ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3.
Неперервні випадкові величини.

1. Щільність неперервної випадкової величини. Властивості щільності. 2. Рівномірний розподіл. 3. Показниковий розподіл. 4. Нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2). 5. Функція Лапласа $\Phi(x)$ та її використання. 6. Параметри неперервних випадкових величин.

1. *Щільність неперервної випадкової величини.*

Вказівка: Випадкова величина ξ називається *неперервною*, якщо для будь-якого дійсного числа x її функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, можна записати у вигляді:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du, \ -\infty < x < \infty.$$

Функція $f_\xi(x)$ називається *щільністю* випадкової величини ξ:

$$f_\xi(x) = (F_\xi(x))'.$$

Вона має наступні властивості:

1) $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Вказівка: Нехай $F_\xi(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ.

Ймовірність події $\{a < \xi < b\}$ знаходимо за формулою:

$$P\{a < \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Якщо ξ – випадкова величина, що має розподіл неперервний розподіл з щільністю $f_\xi(x)$, $x \in R$, то:

$$P\{a < \xi < b\} = \int_a^b f_\xi(x)dx.$$

1. *Властивості щільності.*

Приклад. 1. (**[3], s. 88**). Щільність $f_\xi(x)$ випадкової величини ξ має наступний вигляд

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ x < 0, \textit{або} \ x > 1 \\ a \cdot x^2, \ \textit{якщо} \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

1. Знайти значення параметру a.

Відповідь: $a = 3$.

2. Знайти функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$випадкової величини ξ.

Відповідь: $F(x) = 0$, якщо $x \leq 0$;
$F(x) = x^3$, якщо $0 < x \leq 1$;
$F(x) = 1$, якщо $x > 1$.

2. *Рівномірний розподіл.*

Вказівка: Неперервна випадкова величина ρ має рівномірний розподіл на проміжку $[a; b]$, якщо її щільність $f_\rho(x)$ визначається формулою:

$$f_\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < a, \text{ або } x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, \ a \le x \le b, \end{cases}.$$

Приклад 2. Випадкова величина ρ має рівномірний розподіл на проміжку [a; b]. Довести, що її функція розподілу $F_\rho(x)$ має вигляд:

$$F_\rho(x) = \begin{cases} 0, \ dla\, x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ dla \ a \le x \le b; \\ 1, \ dla \ x > b. \end{cases}$$

3. *Показниковий розподіл.*

Приклад 3. Випадкова величина ξ_λ має *показниковий розподіл* з параметром λ, якщо її щільність $f_\lambda(x)$ визначається формулою

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0, \ \text{ якщо } x \le 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x > 0 \end{cases}.$$

Знайти функцію розподілу $F_\lambda(x)$ Випадкової величини ξ_λ.

Відповідь: $F_\lambda(x) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \ \text{ якщо } \ x > 0. \end{cases}.$

4. *Нормальний розподіл.*

Вказівка: Неперервна випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2): $\xi \Leftrightarrow N(m, \sigma^2)$, якщо її щільність $f_\xi(x)$ визначається формулою:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

Розподіл $N(0, 1)$ називається стандартним. Функція

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, -\infty < x < \infty,.$$

називається функцією Лапласа.

5. *Функція Лапласа $\Phi(x)$ та її використання*.

Приклад 4. $\Phi(x)$, $-\infty < x < \infty$, означає функцію Лапласа. Переконатися, що

$$\Phi(x) = \mathrm{P}\{N(0, 1) < x\},$$

та довести наступні властивості функції $\Phi(x)$:

1. $\Phi(0) = 0{,}5$.

2. $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$, для довільного $a > 0$.

Приклад 5. Довести, що між нормальним розподілом $N(m, \sigma^2)$ та нормальним стандартним розподілом $N(0, 1)$ існує наступний зв'язок:

$$\text{Якщо } \xi \Leftrightarrow N(m, \sigma^2), \text{ то } \eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \Leftrightarrow N(0, 1).$$

Приклад 6. (**[3], с. 170**). Випадкова величина η має розподіл $N(0, 1)$.

