

## **TUGAS LATEX APLIKASI KOMPUTER**

Disusun untuk Memenuhi Tugas Mata Kuliah Aplikasi Komputer

Dosen Pengampu:

1. Drs. Sahid, M.Sc.
2. Thesa Adi Saputra Yusri, M.Sc.



Disusun oleh:

Nazwa Yuan Adelia Putri

23030630095

Matematika B 2023

**DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
TAHUN 2024**



## **KATA PENGANTAR**

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga kami dapat menyelesaikan tugas ini dengan baik. Dokumen ini disusun sebagai salah satu upaya untuk memenuhi tugas tugas akhir mata kuliah aplikasi komputer. Kami berharap, isi dari karya ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca dan menjadi sumbangan kecil kami untuk bidang aplikasi komputer.

Kami menyadari bahwa dalam penyusunan ini masih terdapat kekurangan, baik dari segi isi maupun penyajian. Oleh karena itu, kami dengan rendah hati menerima kritik dan saran yang membangun untuk perbaikan ke depannya.

Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu, baik secara langsung maupun tidak langsung, dalam menyelesaikan tugas ini. Semoga segala kebaikan yang telah diberikan mendapatkan balasan yang setimpal.

Yogyakarta, 29 November 2024

Nazwa Yuan Adelia Putri



## DAFTAR ISI

<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	<b>v</b>
Aplikasi Komputer - Aljabar . . . . .	1
<b>EMT untuk Perhitungan Aljabar</b> . . . . .	<b>3</b>
Contoh pertama . . . . .	3
Sintaks Dasar . . . . .	6
Bilangan Asli . . . . .	8
String . . . . .	8
Nilai Boolean . . . . .	10
Format Keluaran . . . . .	11
<b>Ekspresi</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Matematika Simbolik</b> . . . . .	<b>17</b>
Parameter Default . . . . .	23
<b>Memecahkan Ekspresi</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>Menyelesaikan Pertidaksamaan</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks).</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>Vektorisasi</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>Sub-Matriks dan Matriks-Elemen</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>Menyortir dan Mengacak</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>Aljabar linier</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>Matriks Simbolik</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>Memecahkan Persamaan</b> . . . . .	<b>67</b>
Solusi Simbolik untuk Masalah Suku Bunga . . . . .	69
Contoh Penyelesaian Soal Aljabar . . . . .	71
<b>Nazwa Yuan Adelia Putri_23030630095_EMT4Plot2D</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Menggambar Grafik 2D dengan EMT</b> . . . . .	<b>3</b>
Plot Dasar . . . . .	3
Aspek Plot . . . . .	4
<b>Plot 2D di Euler</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>Plot Ekspresi atau Variabel</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Fungsi dalam satu Parameter</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama</b> . . . . .	<b>21</b>
Label Teks . . . . .	25
LaTeX . . . . .	28
Interaksi pengguna . . . . .	30
Gaya Plot 2D . . . . .	32
<b>Merencanakan Data 2D</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>Grafik Fungsi Parametrik</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>Menggambar Grafik Bilangan Kompleks</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>Plot Statistik</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>Fungsi Implisit</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>Plot Logaritmik</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>Nazwa Yuan Adelia Putri_23030630095_EMT4Plot3D</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Menggambar Plot 3D dengan EMT</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Fungsi dua Variabel</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Plot Kontur</b> . . . . .	<b>11</b>

<b>Plot Implisit . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>Merencanakan Data 3D . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>Plot Statistik . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>Permukaan Benda Putar . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>Plot 3D Khusus . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>Animasi. . . . .</b>	<b>29</b>
<b>Menggambar Povray . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>Merencanakan dengan Koordinat . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>Objek Povray . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>Fungsi Implisit. . . . .</b>	<b>41</b>
<b>Objek Jala . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>Anaglyph di Povray . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>Mendefinisikan Objek sendiri. . . . .</b>	<b>47</b>
<b>Lebih Banyak Contoh . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>Kalkulus dengan EMT . . . . .</b>	<b>1</b>
Mendefinisikan Fungsi . . . . .	1
<b>Latihan. . . . .</b>	<b>5</b>
<b>Menghitung Limit . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>Latihan. . . . .</b>	<b>13</b>
<b>Turunan Fungsi . . . . .</b>	<b>15</b>
BUKTI . . . . .	15
Bukti . . . . .	15
Bukti . . . . .	16
<b>Latihan. . . . .</b>	<b>21</b>
<b>Integral. . . . .</b>	<b>25</b>
<b>Latihan. . . . .</b>	<b>29</b>
<b>Barisan dan Deret . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>Deret Taylor . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>Aplikasi Komputer . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT . . . . .</b>	<b>3</b>
Fungsi-fungsi Geometri . . . . .	3
Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga . . . . .	4
Latihan . . . . .	6
<b>Contoh 2: Geometri Smbolik . . . . .</b>	<b>9</b>
Garis dan Lingkaran yang Berpotongan . . . . .	10
Garis Sumbu . . . . .	12
<b>Contoh 3: Rumus Heron . . . . .</b>	<b>15</b>
Parabola . . . . .	23
<b>Contoh 5: Trigonometri Rasional. . . . .</b>	<b>25</b>
Contoh Lain . . . . .	28
Angle Bisectors . . . . .	31
The Chord Angle . . . . .	33
Preliminary remark . . . . .	35
Dua titik . . . . .	35
Three points . . . . .	36
Four points . . . . .	38
<b>Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray. . . . .</b>	<b>41</b>
Plot with Povray . . . . .	43
<b>Contoh 8: Geometri Bumi. . . . .</b>	<b>47</b>
<b>Latihan. . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Nazwa Yuan Adelia Putri_23030630095_EMT4Statistika (1) . . . . .</b>	<b>1</b>

<b>EMT untuk Statistika . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Tabel . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>Distribusi. . . . .</b>	<b>13</b>
<b>Distribusi Diskrit . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>Merencanakan Data . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>Regresi dan Korelasi. . . . .</b>	<b>29</b>
<b>Membuat Fungsi baru. . . . .</b>	<b>33</b>
<b>Simulasi Monte Carlo . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>Uji . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>Uji Lainnya . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>Nomor Acak . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>Pengantar untuk Pengguna Proyek R . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>Sintaks Dasar . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>Pengindeksan . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>Tipe Data. . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Faktor dan Tabel. . . . .</b>	<b>55</b>
<b>Array. . . . .</b>	<b>59</b>





unicodehyperref hyphensurl [ ]book xcolor amsmath,amssymb iftex [T1]fontenc [utf8]inputenc textcomp  
lmodern upquote []microtype [protrusion]basicmath parskip bookmark xurl



## **Aplikasi Komputer - Aljabar**

Nama : Nazwa Yuan Adelia Putri Kelas : Matematika B NIM : 23030630095

---



## EMT UNTUK PERHITUNGAN ALJABAR

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng
- ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris
- perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan
- keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal
- Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format
- LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik
- dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

### Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

```
>$&6*x^{(-3)*y}5*-7*x^{2*y}(-9)
```

$$-\frac{42}{x y^4}$$

Menjabarkan:

```
>$&showev('expand((6*x^{(-3)+y}5)*(-7*x^{2-y}(-9))))
```

$$\text{expand} \left( \left( -\frac{1}{y^9} - 7x^2 \right) \left( y^5 + \frac{6}{x^3} \right) \right) = -7x^2 y^5 - \frac{1}{y^4} - \frac{6}{x^3 y^9} - \frac{42}{x}$$

## Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler diikuti dengan titik koma “;” atau koma “,”. Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan yang kosong. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

```
50.2654824574
```

```
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi dalam urutan yang ditekan pengguna kembali. Jadi Anda mendapatkan nilai baru setiap kali Anda menjalankan baris kedua.

```
>x := 1;
```

```
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua garis terhubung dengan “...” kedua garis akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
```

```
> x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
```

```
1.41421568627
```

```
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk menyebarkan perintah panjang pada dua atau lebih baris. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi garis menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctrl+Back untuk menggabungkan garis.

Untuk melipat semua multi-garis tekan Ctrl + L. Kemudian garis-garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satunya memiliki fokus. Untuk melipat satu multi-baris, mulailah baris pertama dengan “%+”.

```
>%+ x=4+5; ...
```

```
> // This line will not be visible once the cursor is off the line
```

Garis yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

Euler mendukung loop di baris perintah, selama mereka masuk ke dalam satu baris atau multi-baris. Dalam program, pembatasan ini tidak berlaku, tentu saja. Untuk informasi lebih lanjut lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.416666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak apa-apa untuk menggunakan multi-line. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...
> repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
> x := xnew; ...
> end; ...
> x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if Epi>E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun di baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik ke bagian komentar di atas perintah untuk menuju ke perintah.

Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang garis, pasangan tanda kurung atau kurung buka dan tutup akan disorot. Juga, perhatikan baris status. Setelah kurung buka fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol kembali.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks untuk dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus garis, atau untuk menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini di baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

Anda dapat menyalin dan menempel di Euler ke. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersama dengan tombol kursor apa pun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

### Sintaks Dasar

Euler tahu fungsi matematika biasa. Seperti yang Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilainya, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut kuadrat dalam Euler. Tentu saja,  $x^{(1/2)}$  juga dimungkinkan.

Untuk menyetel variabel, gunakan “=” atau “:=”. Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak masalah. Tapi ruang antara perintah diharapkan.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan “,” atau “;”. Titik koma menekan output dari perintah. Di akhir baris perintah “,” diasumsikan, jika “;” hilang.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Memasuki

$$e^2 \cdot \left( \frac{1}{3 + 4 \log(0.6)} + \frac{1}{7} \right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left( \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + 2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Letakkan tanda kurung dengan hati-hati di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi bahwa braket penutup selesai. Anda juga harus memasukkan nama “pi” untuk huruf Yunani pi.



Hasil dari perhitungan ini adalah bilangan floating point. Secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita bisa merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, itu harus berisi tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, memasang braket adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menunjukkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)3*(sin(pi/4)+1)2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler meliputi

- unary atau operator plus
- unary atau operator minus
- \*, /
- . produk matriks
- a^b daya untuk positif a atau bilangan bulat b (a\*\*b juga berfungsi)
- n! operator faktorial

dan masih banyak lagi.

Berikut adalah beberapa fungsi yang mungkin Anda butuhkan. Ada banyak lagi.

sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg  
log,exp,log10,sqrt,logbase  
bin,logbin,logfac,mod,lantai,ceil,bulat,abs,tanda  
conj,re,im,arg,conj,nyata,kompleks  
beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle  
bitand, bitor, bitxor, bitnot

Beberapa perintah memiliki alias, mis. Untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (kurung bulat), setiap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan  $(2^3)^4$ , yang merupakan default untuk  $2^3 4$  di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

$$> 2^3 4, (2^3) 4, 2^{(3 4)}$$

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

## Bilangan Asli

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan real. Real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

>longest 1/3

0.3333333333333333

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
> printdual(1/3)
```

[illegible]

```
> printhex(1/3)
```

$$5.555555555555554 \times 16^{-1}$$

## String

Sebuah string dalam Euler didefinisikan dengan "...".

>“A string can contain anything.”

A string can contain anything.

String dapat digabungkan dengan `|` atau dengan `+`. Ini juga berfungsi dengan angka, yang dikonversi menjadi string dalam kasus itu.

```
>"The area of the circle with radius" + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm<sup>2</sup>.

Fungsi print juga mengonversi angka menjadi string. Ini dapat mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan secara optimal satu unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus tidak ada, yang tidak dicetak. Itu dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak masalah. (Ini dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan pengembalian.)

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi saja. Ini juga berfungsi untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe  
charlie  
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe  
charlie  
bravo  
affe  
charlie  
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan `u"..."` dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u" = " + 45 + u"°" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
= 45°
```

## I

Dalam komentar, entitas yang sama seperti alpha;, beta; dll dapat digunakan. Ini mungkin alternatif cepat untuk Lateks. (Lebih detail di komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi `strtochar()` akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"Ä is a German letter")
```

```
[196, 32, 105, 115, 32, 97, 32, 71, 101, 114, 109, 97, 110,
32, 108, 101, 116, 116, 101, 114]
```

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah `chartoutf()`.

```
>v[1]=strtochar(u"Ü")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi `utf()` dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

```
>s="We have =."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"Ähnliches"
```

```
Ähnliches
```

## Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan `1=true` atau `0=false` dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

"dan" adalah operator "&&" dan "atau" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata-kata "dan" dan "atau" hanya dapat digunakan dalam kondisi untuk "jika".)

```
>2<E && E<3
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]
[6, 7, 8, 9, 10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi bukan nol() untuk mengekstrak elemen tertentu dari vektor. Dalam contoh, kami menggunakan isprime bersyarat(n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29,
31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57,
59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85,
87, 89, 91, 93, 95, 97, 99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]
```

## Format Keluaran

Format output default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kami melihat default, kami mengatur ulang format.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk bilangan ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit penuh, gunakan perintah “format terpanjang”, atau kita gunakan operator “terpanjang” untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari bilangan ganda.

```
>printhe(pi)
```

3.243F6A8885A30\*16^0

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
0.33333
3.14159
0.84147
```

Standarnya adalah format (12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti “shortestformat”, “shortformat”, “longformat” bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
0.66    0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44    0.3
0.28    0.88    0.27    0.7    0.22    0.45    0.31    0.91
0.19    0.46    0.095   0.6    0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format (12). Tapi ini bisa diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi “format terpanjang” mengatur format skalar juga.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Untuk referensi, berikut adalah daftar format output yang paling penting.

format terpendek format pendek format panjang, format terpanjang  
format(panjang,digit) format baik(panjang)  
fracformat (panjang)  
mengubah bentuk

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.

Tetapi format output EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
3.14159
```

Standarnya adalah `deformat()`.

```
>deformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator “terpanjang” akan mencetak semua digit angka yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
4.934802200544679
```

Ada juga operator pendek untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami sudah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0,1 tidak akan direpresentasikan dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat dalam perhitungan berikut.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
-1.110223024625157e-16
```

Tetapi dengan “format panjang” default Anda tidak akan melihat ini. Untuk kenyamanan, output dari angka yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```





## EKSPRESI

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda bermaksud menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamakannya “fx” atau “fxy” dll. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.

Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan itu. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

```
-0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, bahkan jika ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut.)

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...  
> f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

```
36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk “at” daripada nilai global, Anda perlu menambahkan “at=value”.

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...  
> f("at*x^2",3,5)
```

```
45
```

Untuk referensi, kami berkomentar bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita bisa membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...  
> f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti fungsi.

Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
```

```
>function f(x) := 6*x;
```

```
>f(2)
```

12

Dengan cara konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x (\log x + 1)$$

Bentuk khusus dari ekspresi memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresi, bukan hanya “x”, “y” dll. Untuk ini, mulai ekspresi dengan “@(variabel) ...”.

```
>“@(a,b) a2+b2”, %(4,5)
```

```
@ (a , b)  a ^ 2+b ^ 2
```

41

Ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam “x”.

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolis atau numerik. Jika variabel utama adalah x, ekspresi dapat dievaluasi seperti fungsi.

Seperti yang Anda lihat dalam contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x; ...
```

```
> a=1.2; fx(0.5)
```

-0.475

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

-0.425

Sebuah ekspresi tidak perlu simbolis. Ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi, yang hanya diketahui di kernel numerik, bukan di Maxima.

## MATEMATIKA SIMBOLIK

EMT melakukan matematika simbolis dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus mencatat bahwa ada perbedaan sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik terintegrasi dengan mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apa pun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolis. Itu dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika “tak terbatas” yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$&44!
```

2658271574788448768043625811014615890319638528000000000

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita hitung

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

2481256778

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik dari EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

2481256778

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu klik dua kali di atasnya. Misalnya, coba klik dua kali pada “&binomial” di baris perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima seperti yang disediakan oleh penulis program itu.

Anda akan belajar bahwa yang berikut ini juga berfungsi.

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan “dengan”.

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

120

Dengan begitu Anda dapat menggunakan solusi persamaan dalam persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasan untuk ini adalah bendera simbolis khusus dalam string.

Seperti yang akan Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolis dengan Lateks. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolis dengan LaTeX, gunakan \$ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan menjalankan perintah Maxima dengan \$, jika Anda tidak menginstal LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diuraikan oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat menyertakan ekspresi dalam "...". Untuk menggunakan lebih dari ekspresi sederhana adalah mungkin, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

25

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi perlu diapit dalam tanda kutip. Selain itu, jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(% ,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{4(x+1)^3}$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah, kami menyimpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3x^4 - 4x^3 + 1}{(x^4 + 1)^2}$$

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "mode kompatibilitas").

```
>&factor(20!)
```

2432902008176640000

```
>::: factor(10!)
```

$$2^8 3^4 5^2 7$$

```
>:: factor(20!)
```

$$2^{18} 3^8 5^4 7^2 11 13 17 19$$

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukannya dengan “::”.

```
>:: av:g$ av^2;
```

$$g^2$$

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

$$x^3 E^x$$

$$x^3 e^x$$

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam perintah berikut sisi kanan &= dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

$$125 E^5$$

$$125 e^5$$

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk evaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator “with”.

Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

$$1000 E^{10} - 125 E^5$$

```
2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$x (x^2 + 6x + 6) e^x$$

Untuk mendapatkan kode Lateks untuk ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

$$x^3 \backslash, e^{\{x\}}$$

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolis, ini tidak berfungsi, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks “with” (bentuk yang lebih bagus dari perintah at(...) dari Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasan juga bisa bersifat simbolis.

```
>$&fx with x=1+t
```

$$(t + 1)^3 e^{t+1}$$

Perintah solve memecahkan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

$$\left[ x = \frac{-\sqrt{17} - 1}{2}, x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right]$$

Bandingkan dengan perintah numerik “selesaikan” di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
> solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolis. Euler akan membaca tugas x= dll. Jika Anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numerik.

```
> sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $sol, sol(), $float(sol)
```

$$\left[ x = -\sqrt{5} - 1, x = \sqrt{5} - 1 \right]$$

```
[-3.23607, 1.23607]
```

$$[x = -3.23606797749979, x = 1.23606797749979]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolis tertentu, seseorang dapat menggunakan “with” dan index.

```
> $solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with % [2]; $x2
```

$$\left[ x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}, x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
> sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $sol, $x*y with sol[1]
```

$$\left[ [x = 2, y = 1], [x = 1, y = 2] \right]$$

Ekspresi simbolis dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, yang lain tidak. Bendera ditambahkan dengan “|” (bentuk yang lebih bagus dari “ev(...,flags)”).

```
> $diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^3-1}{(x+1)^2}$$

```
> $diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

```
>$&factor(%)
```

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(x+1)^2}$$

## # Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah “fungsi”. Ini bisa berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.

Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolis. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh “:=”.

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kami menunjukkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi sama seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini akan bekerja untuk vektor juga, dengan mematuhi bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi divektorkan.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0, 0.100499, 0.203961, 0.313209, 0.430813, 0.559017, 0.699714,  
0.854459, 1.0245, 1.21083, 1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi bawaan, Anda harus menambahkan kata kunci “menimpa”. Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah untuk fungsi lain tergantung pada fungsi tersebut.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai “...”, jika itu adalah fungsi di inti Euler.

```
>function overwrite sin(x) := _sin(x°) // redine sine in degrees
```

```
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```



Lebih baik kita menghapus redefinisi dosa ini.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

## Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

```
16
```

Menyetelnya akan menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan menyimpannya juga. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika suatu variabel bukan parameter, itu harus global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
```

```
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Tetapi parameter yang ditetapkan menimpa nilai global.

Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan “:=”!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolis didefinisikan dengan “&=”. Mereka didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia. Ekspresi yang mendefinisikan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3 - x e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$x e^{-x} - e^{-x} + 3 x^2$$

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{16}{3}$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menginterpretasikan semua yang ada di dalam fungsi tersebut.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegalkan
```

$$\frac{e^{-c} (c^4 e^c + 4 c + 4)}{4}$$

```
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Berikut ini juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolis dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika ada fungsi simbolis g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$(2x - 1)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(x + 2)^n$$

>\$&P(x,4), \$&expand(%)

$$(2x - 1)^4$$

$$16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

>P(3,4)

625

>\$&P(x,4)+ Q(x,3), \$&expand(%)

$$(2x - 1)^4 + (x + 2)^3$$

$$16x^4 - 31x^3 + 30x^2 + 4x + 9$$

>\$&P(x,4)-Q(x,3), \$&expand(%), \$&factor(%)

$$(2x - 1)^4 - (x + 2)^3$$

$$16x^4 - 33x^3 + 18x^2 - 20x - 7$$

$$16x^4 - 33x^3 + 18x^2 - 20x - 7$$

>\$&P(x,4)\*Q(x,3), \$&expand(%), \$&factor(%)

$$(x + 2)^3 (2x - 1)^4$$

$$16x^7 + 64x^6 + 24x^5 - 120x^4 - 15x^3 + 102x^2 - 52x + 8$$

$$(x + 2)^3 (2x - 1)^4$$

>\$&P(x,4)/Q(x,1), \$&expand(%), \$&factor(%)

$$\frac{(2x - 1)^4}{x + 2}$$

$$\frac{16x^4}{x + 2} - \frac{32x^3}{x + 2} + \frac{24x^2}{x + 2} - \frac{8x}{x + 2} + \frac{1}{x + 2}$$

$$\frac{(2x - 1)^4}{x + 2}$$

>function f(x) &= x^3-x; \$&f(x)

$$x^3 - x$$

Dengan &= fungsinya simbolis, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

>\$&integrate(f(x),x)

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Dengan := fungsinya numerik. Contoh yang baik adalah integral tak tentu seperti

$$f(x) = \int_1^x t^t dt,$$

yang tidak dapat dinilai secara simbolis.

Jika kita mendefinisikan kembali fungsi dengan kata kunci “peta” dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam vektor.

```
>function map f(x) := integrate(“x^x”,1,x)
```

```
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431, -0.410816, 0, 0.676863, 2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsi dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter “basis”.

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individual di tempat lain. Ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

$$b^2 - a b + b + a^2$$

$$y^2 - x y + y + x^2$$

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.

Tetapi fungsinya juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

26

Ada juga fungsi simbolis murni, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua
```

$$\text{diff}(\text{expr}, y, 2) + \text{diff}(\text{expr}, x, 2)$$

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

$$\frac{y^4 - 6x^2y^2 + x^4}{0}$$

Tetapi tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

$$10 (y^2 + x)^3 (9y^2 + x + 2)$$

Untuk meringkas

- `&=` mendefinisikan fungsi simbolis,
- `:=` mendefinisikan fungsi numerik,
- `&&=` mendefinisikan fungsi simbolis murni.



## MEMECAHKAN EKSRESI

Eksresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolis.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Perlu nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
> solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini juga berfungsi untuk ekspresi simbolis. Ambil fungsi berikut.

```
> solve(x^2=2,x)
```

$$\left[ x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2} \right]$$

```
> solve(x^2-2,x)
```

$$\left[ x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2} \right]$$

```
> solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
```

$$\left[ x = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \right]$$

```
> solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
```

$$\left[ \left[ x = -\frac{ce}{b(d-5) - ae}, y = \frac{c(d-5)}{b(d-5) - ae} \right] \right]$$

```
> px = 4*x^8+x^7-x^4-x; %px
```

$$4x^8 + x^7 - x^4 - x$$

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.

Kami menggunakan y=2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
> solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851  
2
```

Memecahkan ekspresi simbolis dalam bentuk simbolis mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
-0.6180339887498949      1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah “dengan”.

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

$$\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4}$$

Memecahkan sistem persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan solver simbolis solve(). Jawabannya adalah daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

$$[[x = -1, y = 3], [x = 1, y = 1], [x = 0, y = 2]]$$

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Namun seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

lateks:  $a^{x-a} = 0.1$

dengan  $a=3$ .

```
>function f(x,a) := x^a-a x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameter (sebaliknya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f"},3},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Ini juga bekerja dengan ekspresi. Tapi kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a x",a=3},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```



## MENYELESAIKAN PERTIDAKSAMAAN

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah `fourier_elim()`, yang harus dipanggil dengan perintah “`load(fourier_elim)`” terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 > 0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 < 0],[x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^2-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

*emptyset*

```
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
```

*universalset*

```
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$[1 < x, x^2 + x + 1 > 0] \vee [x < 1, -x^2 - x - 1 > 0]$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$[1 - 2 \cos x > 0]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[y - 5 < x, x < y + 7, 10 < y]$$

>\$&fourier\_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])

$$[\max(10, x - 7) < y, y < x + 5, 5 < x]$$

>\$&fourier\_elim((x + y < 5) and (x - y > 8),[x,y])

$$\left[ y + 8 < x, x < 5 - y, y < -\frac{3}{2} \right]$$

>\$&fourier\_elim(((x + y < 5) and x < 1) or (x - y > 8),[x,y])

$$[y + 8 < x] \vee [x < \min(1, 5 - y)]$$

>&fourier\_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])

[6 &lt; x, x &lt; 8, y &lt; - 11] or [8 &lt; x, y &lt; - 11]  
 or [x &lt; 8, 13 &lt; y] or [x = y, 13 &lt; y] or [8 &lt; x, x &lt; y, 13 &lt; y]  
 or [y &lt; x, 13 &lt; y]

>\$&fourier\_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])

$$[x = 12] \vee [12 < x] \vee [x < 9]$$

## # Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

>A=[1,2;3,4]

1	2
3	4

Produk matriks dilambangkan dengan titik.

