

Теорія Мат Аналіз Екзамен

1. [Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші](#)
2. [Ряди з невід'ємними членами. Ознаки збіжності \(Даламбера, Коші, Раабе, порівняння із степенем\)](#)
3. [Ряди з довільними членами. Ознака Лейбніца](#)
4. [Абсолютна й умовна збіжності](#)
5. [Ознаки збіжності Абеля та Діріхле](#)
6. [Функціональні ряди. Рівномірна збіжність](#)
7. [Мажорантна ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду](#)
8. [Ознаки рівномірної збіжності Абеля та Діріхле](#)
9. [Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності](#)
10. [Розвинення функцій в степеневі ряди. Критерій розвинення функцій в степеневі ряди](#)
11. [Ортогональні й ортонормовані системи. Процес ортогоналізації](#)
12. [Ряд Фур'є по ортогональних системах](#)
13. [Ряди Фур'є для парних та непарних функцій](#)
14. [Гладкі та кусково-гладкі функції](#)
15. [Невласні інтеграли першого роду](#)
16. [Невласні інтеграли другого роду](#)

Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші.

Поняття числового ряду

Розглянемо нескінченну числову послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Складений з її елементів вираз

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) \quad (1)$$

називається числовим рядом, де x_n - загальний член ряду, виражений як функція номера n ($x_n = \frac{1}{n}, x_n = aq^{n-1}$). Складемо з елементів ряду такі суми, які називаються частковими: $S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \dots, S_n = x_1 + \dots + x_n$.

Означення. Числовий ряд називається збіжним, якщо \exists скінченна границя послідовності його часткових сум – ця границя називається сумою ряду ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$), в протилежному випадку ряд називається розбіжним ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$).

Необхідна ознака збіжності ряду.

Якщо ряд (1) збіжний, то його n -тий член x_n при необмеженому зростанні n прямує до нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Розглянемо часткові суми $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n, S_{n-1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$.

Звідси маємо $x_n = S_n - S_{n-1}$.

Оскільки ряд збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Наслідок. Якщо n -тий член ряду при $n \rightarrow \infty$, не прямує до 0, то ряд розбіжний.

Критерій Коші збіжності числового ряду

Для того, щоб ряд $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)$ збігався $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N}$
 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, або $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$

Доведення аналогічне доведенню критерія Коші для послідовностей. Для гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ маємо: $|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| > \frac{p}{n+p} \Big|_{n=p} = \frac{1}{2} > \varepsilon$, для $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ і, отже, ряд розбіжний.

Ряди з невід'ємними членами. Ознаки збіжності (Даламбера, Коші, Раабе, порівняння із степенем).

Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, всі члени яких невід'ємні $a_n \geq 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_{n+1} \geq S_n$.

Критерій збіжності додатного числового ряду.

Для того, щоб ряд з додатними членами був збіжним необхідно і достатньо, щоб S_n була обмежена зверху

Ознаки збіжності додатних рядів

Ознака порівняння рядів

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) додатні (невід'ємні) і не перевищують відповідних членів збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2), тобто $a_n \leq b_n, \forall n > N$, то ряд (1) збіжний, розбіжність (1) викликає розбіжність (2).

Доведення. Нехай $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n a_k, S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n b_k$. Оскільки ряд (2) збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = S^2, 0 \leq a_1 \leq b_1, 0 \leq a_2 \leq b_2, \dots, 0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)} \leq S^2$, оскільки $a_n \geq 0$, то S_n зростає при збільшенні n , але не більше S^2 , а \forall зростаюча обмежена послідовність має границю. Необмеженість $S_n^{(1)}$ викликає необмеженість $S_n^{(2)}$ і ряд (2) – розбіжний

Ознака збіжності Даламбера (1717-1783).

Нехай всі члени ряду $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ додатні і $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тоді при умові

1) $l < 1$ - ряд збіжний

2) $l > 1$ - розбіжний

3) $l = 1$ - ознака відповіді не дає.

Доведення: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$ при достатньо великому $n \geq N$,

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \quad \text{при } n \geq N.$$

Розглянемо 3 випадки: 1) $l < 1$ і візьмемо ε , що $l + \varepsilon < 1$.

