ЛЕКЦІЯ 6(А).
Математичне сподівання неперервної випадкової величини.

1. «Дискретна апроксимація» неперервної випадкової величини. 2. Визначення математичного сподівання. 3. Формула для обчислення математичного сподівання. 4. Математичне сподівання неперервної випадкової величини. 5. Властивості математичного сподівання неперервної величини. 6. Приклади розподілів неперервних випадкових величин: **рівномірний розподіл**.

Припустимо тепер, що ξ – неперервна випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі (Ω, $\mathfrak{I}$, P), а її розподіл визначає щільність $f_\xi(x)$, $\infty < x < +\infty$. Те, що ξ має неперервний розподіл, не впливає на інтерпретацію його числового параметру $E(\xi)$, який дістав назву «*математичного сподівання*» та вказує «*середнє*» значення (m) випадкової величини ξ. Покажемо, як в цьому випадку виглядає його «*абстрактне*» визначення:

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega),$$

та яким чином *практично* можна обчислити його значення m.

Запропонований підхід фактично повторює процедуру визначення інтегралу Лебега для довільної вимірної відносно σ-алгебри $\mathfrak{I}$ функції $\xi(\omega)$. Це дозволить одночасно вивести формулу для його обчислення.

1. «*Дискретна апроксимація*» *неперервної випадкової величини.*

Виберемо деяке додатне значення $h > 0$, та використовуючи неперервну випадкову величину ξ, побудуємо дискретну випадкову величину:

$$\xi_h = \xi_h(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

що приймає значення, кратні h, тобто

$$\xi_h \in \{k\cdot h,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Випадкова величина ξ_h визначається наступним чином:

$$\{\omega\colon \xi_h(\omega) = k\cdot h\} = \{\omega\colon k\cdot h \le \xi(\omega) < (k+1)\cdot h\}.$$

Лема 1. Якщо існує таке значення $h_0 > 0$, для якого виконується умова:

$$E\left(|\,\xi_{h_0}\,|\right) < \infty,$$

то ця умова буде виконуватись для довільного додатного значення $h > 0$:

$$E(|\xi_h|) < \infty.$$

Доведення. Як випливає із способу визначення випадкової величини ξ_h, справедливі наступні оцінки:

$$\xi_h(\omega) \le \xi(\omega) < \xi_h(\omega) + h,$$

або

$$0 \le \xi(\omega) - \xi_h(\omega) < h.$$

Тому:

$$|\xi_h - \xi_{h_0}| = |(\xi_h - \xi) + (\xi - \xi_{h_0})| \le |\xi_h - \xi| + |\xi - \xi_{h_0})| \le h + h_0.$$

Тобто:

$$|\xi_h| \le |\xi_{h_0}| + h + h_0.$$

Використаємо тепер властивості 1, 3, 5, для математичного сподівання дискретної випадкової величини. Отримаємо:

$$E(|\xi_h|) \le E(|\xi_{h_0}| + h + h_0) = E(|\xi_{h_0}|) + h + h_0 < \infty.$$

Лема 2. Якщо існує таке значення $h_0 > 0$, для якого виконується умова:

$$E(|\xi_{h_0}|) < \infty,$$

то існує границя: $\lim\limits_{h\to 0} E(\xi_h)$.

Доведення. Нехай h_n, $n = 1, 2, \ldots$, означає довільну послідовність додатних чисел, для якої виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0.$$

Використовуючи властивості 3, 4, 5, 6, для математичного сподівання дискретної випадкової величини, отримаємо:

$$|E(\xi_{h_n}) - E(\xi_{h_m})| = |E(\xi_{h_n} - \xi_{h_m})| \le E|\xi_{h_n} - \xi_{h_m}| \le E(h_n + h_m) = h_n + h_m \to 0,$$

якщо $n \to \infty$ та $m \to \infty$.

2. *Визначення математичного сподівання.*

Припустимо, що ξ – неперервна випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$, а $\xi_h = \xi_h(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – дискретна її апроксимація для деякого додатного значення $h > 0$.

Визначення. Якщо існує таке значення $h_0 > 0$, для якого виконується умова $E(|\xi_{h_0}|) < \infty$, то границю: $\lim\limits_{h\to 0} E(\xi_h)$ будемо називати математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ та позначати символом $E(\xi)$.

Таким чином, запропонований підхід визначає математичне сподівання неперервної величини, як границю математичних сподівань її дискретних наближень:

$$E(\xi) = \lim_{h\to 0} E(\xi_h).$$

3. *Формула для обчислення математичного сподівання.*

Припустимо, що ξ – деяка випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$.

$$F(x) = P\{\xi < x\}, -\infty < x < \infty.$$

функція розподілу випадкової величини ξ.

