Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

**Лабораторна робота №2**

Чисельні методи в інформатиці

“Розв’язок СЛАР прямим та ітерацінйими методами”

Варіант №8

Виконав студент групи ІПС-31

Тесленко Назар Олександрович

Київ - 2025

## Постановка задачі:

### Варіант №8

Розв’язати СЛАР наступними методами:

* Методом Гаусса розв’язати систему рівнянь, знайти визначник та обернену матрицю.

| 7 | 2 | 3 | 0 |  | X1 |  | 20 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 2 | 6 | \* | X2 | = | 36 |
| 2 | 5 | 1 | 0 |  | X3 |  | 15 |
| 0 | 1 | 4 | 2 |  | X4 |  | 22 |

* Методом квадратного кореня розв’язати систему рівнянь, знайти визначник та число обумовленості, норму обрати самостійно

| 1 | 2 | 0 |  | X1 |  | 5 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 2 | 3 | x | X2 | = | 15 |
| 0 | 3 | 2 |  | X3 |  | 12 |

* Методом Зейделя розв’язати систему рівнянь

| 4 | 0 | 1 | 0 |  | X1 |  | 12 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 0 | 2 | x | X2 | = | 19 |
| 1 | 0 | 5 | 1 |  | X3 |  | 27 |
| 0 | 2 | 1 | 4 |  | X4 |  | 30 |

## 

## Теоретичний опис та обґрунтування:

### Метод Гаусса

Прямий метод вирішення СЛАР типу

Розглядаємо даний алгоритм з вибором головного елементу по стовпцях. Ведучим елементом матрциі А обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається:

де:

- елемент матриці після (k-1)-го кроку виключення

- номер поточного стовпця

- індекс рядка, який перебирається

- номер рядка у якому знайдено максимальний за модулем елемент

Вводимо матрицю перестановок яка ініціалізується одиничною матрицею, для перестановки рядків k та l:

Для занулення елементів під головною діагоналлю використовується матрицю M. M матриця зберігає множники, що використовуються для виключенян елментів під головною діагоналлю під час прямого ходу.

Кожен елемент цієї матриці обчислюється за формулою:

- для елементів головної діагоналі

За допомгою прямого ходу:

зводимо систему до верхньої трукутньої матриці.

Для знаходження розв’язку застосовуємо зворотні хід Гаусса:

**Пошук визначника:**

, де p - кількість перестановок

**Знаходження оберненої матриці:**   
 Під час прямого ходу методу Гауса матриця A послідовно перетворюється до верхньотрикутної форми за допомогою матричних множників та перестановочних матриць , які відповідають перестановкам рядків при виборі головного елемента. Ті самі перетворення одночасно виконуються над одиничною матрицею E, у результаті чого вона поступово переходить у матрицю

Після прямого ходу отримуємо систему:

Під час зворотнього ходу система розв’язується постовпчиково:

### Метод квадратного кореня

Прямий метод для розв’яування СЛАР типу Ax=b

Необхідна умова застосування: матриця А симетрична

Матрицю А представимо у вигляді:

Матриця S - верхня трикутна матриця  
Матриця D - діагональна матриця для збереження знаку ведучих елементів

Формули заповнення матриці S:

Формули заповнення матриці D:

Подалше рівняння зводиться до розв’язку двох СЛАР з трикутними матрицями. З першої системи знаходять y:

А з другої - х:

Пошук визначника:

### Метод Зейделя

Ітераційни метод для розв’язання СЛАР типу Ax=b. Розв’язок знаходимо із заданою точністю **ε**. Початкове наближення обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

Умова зупинки:

Достатні умови збіжності:

* Якщо виконується нерівність

то ітераційний процес методу Зейделя збігається з лінійною швидкістю.

* Якщо , то ітераційни процес методу Зейделя збігається з лівнійною швидкістю.

Необхідні і досстатні умови збіжності:

* Для ітераційний процес методу Зейделя збігається тоді і тільки тоді, коли , де - корені нелійнійного рівняння