Покладемо $l + \varepsilon = q$, тоді $0 < q < 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, a_{n+1} < qa_n, \forall n \geq N$. При $n = N, N+1, N+2, \dots$

будемо мати низку нерівностей $a_{N+1} < a_N q, a_{N+2} < a_N q^2, a_{N+3} < a_N q^3 \dots$ і члени ряду

будуть менше членів геометричної прогресії $a_{N+1} + a_{N+2} + \dots < a_N q + a_N q^2 \dots$

При $|q| < 1$ ряд збігається, а за ознакою порівняння збігається ряд $a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$, отже, і вихідний ряд.

2) $l > 1, \varepsilon > 0$ таке, що $l - \varepsilon > 1$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1; a_{n+1} > a_n$ при

$n = N, N+1, N+2, \dots; a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \dots$ члени зростають і не прямують до 0, а прямують до ∞ .

3) при $l = 1$ на прикладах показується, що ряд як збігається, так і розбігається.

Ознака Коші

Якщо ряд строго додатній: $a_n > 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збіжний, $q > 1$ ряд розбіжний, при $q = 1$ - невідомо.

(Узагальнена радикальна ознака Коші)

Для ряду $\sum a_n$ позначимо $q = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, тоді: якщо $q < 1$, то ряд $\sum a_n$ - збіжний; якщо $q > 1$, то ряд $\sum a_n$ - розбіжний.

Ознака порівняння із степенем.

Якщо при $n \rightarrow \infty$ $a_n = O(\frac{1}{n^p})$, то при $p > 1$ ряд (1) збігається, при $p \leq 1$ - розбігається.

Приклад. $a_n = \ln \cos \frac{e}{n} = \ln(1 - \frac{1e^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = -\frac{e^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$ - ряд збігається,

$p = 2 > 1$.

Ознака Раабе.

Якщо ряд (1) додатній строго і $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$, то при $p > 1$ ряд - збіжний,

при $p < 1$ - розбіжний, $p = 1$ - ? $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ - послідовність Раабе.

Ряди з довільними членами. Ознака Лейбніца.

Ряди з довільними членами-ряди, частина членів яких додатна, частина – від’ємна, частина дорівнює нулю

Ряд Лейбніца – це ряд вигляду: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$, або $a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + a_5 + (-a_6) + \dots, a_n \geq 0, \text{ при } n = 1, 2, \dots$

Теорема Лейбніца. Якщо модулі членів ряду (1) монотонно спадають: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$ при зростанні n , і n -тий член ряду прямує до 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд збігається і $0 < S \leq a_1$.

Доведення: Візьмемо суму S_{2m} членів.

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \text{ то } S_{2m} \geq 0$$

Якщо $2m$ зростає, то S_{2m} не спадає (додаються невід’ємні доданки)

Представимо S_{2m} в іншому вигляді:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) + \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Звідси $S_{2m} \leq a_1$ і є монотонно зростаючою і обмеженою послідовністю і $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S, S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}, \text{ а } \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0 \text{ і } \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$, тобто при парному $n=2m$ та непарному $n=2m+1$ існує одна границя і ряд збіжний.

Абсолютна й умовна збіжності

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. При дослідженні рядів на абсолютну збіжність використовуємо ознаки збіжності для рядів з невід’ємними членами.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ називається **умовно збіжним**, якщо цей ряд збіжний, а ряд із модулів $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ - розбіжний.

Ознаки збіжності Абеля та Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots, \quad a_n, b_n - \text{дві послідовності дійсних чисел}$$

Ознака Абеля.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ збігається, а числа a_n утворюють монотонну і обмежену послідовність $|a_n| \leq k, n = 1, 2, \dots$, то ряд збіжний.

Ознака Діріхле-Абеля

Якщо часткові суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ обмежені $|S_n| = |\sum_{k=1}^n b_k| \leq M, |S_n| \leq M, S_n = \sum_{k=1}^n b_k$, а числа a_n утворюють монотонну послідовність, що прямує до 0: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд збіжний.

Ознака Лейбніца є частковий випадок цієї ознаки при $b_n = (-1)^{n+1}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ має обмежену послідовність часткових сум.

Функціональні ряди. Рівномірна збіжність

Відображення $N \xrightarrow{\Phi} F$, де F - множина всіх функцій називається **функціональною послідовністю (ФП)**. Значення відображення $\Phi(n) = f_n$ називається **n -м членом**, та будемо її позначати (f_n) .

Функціональна послідовність (S_n) називається **функціональним рядом (ФР)**, якщо існує така функціональна послідовність (f_n) , для якої виконується умова:

$\forall n \in N \quad \forall x \in X \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Такий функціональний ряд будемо позначати $\sum f_n$. Значення S_n називається **частковою сумою** ФР $\sum f_n$, а функція f_n її **загальним членом** (n -м членом) функціонального ряду.