>b=[3;4]

3
4

>b' // transpose b

[ 3,    4 ]

```
>inv(A) //inverse A
```

```
      -2      1  
1.5      -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
11  
25
```

```
>A.inv(A)
```

```
      1      0  
      0      1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator bekerja elemen untuk elemen.

```
>A.A
```

```
      7      10  
15      22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
      1      4  
      9      16
```

```
>A.A.A
```

```
      37      54  
      81     118
```

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

```
      37      54  
      81     118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
      1      1  
      1      1
```

>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)

0.333333	0.666667
0.75	1

>A\b // hasilkali invers A dan b,  $A^{-1}b$

-2
2.5

>inv(A).b

-2
2.5

>A\A //  $A^{-1}A$

1	0
0	1

>inv(A).A

1	0
0	1

>A\*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak

1	4
9	16

Ini bukan produk matriks, tetapi perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama berlaku untuk vektor.

>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor

9
16

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, itu diperluas secara alami.

>2\*A

2	4
6	8

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

1	4
3	8

Jika itu adalah vektor baris, itu diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

2	6
6	12

Seseorang dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah digandakan untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)
```

1	2
1	2

```
>A*dup([1,2],2)
```

1	4
3	8

Ini juga berlaku untuk dua vektor di mana satu adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung  $i*j$  untuk  $i,j$  dari 1 hingga 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposnya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Sekali lagi, ingat bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

Bahkan operator seperti `<` atau `==` bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi `sum()`.

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

5

Euler memiliki operator perbandingan, seperti `==`, yang memeriksa kesetaraan.

Kami mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
```

Dari vektor seperti itu, “bukan nol” memilih elemen bukan nol.

Dalam hal ini, kami mendapatkan indeks semua elemen lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8, 9, 10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam `t`.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64, 81, 100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 hingga 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4, 48, 95, 139, 147, 191, 238, 282, 290, 334, 381, 425,
433, 477, 524, 568, 576, 620, 667, 711, 719, 763, 810, 854,
862, 906, 953, 997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan bilangan bulat. Ini menggunakan titik mengambang presisi ganda secara internal. Namun, seringkali sangat berguna.

Kita dapat memeriksa keutamaan. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 adalah bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi bukan nol() hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

0.765761	0.401188	0.406347	0.267829
0.13673	0.390567	0.495975	0.952814
0.548138	0.006085	0.444255	0.539246

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

1	4
2	1
2	2
3	2

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke beberapa nilai.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

0.765761	0.401188	0.406347	0
0	0	0.495975	0.952814
0.548138	0	0.444255	0.539246

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen pada indeks ke entri dari beberapa matriks lainnya.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

0.765761	0.401188	0.406347	-0.126917
-0.122404	-0.691673	0.495975	0.952814
0.548138	-0.483902	0.444255	0.539246

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen dalam vektor.

```
>mget(A,k)
```

```
[0.267829, 0.13673, 0.390567, 0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah `ekstrem`, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

0.267829	4	0.765761	1
0.13673	1	0.952814	4
0.006085	2	0.548138	1

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
[0.765761, 0.952814, 0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi `max()`.

```
>max(A)'
```

```
[0.765761, 0.952814, 0.548138]
```

Tetapi dengan `mget()`, kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

1	1
2	4
3	1

```
[-0.765761, -0.952814, -0.548138]
```



## FUNGSI MATRIKS LAINNYA (MEMBANGUN MATRIKS)

Untuk membangun matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas yang lain. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

1	2	3
1	2	3

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke yang lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

0.032444	0.0534171	0.595713	0.564454	1
0.83916	0.175552	0.396988	0.83514	2
0.0257573	0.658585	0.629832	0.770895	3

Jika mereka tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang dilampirkan pada matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A|1
```

0.032444	0.0534171	0.595713	0.564454	1
0.83916	0.175552	0.396988	0.83514	1
0.0257573	0.658585	0.629832	0.770895	1

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

1	2	3
1	2	3

```
>[v',v']
```

1	1
2	2
3	3

Tujuan utama dari ini adalah untuk menafsirkan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
> "[x,x^2]"(v')
```

1	1
2	4
3	9

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut.

```
> C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2
4
[2, 4]
4
```

Untuk vektor, ada panjang().

```
> length(2:10)
```

```
9
```

Ada banyak fungsi lain, yang menghasilkan matriks.

```
> ones(2,2)
```

1	1
1	1

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
> ones(5)*6
```

```
[6, 6, 6, 6, 6]
```

Juga matriks bilangan acak dapat dihasilkan dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gau).

```
> random(2,2)
```

0.66566	0.831835
0.977	0.544258

Berikut adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen matriks menjadi matriks lain.

```
> redim(1:9,3,3) // menyusun elemen 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang vektor n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3]
[1, 1, 2, 2, 2, 3, 3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() mengembalikan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5, 4, 3, 2, 1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotright() dan rotright().

```
>rotright(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2, 3, 4, 5, 1]
```

Sebuah fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghilangkan elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
```

Perhatikan bahwa vektor i di drop(v,i) mengacu pada indeks elemen di v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemennya terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk mencari elemen x dalam vektor terurut v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
[0, 5, 0, 6, 0, 0, 0, 7, 0, 8, 0]
[2, 3, 5, 7, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya untuk memasukkan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau untuk menghasilkan matriks diagonal.

Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

```
1      0      0      0      0
0      1      0      0      0
0      0      1      0      0
0      0      0      1      0
0      0      0      0      1
```

Kemudian kita atur diagonal bawah (-1) menjadi 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

```
1      0      0      0      0
1      1      0      0      0
0      2      1      0      0
0      0      3      1      0
0      0      0      4      1
```

Perhatikan bahwa kami tidak mengubah matriks A. Kami mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari `setdiag()`.

Berikut adalah fungsi, yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
> tridiag(5,1,2,3)
```

```
2      3      0      0      0
1      2      3      0      0
0      1      2      3      0
0      0      1      2      3
0      0      0      1      2
```

Diagonal suatu matriks juga dapat diekstraksi dari matriks tersebut. Untuk mendemonstrasikan ini, kami merestrukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1, 5, 9]
```

Misalnya. Kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

1	2	3
4/5	1	6/5
7/9	8/9	1



## VEKTORISASI

Hampir semua fungsi di Euler juga berfungsi untuk input matriks dan vektor, kapan pun ini masuk akal.

Misalnya, fungsi `sqrt()` menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1, 1.41421, 1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot suatu fungsi (alternatifnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampilkan
```

Dengan ini dan operator titik dua `a:delta:b`, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah.

Pada contoh berikut, kita membangkitkan vektor nilai `t[i]` dengan spasi 0,1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita membangkitkan vektor nilai fungsi

```
latex: s = t^3-t
```

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0, 0.171, 0.288, 0.357, 0.384, 0.375, 0.336, 0.273, 0.192,  
0.099, 0, -0.099, -0.192, -0.273, -0.336, -0.375, -0.384,  
-0.357, -0.288, -0.171, 0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikalikan vektor baris menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, `v'` adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Perhatikan, bahwa ini sangat berbeda dari produk matriks. Produk matriks dilambangkan dengan titik “.” di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format yang ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

```
[1, 2, 3, 4]
```

Untuk matriks operator khusus . menunjukkan perkalian matriks, dan  $A'$  menunjukkan transpos. Matriks  $1 \times 1$  dapat digunakan seperti bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
5
25
```

Untuk mentranspos matriks kita menggunakan apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

```
1
2
3
4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks  $A$  kali vektor  $b$ .

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
30
70
```

Perhatikan bahwa  $v$  masih merupakan vektor baris. Jadi  $v'.v$  berbeda dari  $v.v'$ .

```
>v'.v
```

```
1      2      3      4
2      4      6      8
3      6      9     12
4      8     12     16
```

$v.v'$  menghitung norma  $v$  kuadrat untuk vektor baris  $v$ . Hasilnya adalah vektor  $1 \times 1$ , yang bekerja seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

```
30
```

```
46
```



Ada juga fungsi norma (bersama dengan banyak fungsi lain dari Aljabar Linier).

```
>norm(v)^2
```

30

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut ringkasan aturannya.

- Fungsi yang diterapkan ke vektor atau matriks diterapkan ke setiap elemen.
- Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama
- diterapkan berpasangan ke elemen matriks.
- Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas
- dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar kali vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks kali vektor (dengan \*, bukan .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1, 4, 9]
```

Berikut adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan dengan vektor kolom mengembang keduanya dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

1	2	3
2	4	6
3	6	9

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan \*!

```
>v.v'
```

14

Ada banyak fungsi matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus berkonsultasi dengan dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah ini.

sum,prod menghitung jumlah dan produk dari baris  
 cumsum,cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif  
 menghitung nilai ekstrem dari setiap baris  
 extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrim  
 diag(A,i) mengembalikan diagonal ke-i  
 setdiag(A,i,v) mengatur diagonal ke-i  
 id(n) matriks identitas  
 det(A) penentu  
 charpoly(A) polinomial karakteristik  
 nilai eigen(A) nilai eigen

>v\*v, sum(v\*v), cumsum(v\*v)

```
[1, 4, 9]
14
[1, 5, 14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris spasi yang sama, opsional dengan ukuran langkah.

>1:4, 1:2:10

```
[1, 2, 3, 4]
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator “|” dan “\_”.

>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]\_1

```
[1, 2, 3, 4, 5]
      1      2      3
      1      1      1
```

Unsur-unsur matriks disebut dengan “A[i,j]”.

>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]

6

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks.

>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]

```
6
[7, 8, 9]
```

Indeks juga bisa menjadi vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,    4]
      2
      5
      8
```

Bentuk singkat untuk : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
      2      3
      5      6
      8      9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Matriks juga dapat diratakan, menggunakan fungsi `redim()`. Ini diimplementasikan dalam fungsi `flatten()`.

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
```

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita reset ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
0
45
90
135
180
225
270
315
360
```

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

0	0	1	0
45	0.785398	0.707107	0.707107
90	1.5708	0	1
135	2.35619	-0.707107	0.707107
180	3.14159	-1	0
225	3.92699	-0.707107	-0.707107
270	4.71239	0	-1
315	5.49779	0.707107	-0.707107
360	6.28319	1	0

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menghasilkan beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Dalam contoh berikut, kita menghitung  $t[j]^i$  untuk  $i$  dari 1 hingga  $n$ . Kami mendapatkan matriks, di mana setiap baris adalah tabel  $t^i$  untuk satu  $i$ . Yaitu, matriks memiliki elemen

$$a_{i,j} = t_j^i, \quad 1 \leq j \leq 101, \quad 1 \leq i \leq n$$

Fungsi yang tidak berfungsi untuk input vektor harus “divektorkan”. Ini dapat dicapai dengan kata kunci “peta” dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi tersebut akan dievaluasi untuk setiap elemen dari parameter vektor.

Integrasi numerik `terintegrasi()` hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektor.

```
>function map f(x) := integrate(“x^x”,1,x)
```

Kata kunci “peta” membuat vektor fungsi. Fungsinya sekarang akan bekerja

untuk vektor bilangan.

```
>f([1:5])
```

```
[0, 2.05045, 13.7251, 113.336, 1241.03]
```

## SUB-MATRIKS DAN MATRIKS-ELEMEN

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi braket.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
      1      2      3
      4      5      6
      7      8      9
5
```

Kita dapat mengakses satu baris matriks yang lengkap.

```
>A[2]
```

```
[4, 5, 6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua kosong.

```
>A[2,]
```

```
[4, 5, 6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai.

Di sini kita ingin baris pertama dan kedua dari A.

```
      1      2      3
      4      5      6
```

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kami tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A yang disusun ulang.

```
      7      8      9
      4      5      6
      1      2      3
```

Trik indeks bekerja dengan kolom juga.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Untuk singkatan “:” menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

3
6
9

Atau, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir dari A.

```
>A[-1]
```

```
[ 7,  8,  9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatriks A ke beberapa nilai. Ini sebenarnya mengubah matriks A yang disimpan.

```
>A[1,1]=4
```

4	2	3
4	5	6
7	8	9

Kami juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

-1	-1	-1
4	5	6
7	8	9

Kami bahkan dapat menetapkan sub-matriks jika memiliki ukuran yang tepat.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

5	6	-1
7	8	6
7	8	9

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

0	0	-1
0	0	6
7	8	9

Peringatan: Indeks di luar batas mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Ingat, bagaimanapun, bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
Row index 4 out of bounds!  
Error in:  
A[4] ...  
  ^
```





## MENYORTIR DAN MENGACAK

Fungsi `sort()` mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1, 4, 5, 6, 8, 9]
```

Seringkali perlu untuk mengetahui indeks dari vektor yang diurutkan dalam vektor aslinya. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita mengocok vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4, 5, 10, 6, 8, 9, 1, 7, 2, 3]
```

Indeks berisi urutan yang tepat dari `v`.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a  
d  
e  
a  
aa  
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a  
a  
aa  
d  
e  
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4, 1, 5, 2, 6, 3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar elemen unik vektor yang diurutkan.

```
>inrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4, 4, 9, 2, 6, 5, 10, 6, 5, 1]  
[1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>unique(s)
```

```
a  
aa  
d  
e
```

## ALJABAR LINIER

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan sistem linier, sistem sparse, atau masalah regresi.

Untuk sistem linier  $Ax=b$ , Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers atau kecocokan linier. Operator  $A \backslash b$  menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
    -4  
    4 . 5
```

Untuk contoh lain, kami membuat matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan  $Ax=b$  menggunakan matriks invers. Kami mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang benar.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak memiliki solusi, kecocokan linier meminimalkan norma kesalahan  $Ax-b$ .

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Determinan matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```



## MATRIKS SIMBOLIK

Maxima memiliki matriks simbolis. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linier sederhana seperti itu. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan `&:=`, dan kemudian menggunakannya dalam ekspresi simbolis. Bentuk [...] biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan di Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$a (a^2 - 1) - 2 a + 2 \\ (a - 1)^2 (a + 2)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

$$(1 - x) (2 - x) - a b \\ \left[ x = \frac{3 - \sqrt{4 a b + 1}}{2}, x = \frac{\sqrt{4 a b + 1} + 3}{2} \right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan multiplisitas.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$[[a - 1, a + 1], [1, 1]]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu perlu pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$[[[a - 1, a + 1], [1, 1]], [[1, -1], [1, 1]]]$$

$$[1, -1]$$

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

>A(a=4,b=5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

>\$A with [a=4,b=5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Akses ke baris matriks simbolik bekerja seperti halnya dengan matriks numerik.

>\$A[1]

$$[1, a]$$

Ekspresi simbolis dapat berisi tugas. Dan itu mengubah matriks A.

>&A[1,1]:=t+1; \$A

$$\begin{pmatrix} t+1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Ada fungsi simbolik di Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); \$v

$$\left[ \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+3} \right]$$

>B &:= [1,2;3,4]; \$B, \$invert(B)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

>\$invert(B)()

$$\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{array}$$

Euler juga memiliki fungsi `xinv()` yang kuat, yang membuat upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan `&:=` matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita bisa menggunakannya di sini.

```
> longest B.xinv(B)
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

Misalnya, nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
[16.1168, -1.11684, 0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
> $eigenvalues((A?))
```

$$\left[ \left[ \frac{15 - 3\sqrt{33}}{2}, \frac{3\sqrt{33} + 15}{2}, 0 \right], [1, 1, 1] \right]$$

# Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolis

Ekspresi simbolis hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai baik untuk ekspresi simbolik maupun ekspresi numerik, kita harus menggunakan “`&:=`”.

```
> A &:= [1,pi;4,5]
```

$$\begin{array}{cc} 1 & 3.14159 \\ 4 & 5 \end{array}$$

Masih ada perbedaan antara bentuk numerik dan simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolis, pendekatan fraksional untuk real akan digunakan.

```
> $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1146408}{364913} \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Untuk menghindarinya, ada fungsi “`mxmset(variable)`”.

```
> mxmset(A); $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3.141592653589793 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat menghitung dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka floating besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
> $&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.4142135623730950488016887242097_B \times 10^0$$

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
> &fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolis apa pun menggunakan “(var?)”.

Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan “:=” atau “=” sebagai variabel numerik.

```
> B:=[1,pi,3,4]; $&det((B?))
```

$$-5.424777960769379$$

# Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk perhitungan suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal 5000 (katakanlah dalam dolar).

```
> K=5000
```

```
5000
```

Sekarang kita asumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tarif sederhana dan hitung hasilnya.

```
> K*1.03
```

```
5150
```

Euler akan memahami sintaks berikut juga.

```
> K+K*3%
```



```
5150
```

Tetapi lebih mudah menggunakan faktornya

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
```

```
5150
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk tujuan kita, kita dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
6719.58
```

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

```
>"Starting from" + K + "$ you get" + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak harus menulis loop, tetapi cukup masukkan

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix
```

```
5000.00    5150.00    5304.50    5463.64    ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi dalam Euler dapat diterapkan pada elemen vektor untuk elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1, 1.03, 1.0609, 1.0927, 1.1255, 1.1593, 1.1941, 1.2299,  
1.2668, 1.3048, 1.3439]
```

adalah vektor faktor  $q^0$  sampai  $q^{10}$ . Ini dikalikan dengan K, dan kami mendapatkan vektor nilai.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setelah setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan dua hasil, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
1271.61  
1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulang selama bertahun-tahun. Euler memberikan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah iterasi fungsi, yang mengulangi fungsi tertentu beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix
```

```
5000.00    5150.00    5304.50    5463.64    ...
```

Kami dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
5000.00  
5150.00  
5304.50  
5463.64  
5627.55  
5796.38  
5970.27  
6149.38  
6333.86  
6523.88  
6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen tertentu dari vektor, kami menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
5150.00
5000.00      5150.00      5304.50
```

Anehnya, kita juga bisa menggunakan vektor indeks. Ingat bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
6719.60
6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.



## MEMECAHKAN PERSAMAAN

Sekarang kita mengambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan tingkat uang tertentu setiap tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus mendefinisikan nilai-nilai ini. Kami memilih R=200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

Real 1 x 11 matrix

5000.00	5350.00	5710.50	6081.82	...
---------	---------	---------	---------	-----

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

Real 1 x 11 matrix

5000.00	4950.00	4898.50	4845.45	...
---------	---------	---------	---------	-----

Kami melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita bisa menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kita harus menulis loop untuk ini. Cara termudah adalah dengan iterasi cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

Real 1 x 51 matrix

5000.00	4950.00	4898.50	4845.45	...
---------	---------	---------	---------	-----

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

48.00

Alasan untuk ini adalah bahwa bukan nol(VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi `iterate()` memiliki satu trik lagi. Itu bisa mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onipay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
-19.83  
47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Apa yang akan menjadi tingkat bunga?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab dengan angka. Di bawah ini, kita akan mendapatkan formula yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada formula yang mudah untuk tingkat bunga. Tapi untuk saat ini, kami bertujuan untuk solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak  $n$  kali. Kami menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

Tapi kami tidak lagi menggunakan nilai global  $R$  dalam ekspresi kami. Fungsi seperti `iterate()` memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini  $P$  dan  $R$ .

Selain itu, kami hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita ambil indeks  $[-1]$ .

Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Rutin memecahkan memecahkan ekspresi=0 untuk variabel  $x$ . Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kami mengambil nilai awal 3% untuk algoritma. Fungsi `solve()` selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita keluarkan per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat memecahkan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan  $n$  sebagai nilai integer.

### Solusi Simbolik untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik dari Euler untuk mempelajari masalah tersebut. Pertama kita mendefinisikan fungsi `onepay()` kita secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

$$R + q K$$

Kita sekarang dapat mengulangi ini.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

$$q (q (q (R + q K) + R) + R) + R$$

$$q^3 R + q^2 R + q R + R + q^4 K$$

Kami melihat sebuah pola. Setelah  $n$  periode yang kita miliki

$$K_n = q^n K + R(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n - 1}{q - 1} R$$

Rumusnya adalah rumus untuk jumlah geometri, yang diketahui Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan bendera “simpsum” untuk mengurangnya menjadi hasil bagi.

Mari kita membuat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{100 \left( \left( \frac{P}{100} + 1 \right)^n - 1 \right) R}{P} + K \left( \frac{P}{100} + 1 \right)^n$$

Fungsi tersebut melakukan hal yang sama seperti fungsi  $f$  kita sebelumnya. Tapi itu lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Kita sekarang dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu  $n$ . Kapan modal kita habis? Dugaan awal kami adalah 30 tahun.

>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)

20.51

Jawaban ini mengatakan bahwa itu akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolis Euler untuk menghitung formula pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) meninggalkan sisa hutang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumus untuk ini jelas

>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; \$&equ

$$\frac{100 \left( \left( \frac{P}{100} + 1 \right)^n - 1 \right) R}{P} + K \left( \frac{P}{100} + 1 \right)^n = Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

>equ &= (equ with P=100\*i); \$&equ

$$\frac{((i+1)^n - 1) R}{i} + (i+1)^n K = Kn$$

Kita dapat memecahkan tingkat R secara simbolis.

>\$&solve(equ,R)

$$\left[ R = \frac{i Kn - i (i+1)^n K}{(i+1)^n - 1} \right]$$

Seperti yang Anda lihat dari rumus, fungsi ini mengembalikan kesalahan titik mengambang untuk i=0. Euler tetap merencanakannya.

Tentu saja, kami memiliki batas berikut.

>\$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(5000, 0, x, 10)$$

Jelas, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 tarif 500.

Persamaan juga dapat diselesaikan untuk n. Kelihatannya lebih bagus, jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan untuk itu.

