення: $\xi \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. І при цьому: $p_k = P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Лема 2. Нехай випадкова величина ξ визначає кількість випробувань в схемі Бернуллі з параметром p до тих пір, поки *вперше* з'явиться «*УСПІХ*». Тоді ξ має геометричний розподіл з параметром p.

Доведення. Очевидно, що можливими значеннями випадкової величини ξ, описаної в лемі 2, є множина натуральних чисел: $\xi \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Випадкова подія $\{\xi = k\}$ означає, що в ході дослідів Бернуллі була отримана така послідовність результатів:

$$\{\xi = k\} = \left\{\underbrace{\overline{A}\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}}_{k-1}A\right\},$$

де символ $\overline{A}$ вказує на те, що чергове випробування закінчилося «НЕВДАЧЕЮ», а символ A вказує на «*УСПІХ*» у цьому випробуванні. Враховуючи незалежність випробувань і те, що $P\{A\} = p$, $P\{\overline{A}\} = 1 - p$, маємо:

$$p_k = P\{\xi = k\} = P\left\{\underbrace{\overline{A}\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}}_{k-1}A\right\} = P\{\overline{A}\} \cdot \ldots \cdot P\{\overline{A}\} \cdot P\{A\} = (1-p)^{k-1} \cdot p,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Приклад 6. (**Розподіл Пуассона**).

Визначення. Випадкова величина π має розподіл *Пуассона з параметром* λ, якщо вона може приймати всі цілі невід'ємні значення $\pi \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ і при цьому: $p_k = P\{\xi = k\} = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

***Гранична теорема Пуассона*:** Нехай випадкова величина ξ_n визначає число «*Успіхів*» в серії з n випробувань Бернуллі.

Припустимо, що ймовірність «*УСПІХУ*» (p_n) залежить від кількості (n) випробувань, і при цьому виконуються умови:

1. $p_n \to 0$, при $n \to \infty$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n \cdot n) = \lambda$.

Тоді для довільного значення $k = 1, 2, \dots$ існують наступні границі:

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

На практиці це означає, що для біноміального розподілу з параметрами (n, p), у випадку, коли p «*достатньо мале*», n – «*достатньо велике*», а

$$\lambda = n\cdot\cdot p ,$$

то для довільного k:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

6. Випадкові вектори дискретного типу.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ визначено випадковий вектор (*двовимірну випадкову величину*) $(\xi,, \eta)$, координати якого є дискретними випадковими величинами.

При цьому $\xi \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, а $\eta \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

Для кожної пари (x_i, y_j) визначимо ймовірність:

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\},\ i = 1, 2, \dots, k,\ j = 1, 2, \dots, m.$$

Визначення. Множину чисел $[\{(x_i, y_j), p_{ij}\},\ i = 1, 2, \dots, k,\ j = 1, 2, \dots, m.]$ будемо називати *розподілом випадкового вектора* (ξ, η) дискретного типу.

Розглядаючи випадкові вектори в лекції 6, ми встановили зв'язок між спільним розподілом $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$ вектора $(\xi,, \eta)$ та *маргінальними* розподілами $F_\xi(x)$ та $F_\eta(y)$ окремих його координат ξ та η. Подивимось, як вони виглядають у випадку випадкових векторів дискретного типу.

Нехай

$$\{(x_i, p_i),\ i = 1, 2, \dots, n\},\ \text{де}\ p_i = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, \dots, k,$$

та

$$\{(y_j, s_j),\ j = 1, 2, \dots, m\},\ \text{де}\ s_j = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, \dots, m,$$

відповідно розподіли координат ξ, та η. Оскільки

$$\{\eta = y_1\} \cup \{\eta = y_2\} \cup \dots \cup \{\eta = y_m\} = \Omega,$$

то:

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = P\{(\xi = x_i) \cap \Omega\} =$$
$$= P\{(\xi = x_i \cap \{\eta = y_1\} \cup \{\eta = y_2\} \cup \dots \cup \{\eta = y_m\})\} =$$
$$= P\{((\xi = x_i) \cap \{\eta = y_1\}) \cup ((\xi = x_i) \cap \{\eta = y_2\}) \cup \dots$$
$$\dots ((\xi = x_i) \cap \cup \{\eta = y_m\})\} = P\{\xi = x_i,\ \eta = y_1\} + P\{\xi = x_i,\ \eta = y_2\} + \dots$$
$$\dots + P\{\xi = x_i,\ \eta = y_m\} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{im},\ i = 1, 2, \dots, k.$$

Аналогічно доводимо, що:

$$s_j = P\{\eta = y_j\} = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{kj},\ j = 1, 2, \dots, m,$$

Тому, якщо відомий розподіл:

$$[\{(x_i, y_j), p_{ij}\},\ i = 1, 2, \dots, k,\ j = 1, 2, \dots, m.]$$

випадкового вектора (ξ,, η), то розподіли окремих його координат ξ та η визначаємо за формулами:

- Розподіл координат ξ,: $p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Розподіл координат η: $s_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

7. Незалежні дискретні випадкові величини.

Дискретні випадкові величини ξ та η будуть незалежні тоді і тільки тоді, коли для довільних значень x_i та y_j виконується наступна рівність:

$$P\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_j\},\ i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, m.$$

Використовуючи розподіл [$\{(x_i, y_j), p_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, m$.] випадкового вектора (ξ, η) та розподіли $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, $\{(y_j, s_j), j = 1, 2, \ldots, m\}$ його координат, умову незалежності можна записати наступним чином:

- Для довільних чисел $i = 1, \ldots, k$ та $j = 1, 2, \ldots, m$ виконується наступна рівність:

$$p_{ij} = p_i \cdot s_j.$$

Враховуючи отримані для визначення розподілів окремих координат ξ та η формули, цю рівність можна записати наступним чином:

$$p_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right).$$