Функціональна послідовність (f_n) називається **поточково збіжною** до функції f , якщо $\forall x \in X \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Функціональний ряд (2) – збіжний в т. $x_0 \in X$, якщо збіжний в цій точці

відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, або $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$ і абсолютно збіжний в т. x_0 ,

якщо при $x = x_0$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Поточною сумою ФР $\sum f_n$ на множині X називається поточкова границя його часткових сум, якщо вона існує. ФР називається **поточною збіжним** на X , якщо його поточкова сума існує та скінченна в кожній точці множини X .

Мажорантна ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.

ФР (2) $\sum f_n$ називається **рівномірно збіжним**, якщо послідовність його часткових сум (S_n) рівномірно збігається, тобто $S_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} S(x), x \in X$, а саме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \forall x \in X \text{ одночасно, або } \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \text{ або } r_n(x) = S(x) - S_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} 0 \quad \forall x \in X$$

Ознака Вейєрштрасса. Якщо для функціонального ряду (2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

можна вказати такий числовий збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що $\forall n \geq n_0, \forall x \in X : |f_n(x)| \leq a_n$, то ряд (2) збігається абсолютно і рівномірно на X .

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **мажоруючим** для $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Доведення:

За критерієм Коші маємо:

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right| < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall p = 1, 2, \dots$$

Ознаки рівномірної збіжності Абеля та Діріхле

(Ознака Абеля рівномірної збіжності ФР)

Нехай $\forall x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ монотонна. Якщо ФР $\sum \varphi_n \Rightarrow 1$ $\|f_n\| = O(1)$, то ряд $\sum f_n \varphi_n \Rightarrow$ на X .

(Ознака Діріхле рівномірної збіжності ФР)

Нехай $\forall x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ монотонна. Якщо ФР $\|f_n\| = o(1)$ і $\left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k \right\| = O(1)$, то ряд $\sum f_n \varphi_n \Rightarrow$ на X .

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності

ФР вигляду $\sum a_n (x - x_0)^n$, де $n \in \mathbb{Z}^+$ називається **степеневим рядом (СР)**. $\sum a_n x^n$

Степеневий ряд – це функціональний ряд, а саме нескінченний многочлен

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Множина значень x , при яких ряд збігається називається **областю збіжності степеневого ряду**.

Теорема 1(Абеля).

Якщо степеневий ряд збіжний в точці $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх x , для яких $|x| < |x_0|$; якщо ряд розбіжний при $x = x_1$, то він розбіжний при $\forall x: |x| > |x_1|$.

Доведення:

Оскільки ряд $\sum a_n x_0^n$ збіжний, то загальний член ряду прямує до нуля : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, а отже, обмежений : $|a_n x_0^n| \leq M, n = 0, 1, 2, \dots$. Візьмемо $\forall x: |x| < |x_0|$ і складемо ряд : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$. Складемо ряд із абсолютних величин:

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M q^n, q < 1, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ – це ряд, елементи якого

складають геометричну прогресію, $q < 1$, а отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно збіжний за ознакою порівняння. Якщо ряд розбіжний в точці x_0 , то він розбіжний при $\forall x: |x| > |x_0|$. При $x=0$ збігаються всі степеневі ряди. Є ряди, які не збігаються при жодному значенні x .

Радіус збіжності??? Інтервал $(-R, R)$ називається проміжком збіжності, а число R ($0 < R \leq +\infty$) - радіусом збіжності ряду. При $R=0$ ряд всюди розбіжний, область його збіжності складається з однієї точки $x = 0$.

(Формула д'Аламбера для радіуса збіжності)

Якщо для степеневого ряду $\sum a_n x^n$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулою: $R = 1/l$.

Розвинення функцій в степеневі ряди. Критерій розвинення функцій в степеневі ряди.

Будемо казати, що функція $(-R, R) \xrightarrow{f} R \left(X \xrightarrow{f} R \right)$ може бути розкладеною в степеневий ряд на множині $(-R, R)$ (на множині X), якщо існує СР, що збігається до

функції f на множині $(-R, R)$ (на множині X), тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$

$(x \in X)$. Будемо казати, що функція $(-R, R) \xrightarrow{f} R \left(X \xrightarrow{f} R \right)$ може бути розкладеною в степеневий ряд на множині $(-R, R)$ (на множині X), якщо існує СР, що збігається до

функції f на множині $(-R, R)$ (на множині X), тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$ ($x \in X$).