Припустимо, що функція $F(x)$ *не є неперервною* та диференційованою для всіх значень $-\infty < x < \infty$.

Оскільки будь-яка функція розподілу є *не спадною* та *обмеженою*, то розриви функції $F(x)$ можуть мати тільки форму «*стрибків*», а їх кількість – щонайбільше злічена.

Нехай $x_1 < x_2 < ... < x_i < ...$ – послідовність значень аргументу, в яких $F(x)$ має розриви.

- Припустимо, що в кожному числовому інтервалі (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, ...$, функція $F(x)$ *неперервна* та *диференційована*.

Нехай, крім того, задана деяка дійсна функція $g(x)$, $-\infty < x < \infty$.

Визначення. Інтегралом Рімана-Стілт'єса від функції $g(x)$ відносно функції $F_\xi(x)$ називаємо число, яке будемо позначати символом:

$$\int_a^b g(x)dF(x),$$

а обчислювати за наступною формулою:

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)\frac{dF(x)}{dx}dx + \sum_i g(x_i)(F(x_i+0)-F(x_i)).$$

Приведена в цій формулі сума стосується тих членів послідовності x_i, $i = 1, 2, ...$, які потрапили до інтервалу $[a, b]$.

Дане визначення інтегралу Рімана-Стілт'єса є узагальненням інтегралу Рімана. Його використання дозволить дати *єдине* визначення математичного сподівання, яке буде охоплювати як дискретні, так і неперервні типи випадкових величин.

Нехай $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, випадкова величина, визначена на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, $F(x) = P\{\xi < x\}$ – її функція розподілу, а $\xi_h = \xi_h(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – дискретна її апроксимація для деякого додатного значення $h > 0$. Тоді розподіл $\{(k\cdot h, p_{hk}), k \in Z\}$ випадкової величини ξ_h обчислюється наступним чином:

$$p_{hk} = P\{\xi_h = k\cdot h\} = P\{k\cdot h \le \xi < (k+1)\cdot h) = F((k+1)\cdot h) - F(k\cdot h).$$

Теорема. Якщо математичне сподівання $(E(\xi))$ випадкової величини ξ існує, то його можна обчислити за формулою:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

де $F(x) = P\{\xi < x\}$ – функція розподілу випадкової величини ξ.

Доведення. Якщо ξ – дискретна випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, а $\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \dots\}$ її розподіл, то функція розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$ буде мати *ступінчатий* вигляд і зберігати на інтервалах $[x_i, x_{i+1}]$ постійне значення. При цьому:

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = F(x_i + 0) - F(x_i).$$

Тобто:

$$dF(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i) = p_i.$$

Оскільки в проміжку (x_i, x_{i+1}) між точками x_i, $i = 1, 2, ...$, в яких $F(x)$ має «*стрибки*», її значення не змінюється, то $dF(x) = 0$ для $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2, ...$. Таким чином:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i = \sum_i x_i \cdot (F(x_i + 0) - F(x_i)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Нехай тепер $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, буде довільною (не обов'язково дискретною) випадковою величиною, визначеною на ймовірнісному просторі (Ω, $\mathfrak{I}$, P), для якої математичне сподівання $E(\xi)$ існує. Тоді на підставі його визначення отримаємо:

$$E(\xi) = \lim_{h \to 0} E(\xi_h) = \lim_{h \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k \cdot h) \cdot p_{kh} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k \cdot h) \cdot (F((k+1) \cdot h) - F(k \cdot h)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

4. *Математичне сподівання неперервної випадкової величини.*

Лема 3. Якщо ξ неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x)$, $\infty < x < +\infty$, і при цьому існує інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

то математичне сподівання ($E(\xi)$) випадкової величини ξ існує і може бути обчислене за формулою:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Доведення. Використаємо приведену формулу

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \int_a^b g(x) \frac{dF(x)}{dx} dx + \sum_i g(x_i)(F(x_i + 0) - F(x_i)).$$

для обчислення інтегралу Рімана-Стілт'єса від довільної функції $g(x)$. Покладемо $g(x) = x$. Якщо ξ неперервна випадкова величина, то її функція розподілу $F(x)$ буде неперервною. Тому другий доданок буде відсутній. Оскільки випадкова величина ξ має щільність $f(x)$, то виконується рівність:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f_\xi(x),$$

і інтеграл Рімана-Стілт'єса зводиться до інтегралу Рімана. Отже

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Зауваження. Часто в прикладних застосуваннях теорії ймовірностей доведена в лемі 3 *формула для обчислення* математичного сподівання неперервної випадкової величини трактується як його *визначення*.