>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; \$&fn

$$\left[ n = \frac{\log \left( \frac{R+i Kn}{R+i K} \right)}{\log (i+1)} \right]$$

—



## Contoh Penyelesaian Soal Aljabar

### 1. Sederhanakan

$$\left( \frac{24a^{10}b^{-8}c^7}{12a^6b^{-3}c^5} \right)^{-5}$$

Penyelesaian:

$$\left( \frac{24a^{10}b^{-8}c^7}{12a^6b^{-3}c^5} \right)^{-5}$$

$$\frac{b^{25}}{32a^{20}c^{10}}$$

### 2. Sederhanakan

$$\left( \frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^8q^6r^{-15}} \right)^{-4}$$

Penyelesaian:

$$\left( \frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^8q^6r^{-15}} \right)^{-4}$$

$$\frac{q^{32}}{625p^{80}r^{28}}$$

### 3. Hitunglah

$$2^6 * 2^{-3} / 2^{10} / 2^{-8}$$

Penyelesaian:

$$2^{6*2-3/2^{10/2}-8}$$

$$2$$

### 4. Hitunglah

$$\left( \frac{4(8-6)^2 - 4*3 + 2*8}{3^1 + 9^0} \right)$$

Penyelesaian:

$$(4*(8-6)^2 - 4*3 + 2*8)/(3^1+9^0)$$

$$5$$

### 5. Hitunglah

$$\left( \frac{[4(8-6)^2 - 4](3 + 2 * 8)}{2^2(2^5 + 5)} \right)$$

Penyelesaian:

$$>\$ \&((4*(8-6)^{2-4}*3+2*8)/(3^1+9^0))$$

13

6. Operasikan

$$(x + 3)^2$$

Penyelesaian:

$$>\$ \&\text{showev('expand((x+3)^2))}$$

$$\text{expand} \left( (x + 3)^2 \right) = x^2 + 6x + 9$$

7. Operasikan

$$(y - 5)^2$$

Penyelesaian:

$$>\$ \&\text{showev('expand((y-5)^2))}$$

$$\text{expand} \left( (y - 5)^2 \right) = y^2 - 10y + 25$$

8. Operasikan

$$(2x + 3y)^2$$

Penyelesaian:

$$>\$ \&\text{showev('expand((2*x+3*y)^2))}$$

$$\text{expand} \left( (3y + 2x)^2 \right) = 9y^2 + 12xy + 4x^2$$

9. Operasikan

$$(3y + 4)(3y - 4)$$

Penyelesaian:

$$>\$ \&\text{showev('expand((3*y+4)*(3*y-4)))}$$

$$\text{expand}((3y - 4)(3y + 4)) = 9y^2 - 16$$

10. Operasikan

$$(3x + 5y)(3x - 5y)$$

Penyelesaian:

>\$\&showev('expand ((3\*x + 5\*y)\*(3\*x - 5\*y)))

$$\text{expand}((3x - 5y)(5y + 3x)) = 9x^2 - 25y^2$$

11. Faktorkan trinomial

$$y^2 + 12y + 27$$

Penyelesaian:

>\$\&solve(y^2+12\*y+27)

$$[y = -9, y = -3]$$

12. Faktorkan trinomial

$$t^2 + 8t + 15$$

Penyelesaian:

>\$\&solve(t^2+8\*t+15)

$$[t = -3, t = -5]$$

13. Faktorkan selisih kuadratnya

$$z^2 - 81$$

Penyelesaian:

>\$\&solve(z^2-81)

$$[z = -9, z = 9]$$

14. Faktorkan selisih kuadratnya

$$m^2 - 4$$

Penyelesaian:

`>$&solve(m^2-4)`

$$[m = -2, m = 2]$$

15. Faktorkan selisih kuadratnya

$$16x^2 - 9$$

Penyelesaian:

`>$&solve(16*x^2-9)`

$$\left[ x = -\frac{3}{4}, x = \frac{3}{4} \right]$$

16. Tentukan nilai y

$$y^2 - 4y - 45 = 0$$

Penyelesaian:

`>$&solve(y^2-4*y-45,y)`

$$[y = 9, y = -5]$$

17. Tentukan nilai t

$$t^2 + 6t = 0$$

Penyelesaian:

`>$&solve(t^2+ 6*t,t)`

$$[t = -6, t = 0]$$

18. Tentukan nilai x

$$x^2 + 100 = 20x$$

Penyelesaian:

`>$&solve(x^2+100=20*x,x)`

$$[x = 10]$$

19. Tentukan nilai y

$$y^2 + 25 = 10y$$

Penyelesaian:

>\$&solve(y^2+25=10\*y,y)

$$[y = 5]$$

20. Tentukan nilai z

$$12z^2 + z = 6$$

Penyelesaian:

>\$&solve(12\*z^2+z=6,z)

$$\left[ z = -\frac{3}{4}, z = \frac{2}{3} \right]$$

21. Sederhanakan

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

Penyelesaian:

>\$&((x^2)/(x^2-4\*x+4)), \$&factor(%)

$$\frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}$$
$$\frac{x^2}{(x - 2)^2}$$

22. Sederhanakan

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 3x^2}$$

Penyelesaian:

>\$&((x^3 - 6\*x^2 + 9\*x)/(x^3 - 3\*x^2)), \$&factor(%)

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 3x^2}$$
$$\frac{x - 3}{x}$$

23. Sederhanakan

$$\frac{2x^2 - 20x + 50}{10x^2 - 30x - 100}$$

Penyelesaian:

```
>$&((2*x^2-20*x+50)/(10*x^2-30*x-100)), $&factor(%)
```

$$\frac{2x^2 - 20x + 50}{10x^2 - 30x - 100}$$

$$\frac{x - 5}{5(x + 2)}$$

24. Sederhanakan

$$\frac{4 - x}{x^2 + 4x - 32}$$

Penyelesaian:

```
>$&((4-x)/(x^2+4*x-32)), $&factor(%)
```

$$\frac{4 - x}{x^2 + 4x - 32}$$

$$-\frac{1}{x + 8}$$

25. Sederhanakan

$$\frac{6 - x}{x^2 - 36}$$

Penyelesaian:

```
>$&((6-x)/(x^2-36)), $&factor(%)
```

$$\frac{6 - x}{x^2 - 36}$$

$$-\frac{1}{x + 6}$$

26. Multiply

$$(a^n - b^n)^x$$

Penyelesaian:

```
>function P(a,b,n,x) &= (a^n - b^n)^x; $&P(a,b,n,x)
```

$$(a^n - b^n)^x$$

>\$&P(a,b,n,3), \$&expand(%)

$$(a^n - b^n)^3 \\ -b^{3n} + 3a^n b^{2n} - 3a^{2n} b^n + a^{3n}$$

27. Multiply

$$(t^a + t^{-a})^2$$

Penyelesaian:

>function P(a,n) &= (t^a+(-a))^n; \$&P(a,n)

$$\left(t^a + \frac{1}{t^a}\right)^n$$

>\$&P(a,2), \$&expand(%)

$$\left(t^a + \frac{1}{t^a}\right)^2 \\ t^{2a} + \frac{1}{t^{2a}} + 2$$

28. Multiply

$$(x^n + 10)(x^n - 4)$$

Penyelesaian:

>\$&'((x^{n+10})\*(x^n-4)) = expand(((x^{n+10})\*(x^n-4)))

$$(x^n - 4)(x^n + 10) = x^{2n} + 6x^n - 40$$

29. Multiply

$$(y^b - z^c)(y^b + z^c)$$

Penyelesaian:

>\$&'((y^{b-z}c)\*(y^{b+z}c)) = expand((y^{b-z}c)\*(y^{b+z}c))

$$(y^b - z^c)(z^c + y^b) = y^{2b} - z^{2c}$$

Untuk nomor 30 - 34:

cari

$$(f \circ g)(x) \text{ dan } (g \circ f)(x)$$

dan domainnya!

30.

$$1. f(x) = x + 3, g(x) = x - 3$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$> \&gx:=x-3; \&fx:=gx+3; \&fx$$

$$x$$

dengan domainnya

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$> \&fx:=x+3; \&gx:=fx-3; \&gx$$

$$x$$

dengan domainnya

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

31.

$$f(x) = 4/(1 - 5x), g(x) = 1/x$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$> \&gx:=1/x; \&fx:=4/(1-5*gx); \&fx$$

$$\frac{4}{1 - \frac{5}{x}}$$

dengan domainnya

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \cup x \neq 5\}$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$> \&fx:=4/(1-5*x); \&gx:=1/fx; \&gx$$



$$\frac{1 - 5x}{4}$$

dengan domainnya

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

Diberikan fungsi

$$f(x) = 3x + 1, g(x) = x^2 - 2x - 6, h(x) = x^3$$

32. Cari

$$(f \circ g)(1/3)$$

$$> \$x:=1/3; \$\&gx:=x^2-2*x-6; \$\&fx:=3*gx+1; \$\&fx$$

$$-\frac{56}{3}$$

33. Cari

$$(g \circ h)(1/2)$$

$$> \$x:=1/2; \$\&hx:=x^3; \$\&gx:=hx^2-2*gx-6; \$\&gx$$

$$-\frac{399}{64}$$

34. Cari

$$(g \circ g)(-2)$$

$$> \$x:=-2; \$\&gx:=x^2-2*x-6; \$\&gx:=gx^2-2*gx-6; \$\&gx$$

$$-6$$

Untuk nomor 35 - 38 gunakan rumus kuadrat untuk menemukan solusi yang tepat.

35.

$$5m^2 + 3m = 2$$

$$> \$\&solve(5*m^2+3*m=2,m)$$

$$\left[ m = \frac{2}{5}, m = -1 \right]$$

36.

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

>\$&solve(2\*y^2-3\*y-2=0,y)

$$\left[ y = -\frac{1}{2}, y = 2 \right]$$

37.

$$y^4 + 4y^2 - 5 = 0$$

>\$&solve(y^4+4\*y^2-5=0,y)

$$\left[ y = -1, y = 1, y = -\sqrt{5}i, y = \sqrt{5}i \right]$$

38.

$$y^4 - 15y^2 - 16 = 0$$

>\$&solve(y^4-15\*y^2-16=0,y)

$$[y = -i, y = i, y = -4, y = 4]$$

Untuk nomor 39 - 40 gunakan substitusi untuk menentukan apakah 2, 3, dan -1 adalah nol dari

39.

>function P(x) &= (x^3-9\*x^2+14\*x+24); \$&P(x)

$$-48$$

>P(4)

$$-48.00$$

>P(5)

$$-48.00$$

>P(-2)

$$-48.00$$

Jadi hasil substitusi yang menghasilkan persamaan mempunyai nilai nol adalah dengan mensubstitusikan angka 4.

40.

```
>function P(x) &= (2*x^3-3*x^2+x+6);$&P(x)
```

−24

```
>P(2)
```

−24.00

```
>P(3)
```

−24.00

```
>P(-1)
```

−24.00



unicodehyperref hyphensurl [ ]book xcolor amsmath,amssymb iftex [T1]fontenc [utf8]inputenc textcomp  
lmodern upquote []microtype [protrusion]basicmath parskip graphicx bookmark xurl



**NAZWA YUAN ADELIA PUTRI\_23030630095\_EMT4PLOT2D**

Nama : Nazwa Yuan Adelia Putri Kelas : Matematika B NIM : 23030630095





## MENG GAMBAR GRAFIK 2D DENGAN EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagai kurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi `plot2d()` untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

### Plot Dasar

Ada fungsi yang sangat mendasar dari plot. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Semut ada koordinat plot, yang dapat diatur dengan `setplot()`. Pemetaan antara koordinat tergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, `shrinkwindow()` default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail tentang fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen  
  
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window  
  
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates  
  
>hold on; // start overwrite mode  
  
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2); // get random points  
  
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors  
  
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot  
  
>hold off; // end overwrite mode  
  
>insimg; // insert to notebook
```



Gambar 0.1 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-001.png

```
>reset;
```

Grafik perlu ditahan, karena perintah `plot()` akan menghapus jendela plot.

Untuk menghapus semua yang kami lakukan, kami menggunakan `reset()`.

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah `plot2d()` dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah `plot2d()` diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah `insimg()` untuk menampilkan gambar hasil plot.

Untuk contoh lain, kami menggambar plot sebagai sisipan di plot lain. Ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kami menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini saat kami memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");

>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;

>ow=window();

>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);

>hold on;

>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);

>plot2d("x^4-x",grid=6):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.2 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-002.png

```
>hold off;

>window(ow);
```

Plot dengan banyak angka dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi figure() utilitas untuk ini.

### Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubah ini dengan fungsi aspek(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspek nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan “Set Aspect” ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafis saat ini.

Tetapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1

>plot2d(["sin(x)", "cos(x)"],0,2pi):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.3 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-003.png

```
>aspect();
```

```
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.



## PLOT 2D DI EULER

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi `plot2d`. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat memplot plot 2D dari

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva parameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang dan plot berbayang.



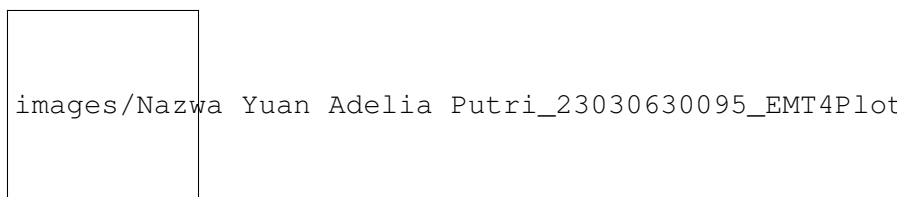
## PLOT EKSPRESI ATAU VARIABEL

Ekspresi tunggal dalam “x” (mis. “ $4*x^2$ ”) atau nama fungsi (mis. “f”) menghasilkan grafik fungsi.

Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

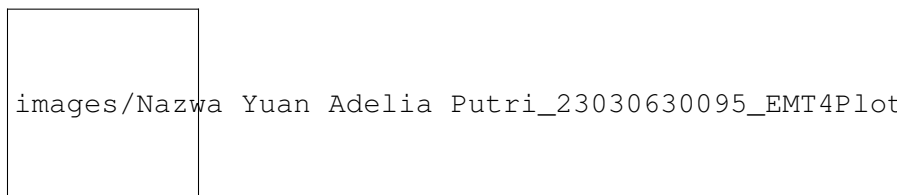
Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua “:”, plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

```
>plot2d("x^2"):
```



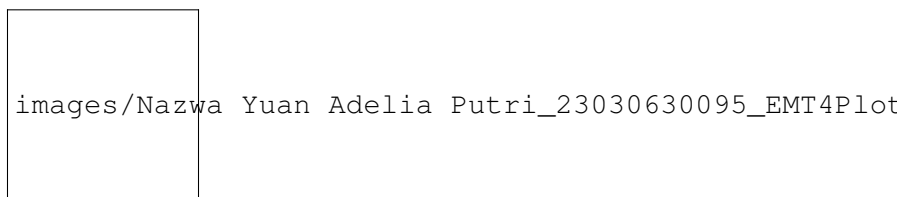
Gambar 0.4 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-004.png

```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```



Gambar 0.5 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-005.png

```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25 baris
```



Gambar 0.6 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-006.png

Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

The plot range is set with the following assigned parameters

- a,b: x-range (default -2,2)
- c,d: y-range (default: scale with values)

- r: alternatively a radius around the plot center
- cx,cy: the coordinates of the plot center (default 0,0)

```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```



Gambar 0.7 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-007.png

```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```



Gambar 0.8 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-008.png

```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



Gambar 0.9 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-009.png

Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul

- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

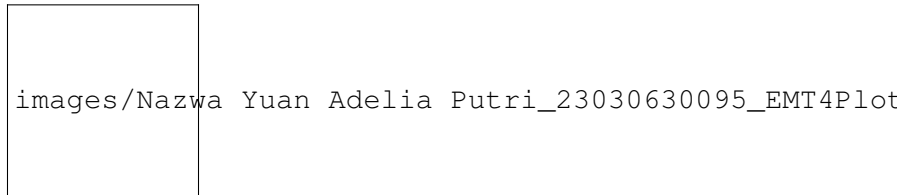
Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.

Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kami memplot  $x^1$  hingga  $x^4$  menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
```



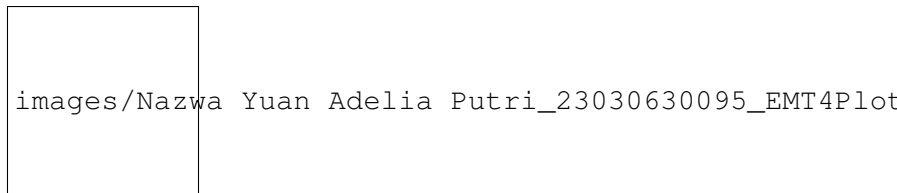
```
>figure(2,2); ...
> for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
> figure(0):
```



Gambar 0.10 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-010.png

Di plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kami menunjukkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya kisi=0 tidak disertakan. Ini menunjukkan tidak ada grid dan tidak ada bingkai.

```
>figure(3,3); ...
> for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
> figure(0):
```



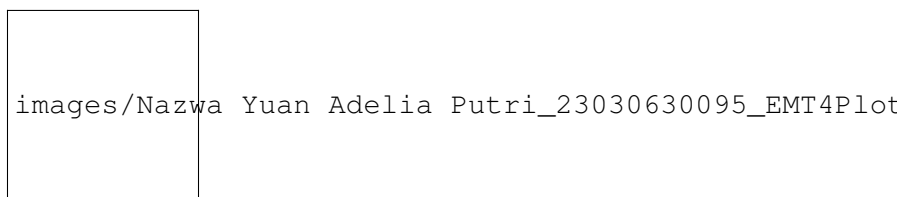
Gambar 0.11 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-011.png

Jika argumen ke plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.

Atau, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.

Dalam contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)");
```




Gambar 0.12 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-012.png

```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

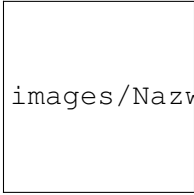


images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.13 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-013.png

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan `<adaptive` dan tentukan jumlah subinterval dengan `n=...`. Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.14 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-014.png

```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.15 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-015.png

Perhatikan bahwa  $x^x$  tidak didefinisikan untuk  $x \leq 0$ . Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai merencanakan segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN keluar dari jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

Parameter `square=true` (atau `>square`) memilih y-range secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

```
>plot2d('integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)',0,2): // plot integral
```

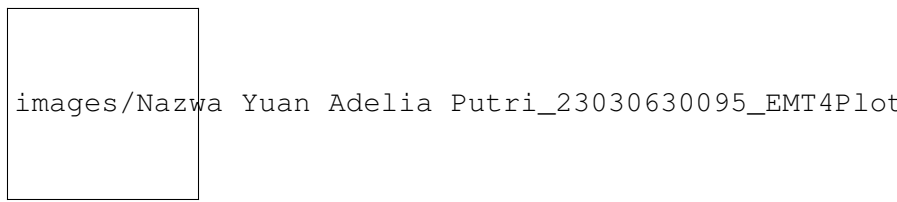
Jika Anda membutuhkan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil `shrinkwindow()` dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di `plot2d()`.

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

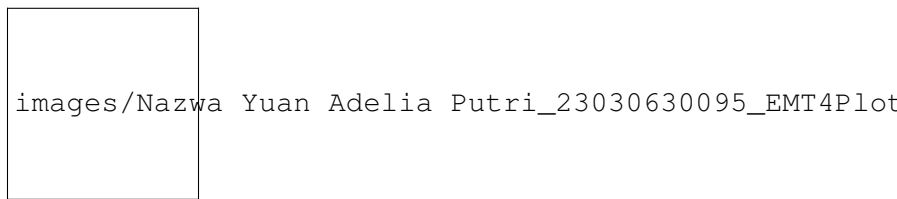
Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```

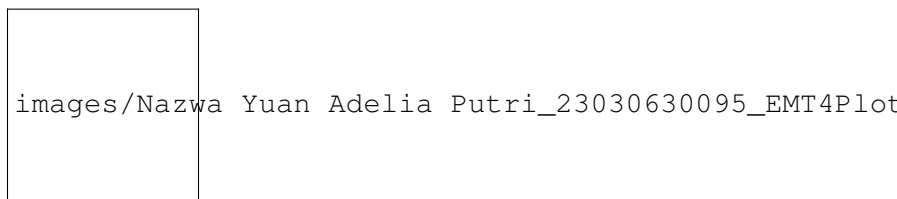
```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
```



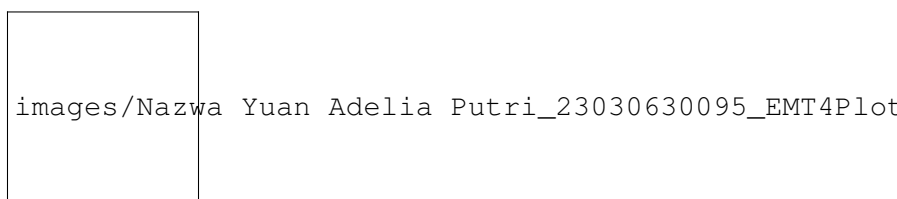
Gambar 0.16 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-016.png



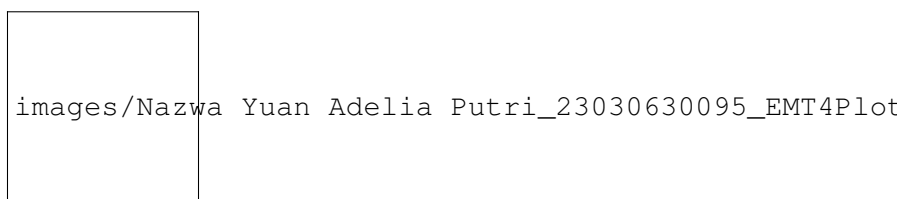
Gambar 0.17 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-017.png



Gambar 0.18 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-018.png



Gambar 0.19 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-019.png



Gambar 0.20 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-020.png

```
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```



Gambar 0.21 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-021.png

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```



Gambar 0.22 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-022.png

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```



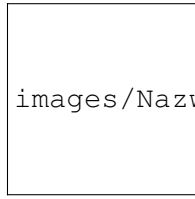
Gambar 0.23 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-023.png

```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```

```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```

```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```



Gambar 0.24 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-024.png



Gambar 0.25 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-025.png



Gambar 0.26 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-026.png



Gambar 0.27 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-027.png



## FUNGSI DALAM SATU PARAMETER

Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah `plot2d()`. Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file “`plot.e`”, yang dimuat di awal program.

Berikut adalah beberapa contoh menggunakan fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain `x`) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

```
>function f(x,a) := x2/a+a*x2-x; // define a function
```

```
>a=0.3; plot2d(“f”,0,1;a): // plot with a=0.3
```



Gambar 0.28 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-028.png

```
>plot2d(“f”,0,1;0.4): // plot with a=0.4
```



Gambar 0.29 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-029.png

```
>plot2d({{“f”,0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```



Gambar 0.30 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-030.png


```
>plot2d({{“f(x,b)”,b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```

```
>function f(x) := x3-x; ...
```

```
> plot2d(“f”,r=1):
```


Berikut adalah ringkasan dari fungsi yang diterima

- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam `x`



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.31 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-031.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.32 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-032.png


- fungsi atau fungsi simbolis dengan nama sebagai “f”
- fungsi simbolis hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolis. Untuk fungsi simbolis, nama saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

$$x^x (\log(x) + 1)$$

```
>plot2d(f,0,2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.33 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-033.png

Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

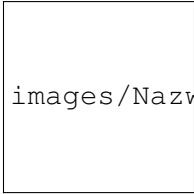
$$e^{-x} \sin(x)$$

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```

```
>function f(x) &= x^x;
```


```
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
```





images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.34 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-034.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.35 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-035.png

```
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```


Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.

- gaya="...". Pilih dari "-", "—", "-.", ".", "-.-", "-.-".
- warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Default adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

- 0.15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun,
- abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru
- muda, oranye terang, kuning
- rgb(merah, hijau, biru): parameter adalah real dalam [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="-"):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.36 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-036.png

Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.37 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-037.png

Tapi Anda bisa menggunakan warna apa saja.

```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.38 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-038.png

## MENG GAMBAR BEBERAPA KURVA PADA BIDANG KOORDINAT YANG SAMA

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metode menggunakan `>add` untuk beberapa panggilan ke `plot2d` secara keseluruhan, tetapi panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini dalam contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```



Gambar 0.39 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-039.png

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="-",>add):
```



Gambar 0.40 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-040.png

Salah satu kegunaan `>add` adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```

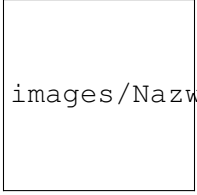


Gambar 0.41 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-041.png

Kami menambahkan titik persimpangan dengan label (pada posisi `"cl"` untuk kiri tengah), dan memasukkan hasilnya ke dalam notebook. Kami juga menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...  
> color=[black,blue],style=["-","."], ...  
> grid=1);  
  
>x0=solve("cos(x)-x",1); ...  
> plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo"); ...  
> label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```

Dalam demo berikut, kami memplot fungsi  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$  dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.42 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-042.png

menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolis.

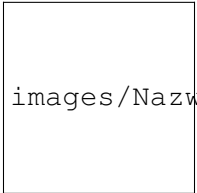
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan yang ketiga memiliki set flag >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...  
> plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="-"); ...  
> plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...  
> labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","-","-.-"], ...  
> colors=[black,blue,red]):
```



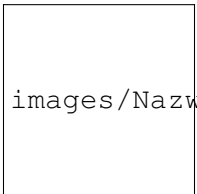
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.43 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-044.png

Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Bernstein-Polinomial.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function  
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;  
>insimg;
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.44 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-046.png

Metode kedua menggunakan pasangan matriks nilai-x dan matriks nilai-y yang berukuran sama.

Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*xk*(1-x)(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```



Gambar 0.45 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-047.png

Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```



Gambar 0.46 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-048.png

Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan larik warna, larik gaya, dan larik ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```



Gambar 0.47 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-049.png

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```

Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

```
>v &= makelist(binomial(10,i)*xi*(1-x)(10-i),i,0,10) // make list
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.48 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-050.png

$$\begin{bmatrix} (1-x)^6, 10(1-x)^5x, 45(1-x)^4x^2, 120(1-x)^3x^3, \\ 210(1-x)^2x^4, 252(1-x)x^5, 210(1-x)x^6, 120(1-x)x^7, \\ 45(1-x)x^8, 10(1-x)x^9, x^{10} \end{bmatrix}$$

`>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector`

```
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10
```

`>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions`

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.49 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-051.png

Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.


Jika ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot ke dalam satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan, itu akan digunakan untuk setiap baris plot.