Критерій розвинення функції в степеневий ряд

Для того, щоб функція $f(x)$ могла бути розвинена в ряд Тейлора на $(-R, R)$,

\Leftrightarrow щоб залишковий член в формулі Тейлора прямував до 0 на вказаному інтервалі:

Необхідність: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - збіжний ряд на $(-R, R)$,

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ - залишок збіжного ряду в кожній точці $x \in (-R, R)$ є збіжним,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

Достатність: нехай $R_n(x) \rightarrow 0$ в точці $x \in (-R, R)$ при $n \rightarrow \infty$.

$$|R_n(x)| = f(x) - S_n(x).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - 0 = f(x).$$

Зауважимо, що відрізками степеневих рядів є многочлени і тому степеневі ряди – зручний спосіб для наближених обчислень.

Теорема 5. (достатні умови розвинення в степеневий ряд)

Якщо функція $f(x) \in C^\infty(-R; R)$ і всі похідні обмежені одним і тим самим числом

$$|f^{(k)}(x)| \leq M, k = 1, 2, \dots, n \dots, \text{ то має місце розвинення } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Ортогональні й ортонормовані системи. Процес ортогоналізації

Функції $f \in R[a, b]$ і $g \in R[a, b]$ називають *ортогональними*, якщо
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Розглянемо систему функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots\} \subset R[a, b]$ (1)

Систему (1) називають *ортогональною на $[a, b]$* , якщо
$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j \end{cases}.$$

Якщо $\|\varphi_i\| = 1$, то $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ називають *ортонормованою*. Будь-яку ортогональну систему можна

нормувати: підібрати $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n \dots$ так щоб $\mu_0 \varphi_0, \mu_1 \varphi_1, \dots, \mu_n \varphi_n \dots$, яка ортогональна, була

$$\int_a^b \mu_n^2 \varphi_n^2(x) dx = \mu_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ звідси } \mu_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}} = \frac{1}{\|\varphi_n\|}$$

ортонормована

ПРОЦЕС ОРТОГОНАЛІЗАЦІЇ???

Ряд Фур'є по ортогональних системах

Нехай $f(x)$ задана на $[a, b]$ і може бути представлена у вигляді ряду по ортогональній системі $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $f(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n + \dots$, $a_i - \text{const}$

Поставимо задачу обчислити постійні a_i .

Припускаємо, що ряди

$f(x)\varphi_n(x) = a_0\varphi_0(x)\varphi_n(x) + a_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)\varphi_n(x) + \dots$ можна інтегрувати,

$$n = 0, 1, 2, \dots, \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = a_n \|\varphi_n\|^2, \quad a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Має місце твердження: якщо функції системи $\{\varphi_n(x)\}$ неперервні і для $f(x)$

справедливе представлення $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, причому ряд збігається рівномірно, то це є ряд Фур'є для $f(x)$, а a_n називається коефіцієнтами Фур'є.

Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

Нагадаємо, що функція називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Для парної функції $\int_{-e}^e f(x)dx = 2 \int_0^e f(x)dx$.

$$\int_{-e}^e f(x)dx = \int_{-e}^0 f(x)dx + \int_0^e f(x)dx = \int_0^e f(-x)dx + \int_0^e f(x)dx = 2 \int_0^e f(x)dx,$$

$$\int_{-e}^e f(x)dx = 0 \quad \text{для непарної функції.}$$

Нагадаємо, що

а) добуток двох парних і двох непарних функцій є парна функція;

б) добуток парної і непарної – є непарна функція.

Гладкі та кусково-гладкі функції

Функція $f(x)$ називається гладкою на $[a, b]$, якщо вона має неперервну похідну. Геометрично це означає, що при переміщенні вздовж кривої $y = f(x)$ напрямок дотичної змінюється неперервно, без стрибків. Функція, похідна якої допускає лише скінченне число точок розриву I-го роду називається *кусово-гладкою* на $[a, b]$.

- а) розривна кусково-гладка функція;
- б) гладка функція, плавна крива без кутових точок;
- в) неперервна кусково-гладка функція

Графік кусково-гладкої функції є неперервна або розривна крива, що має скінченну кількість кутових точок (в них скачок похідної).

Будь-яка кусково-гладка функція $f(x)$ (неперервна чи розривна) обмежена і має обмежену похідну скрізь, за виключенням кутових і точок розриву (в цих точках не існує $f'(x)$).