5. *Властивості математичного сподівання неперервної величини.*

Легко перевірити, що для математичного сподівання неперервної величини виконуються всі властивості 1 – 8, встановлені раніше для дискретних величин. Єдине, на що варто звернути увагу, це властивість 7, яка приймає дещо іншу форму. А саме, для неперервних випадкових величин справедливий наступний результат.

Лема 4. Припустимо, що ξ – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x)$, $\infty < x < +\infty$, а $g(x)$ – деяка неперервна дійсна функція, така, що $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \cdot f(x)dx < \infty$. Тоді існує математичне сподівання $E(g(\xi))$ випадкової величини $\eta = g(\xi)$, яке можна обчислити за формулою:

$$E(\eta) = E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx.$$

Зауваження. Результат приведений в лемі 4 дуже корисний з практичної точки зору і часто застосовується в прикладних розрахунках. Він дозволяє обчислити *середнє значення* $E(\eta) = E(g(\xi))$ випадкової величини η, не знаходячи попередньо її розподілу.

6. *Приклади розподілів неперервних випадкових величин.*

Приклад 1. *Розподіл, рівномірний на проміжку* [*a*, *b*].

Визначення. Неперервна випадкова величина ρ має рівномірний розподіл на проміжку $[a; b]$, якщо її щільність $f_\rho(x)$ визначаються формулою:

$$f_\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, \; a \le x \le b, \\ 0, \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Функція розподілу $F_\rho(x)$ випадкової величини ρ визначається наступним чином:

$$F_\rho(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\rho(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ a \le x \le b, \\ 1, \text{ якщо } x > b. \end{cases}$$

має рівномірний розподіл на проміжку $[a; b]$,

Рівномірний розподіл відіграє дуже важливу роль в теорії ймовірностей і математичній статистиці. Особливо простий вигляд приймають наведені формули у випадку, коли $a = 0$; $b = 1$, тобто для розподілу, рівномірного *на проміжку* [0, 1]. Випадкова величина, що має рівномірний *на проміжку* [0, 1] *розподіл*, зазвичай позначається літерою α. Функція розподілу

$$F_\alpha(x) = P(\alpha < x), -\infty < x < \infty,$$

випадкової величини α, та її щільність ($f_\alpha(x)$) визначаються відповідно формулами:

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, \ dla \ x < 0 \\ x, \ dla \ 0 \le x \le 1; \\ 1, \ dla \ x > 1 \end{cases} f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, \ dla \ x < 0 \\ 1, \ dla \ 0 \le x \le 1. \\ 0 \ dla \ x > 1 \end{cases}$$

Якщо говорити про фізичну інтерпретацію випадкових величин ρ (або α), то в першу чергу необхідно відзначити:

- Процедуру «*випадкового вибору*» (або «*вибору навмання*») точки на проміжку $[a; b]$, (або [0, 1]).

Візьмемо проміжок [0, 1]. З формальної точки зору «*вибір навмання*» означає наступне.

- Нехай $I_{[p,\,q]} = [p, q]$, $0 \le p < q \le 1$, та $\alpha \in I_{[x,\,y]} = [x, y]$, $0 \le x < y \le 1$, два під-інтервали відрізка [0, 1], що мають однакову довжину:

$$|I_{[x,\,y]}| = y - x = q - p = |I_{[p,\,q]}|.$$

Знайдемо ймовірність:

$$P\{\alpha \in I_{[p,\,q]}\} = P\{p \le \alpha \le q\} = F_\alpha(q_{+0}) - F_\alpha(p) = q - p.$$

- Отже події:

{значення α буде взяте з під-інтервалу $I_{[x,\,y]}$}

та

{значення α буде взяте з під-інтервалу $I_{[p,\,q]}$}

є «*так само можливими*». Тобто:

$$P\{\alpha \in I_{[p,\,q]}\} = \mathrm{P}\{\alpha \in I_{[x,\,y]}\} = |I_{[p,\,q]}| = q - p = |I_{[x,\,y]}| = y - x.$$

Рівномірний розподіл має ряд цікавих властивостей, які, зокрема, роблять випадкову величину α *базовою* в методі комп'ютерного моделювання, тобто *основою* для моделювання випадкових величин з довільними розподілами та різноманітних, більш загальних ймовірнісних елементів:

випадкових подій, випадкових векторів, випадкових множин, випадкових процесів, тощо. Наведемо деякі з них.