## 

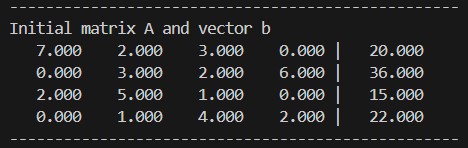
## Хід роботи

Мова реалізації: Python

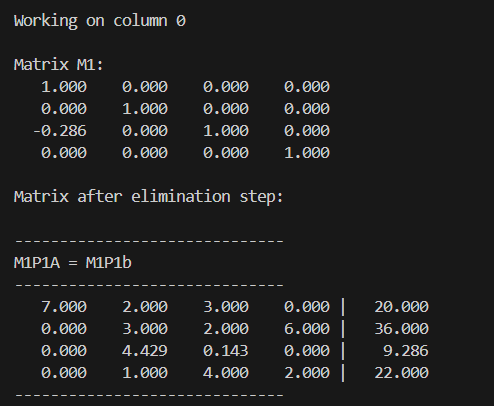
### Метод Гаусса

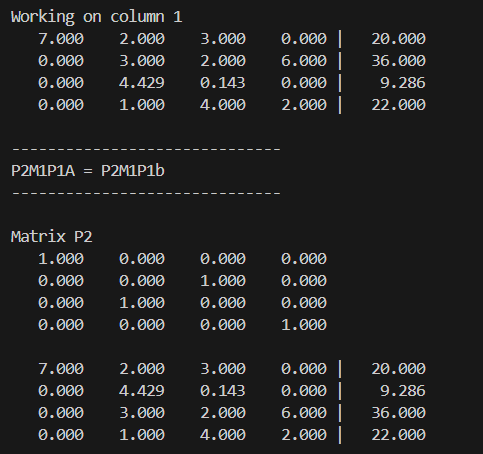
| 7 | 2 | 3 | 0 |  | X1 |  | 20 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 2 | 6 | \* | X2 | = | 36 |
| 2 | 5 | 1 | 0 |  | X3 |  | 15 |
| 0 | 1 | 4 | 2 |  | X4 |  | 22 |

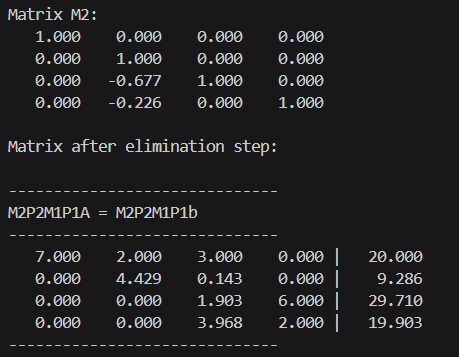
Ініціалізуємо матрицю та вектор:



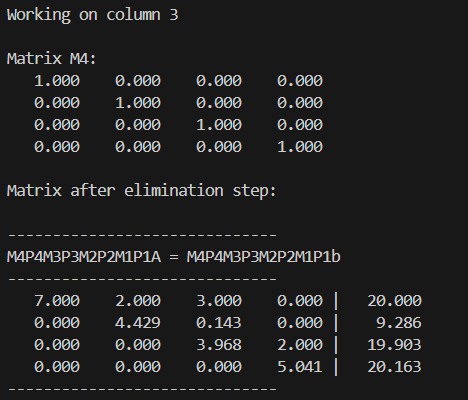
Прямим ходом за допомогою матриць (перестановки) і (елементарні перетворення) зводимо A до трикутної форми, одночасно перетворюючи одиничну матрицю для знаходження оберненої.



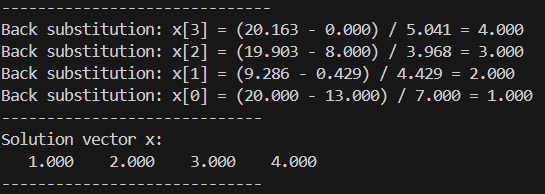




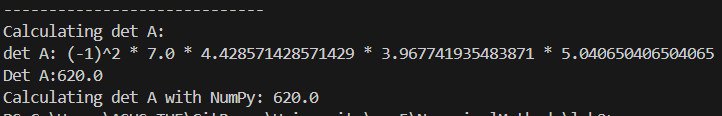
……………………………………………………….



Після отриманого результату, починаємо зворотній хід для коренів СЛАР:



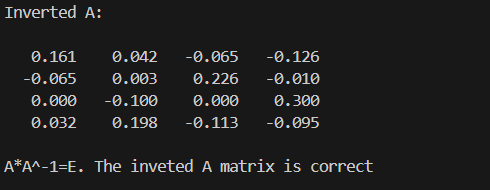
Знаходження детермінаннту матриці:



Перевіримо мануально коректність знайдених коренів:

| 7 \* 1 | +2\*2 | +3\*3 | +0 |  | 20 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | +3\*2 | +2\*3 | +6\*4 | = | 36 |
| 2\*1 | +5\*2 | +1\*3 | +0 |  | 15 |
| 0 | +1\*2 | +4\*3 | +2\*4 |  | 22 |

**Пошук оберненої матриці:**



У результаті отримали вектор, заданий за умовою - корені знайдені правильно.