Теорема. Ряд Фур'є кусково-гладкої функції $f(x)$ (неперервної чи розривної), визначеної на $(-\infty, +\infty)$ періоду $T = 2\pi$ збігається для $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, причому його сума $S(x) = f(x)$ в кожній точці неперервності і дорівнює півстрибку $S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ в кожній точці розриву x_0 .

Якщо $f(x)$ всюди неперервна, то ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Невласні інтеграли першого роду.

При визначенні $\int_a^b f(x)dx$ (такий інтеграл називається власним, але це слово зазвичай опускається) передбачалось, що

а) проміжок $[a, b]$ скінченний;

б) підінтегральна функція визначена, неперервна на $[a, b]$, обмежена і множина точок розриву мають Лебегову міру нуль.

Якщо порушуються пункти а) або б), то інтеграл називається невласним.

Означення 1.

Нехай $f(x)$ визначена на $a \leq x < +\infty$ і інтегровна на $[a, R]$, $R > 0$, так що

$\int_a^R f(x)dx$

Невласні інтеграли з двома нескінченними границями можна обчислити як суму двох невласних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Нехай $F(x)$ - первісна функція для $f(x)$ тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} (F(R) - F(a))$$

Якщо існує первісна $F(x)$, неперервна на $[a, b]$ і така, що $F'(x) = f(x)$, узагальнена первісна, та ввести умовне позначення $F(+\infty) = \lim_{R \rightarrow +\infty} F(R)$, то для

збіжного невласного інтеграла з нескінченною верхньою межею інтегрування узагальнена формула Ньютона – Лейбніца має вигляд:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x)$$

Означення 3. Невласний інтеграл I-го роду збігається, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0 : \forall A \in [a, \infty) \text{ з того, що } A > \Delta \Rightarrow \left| S(A) - \int_a^{\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Деякі властивості невластних інтегралів I-го роду:

Якщо невластний інтеграл збіжний, то збіжний його залишок та навпаки, причому:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx$$

$$\text{Якщо збігається } \int_a^{\infty} f(x) dx, \text{ то } \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{\infty} f(x) dx = 0$$

$$\text{Якщо збігається } \int_a^{\infty} f(x) dx, \text{ то збігається } \int_a^{\infty} cf(x) dx, \text{ c – const, причому}$$

$$\int_a^{\infty} cf(x) dx = c \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Якщо збігаються інтеграли

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{та} \quad \int_a^{\infty} g(x) dx, \text{ то збігається інтеграл}$$

$$\int_a^{\infty} [f(x) \pm g(x)] dx \quad \text{та інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів.}$$

Критерій Коші збіжності невластного інтеграла I-го роду

$$\text{Для того, щоб } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ - збігався}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0 : \forall A', A'' \in [a, \infty), A' > \Delta, A'' > \Delta \Rightarrow$$

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Невласні інтеграли другого роду.

Інтеграл від необмежених функцій

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $\exists \int_a^{b-\eta} f(x) dx, \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$, точка b – особлива, якщо функція необмежена на $[a, b)$, але обмежена на $[a, b-\eta) \subset [a, b)$.

Означення 2.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

називається невластним інтегралом II-го роду. Якщо границя скінченна, то невластний інтеграл називається збіжним, якщо границя нескінченна або не існує, то інтеграл називається розбіжним.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$$

Якщо точка a – особлива, то

(2)

Якщо $f(x)$ необмежена у внутрішній точці $c \in [a, b]$ то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (3)$$

де невласні інтеграли другого роду визначаються (1) та (2).

$$\int_a^b f(x) dx$$

Якщо a і b особливі точки, то $\int_a^b f(x) dx$ визначається (3), де $c \forall \in [a, b]$

Означення 4. Невластний інтеграл II-го роду збігається, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \lambda \in [a, b)$

$$0 < b - \lambda < \delta \Rightarrow \left| S(\lambda) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ де } S(\lambda) = \int_a^\lambda f(x) dx.$$

Критерій Коші збіжності невластного інтеграла II-го роду

$$\text{Для того, щоб } \int_a^b f(x) dx \text{ - збігався } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \lambda', \lambda'' \in [a, b) \quad 0 < b - \lambda' < \delta,$$

$$0 < b - \lambda'' < \delta \Rightarrow \left| \int_{\lambda'}^{\lambda''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Наведені критерії мало придатні на практиці, існують достатні умови збіжності невласних інтегралів.