`>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):`

Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.50 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-052.png

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh kita meneruskan  $a=5$  ke fungsi  $f$ , yang kita plot dari -10 hingga 10.

```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...  
> plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5");
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.51 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-053.png

Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke fungsi yang dengan sendirinya diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...  
> for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.52 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-054.png


Kami dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks  $f(x,a)$  adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10));
```

## Label Teks

Dekorasi sederhana bisa

- judul dengan judul="..."




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.53 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-055.png

- x- dan y-label dengan `xl="..."`, `yl="..."`
- label teks lain dengan `label("...",x,y)`

Perintah label akan memplot ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Itu bisa mengambil argumen posisi.

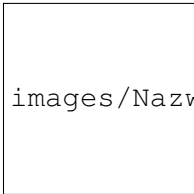
```
>plot2d("x3-x",-1,2,title="y=x3-x",yl="y",xl="x"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.54 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-056.png

```
>expr := "log(x)/x"; ...  
> plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...  
> label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.55 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-057.png

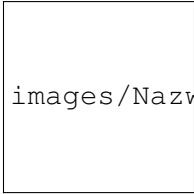
Ada juga fungsi `labelbox()`, yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x2*exp(-x2); ...  
> plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1); ...  
> plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="-"); ...  
> labelbox(["function","derivative"],styles=["-","-"], ...  
> colors=[black,blue],w=0.4):
```

Kotak ditambatkan di kanan atas secara default, tetapi `> kiri` menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebar nya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter `>points`, atau vektor flag, satu untuk setiap label.






images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.56 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-058.png

Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...  
> labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...  
> tcolor=black,>left):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.57 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-059.png

Gaya plot ini juga tersedia di `statplot()`. Seperti di `plot2d()` warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.58 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-060.png

Fitur serupa adalah fungsi `textbox()`.

Lebar secara default adalah lebar maksimal dari baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.


```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...  
> plot2d("f(x)",0,2pi); ...  
> textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}\sin(2\pi x)"),w=0.85):
```

Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title="x → x³ - x"):
```


Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl="x → sinc(x)",>vertical):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.59 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-061.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.60 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-062.png

## LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner “lateks” dan “dvi2pdf” harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil `latex()` sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).


Dalam plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label  $x$  dan  $y$ , label, kotak label, dan judul plot.

```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
> title=latex("\text{Function}
Phi}"), ...
> xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
> textbox( ...
> latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
> label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```

Seringkali, kami menginginkan spasi dan label teks non-konformal pada sumbu  $x$ . Kita dapat menggunakan `xaxis()` dan `yaxis()` seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

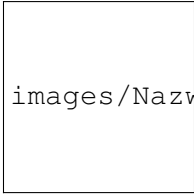
Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan `grid=4`, lalu menambahkan grid dengan `ygrid()` dan `xgrid()`. Dalam contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu  $x$  dengan `xtick()`.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

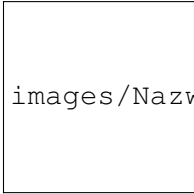
Gambar 0.61 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-063.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.62 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-064.png

```
> ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
> xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6); ...
> xtick([0,pi,2pi],[“0”,“\pi”,“2\pi”],>latex):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.63 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-065.png

Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

```
>function map f(x) ...
```

```
if x>0 then return x^4
else return x^2
endif
endfunction
```

Parameter “peta” membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk

plot, itu tidak perlu. Tetapi untuk mendemonstrasikan vektorisasi itu

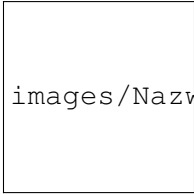
berguna, kami menambahkan beberapa poin kunci ke plot di  $x=-1$ ,  $x=0$  dan  $x=1$ .

Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk

dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya akan dapat menggunakan

LaTeX jika Anda telah instal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d(“f”,-1,1,xl=“x”,yl=“f(x)”,grid=6); ...
> plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
> label(latex(“x^3”),0.72,f(0.72)); ...
> label(latex(“x^2”),-0.52,f(-0.52),pos=“ll”); ...
> textbox( ...
> latex(“f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}”), ...
> x=0.7,y=0.2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.64 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-066.png

### Interaksi pengguna


Saat memplot fungsi atau ekspresi, parameter `>user` memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna dapat

- perbesar dengan `+` atau `-`
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali

Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

Saat memplot data, flag `>user` hanya akan menunggu penekanan tombol.


```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.65 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-067.png

```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...  
> title="+/- or cursor keys (return to exit)");
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.66 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-068.png

Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan `mousedrag()` menunggu event mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, mouse dipindahkan atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi `dragpoints()` memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita interpolasi dalam 5 titik dengan polinomial. Fungsi harus diplot ke area plot tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp, yp) ;
    plot2d("interpval(xp,d,x)",d,xp,r=2) ;
    plot2d(xp,yp,>points,>add) ;
    if select>0 then
        plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add) ;
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di `plot2d` (`d` dan `xp`), yang diteruskan ke evaluasi fungsi `interp()`. Tanpa ini, kita harus menulis fungsi `plotinterp()` terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret poin.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.67 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-069.png

Ada juga fungsi, yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita membutuhkan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang  $n \times 2$ , opsional baris judul.

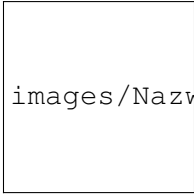
Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi `dragvalues()` menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
> heading="Drag these values:",hcolor=black):
```

Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor derajat  $n$  ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.68 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-070.png

```
plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);  
textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);  
endfunction
```

Sekarang kami mengizinkan derajat  $n$  bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 pemberhentian. Hasil `dragvalues()` digunakan untuk memplot sketsa dengan  $n$  ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...  
> heading="Drag the value:"); ...  
> plotf(nd):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.69 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-071.png

Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak poin.

```
>function dragtest ...
```

```
plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");  
start=0;  
repeat  
  {flag,m,time}=mousedrag();  
  if flag==0 then return; endif;  
  if flag==2 then  
    hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;  
  endif;  
end  
endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

## Gaya Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter `grid`. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan `reset()`.

```

>aspect();

>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis

> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis

> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks

> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside

> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels

> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin

> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only

> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis

> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis

> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside

> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only

> figure(0):

```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.70 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-072.png

Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame ke warna biru.

Jika Anda ingin centang sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```

>aspect(1.5);

>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot

>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0); // add frame and grid

```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.71 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-073.png

Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```

>plot2d("exp(x)",-1,1);

```

```

>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue); // label a point

```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.72 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-074.png

Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan `xaxis()` dan `yaxis()`.

```

>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->");

```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.73 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-075.png

Teks pada plot dapat diatur dengan `label()`. Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```

>function f(x) &= x^3-x

```

$$x^3 - x$$

```

>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"); // add a label there

```

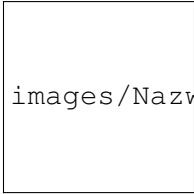
Ada juga kotak teks.

```

>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="-",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","-"],[black,red]); // label box


```





images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.74 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-076.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.75 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-077.png

```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-", "-."]):  
  
>gridstyle("-",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray); ...  
> plot2d("x^3-x",grid=1); ...  
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...  
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray); ...  
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...  
> reset();
```

Untuk kontrol lebih, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

Perintah `fullwindow()` memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan `shrinkwindow()` atau `reset()` untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...  
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...  
> plot2d(["2^x","1","2(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...  
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...  
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...  
> yaxis(-2,1:4,>left); ...  
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...  
> labelbox(["2^x","1","2-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...  
> reset;
```

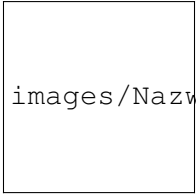
Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
```



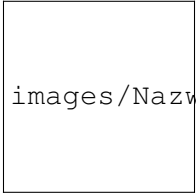
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.76 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-078.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

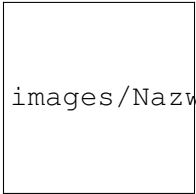
Gambar 0.77 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-079.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.78 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-080.png

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...  
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0","u","u^2"],style="-",>ticks,>zero); ...  
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...  
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...  
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...  
> xlabel(u""); ylabel(u"f()");
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.79 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-081.png

## MERENCANAKAN DATA 2D

Jika  $x$  dan  $y$  adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat  $x$  dan  $y$  dari suatu kurva. Dalam hal ini,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dan  $d$ , atau radius  $r$  dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Atau, `>persegi` dapat diatur untuk menjaga rasio aspek persegi.

Memplot ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai  $x$ , dan satu atau beberapa baris nilai  $y$ . Dari rentang dan nilai- $x$ , fungsi `plot2d` akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan `">titik"`, untuk garis campuran dan titik gunakan `">tambahan"`.

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk  $x$  dan  $y$  untuk satu fungsi.
- Matriks untuk  $x$  dan  $y$  diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk  $x$  dan  $y$ .

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```



Gambar 0.80 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-082.png

Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan `poin=true` untuk ini. Plotnya bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudut-sudutnya.

- `style="..."`: Pilih dari `"["`, `"<>"`, `"o"`, `"."`, `".."`, `"+"`, `"*"`, `"[]"`, `"#"`,
- `"< >#"`, `"o#"`, `"..#"`, `"#"`, `"|"`.

Untuk memplot set poin gunakan `>points`. Jika warna adalah vektor warna, setiap titik

mendapat warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.

Parameter `>addpoints` menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```



Gambar 0.81 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-083.png



Gambar 0.82 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-084.png

## MENGAMBAR DAERAH YANG DIBATASI KURVA

Plot data benar-benar poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "#", "/", "", "/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.

Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali yang default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```



Gambar 0.83 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-085.png


Dalam contoh berikut kami memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```




Gambar 0.84 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-086.png

```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
> plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.85 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-087.png




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.86 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-088.png

Contoh lainnya adalah segi empat, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7); ...  
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="f",fillcolor=red):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.87 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-089.png

Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah  $A[k].v \leq 3$  untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];  
>function f(x,y) := max([x,y].A');  
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kami sekarang memiliki vektor x dan y nilai. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini ini menghasilkan hasil yang bagus karena aturan lilitan, yang digunakan untuk isi.


```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```

Sebuah vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai daerah terisi



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.88 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-090.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot


Gambar 0.89 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-091.png

antara nilai interval bawah dan atas.

Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa

juga digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...  
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|"); ...  
> plot2d(t,t,add=true):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.90 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-092.png

Jika  $x$  adalah vektor yang diurutkan, dan  $y$  adalah vektor interval, maka `plot2d` akan memplot rentang interval yang terisi dalam bidang. Gaya isian sama dengan gaya poligon.

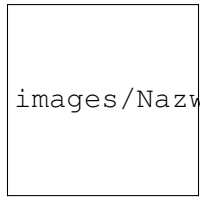
```
>t=-1:0.01:1; x=t-0.01,t+0.01; y=x^3-x;  
>plot2d(t,y):
```

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks  $2 \times n$ . Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)  
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

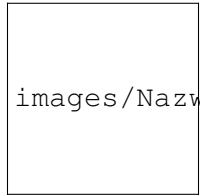
Kami juga dapat mengisi rentang nilai seperti

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="r"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.91 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-093.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.92 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-094.png

```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="r"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.93 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-095.png





images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.94 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-096.png



## GRAFIK FUNGSI PARAMETRIK

Nilai-x tidak perlu diurutkan.  $(x,y)$  hanya menggambarkan kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik fungsi.

Dalam contoh berikut, kami memplot spiral

Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...  
> plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```



Gambar 0.95 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-097.png

Atau, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```



Gambar 0.96 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-098.png

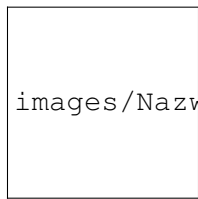
```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2*pi*t); y=r*sin(2*pi*t);  
>plot2d(x,y,r=1):
```



Gambar 0.97 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-099.png

Dalam contoh berikutnya, kami memplot kurva  
dengan

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...  
> plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="f",r=1.5):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.98 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-100.png

## MENGAMBAR GRAFIK BILANGAN KOMPLEKS

Array bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan terhubung. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen `cgrid`, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.

Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai kisi di bidang kompleks.

Dalam contoh berikut, kami memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter `cgrid` menyembunyikan beberapa kurva grid.

```
> aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a); ...  
> plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```



Gambar 0.99 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-101.png

```
> aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);  
> plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```



Gambar 0.100 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-102.png

```
> r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);  
> plot2d(exp(z),>points,>add):
```



Gambar 0.101 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-103.png

Sebuah vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian real dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kami memplot lingkaran satuan dengan

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...  
> plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.102 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-104.png

## PLOT STATISTIK

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi 0-1-normal menghasilkan jalan acak.

```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```



Gambar 0.103 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-105.png

Menggunakan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```



Gambar 0.104 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-106.png


```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="f",color=blue):
```



Gambar 0.105 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-107.png

Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.


```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...  
> "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];  
  
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];  
  
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");  
  
>title("Temperature");  
  
>k=0:10;
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.106 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-108.png


```
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.107 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-109.png

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.108 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-110.png

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```

```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```

Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan `distribution=n` dengan `plot2d`.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
```

```
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```

Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan `>bar` di `plot3d`, atau dengan `plot kolom`.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
```

```
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
```

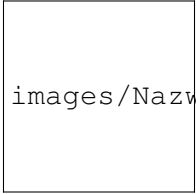
```
>plot2d(x,y,>bar):
```

Fungsi `statplot()` menyetel gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```


```
>n=10; i=0:n; ...
```





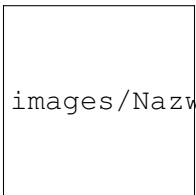
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.109 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-111.png



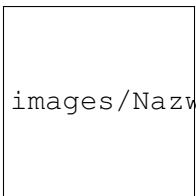
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.110 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-112.png



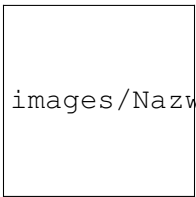
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.111 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-113.png




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.112 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-114.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.113 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-115.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.114 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-116.png

```
> plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
> plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.115 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-117.png

Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Bilah akan memanjang dari  $x[i]$  ke  $x[i+1]$  dengan nilai  $y[i]$ . Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
> n=10; k=bin(n,0:n); ...
> plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.116 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-118.png

Data untuk plot batang ( $\text{bar}=1$ ) dan histogram ( $\text{histogram}=1$ ) dapat dinyatakan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan  $>\text{distribusi}$  (atau  $\text{distribusi}=n$ ). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan  $>\text{histogram}$ . Jika  $>\text{genap}$  ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

```
> plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.117 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-119.png

```
> k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```

```
> columnsplot(m,k):
```

```
> plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```

Untuk distribusi, ada parameter  $\text{distribusi}=n$ , yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
> plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\"): 
```



Gambar 0.118 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-120.png



Gambar 0.119 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-121.png



Gambar 0.120 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-122.png



Gambar 0.121 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-123.png

Dengan parameter `even=true`, ini akan menggunakan interval integer.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```



Gambar 0.122 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-124.png

Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik, yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```



Gambar 0.123 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-125.png

```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
```

```
> plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Gambar 0.124 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-126.png

Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Sebuah boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak dari

outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali kisaran 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.125 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-127.png



## FUNGSI IMPLISIT

Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan  $f(x,y)=\text{level}$ , di mana “level” dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika  $\text{level}=\text{“auto”}$ , akan ada garis level  $n_c$ , yang akan menyebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan  $>\text{hue}$  untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit,  $xv$  harus berupa fungsi atau ekspresi dari parameter  $x$  dan  $y$ , atau, sebagai alternatif,  $xv$  dapat berupa matriks nilai.

Euler dapat menandai garis level

dari fungsi apapun.

Untuk menggambar himpunan  $f(x,y)=c$  untuk satu atau lebih konstanta  $c$ , Anda dapat menggunakan `plot2d()` dengan plot implisitnya di dalam bidang. Parameter untuk  $c$  adalah  $\text{level}=c$ , di mana  $c$  dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi untuk setiap titik dalam plot. Parameter “ $n$ ” menentukan kehalusan plot.

```
>aspect(1.5);  
>plot2d(“x2+y2-x*y-x”,r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.126 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-128.png

```
>expr := “2*x2+y2+x*y+3*y4+y4+y”; // define an expression f(x,y)  
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```



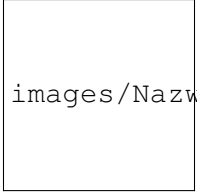
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.127 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-129.png

```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice  
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

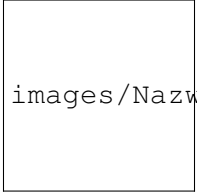
Ini berfungsi untuk plot data juga. Tetapi Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);  
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.128 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-130.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.129 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-131.png

```
>plot2d("x3-y2",>contour,>hue,>spectral):  
>plot2d("x3-y2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):  
>z=z+normal(size(z))*0.2;  
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):  
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):  
>plot2d("x2+y3+x*y",level=1,r=4,n=100):  
>plot2d("x2+2*y2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```

Juga dimungkinkan untuk mengisi set

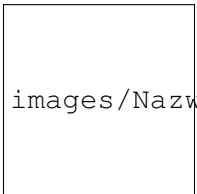
dengan rentang tingkat.

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Kemudian level harus berupa matriks 2xn dari interval level, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua adalah akhir dari setiap interval. Atau, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

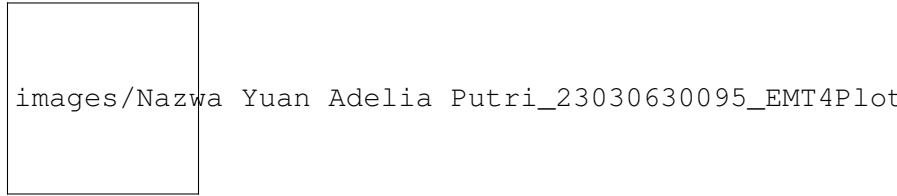
```
>plot2d("x4+y4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="l"):
```



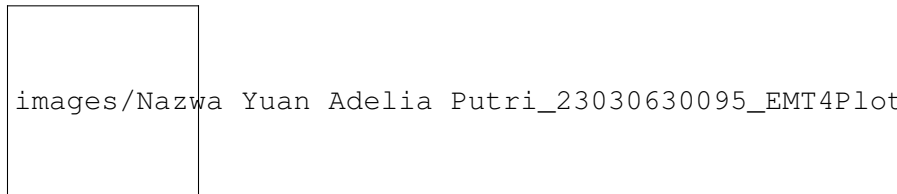
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.130 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-132.png

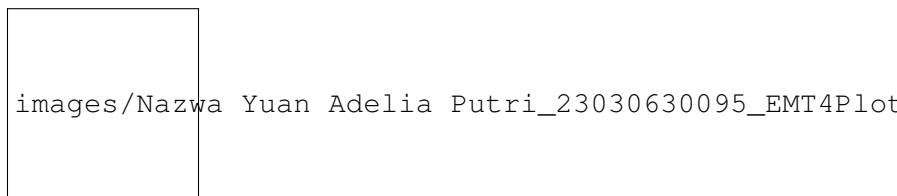




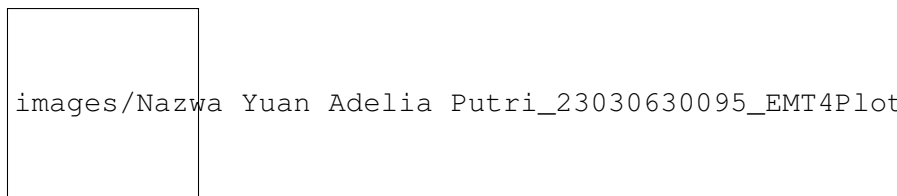
Gambar 0.131 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-133.png



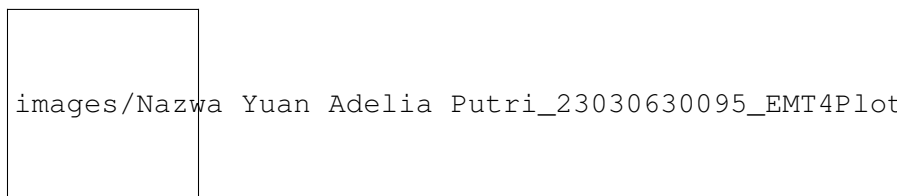
Gambar 0.132 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-134.png



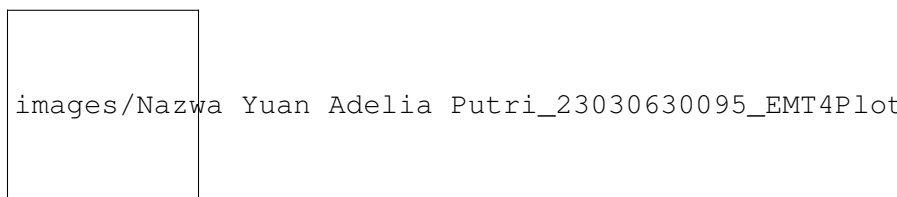
Gambar 0.133 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-135.png




Gambar 0.134 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-136.png



Gambar 0.135 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-137.png




Gambar 0.136 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-138.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot


Gambar 0.137 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-139.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.138 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-140.png

```
>plot2d("x2+y3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="f",r=2,n=100):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.139 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-141.png

```
>plot2d("x2+y3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```

```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

```
>plot2d("(x2+y2-1)3-x2*y3",r=1.3, ...  
> style="#",color=red,<outline, ...  
> level=[-2;0],n=100):
```

Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

```
>plot2d("x3-x*y+x2*y2",r=6,level=1,n=100):
```

```
>function starplot1 (v, style="f", color=green, lab=none) ...
```

```
if !holding() then clg; endif;  
w=window(); window(0,0,1024,1024);  
h=holding(1);  
r=max(abs(v))*1.2;  
setplot(-r,r,-r,r);  
n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
```



Gambar 0.140 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-142.png



Gambar 0.141 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-143.png



Gambar 0.142 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-145.png



Gambar 0.143 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-146.png

```

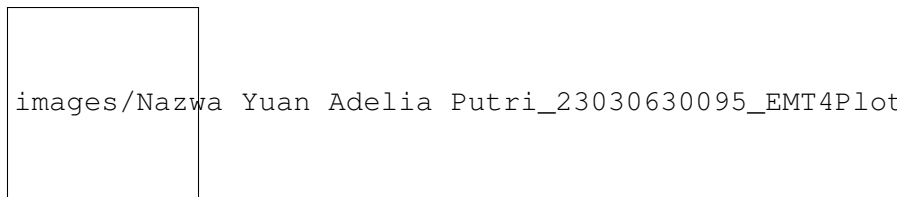
v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
loop 1 to n
    polygon([0,c[#],c[#+1]], [0,s[#],s[#+1]],1);
    if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
    endif;
end;
barcolor(cl); barstyle(st);
holding(h);
window(w);
endfunction

```

Tidak ada kotak atau sumbu kutu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plot.

Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu, jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



Gambar 0.144 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-147.png

Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang tidak dapat dilakukan plot2d, tetapi hampir.

Dalam fungsi berikut, kami melakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```

{x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
h=holding(1);
frame();
xgrid(ticks(x));
p=plot();
for i=-10 to 10;
    if i<=p[4] and i>=p[3] then
        ygrid(i,yt="10^"+i);
    endif;
end;
holding(h);
endfunction

```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
> logimpulseplot1(x,y):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.145 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-148.png

Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah `plot(x,y)` hanya memplot kurva ke jendela plot. `setplot(a,b,c,d)` mengatur jendela ini.

Fungsi `wait(0)` memaksa plot untuk muncul di jendela grafik. Jika tidak, menggambar ulang terjadi dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
t=linspace(0,2pi,500);
f=0;
c=framecolor(0);
l=linewidth(2);
setplot(-1,1,-1,1);
repeat
    clg;
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
end;
framecolor(c);
linewidth(l);
endfunction
```

Tekan sembarang tombol untuk menghentikan animasi ini.

```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```



## PLOT LOGARITMIK

EMT menggunakan parameter “logplot” untuk skala logaritmik.

Plot logaritma dapat diplot baik menggunakan skala logaritma dalam y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma dalam x dan y dengan logplot=2, atau dalam x dengan logplot=3.

- logplot=1: y-logaritma
- logplot=2: x-y-logaritma
- logplot=3: x-logaritma

```
>plot2d(“exp(x3-x)*x2”,1,5,logplot=1):
```



Gambar 0.146 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-149.png

```
>plot2d(“exp(x+sin(x))”,0,100,logplot=1):
```



Gambar 0.147 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-150.png

```
>plot2d(“exp(x+sin(x))”,10,100,logplot=2):
```

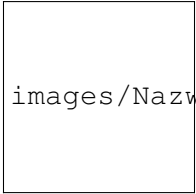


Gambar 0.148 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-151.png

```
>plot2d(“gamma(x)”,1,10,logplot=1):
```

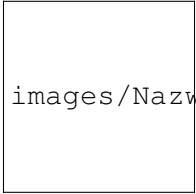
```
>plot2d(“log(x*(2+sin(x/100)))”,10,1000,logplot=3):
```

Ini juga berfungsi dengan plot data.



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.149 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-152.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.150 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot2D-153.png

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
```

```
>plot2d(x,y,logplot=2):
```



unicodehyperref hyphensurl [ ]book xcolor amsmath,amssymb iftex [T1]fontenc [utf8]inputenc textcomp  
lmodern upquote []microtype [protrusion]basicmath parskip graphicx bookmark xurl



**NAZWA YUAN ADELIA PUTRI\_23030630095\_EMT4PLOT3D**

Nama : Nazwa Yuan Adelia Putri Kelas : Matematika B NIM : 23030630095



## MENG GAMBAR PLOT 3D DENGAN EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal  $x=y=z=0$ , tetapi sudut  $=0^\circ$  terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah.