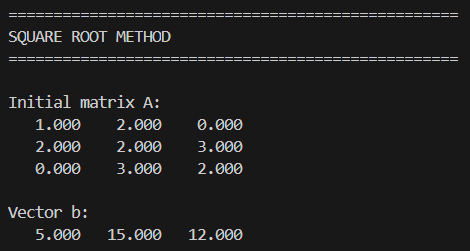
### 

### 

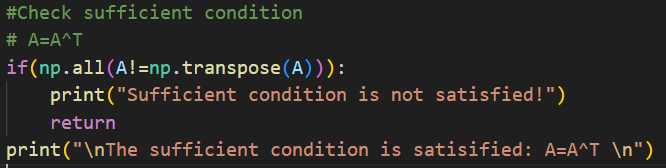
### Метод квадратного кореня

| 1 | 2 | 0 |  | X1 |  | 5 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 2 | 3 | x | X2 | = | 15 |
| 0 | 3 | 2 |  | X3 |  | 12 |

Ініціалізуємо дані:

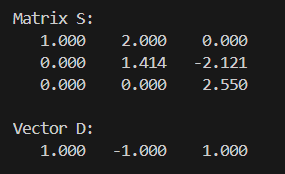


Перевіряємо достатню умову:

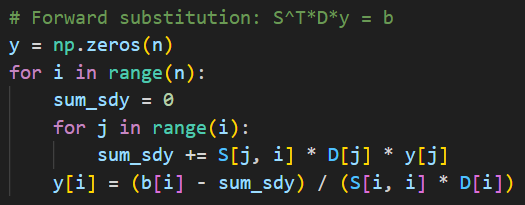


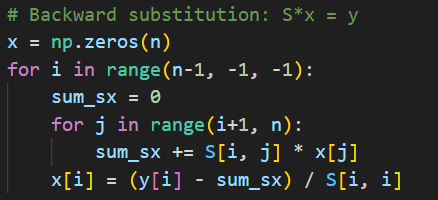


Обраховуємо матриці S та D:



Обраховуємо дві СЛАР:





Результат:

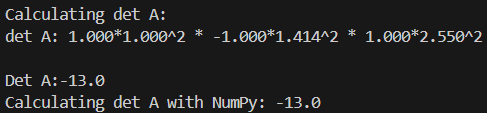


Перевіримо коректність знайдених коренів:

| 1\*1 | +2\*2 | +0 |  | 5 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2\*1 | +2\*2 | +3\*3 | = | 15 |
| 0 | +3\*2 | +2\*3 |  | 12 |

Результати відповідають вектору b, отже корені вірні.

Знайдемо визначник:

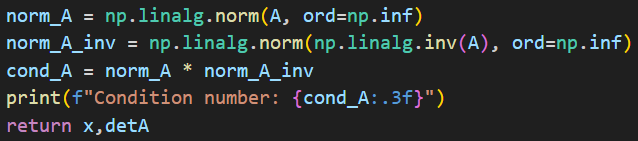


Знайдемо число обумовленості:

Число обумовленості cond(A) матриці характеризує чутливість розв’язку системи Ax=b до похибок у даних A та b.

Обчислюємо за формулою:

Обираємо inf-норму - найбільша сума по рядках матриці

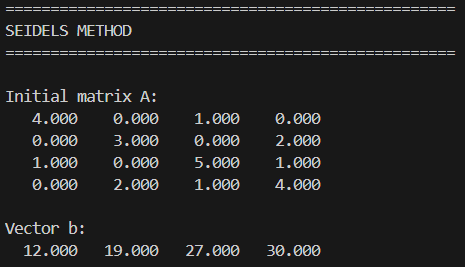




### Метод Зейделя

| 4 | 0 | 1 | 0 |  | X1 |  | 12 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 0 | 2 | x | X2 | = | 19 |
| 1 | 0 | 5 | 1 |  | X3 |  | 27 |
| 0 | 2 | 1 | 4 |  | X4 |  | 30 |

Ініціалізуємо вхідні дані:

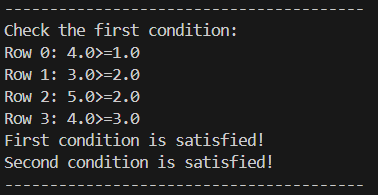


Перевіримо достатні умови для збіжності даного методу:

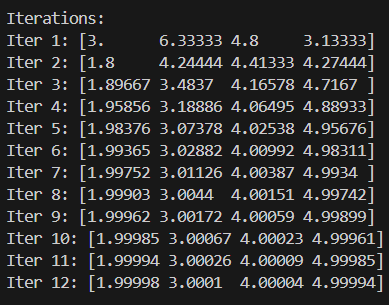
* Якщо виконується нерівність

то ітераційний процес методу Зейделя збігається з лінійною швидкістю.

* Якщо , то ітераційни процес методу Зейделя збігається з лівнійною швидкістю.

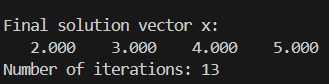


Достатні умови виконуються отже починаємо ітераційний процес:



Задана точність

Результуючий вектор:



Перевіримо коректність знеайдених коренів:

| 4\*2 | +0 | +1\*3 | +0 |  | 12 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | +3\*3 | +0 | +2\*5 | = | 19 |
| 1\*2 | +0 | +5\*4 | +1\*5 |  | 27 |
| 0 | +2\*3 | +1\*4 | +4\*5 |  | 30 |

Знайдені корені задовільняють систему, отже алгоритм виконується вірно.

[Github code](https://github.com/naztes0/University/tree/main/sem5/NumericalMethods/lab2)