1. Використовуючи таблицю функції Лапласа визначити число A таким чином, щоб виконувалась рівність:

$$\mathrm{P}\{\eta < A\} = 0{,}835.$$

Відповідь: $A = 0{,}975$.

2. Дати графічну ілюстрацію розв'язку використовуючи графік щільності $f_\eta(x)$ та графік функції Лапласа $\Phi(x)$.

3. Визначити число A застосовуючи статистичні функції («*НОРМ.СТОБР*» та «*НОРМ.ОБР*») аркушу «*Excel*».

Відповідь: $A = 0{,}9741$.

Приклад 7. (**[3], с. 168**). Випадкова величина ξ має нормальний розподіл

$$\xi \Leftrightarrow N(2, 0.04).$$

1. Використовуючи таблицю функції Лапласа знайти ймовірність події

$$P\{1{,}98 < \xi < 2{,}14\}.$$

Відповідь: $\mathrm{P}\{1{,}98 < \xi < 2{,}14\} = 0{,}2978$.

2. Знайти ймовірність події $P\{1{,}98 < \xi < 2{,}14\}$, застосовуючи функцію «*НОРМ.РАСП*» аркушу „*Excel*” для нормального розподілу $N(m;\ \sigma^2)$ з *довільними параметрами* $(m;\ \sigma^2)$.

Відповідь: $\mathrm{P}\{1{,}98 < \xi < 2{,}14\} = 0{,}2978$.

6. *Параметри неперервних випадкових величин.*

Нехай ξ – випадкова величина, що має неперервний розподіл з щільністю $f_\xi(x)$, $x \in R$. Математичним сподіванням та дисперсією ξ називаються числа $E(\xi)$ та $D(\xi)$, обчислені наступним чином:

$$m = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)dx;$$

$$\sigma^2 = D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f_\xi(x)dx.$$

Приклад 8. (**[3], s. 88**). (Пр.1. *Продовження*). Щільність $f_\xi(x)$ випадкової величини ξ має наступний вигляд

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ якщо\ x < 0, або\ x > 1 \\ a \cdot x^2,\ якщо\ \ 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

1) Знайти $E(\xi)$.

2) Знайти $D(\xi)$.

Відповідь: 1). $m = E(\xi) = 0.75$; 2) $D(\xi) = 3/80$.

3) Знайти ймовірність події $\{0{,}4 < \xi < 0{,}8\}$.

Відповідь: $P\{0{,}4 < \xi < 0{,}8\} = 0{,}448$.

4) Намалювати графік щільності $f_\xi(x)$ і дати ілюстрацію розв'язку п. 3).

Приклад 9. Випадкова величина ρ має рівномірний розподіл на проміжку $[a;\ b]$. Довести, що

1. $E(\xi) = (a + b)/2$.

2. $D(\xi) = (b - a)^2/12$.

3. Покласти $a = 5$, $b = 11$, та обчислити $m = E(\xi)$ і $\sigma^2 = D(\xi)$.

Відповідь: $m = E(\xi) = 8$; 2) $D(\xi) = 3$.

Приклад 10. (**[3], с. 164**). Випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(m,\ \sigma^2)$ з параметрами $(m,\ \sigma^2)$. Довести, що:

1. $E(\xi) = m$.

2. $D(\xi) = \sigma^2$.

Приклад 11. Випадкова величина η має розподіл $N(0,\ 1)$.

1. Використовуючи таблицю функції Лапласа визначити число $\boldsymbol{B}$ таким чином, щоб виконувалась рівність:

$$\mathrm{P}\{|\boldsymbol{\eta}| < \boldsymbol{B}\} = \mathbf{0{,}835}.$$

Відповідь: $B = 1{,}39$.

2. Дати графічну ілюстрацію розв'язку використовуючи графік щільності $f_\eta(x)$ та графік функції Лапласа $\Phi(x)$.

3. Визначити число B застосовуючи статистичні функції («*НОРМ.СТОБР*» та «*НОРМ.ОБР*») аркушу «*Excel*».

Відповідь: $B = 1{,}3885$.