Euler dapat merencanakan

- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan `plot3d`. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```



Gambar 0.151 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-001.png



## FUNGSI DUA VARIABEL

Untuk grafik fungsi, gunakan

- ekspresi sederhana dalam  $x$  dan  $y$ ,
- nama fungsi dari dua variabel
- atau matriks data.

Standarnya adalah kotak kawat yang diisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah default interval grid adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default 40x40 persegi panjang untuk membangun permukaan. Ini bisa diubah.

- $n=40$ ,  $n=[40,40]$ : jumlah garis grid di setiap arah
- $grid=10$ ,  $grid=[10,10]$ : jumlah garis grid di setiap arah.

Kami menggunakan default  $n=40$  dan  $grid=10$ .

```
>plot3d("x^2+y^2"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot


Gambar 0.152 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-002.png

Interaksi pengguna dimungkinkan dengan `>parameter` pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: putar sudut pandang
- +, -: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya (lihat di bawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user,...  
> title="Turn with the vector keys (press return to finish)":
```

Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.153 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-003.png

- a,b: rentang-x
- c,d: rentang-y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.


Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: skala ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).

skala: angka atau vektor 1x2 untuk skala ke arah x dan y.

bingkai: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x2+y2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.154 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-004.png

Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- jarak: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- sudut: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- tinggi: ketinggian tampilan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

```
>view
```

```
[5, 2.6, 2, 0.4]
```



Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

Dalam contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 terlihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
```



Gambar 0.155 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-005.png

Plot terlihat selalu ke pusat kubus plot. Anda dapat memindahkan pusat dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...  
> center=[0.4,0,0],zoom=5):
```



Gambar 0.156 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-006.png

Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung pada ukuran plot. Namun, label mengacu pada ukuran sebenarnya.

Jika Anda memamatkannya dengan scale=false, Anda perlu berhati-hati, bahwa plot masih cocok dengan jendela plot, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan pusat.


```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...  
> center=[0,0,-2],frame=3):
```



Gambar 0.157 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-007.png


Sebuah plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot polar. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skala sendiri. Jika tidak, fungsi diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...  
> fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):  
  
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...  
> plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=2pi,frame=3,zoom=4):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.158 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-008.png




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.159 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-009.png

Rotasi parameter memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```

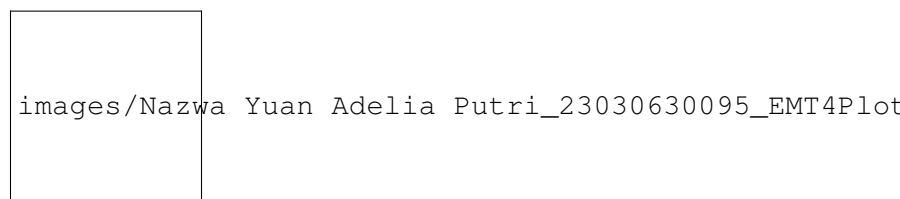


images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.160 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-010.png

Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x2+y2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```



Gambar 0.161 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-011.png



## PLOT KONTUR

Untuk plot, Euler menambahkan garis grid. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/sian.

-> hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.

-> kontur: Memplot garis kontur otomatis pada plot.

- level=... (atau level): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.

Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x2-y2)",r=2,n=100,level="thin",...  
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```



Gambar 0.162 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-012.png

```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```




Gambar 0.163 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-013.png

Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.

-> spektral: Menggunakan skema spektral default

- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.



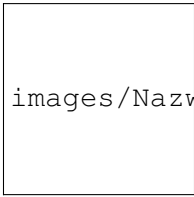
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-014.png

Gambar 0.164 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-014.png

```
>plot3d("x2+y2",>spectral,>contour,n=100):
```

Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

```
>plot3d("x2+y2",0,1,0,1,angle=220°,level=-1:0.2:1,color=redgreen):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-015.png

Gambar 0.165 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-015.png

Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x2+y3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...  
> >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-016.png

Gambar 0.166 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-016.png

Dalam contoh berikut, kami memplot himpunan, di mana

Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.


```
>plot3d("xy-yx",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```

Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x2+y4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```


Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kami selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan grid.

```
>figure(2,2); ...  
> expr="y3-x2"; ...
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

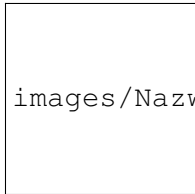
Gambar 0.167 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-017.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.168 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-018.png

```
> figure(1); ...
> plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
> figure(2); ...
> plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
> figure(3); ...
> plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
> figure(4); ...
> plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
> figure(0):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.169 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-019.png

Ada beberapa skema spektral lainnya, bernomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai

- spektral: untuk rentang dari biru ke merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuningbiru,ungu hijau,birukuning,hijaumerah
- birukuning, hijau ungu, kuning biru, merah hijau

```
>figure(3,3); ...
> for i=1:9; ...
> figure(i); plot3d("x2+y2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4); ...
> end; ...
> figure(0):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot


Gambar 0.170 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-020.png

Sumber cahaya dapat diubah dengan `l` dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- cahaya: arah untuk cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...  
> hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...  
> title="Press l and cursor keys (return to exit)");
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.171 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-021.png

Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...  
> zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.172 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-022.png

Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```

Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```





Gambar 0.173 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-023.png



Gambar 0.174 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-024.png



## PLOT IMPLISIT

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur `plot3d` termasuk plot implisit. Plot-plot ini menunjukkan himpunan nol dari suatu fungsi dalam tiga variabel.

Solusi dari

dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang  $x$ - $y$ -,  $x$ - $z$ - dan  $y$ - $z$ .

- `implisit=1`: potong sejajar dengan bidang  $y$ - $z$
- `implisit=2`: potong sejajar dengan bidang  $x$ - $z$
- `implisit=4`: potong sejajar dengan bidang  $x$ - $y$

Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda suka. Dalam contoh kita plot

```
>plot3d("x2+y3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```



Gambar 0.175 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-025.png

```
>plot3d("x2+y2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



Gambar 0.176 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-026.png



## MERENCANAKAN DATA 3D

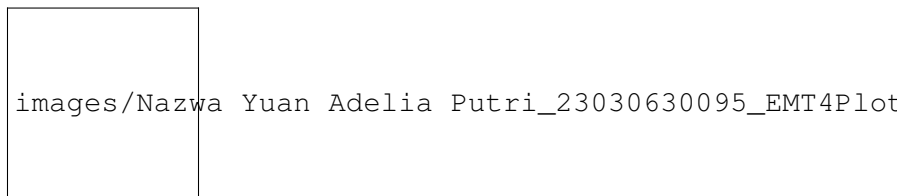
Sama seperti `plot2d`, `plot3d` menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai  $x$ -,  $y$ - dan  $z$ , atau tiga fungsi atau ekspresi  $f_x(x,y)$ ,  $f_y(x,y)$ ,  $f_z(x,y)$ .

Karena  $x,y,z$  adalah matriks, kita asumsikan bahwa  $(t,s)$  melalui sebuah kotak persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai  $t$  dan vektor kolom nilai  $s$  untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

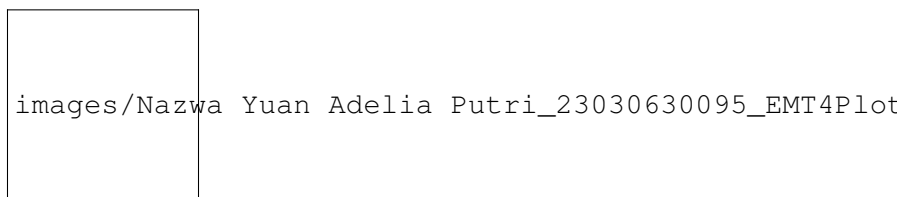
```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
> x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
> plot3d(x,y,z,>hue, ...
> color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
> values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
> scale=1.4,height=50°):
```



Gambar 0.177 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-027.png

Berikut adalah contoh, yang merupakan grafik fungsi.

```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Gambar 0.178 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-028.png


Namun, kita bisa membuat segala macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama dengan fungsi

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```

Dengan lebih banyak usaha, kami dapat menghasilkan banyak permukaan.

Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

dengan




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.179 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-029.png

Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...  
> d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...  
> plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...  
> light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.180 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-030.png

Tentu saja, titik cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.

Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500; ...  
> plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style=":");
```



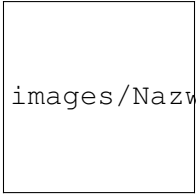
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.181 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-031.png

Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva. Untuk kurva di pesawat kami menggunakan urutan koordinat dan parameter wire=true.

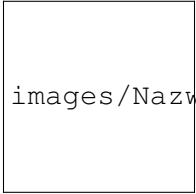
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...  
> plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):  
  
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...  
> linewidth=3,wirecolor=blue):  
  
>X=cumsum(normal(3,100)); ...  
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```

EMT juga dapat memplot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata merah/sian.



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.182 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-032.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.183 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-033.png

```
> plot3d("x2y3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```

Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsi.

```
>plot3d("x2y3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```


Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, ketika parameternya adalah nilai x-, y-, dan z dari gambar kotak persegi panjang dalam ruang.

Untuk demo berikut, kami mengatur parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...  
> X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...  
> plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```

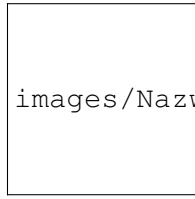
Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/sian.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)'; ...  
> x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...  
> y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...  
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...  
> plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.184 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-034.png



Gambar 0.185 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-035.png



Gambar 0.186 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-036.png



Gambar 0.187 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-037.png



Gambar 0.188 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-038.png



## PLOT STATISTIK

Plot bar juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x2+y2; ...  
> xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y|1.1)-0.05; ...  
> plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



Gambar 0.189 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-039.png

Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua atau lebih bagian.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...  
> plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```



Gambar 0.190 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-040.png

Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...  
> plot3d(i*j2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):  
  
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...  
> loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...  
> columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```



Gambar 0.191 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-041.png



Gambar 0.192 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-042.png

## PERMUKAAN BENDA PUTAR

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3,...
> style="#",color=red,<outline,...
> level=[-2;0],n=100):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.193 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-043.png

```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$(y^2 + x^2 - 1)^3 - x^2 y^3$$

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut adalah ungkapan, yang mendefinisikan hati:

Selanjutnya kita atur

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$(r^2 - 1)^3 + \frac{(\sin(5a) - \sin(3a) - 2\sin a) r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
> t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t); ...
> s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
> plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
> >hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.194 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-046.png

Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```

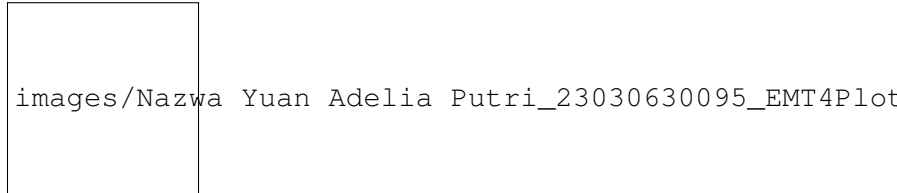
r=x^2+y^2;
return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
endfunction

```

```

>plot3d("f(x,y,z)",...
> xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4,...
> implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):

```



Gambar 0.195 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-047.png

## PLOT 3D KHUSUS

Fungsi `plot3d` bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda sukai.

Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=0:0.01:1; x=(0.1:0.01:1)';  
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..  
        hues=0.5,>contour,color=orange);  
    h=holding(1);  
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);  
    holding(h);  
endfunction
```

Sekarang `framedplot()` menyediakan frame, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[0.1,1,0,1,0,1],angle=-45°, ...  
> center=[0,0,-0.7],zoom=6):
```



Gambar 0.196 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-048.png

Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa `plot3d()` menyetel jendela ke `fullwindow()` secara default, tetapi `plotcontourplane()` mengasumsikan itu.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
```

```
>function myplot(x,y,z) ...  
>
```

```
>myplot(x,y,z):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.197 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-049.png

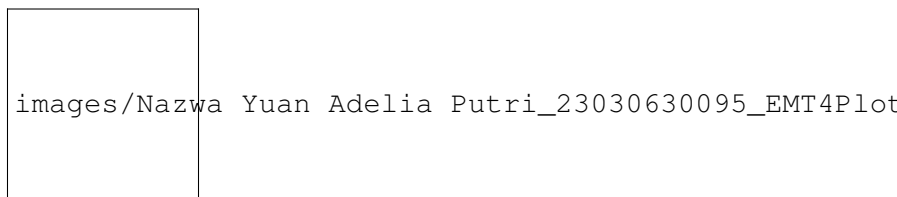
## ANIMASI

Euler dapat menggunakan frame untuk menghitung animasi terlebih dahulu.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya itu menjiwai plot.

Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x2+y3"); ...  
> rotate("testplot"); testplot():
```



Gambar 0.198 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-050.png





## MENGGAMBAR POVRAY

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari <http://www.povray.org/>,

dan meletakkan sub-direktori “bin” dari Povray ke jalur lingkungan, atau mengatur variabel “defaultpovray” dengan path lengkap yang menunjuk ke “pvengine.exe”.

Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi  $f(x,y)$ , atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut “look”, yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan x,y,z sumbu dalam arti tangan kanan.

Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori bin Povray ada di jalur. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog awal Povray.

```
>pov3d("x2+y2",zoom=3);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.199 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-051.png

Kita dapat membuat fungsi menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kami juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x2+y3",axiscolor=red,angle=20°, ...  
> look=povlook(blue,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.200 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-052.png

Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan.

Kami memplot himpunan titik di bidang kompleks, di mana produk dari jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)2+y2)*((x+1)2+y2)/40",r=1.5, ...  
> angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...  
> <fscale,zoom=3.8);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.201 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-053.png

## MERENCANAKAN DENGAN KOORDINAT

Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...  
> x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...  
> Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...  
> pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.202 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-054.png

Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...  
> x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3; ...  
> pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...  
> w=500,h=300);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.203 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-055.png

Dengan metode bayangan canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ x & y \end{matrix}$$

Persamaan permukaannya adalah  $[x,y,Z]$ . Kami menghitung dua turunan ke x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

$$[-2xy^3, -3x^2y, 1]$$

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
```

```
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
```

```
> xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.204 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-056.png

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

Simpul trefoil

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
```

```
> Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
```

```
> Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik  $dn[i]$  untuk  $i=1,2,3$ . Sintaks untuk ini adalah `&"expression"(parameters)`. Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita

mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...  
> <shadow,look=povlook(gray), ...  
> xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.205 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-057.png

Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...  
> x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...  
> t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...  
> writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...  
> povend();
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.206 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-058.png

With povgrid(), curves are possible.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...  
> t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...  
> x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...  
> writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...  
> writeAxis(0,2,axis=3); ...  
> povend();
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.207 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-059.png



## OBJEK POVRAY

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.

Kami memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.

Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...  
> c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(green)); ...  
> c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...  
>
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c1
```

```
cylinder { <-1,0,0>;, <1,0,0>;, 1  
  texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451>; } }  
  finish { ambient 0.2 }  
}
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.

Itu dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kami juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

```
texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1>; } }  
finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.


```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan, jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```

Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.208 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-060.png


```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
```

```
>function fractal (x,y,z,h,n) ...  
>
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
```

```
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
```

```
>povend();
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.209 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-061.png

Perbedaan memungkinkan memotong satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi ditulis ke file segera.

Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita dapat menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kami menghasilkan kubus kedua, dan memutar dan menskalakannya sedikit.

```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...  
> rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.



```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...  
> writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...  
> writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...  
> povend();
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.210 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-062.png



## FUNGSI IMPLISIT

Povray dapat memplot himpunan di mana  $f(x,y,z)=0$ , seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...  
> writeAxes(); ...  
> povend();
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.211 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-063.png



## OBJEK JALA

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarinya dengan informasi tambahan.

Kami ingin memaksimalkan  $xy$  di bawah kondisi  $x+y=1$  dan menunjukkan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kami tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan #declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Itu dapat menerima vektor normal seperti pov3d().

Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
```

```
>mesh=povtriangles(x,y,z,““,vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
```

```
> ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaan dikurangi dua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll],povlook(green))));
```

Tulis dua persimpangan.

```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
```

```
> writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis titik maksimum.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
```

```
> povend();
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.212 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-064.png



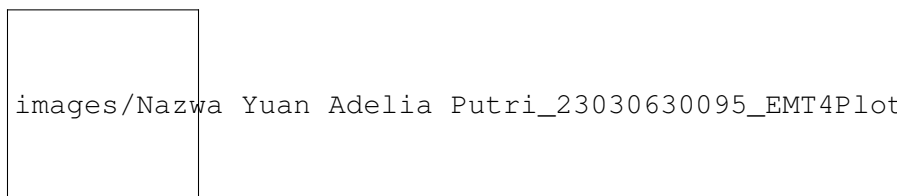
## ANAGLYPH DI POVRAY

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/sian, Povray harus berjalan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglyphs.

```
>pov3d("-exp(-x2-y2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...  
> center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



Gambar 0.213 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-065.png

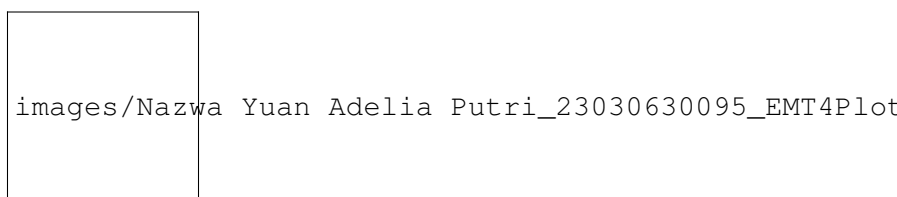
Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
s=povsphere (povc,1) ;  
cl=povcylinder (-povz,povz,0.5) ;  
clx=povobject (cl,rotate=xrotate(90°)) ;  
cly=povobject (cl,rotate=yrotate(90°)) ;  
c=povbox ([-1,-1,0],1) ;  
un=povunion ([cl,clx,cly,c]) ;  
obj=povdifference (s,un,povlook (red)) ;  
writeln (obj) ;  
writeAxes () ;  
endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```



Gambar 0.214 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-066.png





## MENDEFINISIKAN OBJEK SENDIRI

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Tapi Anda tidak terbatas pada ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau objek yang sama sekali baru.

Kami mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah “torus”. Jadi kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="" ) ...  
  
    return "torus { "+r1+" , "+r2+look+" }";  
endfunction
```

Inilah torus pertama kami.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}  
  rotate 90 *x  
  translate <0.8,0,0>;  
}
```

Sekarang kita menempatkan objek-objek ini ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilan, kami menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...  
> writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...  
> writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...  
>  
>povend();
```

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, itu tidak menampilkan kesalahan. Karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<keluar>);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```

Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami memecahkan

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.215 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-067.png

dan menunjukkan titik layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
```

```
>b=[10,10,10,10]';
```

```
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini memiliki solusi sama sekali.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0, 1, 0.5]
```

Ya, sudah.

Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat

```
>function oneplane (a,b,look="" ) ...
```

```
    return povplane (a,b,look)
endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan persimpangan dari semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="" ) ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
endfunction
```

Kita sekarang dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
```

```
> writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
```

```
> writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

```
>
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

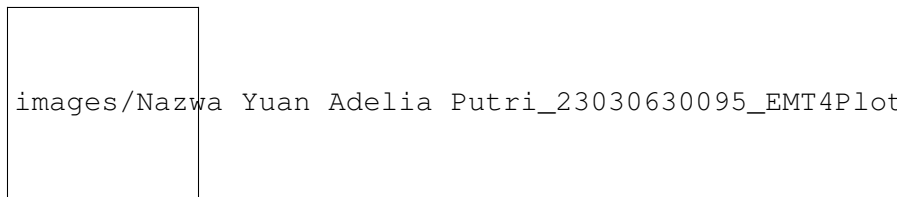
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
> povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah yang optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya menurut pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=125°)); ...
> povend();
```



Gambar 0.216 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-068.png



## LEBIH BANYAK CONTOH

Anda dapat menemukan beberapa contoh lagi untuk Povray di Euler di file berikut.