Лема 5. Припустимо, що випадкова величина α має рівномірний розподіл на проміжку [0, 1]. Тоді випадкова величина:

$$\rho = a + \alpha \cdot (b - a) = a \cdot (1 - \alpha) + b \cdot \alpha,$$

буде мати з рівномірний розподіл *на проміжку* $[a, b]$.

Доведення. Необхідно довести, що випадкова величина η буде мати щільність:

$$f_\rho(x) = \begin{cases} 0, \ dla\, x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, \ dla\, a \le x \le b; \\ 0, \ dla\ x > b. \end{cases}$$

Позначимо символом $F_\rho(x)$ функцію розподілу випадкової величини η:

$$F_\rho(x) = P\{\rho < x\}.$$

Тоді враховуючи визначення величини ρ отримаємо:

$$F_\rho(x) = P\{\rho < x\} = P\{a + \alpha \cdot (b - a) < x\} = P\left(\alpha < \frac{x-a}{b-a}\right) = F_\alpha\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Тобто:

$$F_\rho(x) = F_\alpha\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0, \ dla\ \dfrac{x-a}{b-a} < 0; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ dla\ 0 \le \dfrac{x-a}{b-a} \le 1 \\ 1, \ dla\ \dfrac{x-a}{b-a} > 1. \end{cases} = \begin{cases} 0, \ dla\, x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ dla\ a \le x \le b \\ 1, \ dla\ x > b. \end{cases}$$

Знаходячи похідну функції $F_\rho(x)$ отримаємо:

$$[F_\rho(x)]'_x = f_\rho(x),$$

що й треба було довести.

Лема 6. Припустимо, що випадкова величина α має рівномірний розподіл на проміжку [0, 1]. p_k, $k = 1, 2, \ldots$ – числова послідовність, для якої виконуються наступні умови:

- $p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$;
- $\sum_k p_k = 1$.

Тоді випадкова величина ξ,, визначена наступним чином:

$$\xi = x_k, \textit{ якщо } \sum_{l=1}^{k-1} p_l \le \alpha < \sum_{l=1}^{k} p_l$$

буде дискретною випадковою величиною, що має *розподіл*

$$\{(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Доведення випливає з наступної рівності:

$$P\{\xi = x_k\} = P\left\{\sum_{l=1}^{k-1} p_l \le \alpha < \sum_{l=1}^{k} p_l\right\} = F_\alpha\left(\sum_{l=1}^{k} p_l\right) - F_\alpha\left(\sum_{l=1}^{k-1} p_l\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} p_l - \sum_{l=1}^{k-1} p_l = p_k.$$

Лема 7. Припустимо, що ξ є випадковою величиною неперервного типу з функцією розподілу $F_\xi(x)$. Припустимо також, що функція розподілу $F_\xi(x)$ є неперервною і строго зростаючою функцією. Тоді випадкова величина α, визначена формулою:

$$\alpha = F_\xi(\xi)$$

має рівномірний на проміжку [0, 1] розподіл.

Доведення. Згідно з визначенням: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$. Отже $0 \le F_\xi(x) \le 1$, тобто: $\alpha = F_\xi(\xi) \in [0,1]$.

Нехай $F_\alpha(x) = \mathrm{P}\{\alpha < x\}$ – функцію розподілу випадкової величини α. Оскільки $0 \le \alpha \le 1$, то $F_\alpha(x) = 0$, якщо $x \le 0$, та $F_\alpha(x) = 1$, якщо $x \ge 1$.

Припущення щодо функції $F_\xi(x)$ гарантують існування оберненої до неї функції $F^{-1}_\xi(x)$, такої, що виконується рівність: $F_\xi(F^{-1}_\xi(x)) = x$.

Тому для довільного $0 \le x \le 1$ з інтервалу [0,1] можемо записати наступний ланцюг рівностей:

$$F_\alpha(x) = P(\alpha < x) = P(F_\xi(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}_\xi(x)) = F_\xi(F^{-1}_\xi(x)) = x.$$

Тобто: $F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 0 \\ x, \text{ якщо } 0 \le x \le 1 \\ 1, \text{ якщо } x > 1 \end{cases}$, що й треба було довести.

Математичне сподівання рівномірного на проміжку [a, b] розподілу.

Використовуючи визначення математичного сподівання неперервної випадкової величини ξ з щільністю $f_\xi(x)$ отримаємо:

$$E(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\rho(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2\cdot(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Таким чином середнє значення (m) випадкової величини ρ, яка має рівномірний розподіл *на проміжку* $[a, b]$, дорівнює *середині цього проміжку*: $m = E(\rho) = \frac{b+a}{2}$. Це добре узгоджується з інтерпретацією «*випадкового вибору*» (або «*вибору навмання*») точки ρ на проміжку $[a; b]$.