Examples/Dandelin Spheres

Examples/Donat Math

Examples/Trefoil Knot

Examples/Optimization by Affine Scaling

```
>povstart(zoom=3); ...  
> x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^3/6; ...  
> t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...  
> writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...  
> povend();
```



Gambar 0.217 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-069.png

```
>aspect(1.8); plot3d("x^4+sin(y)",-8,8,0,8*pi):
```



Gambar 0.218 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-070.png

```
>plot3d("x^3-y^9+4*x*z+z^5",>implicit,r=4,zoom=4.4):
```



Gambar 0.219 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-071.png

```
>plot3d("exp(x^4+y^6)",>contour,spectral=2):
```

```
>figure(3,3); ...  
> for n=1 to 3 ; figure(n); plot3d("16*sin(x)^3","13*cos(x)-5*cos(2*x)-2*cos(3*x)-cos(4*x)","y",0,pi*2,-  
10,10,spectral=1,angle=0,height=90° ...
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.220 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-072.png

```
> ,<frame,grid=10,distance=3); end; ...  
> figure(0):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Plot

Gambar 0.221 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Plot3D-073.png

unicodehyperref hyphensurl [ ]book xcolor amsmath,amssymb iftex [T1]fontenc [utf8]inputenc textcomp  
lmodern upquote []microtype [protrusion]basicmath parskip graphicx bookmark xurl





## KALKULUS DENGAN EMT

Nama : Nazwa Yuan Adelia Putri NIM : 23030630095 Kelas : Matematika B 2023

---

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma,
- komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

### Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format `nama_fungsi := rumus fungsi` (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &&= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah `function` (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
```

```
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
```

```
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
  useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) ...
  ^
```

Nb: Floating point error karena untuk  $x=1$ ,  $g(x)$  akan bernilai imajiner

yaitu

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara “inline” menggunakan format `:=`, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata “map” digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata “map” fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d(“f(x)”, -5, 5):
```



Gambar 0.222 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-002.png

```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
      x
2 E
```

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$$3x + 1$$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$$\frac{3x + 1}{2} \text{ E}$$

## LATIHAN

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

### 1. Untuk fungsi

$$k(x) = x^2 - 4$$

tentukan nilai

a.  $k(-4)$

b.  $k(4)$

```
>function k(x) := x^2 -4
```

```
>k(-4), k(4)
```

```
12
```

```
12
```

```
>plot2d("k",-4,4):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.223 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-004.png

### 2. Untuk fungsi

$$z(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

hitunglah masing-masing nilai.

a.  $z(6)$

b.  $z(2)$

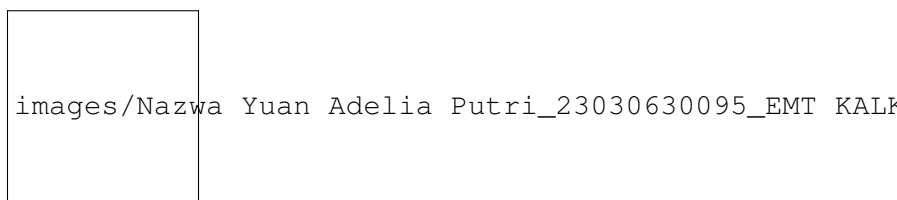
```
>function z(x) := (x^2-16)/(x-4)
```

```
>z(6), z(2)
```

10

6

```
>plot2d("z",-4,6):
```



Gambar 0.224 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-006.png

3. Untuk fungsi

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$$

tentukan nilai  $r(4)$ ,  $r(-6)$ ,  $r(8)$

```
>function f(x) := x^3-3*x^2+2*x-4
```

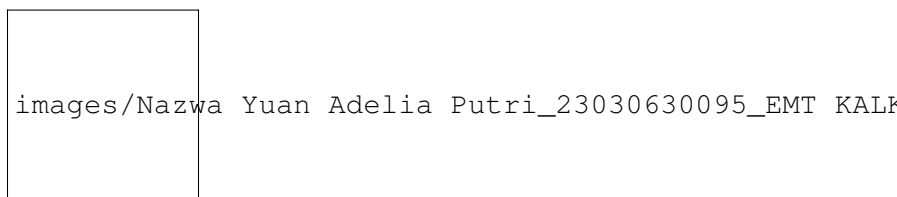
```
>f(4), f(-6), f(8)
```

20

-340

332

```
>plot2d("x^3-3*x^2+2*x-4",-2,9):
```



Gambar 0.225 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-008.png

4. Tentukan nilai  $f(200)$  dari fungsi berikut

$$f(x) = \sqrt{x - 64}$$

```
>function f(x) := sqrt(x-64)
```

```
>f(200)
```

```
11.6619037897
```

```
>plot2d("sqrt(x-64)",0,200):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.226 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-010.png

## 5. Untuk fungsi

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

dan

$$g(x) = x + 3$$

cari nilai fog(-4), gof(0)

```
>function f(x) := x^2-3*x+2; $f(x)
```

```
>function g(x) := x+3; $g(x)
```

```
>f(g(-4)), g(f(0))
```

```
6
```

```
5
```

```
>plot2d("(x+3)^2-3*(x+3)+2",-2,2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.227 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-014.png

## 6. Tentukan nilai dari

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1$$

dengan  $x=1$  dan  $y=3$

```
>function f(x,y):= x2+y2+2*x-2*y+1
```

```
>f(1,3)
```

7

```
>plot3d(“x2+y2+2*x-2*y+1”):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.228 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-016.png



## MENGHITUNG LIMIT

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni “limit”. Fungsi “limit” dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi “plus” atau “minus”. Hasil limit dapat berupa nilai, “und” (tak definisi), “ind” (tak tentu namun terbatas), “infinity” (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x - 1} = -1$$

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = 7$$

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.229 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-020.png

```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",-2,5):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.230 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-026.png

```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{6}{7}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 1 \right)^x = e$$

```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{x} + 1 \right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$$

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+k} \right)^x = e^{-k}$$

>

>\$showev('limit(sin(1/x),x,0))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

>\$showev('limit(sin(1/x),x,inf))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

>plot2d("sin(1/x)",-5,5):



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.231 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-036.png



## LATIHAN

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

1. Hitunglah nilai limit berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 8)$$

```
>$showev('limit((x-8),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} x - 8 = -5$$

2. Hitunglah nilai limit berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

```
>$showev('limit((x^2-4)/(x+2),x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x} = \frac{x^2 - 4}{2} = (0 = 0)$$

3. Hitunglah nilai limit berikut dan gambarlah grafiknya.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{\sin(t - 1)}$$

```
>$showev('limit((t^2-1)/sin(t-1),t,1))
```

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{\sin(t - 1)} = 2$$

```
>(plot2d("(x^2-1)/sin(x-1)", -10,10)):
```



Gambar 0.232 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-043.png

4. Tentukan nilai limit berikut.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-2x}}{(4x+2)^2}$$

```
>$showev('limit((sqrt(1-2*x))/(4*x+2)^2), x, -1))
```

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-2x}}{(4x+2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. Tentukan nilai limit berikut.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t - \sin(t))^2}{t^2}$$

```
>$showev('limit(((t-sin(t))^2)/(t^2),t,0))
```

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t - \sin t)^2}{t^2} = 0$$

```
>(plot2d("((x-sin(x))^2)/(x^2)",-5,5)):
```



Gambar 0.233 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-048.png

```
>
```

## TURUNAN FUNGSI

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

>\$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan  $(x+h)^n$  dengan menggunakan teorema binomial.

### BUKTI

Untuk

Dengan

maka

Jadi, terbukti benar bahwa

---

>\$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut

benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan  $\sin(x+h)$  dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

### Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(\sin(x)) = \cos(x)$$

—

>\$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut

benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

### Bukti

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dh}(\log(x+h) - \log x)}{\frac{d}{dh}(h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h}}{1} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x+h} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

—

>\$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

>\$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x



```

Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

```

Use assume!

Error in:

```

$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...

```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```

>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))

```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```

>$factor(E^(x+h)-E^x)

```

$$(e^h - 1) e^x$$

```

>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x

```

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) e^x = e^x$$

```

>function f(x) &= x^x

```

$$\frac{x}{x}$$

```

>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x

```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = \text{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai  $x$ .

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x (\log x + 1)$$

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

$$[x \geq 0]$$

```
>&forget(x<0)
```

$$[x \leq 0]$$

```
>&facts()
```

$$[]$$

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

$$\sinh(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x} (e^{2x} + 1)}{2}$$

Hasilnya adalah  $\cosh(x)$ , karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```



Gambar 0.234 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-078.png



## LATIHAN

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

1. Tentukan nilai turunan berikut dan sketsakan grafiknya.

```
>function f(x) &= 4*x^2+8; $f(x)
```

$$4x^2 + 8$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); &df(x)//df(x)=f'(x)
```

$$8x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[red,green]):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.235 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-080.png

2. Carilah turunan dari fungsi berikut

$$f(x) = \frac{4x - 1}{x - 2}$$

```
>function f(x) &= (x-1)/(x-2); $f(x)
```

$$\frac{x - 1}{x - 2}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$-\frac{1}{x^2 - 4x + 4}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[blue,red]):
```

3. Carilah turunan dari fungsi berikut

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.236 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-084.png

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

```
>function f(x) &= 3/sqrt(x-2); $f(x)
```

$$\frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)function f(x) &= 3/sqrt(x-2); $f(x)
```

$$-\frac{3}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[yellow,red]):
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.237 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-088.png

4. Carilah turunan fungsi berikut.

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$$

```
>function f(x) &= (4*sin(x)+6*cos(x)); $f(x)
```

$$4 \sin x + 6 \cos x$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); &df(x)
```

$$-2(3 \sin(x) - 2 \cos(x))$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,yellow]):
```

5. Tentukan turunan dan grafik fungsi berikut.

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.238 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-091.png

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)}$$

```
>function f(x) &= (sin(x)+cos(x))/(cos(x)); $f(x)
```

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,yellow]):
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.239 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-095.png

>





## INTEGRAL

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah `integrate`. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi `integrate` menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

>\$showev('integrate(x^2\*sqrt(2\*x+1),x))

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

>\$showev('integrate(x^2\*sqrt(2\*x+1),x,0,2))

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

>\$ratsimp(%)

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

>\$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)\*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi/2))

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^{\pi} - 1) \sin a + (e^{\pi} + 1) \cos a$$

>\$factor(%)

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^{\pi} - 1) (\sin a - \cos a)$$

>function map f(x) &= E^(-x/2)

$$\frac{2}{-x} E$$

>\$showev('integrate(f(x),x))

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$\operatorname{erf}(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Gambar 0.240 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-112.png

Integral tentu

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva  $y=f(x)$  tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
```

```
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
```

```
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx = 0.8362196102528469$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval ( $=0.1$ ) dan jumlah nilai-nilai  $f(x)$  untuk  $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$ .

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

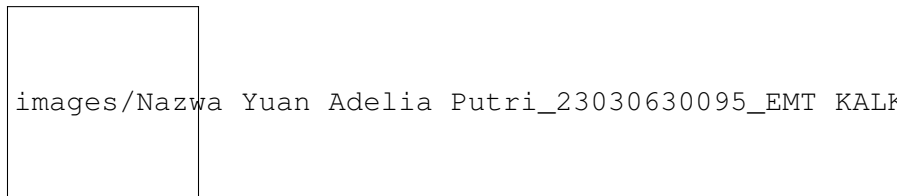
```
>function f(x) &= x^x
```

x  
x

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 x^x dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Gambar 0.241 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-117.png

Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
```

```
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

$$\int_0^1 x^x dx = 0.7834935879025506$$

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

## LATIHAN

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva  $y=f(x)$  yang diputar mengelilingi sumbu  $x$  dari  $x=a$  sampai  $x=b$ , yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva  $y=f(x)$  dari  $x=a$  sampai  $x=b$  dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

1. Tentukan panjang kurva dan volume benda putar kurva  $y=f(x)$  yang diputar mengelilingi sumbu  $x$  dari  $x=0$  sampai  $x=4$

$$f(x) = x^3$$

```
>function f(x)&=x^3; $f(x)
```

$$x^3$$

```
>$showev('integrate(pi*(f(x))^2,x,0,4))
```

$$\pi \int_0^4 x^6 dx = \frac{16384 \pi}{7}$$

turunan fungsi f(x)

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$3x^2$$

panjang kurva

```
>$showev('integrate(sqrt((1+df(x)^2)),x,0,4))
```

$$\int_0^4 \sqrt{9x^4 + 1} dx = \int_0^4 \sqrt{9x^4 + 1} dx$$

grafik benda putar mengelilingi sumbu x

```
> plot3d("x^3",2,0,2,rotate=2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.242 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-126.png

2. Tentukan panjang kurva dan volume benda putar kurva  $y=f(x)$  yang diputar mengelilingi sumbu x dari  $x=-1$  sampai  $x=2$

volume benda putar

```
>function f(x)&=3*x^2+2*x+1; $f(x)
```

$$3x^2 + 2x + 1$$

```
>$showev('integrate(pi*(f(x))^2,x,-1,2))
```

$$\pi \int_{-1}^2 (3x^2 + 2x + 1)^2 dx = \frac{717 \pi}{5}$$

menentukan turunan fungsi  $f(x)$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$6x + 2$$

menentukan panjang kurva

```
>$showev('integrate(sqrt((1+df(x)^2)),x,-1,2))
```

$$\int_{-1}^2 \sqrt{(6x+2)^2 + 1} \, dx = \frac{\operatorname{asinh} 14 + 14\sqrt{197}}{12} + \frac{\operatorname{asinh} 4 + 4\sqrt{17}}{12}$$

menggambar plot benda putar mengelilingi sumbu x

```
>plot3d("3x^2+2x+1",2,-1,2,rotate=2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.243 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-131.png

3. Integral tentu dengan batas  $[-1,1]$  dari fungsi berikut

```
>function map f(x) &= (x^2+8*x-9); $f(x)
```

$$x^2 + 8x - 9$$

mencari nilai dari integral tentu fungsi  $f(x)$  dengan batas  $[-1,1]$

```
>$showev('integrate(f(x), x, -1, 1))
```

$$\int_{-1}^1 x^2 + 8x - 9 \, dx = -\frac{52}{3}$$

4. Tentukan panjang kurva dan volume benda putar kurva  $y=f(x)$  yang diputar mengelilingi sumbu x dari  $x=0$  sampai  $x=2$

```
>$showev('integrate(pi*(f(x))^2,x,0,2))
```

$$\pi \int_0^2 (x^2 + 8x - 9)^2 \, dx = \frac{1006\pi}{15}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$2x + 8$$

menentukan pangjang kurva

```
>$showev('integrate(sqrt((1+df(x)^2)),x,0,2))
```

$$\int_0^2 \sqrt{(2x+8)^2+1} \, dx = \frac{\operatorname{asinh} 12 + 12\sqrt{145}}{4} - \frac{\operatorname{asinh} 8 + 8\sqrt{65}}{4}$$

menggambar plot

```
>plot3d("4x^2+1",2,0,2,rotate=2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.244 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-137.png

5. Tentukan integral fungsi berikut.

```
>function f(x) &= (sqrt(2*x))/x +3/x^5 ; $f(x)
```

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^5}$$

```
>$showev('integrate((((sqrt(2*x))/x)+(3/x^5)),x))
```

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^5} \, dx = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} - \frac{3}{4x^4}$$

```
>x=0:0.1:5-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,5,>add):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.245 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-140.png



## BARISAN DAN DERET

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh penggunaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau berbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan
- elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua “:”);
- menggunakan perintah “sequence” dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah “iterate” atau “niterate”;
- menggunakan fungsi Maxima “create\_list” atau “makelist” untuk
- menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) “sum”. Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29]
```

```
>sum(1:2:30), sum(1/(1:2:30)))
```

225

2.33587263431

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret secara simbolik
```

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs(x)<1);
```

$$a \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

>

## DERET TAYLOR

Deret Taylor suatu fungsi  $f$  yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar  $x=a$  adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

>\$'e^x=taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor  $e^x$  di sekitar  $x=0$ , sampai suku ke-11

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

>\$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret  $\log(x)$  di sekitar  $x=1$

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

### Contoh Soal

1. Tentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut:

>\$showev('integrate(x^7,x)+C)

$$C + \int x^7 dx = C + \frac{x^8}{8}$$

2. Buatlah plot kontur dari fungsi berikut

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ dengan level bilangan genap dari 0 sampai 20}$$

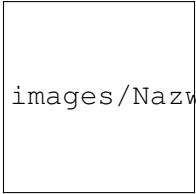
>f &= 1/2\*(x^2+y^2)

$$\frac{y^2 + x^2}{2}$$

>aspect(1.5):

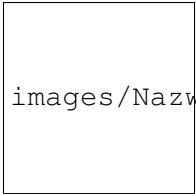
>plot3d(f) :

>plot2d(f,level=0:2:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4,r=5):



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.246 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-153.png



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.247 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-154.png

3. Seorang ahli geologi sedang melakukan penelitian di daerah

vulkanik. Dia tertarik untuk memahami bagaimana ketinggian permukaan tanah di sekitar gunung berapi berubah. Ketinggian di suatu titik (x,

y) dalam kilometer di sekitar gunung berapi tersebut dapat dijelaskan


oleh fungsi ketinggian  $H(x, y)$ , di mana x dan y adalah koordinat dalam kilometer. Fungsi ketinggian  $H(x, y)$  diberikan oleh persamaan:

Gambarkan plot kontur dari fungsi ketinggian  $H(x, y)$  untuk memvisualisasikan perubahan ketinggian di sekitar gunung berapi dengan level ketinggian 1 sampai 7 km.

$h = 3x^2 - 2y^2$

$$3x^2 - 2y^2$$

$\text{plot3d}(h)$ :



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.248 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-155.png

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.249 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-156.png

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.250 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-157.png

>aspect(1.5):

>plot2d(h,level=1:1:7,>hue,>spectral,n=200,grid=4,r=2):

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT KALK

Gambar 0.251 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT%20KALKULUS-158.png

4. Tentukan integral tak tentu berikut

$$\int (3x^2 - 4x + 5)dx$$

>\$showev('integrate((3\*x^2-4\*x+5),x))

$$\int 3x^2 - 4x + 5 dx = x^3 - 2x^2 + 5x$$

5. Diberikan kurva

hitunglah volume benda putar yang dihasilkan ketika kuva tersebut diputar mengelilingi sumbu x dari x=0 hingga x=3

>function f(x):=x^2

>\$& (expand(x^2)2)

$$x^4$$

>\$showev ('integrate((x^4),x,0,3))

$$\int_0^3 x^4 \, dx = \frac{243}{5}$$

unicodehyperref hyphensurl [ ]book xcolor amsmath,amssymb iftex [T1]fontenc [utf8]inputenc textcomp  
lmodern upquote []microtype [protrusion]basicmath parskip graphicx bookmark xurl





## **APLIKASI KOMPUTER**

Nama: Nazwa Yuan Adelia Putri Kelas : Matematika B NIM : 23030630095

---



## VISUALISASI DAN PERHITUNGAN GEOMETRI DENGAN EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program “geometry.e”, sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

### Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

defaultd:=textheight()\*1.5: nilai asli untuk parameter d  
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat  
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r  
plotPoint (P, “P”): menggambar titik P dan diberi label “P”  
plotSegment (A,B, “AB”, d): menggambar ruas garis AB, diberi label “AB” sejauh d  
plotLine (g, “g”, d): menggambar garis g diberi label “g” sejauh d  
plotCircle (c,“c”,v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label “c”  
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi  
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri  
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan  
normalize(v): normal vektor v  
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektor v dan w.  
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.  $ax+by=c$ .  
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v  
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g  
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g  
getPointOnLine(g): titik pada garis g  
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g  
parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g  
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h  
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g  
distance(A, B): jarak titik A dan B  
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B  
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B  
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC  
computeAngle(A, B, C): besar sudut  $\angle ABC$   
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut  $\angle ABC$   
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r

`getCircleCenter(c)`: pusat lingkaran c  
`getCircleRadius(c)`: jari-jari lingkaran c  
`circleThrough(A,B,C)`: lingkaran melalui A, B, C  
`middlePerpendicular(A, B)`: titik tengah AB  
`lineCircleIntersections(g, c)`: titik potong garis g dan lingkaran c  
`circleCircleIntersections(c1, c2)`: titik potong lingkaran c1 dan c2  
`planeThrough(A, B, C)`: bidang melalui titik A, B, C

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

`getLineEquation(g,x,y)`: persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y  
`getHesseForm(g,x,y,A)`: bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atas) garis  
`quad(A,B)`: kuadrat jarak AB  
`spread(a,b,c)`: Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni  $\sin(\alpha)^2$  dengan  $\alpha$  sudut yang menghadap sisi a.  
`crosslaw(a,b,c,sa)`: persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.  
`triplespread(sa,sb,sc)`: persamaan 3 spread sa,sb,sc yang membentuk suatu segitiga  
`doublespread(sa)`: Spread sudut rangkap  $2\phi$ , dengan  $sa = \sin(\phi)^2$  spread a.

### Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang, tetapkan tiga titik dan plotlah.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
```

```
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
```

```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
```

```
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
```

```
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a,b,c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan  $ax+by=c$ .

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
```

```
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Gambar 0.252 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-001.png

Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

1.5

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

1.5

Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

36°52'11.63''

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```

>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):

```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.253 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-003.png

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```

>O, R

```

```

[1.16667, 1.16667]
1.17851130198

```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```

>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut

```

```

[0.86038, 0.86038]

```

Tambahkan semuanya ke plot.

```

>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
0.509653732104
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam

```

## Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.254 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-004.png

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?
7. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,4.5,-2.5,4.5);
```

```
>A=[-2,1]; plotPoint(A,"A");
```

```
>B=[1,-2]; plotPoint(B,"B");
```

```
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

```
>plotSegment(A,B,"c");
```

```
>plotSegment(B,C,"a");
```

```
>plotSegment(A,C,"b");
```

```
>aspect(1):
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.255 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-005.png

3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

8.0777472107

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>l=angleBisector(A,C,B);
```

```
>g=angleBisector(C,A,B);
```

```
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0.581139, 0.581139]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
```

```
>plotPoint(P,"P");
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC");
```



Gambar 0.256 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-006.png

5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC");
```



Gambar 0.257 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-007.png

6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?



## CONTOH 2: GEOMETRI SMBOLIK

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi-fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan komputasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

$$[-1, 2, 2]$$

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2y - x = 2$$

$$\left[ y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1) dan (x2, y2)
```

$$x(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)y = x_1(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)y_1$$

$$\left[ y = \frac{-(x_1 - x)y_2 - (x - x_2)y_1}{x_2 - x_1} \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(x_1 - 1)y - xy_1 = -y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

$$[2, -1, 2]$$

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\left[ -\frac{2}{5}, -\frac{6}{5} \right]$$

>\$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC

$$\left[ \frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

>\$distance(A,Q) // jarak AQ

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

>cc &= circleThrough(A,B,C); \$cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C

$$\left[ \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

>r&=getCircleRadius(cc); \$r , \$float(r) // tampilkan nilai jari-jari

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

1.178511301977579

>\$computeAngle(A,C,B) // nilai  $\angle ACB$

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

>\$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi  $\angle ACB$

$$y = x$$

>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); \$P // titik potong 2 garis bagi sudut

$$\left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6} \right]$$

>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya

$$[0.86038, \quad 0.86038]$$

## Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);

>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);

>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
```

```
>P1, P2, f
```

```
[4.64575, -1.64575]
[-0.645751, 3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Gambar 0.258 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-021.png

Hal yang sama pada Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[ \left[ \sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[ 2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
```

```
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

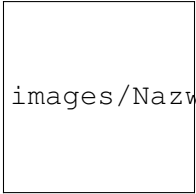
```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
```

```
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri


Gambar 0.259 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-023.png

### Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];  
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));  
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));  
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);  
>l=lineThrough(P1,P2);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.260 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-024.png

Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];  
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));  
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));  
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);

>\$solve(g,y)

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

>\$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);

>\$solve(h,y)

$$\left[ y = \frac{(b_2 - a_2)x - a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.



### CONTOH 3: RUMUS HERON

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...  
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");  
  
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6], "c",15); ...  
> plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);  
  
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0], "t=y",25):
```



Gambar 0.261 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-033.png

```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

[ ]

Ektrak solusi dari y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

Maxima said:

part: invalid index of list or matrix.

-- an error. To debug this try: debugmode(true);

```
Error in:
ysol &:= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
      ^
```

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &:= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(a,b,[1,0,4]) = \frac{a |ysol|}{2}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas = |ysol|$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
  useglobal; return a*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
  ^
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisi 3 dan 4.

```
>aspect(1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
  y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
  s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
  dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```



```
Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
      ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana  $b+c=d$  untuk suatu konstanta  $d$ . Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
      ^
```

Dan membuat fungsi-fungsi ini.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

0

0

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Sisi  $b$  bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.262 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-038.png

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

di mana  $(x_m, y_m)$  adalah pusat, dan  $u$  serta  $v$  adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk  $x=0$ . Dengan demikian, luas segitiga dengan  $a+b+c=d$  adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[ \frac{a^2}{2} = 0, 0 = 0 \right]$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi  $a = b = c = d/3$ .

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$[[a = 0, b = \frac{d}{3}]]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan  $H(a,b,c)^2$  sehubungan dengan  $a+b+c=d$ .

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... la, diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...
```

Kita dapat membuat plot situasi

Pertama-tama, tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

Maxima said:

```
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0, 0]$$

$$[a, 0]$$

Kemudian, tetapkan kisaran plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
> a=4; b=3; c=2; ...
> plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
> plotPoint(mxmeval("A"),"A");
```

Variable a1 not found!

Use global variables or parameters for string evaluation.

Error in Evaluate, superfluous characters found.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

mxmeval:

```
return evaluate(mxm(s));
```

Error in:

```
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...
^
```

Plot segmen-segmen tersebut.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A"));
```

Variable a1 not found!

Use global variables or parameters for string evaluation.

Error in Evaluate, superfluous characters found.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

mxmeval:

```
return evaluate(mxm(s));
```

Error in:

```
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
^
```

Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_2^2 + a_1^2} \sqrt{a_2^2 + a_1^2 - 2 a a_1 + a^2}}{2 |a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
> plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```
Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2, (a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
^
```

Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

untuk radius. Kita bisa mengecek, apakah hal ini benar dengan Maxima. Maxima akan memperhitungkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

$$\left[ \frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2}, 0, \frac{16(a_2^2 + a_1^2)}{a_2^2} \right]$$

#### # Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcentrum, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,"");
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.263 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-047.png

Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$[-1, 3, -2]$$

Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik tersebut akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%, [x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O");
```



Gambar 0.264 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-054.png

Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan perintah berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[ \frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19}{14}y - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```



Gambar 0.265 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-057.png

Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Gambar 0.266 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-059.png

Teori mengatakan bahwa  $MH = 2 \cdot MO$ . Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

$60^{\circ}15'18.43''$

Persamaan untuk bagian tengah lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[ \frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sqrt{5} \sqrt{13} - 15 \sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3) \sqrt{5} \sqrt{13} + 5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-41 \sqrt{2} - 31) \sqrt{5} \sqrt{13} + 115 \sqrt{2} + 614}}{7 \sqrt{2}}$$

```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD());
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.267 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-064.png

## Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2 - y)^2 + (1 - x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.268 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-066.png

Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya bisa menemukan solusinya jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

$$\begin{aligned} [y = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9-2x} + 26, \\ y = -3x + \sqrt{70} \sqrt{9-2x} + 26] \end{aligned}$$

Solusi pertama adalah

```
maxima: akar[1]
```

Dengan menambahkan solusi pertama ke dalam plot, maka akan terlihat bahwa ini adalah jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa ini adalah sebuah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```



Gambar 0.269 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-067.png

```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9-2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
```

```
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\begin{aligned} &\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}} \\ &2.135605779339061 \end{aligned}$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[ \frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

$$\begin{aligned} &\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}} \\ &2.135605779339061 \end{aligned}$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.



## CONTOH 5: TRIGONOMETRI RASIONAL

Ini terinspirasi dari sebuah ceramah N.J. Wildberger. Dalam bukunya “Proporsi Ilahi”, Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap “rasional”.

Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yaitu komputasi dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda dipersilakan untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolik sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler “geometry.e”.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...  
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
> plotPoint(A,“A”); plotPoint(B,“B”); plotPoint(C,“C”); ...  
> plotSegment(B,A,“c”); plotSegment(A,C,“b”); plotSegment(C,B,“a”); ...  
> insimg(30);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.270 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-074.png

Tentunya,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana  $w_a$  adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythagoras menjadi  $a^2 + b^2 = c^2$ .

$a = 3^2$ ;  $b = 4^2$ ;  $c = 5^2$ ;  $a^2 + b^2 = c^2$

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di A.

$s_a = a/c$ ;  $s_a$

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut  $\alpha$  ke  $s_a$ , dan mencetaknya sebagai pecahan.

$\frac{9}{25}$

9/25

Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan ke dalam “hukum silang” berikut ini.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan  $s_a$  adalah penyebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file `geometri.e` yang kita masukkan ke dalam Euler.

`>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)`

$$\left[ \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \left[ \frac{14bb(1-saa)}{3}, \frac{14bb(1-saa)}{3}, \frac{5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} bb(1-saa)}{3} \right]$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kita mendapatkan hasil yang sudah kita dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600 (1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{9}{25} \right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut sebuah segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[ \left[ \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36} \right] \right]$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya adalah rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

$$67^{\circ} 47' 32.44''$$

## Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih lanjut.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
> A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
> setPlotRange(-1,5,1,7); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;
```



Gambar 0.271 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-087.png

Dengan menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan jarak fungsi dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
> $distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi untuk kuadratan antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena  $c+b$  bukan  $a$ , maka segitiga tersebut tidak berbentuk persegi panjang.

```
> c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi `computeAngle` menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.

$$\begin{aligned} A &= \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle \\ \mathbf{a} &= C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta \\ \cos \angle ABC &= \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17} \sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17} \sqrt{10}} \end{aligned}$$

```
> wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10} \sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$4 = 200 (1 - x)$$
$$\left[ x = \frac{49}{50} \right]$$

Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam “geometry.e”.

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Ia menyelesaikan suku  $\sin(\arccos(\dots))$  menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi  $h_a$  di sisi a. Ingatlah bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.

image: (20) Rational\_Geometry\_CaR.png

Menurut definisi, panjang  $h_a$  adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

>\$areaTriangle(B,A,C)

$$\frac{7}{2}$$

## The Heron Formula

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

>&remvalue(a,b,c,sb,ha);

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat (“quadrea”), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

>\$spread(b<sup>2</sup>,c<sup>2</sup>,a<sup>2</sup>), \$factor(%\*c<sup>2</sup>\*a<sup>2</sup>/4)

$$\frac{-c^4 - (-2b^2 - 2a^2)c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{4a^2c^2}$$

$$\frac{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}{16}$$

## The Triple Spread Rule

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut seperti.

Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan “triple spread” berikut ini.

>&remvalue(sa,sb,sc); \$triplespread(sa,sb,sc)

$$(sc + sb + sa)^2 = 2(sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4sa sb sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Karena spread dari

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatifnya sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Contohnya, kita bisa menghitung penyebaran sudut  $60^\circ$ . Hasilnya adalah  $3/4$ . Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua penyebarannya adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[ x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Penyebaran  $90^\circ$  jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke  $90^\circ$ , penyebarannya akan menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan  $a + b = 1$ .

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$(y + x + 1)^2 = 2 (y^2 + x^2 + 1) + 4 x y$$

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran  $180^\circ$ -t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

$$[x = 4 a - 4 a^2, x = 0]$$

$$- 4 (a - 1) a$$

## Angle Bisectors

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
> 8C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

```
Found: &:= [0,0]; A&:= [4,0]; B&:= [0,3]; setPlotRange(-1,5,-1,5); plotPo
You can disable this in the Options menu.
```

Error in:

```
8C&:= [0,0]; A&:= [4,0]; B&:= [0,3]; setPlotRange(-1,5,-1,5); pl ...
^
```

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi, pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih salah satu yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi dua  $180^\circ$ -wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs( %[1]); $sa2
```

$$\left(2x + \frac{a}{b+a}\right)^2 = 2 \left(2x^2 + \frac{a^2}{(b+a)^2}\right) + \frac{4ax^2}{b+a}$$

$$\left[ x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a} \right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

$18^\circ 26' 5.82''$

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

$[0, 1.33333]$

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.272 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-121.png

Mari kita periksa sudut-sudutnya dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

1.69515132134  
2.87534060444



Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut “hukum penyebaran”

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_c}$$

where a,b,c denote qudrances.

di mana a, b, c menunjukkan kuadrannya.

Karena spread CPA adalah  $1-sa^2$ , kita mendapatkan  $bisa/1=b/(1-sa^2)$  dan bisa menghitung bisa (kuadran dari pembagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=32,b=42])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
1.20185042515
```

Kita juga dapat menghitung P dengan menggunakan rumus penyebaran.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\left(\sqrt{b}\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=32,b=42])"))
```

```
1.33333333333
```

## The Chord Angle

Lihatlah situasi berikut ini.

```
>setPlotRange(1.2); ...
> color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
```

```

> A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
> plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
> insimg;

```



Gambar 0.273 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-126.png

Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```

>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc

```

$$-\frac{abc}{c^2 - 2bc + a(-2c - 2b) + b^2 + a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

```

>function periradius(a,b,c) &= rabc;

```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C.

```

>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);

```

Radiusnya memang 1.

```

>periradius(a,b,c)

```

1

Faktanya adalah, bahwa penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akor.

```

>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp

```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah  $b/(4r)$ , dan kita melihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

```

>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp

```

## # Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

**Preliminary remark**

Fungsi yang, pada sebuah titik  $M$  pada bidang, menetapkan jarak  $AM$  antara titik tetap  $A$  dan  $M$ , memiliki garis-garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di  $A$ .

```
>remvalue();

>A=[-1,-1];

>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)

>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
> title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



Gambar 0.274 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-130.png

dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```



Gambar 0.275 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-131.png

Tentu saja nilai minimum 0 diperoleh dalam  $A$ .

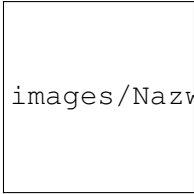
**Dua titik**

Sekarang kita lihat fungsi  $MA+MB$  di mana  $A$  dan  $B$  adalah dua titik (tetap). Ini adalah “fakta yang terkenal” bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah  $A$  dan  $B$ ; kecuali  $AB$  minimum yang konstan pada segmen  $[AB]$ :

```
>B=[1,-1];

>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)

>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.276 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-132.png

Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.277 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-133.png

Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.278 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-134.png

### Three points

Sekarang, hal-hal menjadi kurang sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa  $MA+MB+MC$  mencapai minimumnya pada satu titik di bidang, tetapi untuk menentukannya tidak sesederhana itu:

- 1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari  $120^\circ$  (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:


```
>C=[-4,1];
```

```
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])2+(y-C[2])2)
```

```
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
```

```
>insimg;
```

```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri-135.png

Gambar 0.279 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-135.png

```
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
```

```
>insimg;
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri-136.png

Gambar 0.280 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-136.png

- 2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari  $120^\circ$ , minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing  $120^\circ$ ):

```
>C=[-0.5,1];
```

```
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri-137.png

Gambar 0.281 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-137.png

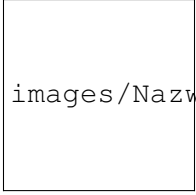
```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
```

```
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
```

```
>insimg;
```

Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi “garis kontur”...

Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para ahli lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga  $FA+FB+FC$  minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Bagaimanapun juga, tradisinya adalah mencatat titik F ini...



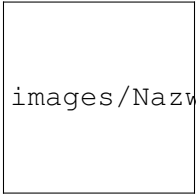
images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.282 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-138.png

#### Four points

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimumkan  $MA+MB+MC+MD$ ; misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antenna sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

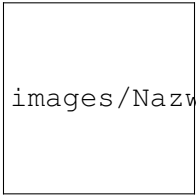
```
>D=[1,1];  
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])2+(y-D[2])2)  
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.283 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-139.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);  
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);  
>insimg;
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.284 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-140.png

Masih ada nilai minimum dan tidak ada simpul A, B, C, maupun D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])  
>neldermin("f",[0.2,0.2])  
  
[0.142858, 0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional. . .

Karena ABCD adalah sebuah bujur sangkar, kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

```
>C=[-1,1];
```

```
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```



Gambar 0.285 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-141.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
```

```
>P=(A.B.C.D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
```

```
>insimg;
```



Gambar 0.286 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-142.png





## CONTOH 7: BOLA DANDELIN DENGAN POVRAY

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe pada jalur program.

Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kita menggunakan file geometri.e dari Euler untuk hal ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

$[-a, 1, 0]$

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

$[-a, -1, 0]$

Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

$[-1, 2, 1]$

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
```

```
>color(black); plotLine(g(),"")
```

```
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.287 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-143.png

Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

>P &= [0,u]

$$[0, u]$$

Hitung jarak ke g1.

>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); \$d1

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); \$d

$$\sqrt{\left(\frac{u + 2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u - 1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

>sol &= solve(d1<sup>2</sup>=d<sup>2</sup>,u); \$sol

$$\left[ u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

>u := sol()

$$[0.333333, \quad 1]$$

>dd := d()

$$[0.149071, \quad 0.447214]$$

Plot lingkaran-lingkaran tersebut ke dalam gambar.

>color(red);

>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),““);

>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),““);

>insimg;

Gambar 0.288 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-147.png

**Plot with Povray**

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apapun pada urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
```

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan pemandangan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita tulis kedua bola tersebut ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
```

```
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
```

```
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
```

```
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
```

```
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return
```

```
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
```

```
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
```

```
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
```

```
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian, kita menghasilkan dua titik di mana bola-bola tersebut menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
```

```
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
```

```
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
```

```
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
```

```
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
```

```
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
```

```
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
```

```
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
```

```
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
```

```
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
```

```
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



Gambar 0.289 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-148.png

Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita harus memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
```

```

writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pcl=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpoints/2],[0,0,P1[3]+defaultpoints/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pcl],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpoints/2],[0,0,P2[3]+defaultpoints/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction

```

Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk mengapresiasi efek berikut ini.

>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);



Gambar 0.290 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-149.png



## CONTOH 8: GEOMETRI BUMI

Pada buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file “spherical.e” pada folder contoh. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

```
>load “spherical.e”;
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569, 1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
```

```
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
```

```
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang begitu pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->” km” // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

```
Found: // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
```

You can disable this in the Options menu.

Error in:

```
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...  
^
```

Ada fungsi untuk judul, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

65.34°

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);  
degprint(asum)
```

180°0'10.77''

Ini bisa digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

Found: // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)

You can disable this in the Options menu.

Error in:

```
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...  
^
```

Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

2123.64310526 km^2

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'



Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk menemukan koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
```

```
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...  
^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun demikian, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun demikian, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita akan melenceng dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah menuju Monas, kita akan sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'  
1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...
```

```
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°  
81.67°  
83.71°  
85.78°  
87.89°  
90.00°  
92.12°  
94.22°  
96.29°  
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti judul yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita akan mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...  
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;  
  
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran Hotel Indonesia menuju Monas dengan fungsi navigate.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...  
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 7°37.422' E 110°0.573'  
S 7°27.829' E 109°39.196'  
S 7°18.219' E 109°17.834'  
S 7°8.592' E 108°56.488'  
S 6°58.948' E 108°35.157'  
S 6°49.289' E 108°13.841'  
S 6°39.614' E 107°52.539'  
S 6°29.924' E 107°31.251'  
S 6°20.219' E 107°9.977'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```


Kami menulis sebuah fungsi, yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;  
plotearth;  
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");  
plotposline(v);  
endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,>own,>user,zoom=4):
```

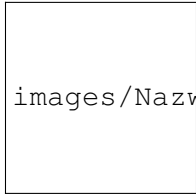


images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.291 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-150.png

Atau gunakan `plot3d` untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.292 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-151.png

## LATIHAN

1. Gambarkanlah segi- $n$  beraturan jika diketahui titik pusat  $O$ ,  $n$ , dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi- $n$  tersebut (jari-jari lingkaran luar segi- $n$ ),  $r$ .

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi- $n$  adalah
- $(360/n)$ .
- Titik-titik sudut segi- $n$  merupakan perpotongan lingkaran luar segi- $n$
- dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar
- kelipatan  $(360/n)$ .
- Untuk  $n$  ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk  $n$  genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik
- pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

Penyelesaian :

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);
```

```
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
```

```
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B");
```

```
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
```

```
>plotSegment(A,B,"c");
```

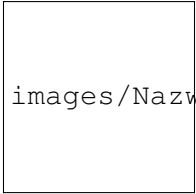
```
>plotSegment(B,C,"a");
```

```
>plotSegment(A,C,"b");
```

```
>aspect(1):
```

```
>c=circleThrough(A,B,C);
```

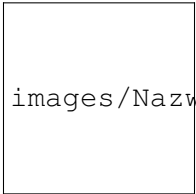
```
>R=getCircleRadius(c);
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.293 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-152.png

```
>O=getCircleCenter(c);  
>plotPoint(O,"O");  
>l=angleBisector(A,C,B);  
>color(2); plotLine(l); color(1);  
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC");
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.294 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-153.png

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Penyelesaian :

```
>load geometry;  
>setPlotRange(5); P=[2,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];  
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R");  
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

$$[[a = -1, b = 5, c = -4]]$$

Sehingga didapat nilai  $a = -1$ ,  $b = 5$  dan  $c = -4$

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.295 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-154.png

$$-x^2 + 5x - 4$$

>plot2d(“-x^2+5\*x-4”,-5,5,-5,5):

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.296 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-155.png

3. Gambarkanlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

Penyelesaian :

>load geometry

Numerical and symbolic geometry.

>setPlotRange(-4.5,4.5,-4.5,4.5);

>A=[-3,-3]; plotPoint(A,“A”);

>B=[3,-3]; plotPoint(B,“B”);

>C=[3,3]; plotPoint(C,“C”);

>D=[-3,3]; plotPoint(D,“D”);

>plotSegment(A,B,“”);

```

>plotSegment(B,C,“ “);
>plotSegment(C,D,“ “);
>plotSegment(A,D,“ “);
>aspect(1):

```



Gambar 0.297 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-156.png

```

>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,“P”):

```



Gambar 0.298 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-157.png

Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```

>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),“Lingkaran dalam segiempat ABCD”):

```



Gambar 0.299 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-158.png

Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.

Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```

>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB

```



6

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

6

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

6

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

6

```
>AB.CD
```

36

```
>AD.BC
```

36

4. Gambarkanlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
```

```
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])2+(y-P[2])2)
```

```
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])2+(y-P[2])2)+sqrt((x-Q[1])2+(y-Q[2])2)
```

```
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.300 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-159.png

Grafik menjadi lebih menarik

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.301 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-160.png

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.302 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-161.png

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

Batasan ke garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
```

```
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])2+(y-p[2])2)
```

```
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])2+(y-P[2])2)+sqrt((x+Q[1])2+(y+Q[2])2)
```

```
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_Geometri

Gambar 0.303 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-162.png

Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



Gambar 0.304 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-163.png



Gambar 0.305 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_Geometri-164.png



unicodehyperref hyphensurl [ ]book xcolor amsmath,amssymb iftex [T1]fontenc [utf8]inputenc textcomp  
lmodern upquote []microtype [protrusion]basicmath parskip graphicx bookmark xurl



**NAZWA YUAN ADELIA PUTRI\_23030630095\_EMT4STATISTIKA (1)**

Nama : Nazwa Yuan Adelia Putri Kelas : Matematika B NIM : 23030630095





## EMT UNTUK STATISTIKA

Dalam buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan standar deviasi yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...  
> mean(M), dev(M),
```

```
999.9  
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk data. Dalam kasus kami tidak ada outlier.

```
>boxplot(M):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.306 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-001.png

Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dan distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis}(x,m,d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

```
3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran yang diberikan.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah plot distribusinya.

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.307 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-003.png

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/");
```

Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam sebuah tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah orang dalam jangkauan.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8] | r[2:9] | v'; writetable(T,labc=["from","to","count"])
```

from	to	count
155.5	159.5	22
159.5	163.5	71
163.5	167.5	136
167.5	171.5	169
171.5	175.5	139
175.5	179.5	71
179.5	183.5	32
183.5	187.5	8

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk ini.

Sumbul “|” digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi “writetable” digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi “labc” adalah untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

157.5  
161.5  
165.5  
169.5  
173.5  
177.5  
181.5  
185.5

Tetapi lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2.1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

[157.5, 161.5, 165.5, 169.5, 173.5, 177.5, 181.5, 185.5]

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
> {m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

```
169.901234568
```

```
5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai ke plot batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan mean  $m$  dan standar deviasi  $d$  adalah:

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah total data.

```
> plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
```

```
> xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.308 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-004.png



## TABEL

Di direktori notebook ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online Jerman “Einführung in die Statistik mit R” oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
printfile:
    open(filename, "r");
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk token.

Untuk ini, kami mendefinisikan set token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf=["m","f"]; yn=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen tok2, tok4 dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda harus menyediakannya dengan “:=”.

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename, "r"); endif;
```

```
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:4],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
MT is not a variable!
Error in:
writetable(MT[1:4],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok ...
^
```

Titik “.” mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
  if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
Variable tok not found!
Error in:
tok ...
  ^
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke angka.

String khusus NA="." ditafsirkan sebagai “Tidak Tersedia”, dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
MT is not a variable!
Error in:
MT[1] ...
  ^
```

Berikut isi tabel dengan angka yang belum diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
writetable(MT,wc=5) ...
  ^
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan output readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={ {readtable("table.dat",ctok=ctok)} };
```

```

Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;

```

Menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. Atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```

Variable or function Table not found.
Error in:
writetable(Table,ctok=ctok,wc=5); ...
      ^

```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewati setiap baris dengan nilai NAN("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

```

Variable or function MT not found.
Error in:
{c,i}=tablecol(MT,[5,6]); ...
      ^

```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```

Variable or function i not found.
Error in:
j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok) ...
      ^

```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

```

Table is not a variable!
Error in:
MT=Table[1]; ...
      ^

```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
mean(tablecol(MT,6)) ...
      ^
```

Fungsi `getstatistics()` mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai “m” dan “f” di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count, ...
      ^
```

Kami dapat mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
Variable count not found!
Error in:
writetable(count',labr=tok[xu]) ...
      ^
```

Fungsi `selecttable()` mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
Variable or function tok not found.
Error in:
v:=indexof(tok,["g","vg"]) ...
      ^
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5); ...
      ^
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```



```
Variable or function i not found.
Error in:
writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7); ...
      ^
```

Untuk statistik berikutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kami mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);...
> writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
i=sortedrows(MT,[2,4]);      writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',c ...
      ^
```

Dengan `getstatistics()`, kita juga dapat menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]);...
> {xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]);...
> writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
MT24=tablecol(MT,[2,4]); {xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1] ...
      ^
```

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat";...
> writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

```
Variable or function count not found.
Error in:
filename="test.dat"; writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[x ...
      ^
```

Kemudian kita bisa membaca tabel dari file.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs);...
> writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

```
Could not open the file
test.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Dan hapus filenya.

```
>fileremove(filename);
```

## DISTRIBUSI

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot
```



Gambar 0.309 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-005.png

Harap dicatat perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi nyata). Masukkan kembali tiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

Berikut adalah perbandingan 10 simulasi 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, dan outlier.

```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```



Gambar 0.310 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-006.png

Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrarandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kami menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan columnplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6); ...
> columnplot(getmultiplicities(1:6,k)); ...
> ygrid(1000,color=red):
```

Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat terdistribusi seragam dari 1 ke k, dimungkinkan untuk menggunakan distribusi bilangan bulat lainnya dengan randpint().

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 berturut-turut adalah 0,4,0,1,0,5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.311 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-007.png

[378, 102, 520]

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Coba lihat referensinya.

Misalnya, kami mencoba distribusi eksponensial. Sebuah variabel acak kontinu  $X$  dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

with parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.312 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-010.png

Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan kebalikannya.

>plot2d("normaldis",-4,4):

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.313 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-011.png

Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6); ...

> plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):

$$\text{normaldis}(x,m,d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{d}\right)^2} dt.$$

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.314 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-012.png

Peluang berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{1.5}\right)^2} dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal mean dan deviasi yang sama. Fungsi `invbindis()` memecahkan interpolasi linier antara nilai integer.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
```

```
526.007419394
```

Fungsi `qdis()` adalah densitas dari distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, evolusi vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50))",0,50):
```

images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.315 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-015.png

Euler memiliki fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa `chidis()` dengan integral.

Penamaan mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

- distribusi chi-kuadrat adalah `chidis()`,
- fungsi kebalikannya adalah `invchidis()`,
- kepadatannya adalah `qchidis()`.

Komplemen dari distribusi (ekor atas) adalah `chicdis()`.

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
```

```
0.527633447259
```

## DISTRIBUSI DISKRIT

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama kita atur fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0, 0.165, 0.335, 0.5, 0.666667, 0.833333, 1]
```

Artinya dengan probabilitas  $wd[i+1]-wd[i]$  kita menghasilkan nilai acak  $i$ .

Ini adalah distribusi yang hampir seragam. Mari kita mendefinisikan generator nomor acak untuk ini. Fungsi `find(v,x)` menemukan nilai  $x$  dalam vektor  $v$ . Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor  $x$ .

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan sangat banyak iterasi.

```
>columnplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.316 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-016.png

Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai  $1 \dots K$  dalam  $v$ . Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);  
fr=getfrequencies(v,1:K);  
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);  
endfunction
```

Memang fungsi menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

Dan itu menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

1

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada `binomialsum()`, yang mengembalikan probabilitas  $i$  atau kurang hit dari  $n$  percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

0.751401349654

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter  $p$ . Tingkat default adalah alfa.

Arti interval ini adalah jika  $p$  berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

[0.37932, 0.441212]

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tetapi untuk  $n$  besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*pi*(1-p)(n-i))
```

0.751401349655

Omong-omong, `invbinsum()` menghitung kebalikan dari `binomialsum()`.

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

409.932733047

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu yang beredar (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1 atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

0.321739130435

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```



376	91	533
417	80	503
440	94	466
406	112	482
408	94	498
395	107	498
399	96	505
428	87	485
400	99	501
373	109	518



## MERENCANAKAN DATA

Untuk plot data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam kursi.

```
>BW := [ ...  
> 1990,662,319,239,79,8,17; ...  
> 1994,672,294,252,47,49,30; ...  
> 1998,669,245,298,43,47,36; ...  
> 2002,603,248,251,47,55,2; ...  
> 2005,614,226,222,61,51,54; ...  
> 2009,622,239,146,93,68,76; ...  
> 2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk para pihak, kami menggunakan serangkaian nama.

```
>P:=[“CDU/CSU”,“SPD”,“FDP”,“Gr”,“Li”];
```

Mari kita mencetak persentase dengan baik.

Pertama kita ekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi. kolom 1 adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]’;
```

Kemudian kami mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai tajuk kolom, dan tahun sebagai tajuk untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah  $wc=10$ , tetapi kami lebih memilih output yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

	CDU/CSU	SPD	FDP	Gr	Li
1990	48	36	12	1	3
1994	44	38	7	7	4
1998	37	45	6	7	5
2002	41	42	8	9	0
2005	37	36	10	8	9
2009	38	23	15	11	12
2013	49	31	0	10	10

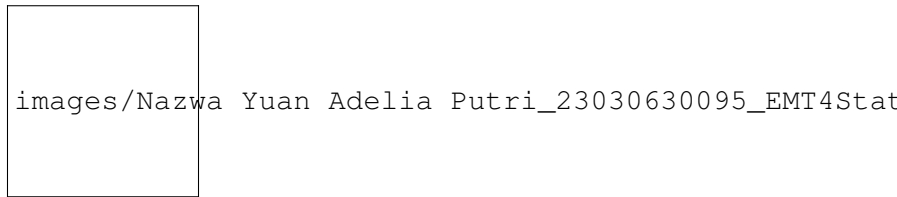
Perkalian matriks berikut mengekstrak jumlah persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh rekaman di parlemen hingga 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])’*100
```

```
[84.29, 81.25, 81.1659, 82.7529, 72.9642, 61.8971, 79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil `plot2d` dua kali dengan `>add`.

```
>statplot(YT,BT1,"b");
```



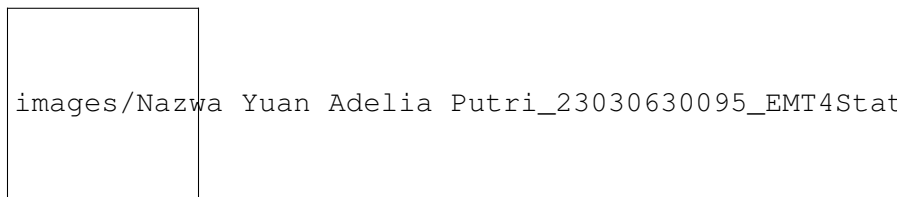
Gambar 0.317 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-018.png

Tentukan beberapa warna untuk masing-masing pihak.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

Sekarang kita dapat memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

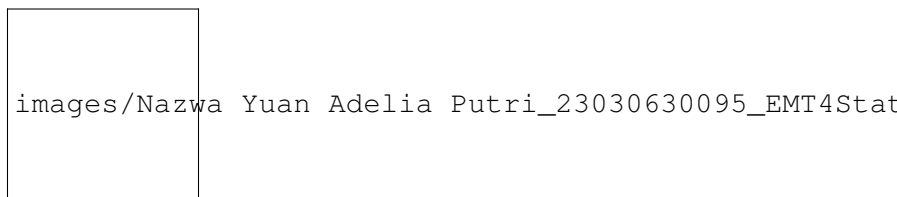
```
>figure(2,1); ...
> figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
> figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP); ...
> figure(0):
```



Gambar 0.318 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-019.png

Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
> dataplot(YT,BT',color=CP); ...
> labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```




Gambar 0.319 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-020.png

Sebuah kolom plot 3D menunjukkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. angle adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
> angle=30°,ccols=CP):
```

Representasi lain adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjangnya label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.


```
>shrinkwindow(>smaller); ...
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.320 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-021.png

```
> mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...  
> shrinkwindow():
```




images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.321 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-022.png

Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.322 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-023.png

Berikut adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```

Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara merata di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```

Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```

Fungsi columnplot() lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kita sudah mendemonstrasikannya dalam tutorial ini.

Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan menyusun statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...  
> w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...  
> cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...  
> columnplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Gambar 0.323 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-024.png



Gambar 0.324 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-025.png



Gambar 0.325 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-026.png



Gambar 0.326 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-027.png

Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*pi*(1-p)(n-i); ...  
> columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...  
> yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style=""); ...  
> label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...  
> textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.327 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-028.png

Berikut ini adalah cara untuk memplot frekuensi bilangan dalam sebuah vektor.

Kami membuat vektor bilangan bulat bilangan acak 1 hingga 6.

```
>v:=inrandom(1,10,10)
```

```
[8, 4, 1, 8, 5, 10, 2, 10, 2, 5]
```

Kemudian ekstrak nomor unik di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[1, 2, 4, 5, 8, 10]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.328 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-029.png

Kami ingin menunjukkan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi `empdist(x,vs)` membutuhkan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan `x` sebelum kita dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

Kemudian kami memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan menjadi satu plot. Alih-alih plot bar untuk distribusi, kami menggunakan plot gigi gergaji kali ini.

```
>figure(2,1); ...
> figure(1); plot2d("empdist",-4,4,xs); ...
> figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar)); ...
> figure(0):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.329 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-030.png

Plot pencar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa  $X$  dan  $X+Y$  jelas berkorelasi positif.

```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.330 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-031.png

Seringkali, kita ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
> plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
> plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.331 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-032.png

Plot dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas yang lebih kecil atau mengecilkan yang lebih besar. Fungsi berikut baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```



Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...  
> plot2d("x",0,1,style="-"); ...  
> plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Gambar 0.332 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-033.png



## REGRESI DAN KORELASI

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi `polyfit()` atau berbagai fungsi fit.

Sebagai permulaan, kami menemukan garis regresi untuk data univariat dengan `polyfit(x,y,1)`.

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])
```

x	y
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	3
7	7
8	8
9	9
10	8

Kami ingin membandingkan non-weighted dan weighted fit. Pertama, koefisien kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[0.733333, 0.812121]
```

Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```


```
[4.71566, 0.38319]
```

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1); ...  
> figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...  
> plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="-"); ...  
> plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="-"); ...  
> figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...  
> figure(0):
```

Sebagai contoh lain kita membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel `tok2` untuk mengatur terjemahan yang tepat daripada membiarkan `readtable()` mengumpulkan terjemahan.



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.333 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-034.png

```
> {MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:["m","f"]); ...  
> writetable(MS,labc=hd,tok2:["m","f"]);
```

```
Could not open the file  
table1.dat  
for reading!  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
readtable:  
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
> scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```

```
Variable or function MS not found.  
Error in:  
scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]): ...  
      ^
```

Jelas bahwa usia ayah dan ibu bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
> cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
MS is not a variable!  
Error in:  
cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1) ...  
      ^
```

Ini jelas model yang salah. Garis regresinya adalah  $s=17+0,74t$ , di mana  $t$  adalah usia ibu dan  $s$  usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.

Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti  $s=a+t$ . Maka  $a$  adalah mean dari  $s-t$ . Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
> da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
cs is not a variable!  
Error in:  
da:=mean(cs[2]-cs[1]) ...  
      ^
```

Mari kita plot ini menjadi satu plot pencar.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points); ...  
> plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add); ...  
> plot2d("x+da",color=blue,>add):
```

```
cs is not a variable!  
Error in:  
plot2d(cs[1],cs[2],>points); plot2d("evalpoly(x,ps)",color=re ...  
      ^
```

Berikut adalah plot kotak dari dua zaman. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```

```
Variable or function cs not found.  
Error in:  
boxplot(cs,["mothers","fathers"]): ...  
      ^
```

Sangat menarik bahwa perbedaan median tidak sebesar perbedaan rata-rata.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
cs is not a variable!  
Error in:  
median(cs[2])-median(cs[1]) ...  
      ^
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
cs is not a variable!  
Error in:  
correl(cs[1],cs[2]) ...  
      ^
```

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama di kedua vektor. Ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
cs is not a variable!  
Error in:  
rankcorrel(cs[1],cs[2]) ...  
      ^
```



## MEMBUAT FUNGSI BARU

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

dimana  $m$  adalah mean dari  $x$ .

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean (x) ;  
return sqrt (cols (x) ) *sum ( (x-m) ^3) / (sum ( (x-m) ^2) ) ^ (3/2) ;  
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
0.479209399762
```

Berikut adalah fungsi lain, yang disebut koefisien skewness Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
```

```
>skew1(data)
```

```
-0.241875313184
```





## SIMULASI MONTE CARLO

Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Ini adalah satu lagi, yang mensimulasikan 1000 kali 3 lemparan dadu, dan meminta distribusi jumlah.

```
>ds=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
[5, 13, 32, 40, 69, 108, 130, 123, 139, 115, 92, 66, 34,  
23, 8, 3]
```

kita bisa membuat plot ini sekarang

```
>columnplot(fs,lab=3:18):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.334 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-035.png

Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidak begitu mudah. Kami menggunakan rekursi lanjutan untuk ini.

Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n bilangan dalam rentang 1 sampai m. Ia bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

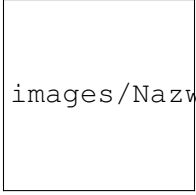
```
    if n==1 then return k>=1 && k<=m  
    else  
        sum=0;  
        loop 1 to m; sum=sum+countways (k-#, n-1, m); end;  
        return sum;  
    end;  
endfunction
```

Berikut adalah hasil dari tiga lemparan dadu.

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3,  
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.335 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-036.png

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```

Untuk simulasi lain, simpangan nilai rata-rata dari  $n$  0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah  $1/\sqrt{n}$ .

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

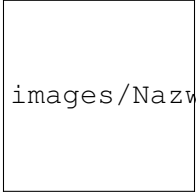
```
0.316227766017
```

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami memproduksi 10000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.318932043078
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.336 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-037.png

Median 10 0-1-bilangan acak terdistribusi normal memiliki simpangan yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

```
0.376712244247
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke- $n$  dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...  
> t=(1:n)/n; figure(2,1); ...  
> figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...  
> figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...  
> figure(0):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.337 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-038.png



## UJI

Uji adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes diimplementasikan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kami terima jika kami menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi seragam. Pada 600 lemparan, kami mendapatkan nilai berikut, yang kami masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Tes chi-kuadrat juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya harus hampir sama. Parameter `>p` menginterpretasikan vektor-`y` sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.492
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kami adil. Tapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan tes yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.254801014515
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...  
> ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.27961149542
```

Fungsi `ttest()` membutuhkan nilai rata-rata, simpangan, jumlah data, dan nilai rata-rata yang akan diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa mereka memiliki rata-rata yang sama, jika hasilnya  $<0,05$ .

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.0972316266208
```

Jika kita menambahkan bias ke satu distribusi, kita mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
6.54093758712e-07
```

Pada contoh berikutnya, kita menghasilkan 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan menghitung yang ada di dalamnya. Harus ada  $20/6=3,3$  yang rata-rata.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.17
```

Kami sekarang membandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama kita plot distribusi yang.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/");
```



Gambar 0.338 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-039.png

```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
```

```
> b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-kuadrat menolak hipotesis bahwa distribusi kami adalah distribusi binomial, jika hasilnya  $<0,05$ .

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.568502742036
```

Contoh berikut berisi hasil dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76]; ...
```

```
> writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

1 2 3 4 5 6

m	23	37	43	52	64	74
f	27	39	41	49	63	76

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Tes tabel  $\chi^2$  melakukan ini. Akibatnya terlalu besar untuk menolak kemerdekaan. Jadi kita tidak bisa mengatakan, jika voting tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	24.9	37.9	41.9	50.3	63.3	74.7
f	25.1	38.1	42.1	50.7	63.7	75.3

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak tergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```





## UJI LAINNYA

Selanjutnya kami menggunakan analisis varians (Uji-F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi normal untuk nilai rata-rata yang sama. Metode tersebut disebut ANOVA (analisis varians). Di Euler, fungsi `varanalysis()` digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata berbeda menguji median sampel bersatu.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
```

```
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
```

```
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Tes lain tentang kesetaraan adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut, kedua distribusi memiliki mean yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

```
0.453978735731
```

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
```

```
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Tes signum memutuskan, jika a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

```
0.0546875
```

Ini terlalu banyak kesalahan. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.

Tes Wilcoxon lebih tajam dari tes ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif perbedaan.

```
>wilcoxon(a,b)
```

```
0.0296680599405
```

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan seri yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

```
0.13136112342
```

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

```
0.195266435017
```

## NOMOR ACAK

Berikut ini adalah pengujian untuk pembangkit bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan masalah.

Pertama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak di  $[0,1]$ .

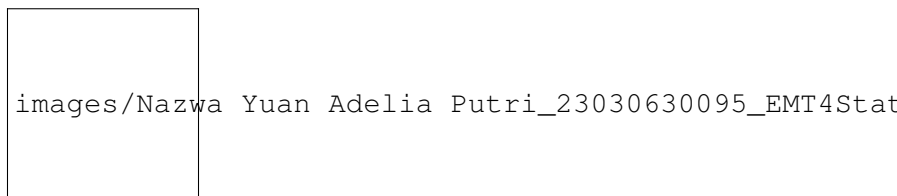
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya kita hitung jarak antara dua bilangan kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Akhirnya, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkan dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...  
> plot2d("n*(1-a)(x-1)*a2",color=red,>add):
```



Gambar 0.339 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-040.png

Hapus datanya.

```
>remvalue n;
```



## **PENGANTAR UNTUK PENGGUNA PROYEK R**

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda yang terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran tentang hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berjalan.



## SINTAKS DASAR

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Di EMT, perbedaan utama adalah bahwa : operator dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, ia memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5,
7, 7.5, 8, 8.5, 9]
```

Fungsi `c()` tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor untuk menggabungkan sesuatu.

Contoh berikut, seperti banyak contoh lainnya, dari “Interoduction to R” yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti jalannya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 0, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT diganti dengan fungsi `seq()` di R. Kita bisa menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
> seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1]
```

Fungsi `rep()` dari R tidak ada di EMT. Untuk input vektor, dapat ditulis sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
> rep(x,2)
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Perhatikan bahwa “=” atau “:=” digunakan untuk tugas. Operator “->” digunakan untuk unit di EMT.

```
>125km -> ” miles”
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator “<-” untuk penugasan tetap menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan `a` dan `-4` di EMT.

```
>a=2; a<-4
```

0

Di R, “ $a < -4 < 3$ ” berfungsi, tetapi “ $a < -4 < -3$ ” tidak. Saya juga memiliki ambiguitas serupa di EMT, tetapi mencoba menghilangkannya perlahan-lahan.

EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun di EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai true dan false dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 3.1, 0, 0]
```

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda “kesalahan”.

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

String sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, `u"..."` dapat berisi entitas HTML.

```
>u"© René Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar di sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan “+” atau “|”. Ini dapat mencakup angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>“pi=”+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```



## PENGINDEKSAN

Sebagian besar waktu, ini akan berfungsi seperti pada R.

Tetapi EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari belakang vektor, sedangkan R menginterpretasikan  $x[n]$  sebagai  $x$  tanpa elemen ke- $n$ .

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[10.4,  5.6,  3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan `drop()`.

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Vektor logis tidak diperlakukan secara berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[1,  1,  0,  1,  1]
[10.4,  5.6,  6.4,  21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
[10.4,  5.6,  5.6,  10.4]
```

Tetapi nama untuk indeks tidak dimungkinkan di EMT. Untuk paket statistik, ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
> s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ..
^
```

```
Trying to overwrite protected function sel!  
Error in:  
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...  
                ^  
[10.4,  3.1]
```

## TIPE DATA

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelas, di R ada vektor yang tumbuh. Anda dapat mengatur vektor numerik kosong `v` dan menetapkan nilai ke elemen `v[17]`. Ini tidak mungkin di EMT.

Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan `v` dan `i` ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor itu kembali ke variabel global `v`.

Semakin efisien pra-mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti `complex()`.

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i , 2+0i , 3+0i , 4+0i ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk rangkaian string sederhana. Tetapi ada fungsi seperti `print()` atau `frac()`.

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s=" ";
loop 1 to length(v);
  s=s+print(v[#],2,0);
  if #<length(v) then s=s+", "; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi `convertmxm()`, yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

## FAKTOR DAN TABEL

Dalam pengantar R ada contoh dengan apa yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...  
> "qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...  
> "sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...  
> "sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...  
> 61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...  
> 59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Menjadi program statistik, R memiliki `factor()` dan `tapply()` untuk ini.

EMT dapat melakukannya dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah yang unik.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)  
  
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,  
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Pada titik itu, kita dapat menulis fungsi loop kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor.

Atau kita bisa meniru fungsi `tapply()` dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...  
  
u=sort(unique(cat));  
f=indexof(u,cat);  
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);  
endfunction
```

Ini agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap `i`, tetapi berhasil.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)  
  
[44.5, 57.333333333333, 55.5, 53.6, 55, 60.5, 56, 52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi `readtable()` dan `writetable()` dapat digunakan untuk input dan output.

Jadi kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang bersahabat.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus dengan jelas disimpan dalam kumpulan dengan jenis dan kategori (negara bagian dan teritori dalam contoh kami). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef(t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Sekarang kita bisa meniru `tapply()` dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
  ind=nonzeros(f==i);
  if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
  else x[i]=f$(t[ind]);
```

```

    endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction

```

Kami tidak menambahkan banyak jenis pengecekan di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) tanpa data. Tetapi orang harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.

Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25





## ARRAY

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan `redim()`.

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sangat mirip dengan R.

```
>X[,2:3]
```

2	3
7	8
12	13
17	18

Namun, dalam R dimungkinkan untuk menetapkan daftar indeks spesifik dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama dimungkinkan di EMT hanya dengan loop.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
  M[i{#},j{#}] = v{#};
end;
endfunction
```

Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya ke dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

1	2	0	4	5
6	0	8	9	10
0	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Perkalian luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antar vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus menjadi vektor kolom dan yang lainnya vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih dari 0 hingga n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini dapat dicapai dengan loop. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Tapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
> u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
> statplot(u,f,"h");
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.340 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-041.png

Selain multiplisitas yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0, 23, 132, 316, 602, 801, 333, 141, 53, 0]
```

Cara paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

```
>plot2d(q,distribution=11):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.341 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-042.png

Tetapi juga dimungkinkan untuk menghitung sebelumnya hitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi `histo()` mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
> {x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...  
> plot2d(x,y,>bar,style="/");
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.342 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-043.png



## DAFTAR

EMT memiliki dua macam daftar. Salah satunya adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang lainnya adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.

Jenis daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Itu berperilaku seperti struktur di C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{“Fred”,“Flintstone”,40,[1990,1992]}}
```

```
Fred  
Flintstone  
40  
[1990, 1992]
```

Saat ini elemen tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Mereka diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```



## FILE INPUT DAN OUTPUT (MEMBACA DAN MENULIS DATA)

Anda akan sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberitahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai ini. Fungsi sederhana adalah `writematrix()` dan `readmatrix()`.

Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.50211  
0.29459
```

Untuk menulis data ke file, kita menggunakan fungsi `writematrix()`.

Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, ini tidak perlu, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom `a'` ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kita gunakan `readmatrix()`.

```
>a=readmatrix(filename)';
```

dan hapus file ini.

```
>fileremove(filename);
```

```
>mean(a), dev(a),
```

```
0.50211  
0.29459
```

Fungsi `writematrix()` atau `writetable()` dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File "test.csv" berikut akan muncul di folder current Anda.

```
>filename="test.csv"; ...  
> writematrix(random(5,3),file=filename,separator=";");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f"; ...  
> s2:="f f f m m f f";
```

Untuk tokenize ini, kita mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
f  
m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))- ...  
> getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

	f	m
1	6	7
2	5	2

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...  
> writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...  
> close();
```

Filenya terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
A, B, C  
0.7906038030988179, 0.4803433189304462, 0.01562723532706266  
0.5322177080616844, 0.6195470335248382, 0.7709411906683823  
0.09018286162314156, 0.2018229850358114, 0.1390461869625961
```

Fungsi `readtable()` dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan `writetable()` ke notebook, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```



A	B	C
0.7906	0.48034	0.01563
0.53222	0.61955	0.77094
0.09018	0.20182	0.13905

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa `mean()` dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.42886
0.6409
0.14368
```



## FILE CSV

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk output, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...  
> M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut adalah isi dari file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.1252557605722638,0.6012469907784808,0.6327305826275141  
0.3772725626212395,0.7156581896501343,0.505137263767732  
0.1864748168039878,0.08573131043797423,0.3856751945719084
```

CVS ini dapat dibuka pada sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Tetapi titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan `readmatrix()`.

```
>readmatrix(file)
```

```
0.12526    0.60125    0.63273  
0.37727    0.71566    0.50514  
0.18647    0.085731   0.38568
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah `open()` dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter “w”. Standarnya adalah “r” untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil `readmatrix()` beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
1          0          0  
0          1          0  
0          0          1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan “simpan sebagai” dan “format lain”, lalu pilih “CSV”. Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Berikut adalah contoh.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```

Could not open the file
excel-data.csv
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
printf:
    open(filename, "r");

```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubah ini di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu membaca matriks ke dalam EMT.

Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah `readmatrix()`. Semua koma diganti dengan titik dengan parameter `>comma`. Untuk CSV bahasa Inggris, cukup abaikan parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

```

Could not open the file
excel-data.csv
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readmatrix:
    if filename<&gt;" then open(filename, "r"); endif;

```

Mari kita plot ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]');
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.343 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-044.png

Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi `getvectorline()` akan membaca angka dari baris data. Secara default, ia mengharapkan titik desimal. Tapi itu juga bisa menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil `setdecimaldot(",")` sebelum Anda menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contoh untuk ini. Ini akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```

open(file);
M=[];
repeat
    until eof();
    v=getvectorline(3);
    if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;

```

```
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
0.12526      0    0.60125      0    0.63273
0.37727      0    0.71566      0    0.50514
0.18647      0    0.085731     0    0.38568
```

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan `getvector()`.

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
0.12526      0    0.60125
      0    0.63273    0.37727
      0    0.71566      0
```

Jadi sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
0.50401
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
0.50401
```



## MENGGUNAKAN TABEL

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kami menulis tabel dengan header baris dan kolom ke file.

```
> file="test.tab"; M=random(3,3); ...  
> open(file,"w"); ...  
> writetable(M,separator="," ,labc=["one","two","three"]); ...  
> close(); ...  
> printfile(file)
```

```
one,two,three  
  0.55,      0.52,      0.12  
  0.69,      0.97,      0.07  
  0.57,      0.18,      0.27
```

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file dalam EMT, kami menggunakan `readtable()`.

```
> {M,headings}=readtable(file,>clabs); ...  
> writetable(M,labc=headings)
```

```
      one      two      three  
0.55      0.52      0.12  
0.69      0.97      0.07  
0.57      0.18      0.27
```





## MENGANALISIS GARIS

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki garis dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

```
2020-11-03, Tue, 1' 114.05
```

Pertama kita dapat menandai garis.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1' 114.05
```

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]), ...
> indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])), ...
> strepl(vt[3],"","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari baris data.

Asumsikan kita memiliki baris berikut dokumen HTML.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
&lt;tr&gt;&lt;td&gt;1145.45&lt;/td&gt;&lt;td&gt;5.6&lt;/td&gt;&lt;td&gt;-4.5&lt;/td&gt;&lt;/tr&gt;
```

Untuk mengekstrak ini, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

- kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan

sub-pertandingan "(...)",

- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,
- lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan kurung buka <.

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^\>]+)<.+?>([^\>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-pertandingan.

```
>for k=1:length(vt); vtk, end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut adalah fungsi, yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
v=[]; cp=0;
repeat
    {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
    until pos==0;
    if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
    cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

## MEMBACA DARI WEB

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kami membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai “Versi ...” dalam sebuah judul.

```
>function readversion () ...
```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
    until urleof();
    s=urlgetline();
    k=strfind(s,"Version ",1);
    if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2024-01-12
```



## INPUT DAN OUTPUT VARIABEL

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...  
> writevar(random(2,2),"M",file); ...  
> printfile(file,3)
```

```
M = [ ..  
0.2523268025590937, 0.864411011093732;  
0.9512520925404634, 0.9754744306743734];
```

Kita sekarang dapat memuat file. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =  
0.25233    0.86441  
0.95125    0.97547
```

Omong-omong, jika `writevar()` digunakan pada variabel, itu akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel ini.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..  
0.2523268025590937, 0.864411011093732;  
0.9512520925404634, 0.9754744306743734];  
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga bisa membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kami menambahkan ke file yang dihasilkan sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...  
> writevar(random(2,2),"M1"); ...  
> writevar(random(3,1),"M2"); ...  
> close();
```

```
>load(file); show M1; show M2;
```

```

M1 =
    0.28214    0.98193
    0.83506    0.96104
M2 =
    0.56036
    0.63041
    0.14009

```

Untuk menghapus file apa pun, gunakan `fileremove()`.

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada di baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan `writeln()`.

```

>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
> for i=1 to 5; writeln(" "+random()); end; ...
> writeln("];"); close(); ...
> printfile(file)

```

```

M = [
0.463445270617
0.221854334165
0.522065447353
0.170477000294
0.366517046538
];

```

```
>load(file); M
```

```
[0.46345, 0.22185, 0.52207, 0.17048, 0.36652]
```

catatan : ketika mengenter perintah-perintah diatas ternyata hasil yang didapatkan berbeda-beda

## LATIHAN SOAL

Nomor 1

Carilah rata-rata dan standar deviasi beserta plot dari data berikut

$X = 1000, 1500, 1700, 2500, 3500, 4000$

```
>X=[1000,1500,1700,2500,3500,4000]; ...  
> mean(X), dev(X),
```

2366.7

1186

```
>aspect(1.5); boxplot(X):
```



images/Nazwa Yuan Adelia Putri\_23030630095\_EMT4Stat

Gambar 0.344 images/Nazwa%20Yuan%20Adelia%20Putri\_23030630095\_EMT4Statistika%20(1)-045.png

Nomor 2

Misalkan diberikan data skor hasil statistika dari 14 orang mahasiswa sebagai berikut:

50,92,68,72,84,80,96,64,70,48,88,66,56,84

Tentukan rata-rata dari data tersebut!

```
>X=[62,65,58,90,75,79,82,91,75,75,75,95]
```

```
[62, 65, 58, 90, 75, 79, 82, 91, 75, 75, 75, 95]
```

```
>mean(X)
```

76.833

