Exercice convolution — Binôme: Dong FEI & Xiaoxiao CHEN

Exercice 1 (w — calcul de convolution)

1. On a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $V(n) = U(n) - U(n-1) + 3U(n+1)$

Supposons la réponse impulsionnelle est $h(n)$

$$w(U(n)) = U * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(n-m)h(m)$$
$$= \cdots + U(n)h(0) + U(n-1)h(1) + U(n+1)h(-1) + \cdots$$
$$= U(n) - U(n-1) + 3U(n+1)$$

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} 3 & n=-1 \\ 1 & n=0 \\ -1 & n=1 \end{cases}$$

Supposons $U(n) = \alpha U_1(n) + \beta U_2(n)$

$$w(U(n)) = w(\alpha U_1(n) + \beta U_2(n)) = \alpha U_1(n) + \beta U_2(n) - (\alpha U_1(n-1) + \beta U_2(n-1)) + 3(\alpha U_1(n+1) + \beta U_2(n+1))$$
$$= \alpha(U_1(n) - U_1(n-1) + 3U_1(n+1)) + \beta(U_2(n) - U_2(n-1) + 3U_2(n+1))$$
$$= \alpha V_1(n) + \beta V_2(n) \Rightarrow \text{linéaire}$$

$$w(U(n-\tau)) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(n-\tau-m)h(m) = U(n-\tau)h(0) + U(n-1-\tau)h(1) + U(n+1-\tau)h(-1)$$
$$= U(n-\tau) - U(n-1-\tau) + 3U(n+1-\tau)$$
$$= V(n-\tau) \Rightarrow \text{Invariante par translation}$$

2. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $V(n) = U(2n)$

Supposons la réponse impulsionnelle est $h(n) \Rightarrow w(U(n)) = U * h(n) = V(n)$

~~si~~ $U(n) = \alpha U_1(n) + \beta U_2(n)$

$$w(U(n)) = w(\alpha U_1(n) + \beta U_2(n)) = \alpha U_1(2n) + \beta U_2(2n)$$
$$= \alpha V_1(n) + \beta V_2(n) \Rightarrow \text{linéaire}$$

$$w(U(n-\tau)) = U(2(n-\tau)) = U(2n-2\tau) \neq U(2n-\tau)$$

Donc Elle est linéaire mais pas invariant par translation

3. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $V(n) = \max(U(n), U(n-1), U(n+1))$

$$w(U(n-\tau)) = \max(U(n-\tau), U(n-1-\tau), U(n+1-\tau)) = V(n-\tau)$$

$\Rightarrow$ Invariante par translation

On peut utiliser un contre exemple pour justifier elle n'est pas linéaire

si $U(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $\delta'(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$w(U(n)) = V(n) = \max(U(n), U(n-1), U(n+1))$$
$$w(\alpha U_1(n) + \beta U_2(n)) = \max(\alpha U_1(n) + \beta U_2(n), \alpha U_1(n-1) + \beta U_2(n-1), \alpha U_1(n+1) + \beta U_2(n+1))$$

Si $U_1(n) = \delta(n)$, $U_2(n) = \delta'(n)$

quand $n=0$ $\quad w(\alpha\delta(n) + \beta\delta'(n)) = \max(\alpha, \beta) \neq \alpha V_1(n) + \beta V_2(n) = \alpha + \beta$

4. $\forall n \in \mathbb{Z}, V_n = U_{n-1}$

supposons la réponse impulsionnelle est $h(n) \Rightarrow w(U(n)) = U * h(n) = V(n)$

$$U(n) = \alpha U_1(n) + \beta U_2(n)$$

$$w(U(n)) = w(\alpha U_1(n) + \beta U_2(n)) = \alpha U_1(n-1) + \beta U_2(n-1)$$
$$= \alpha V_1(n) + \beta V_2(n) \Rightarrow \text{linéaire}$$

$w(U(n-\tau)) = U(n-\tau-1) = V(n-\tau) \Rightarrow$ Invariante par translation

$$w(U(n)) = U * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(n-m)h(m)$$
$$= \dots + U(n-1)h(1) + \dots = U(n-1)$$

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. $g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(x)\,dx\; x - 1/2\; f(t)\,dt$?

On prend $g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$

$$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

$$g(f(t)) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\,dt = \alpha \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t)\,dt + \beta \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_2(t)\,dt$$
$$= \alpha g(f_1(t)) + \beta g(f_2(t)) \Rightarrow \text{linéaire}$$

$g(f(t-\tau)) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t-\tau)\,dt \Rightarrow$ Invariant par translation

$$f * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(x-t)\,dt = g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,d(t)$$

donc on a $h(x-t) = 1$ quand $x - t \in (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow h(x) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$$

6. $g(x) = \max\{f(t), t \in [x-1, x+1]\}$

$g(f(t-\tau)) = \max\{f(t-\tau), t-\tau \in [x-1, x+1]\} \Rightarrow$ Invariant par translation

$$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

Si $f_1(t) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$ et $f_2(t) = \delta'(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Si $t \in [-1, 1]$, $g(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \max\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t), t \in [-1, 1]\}$

$t = 0$ ou $t = 1$

$$= \max\{\alpha, \beta\} \neq \alpha + \beta$$

Donc c'est invariant par translation mais pas linéaire

Exercice 2

1. $W(n) = U * V(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(m)V(n-m) = U(0)V(n) = V(n) = \sqrt{\log(\cos(3n)+2)}$

2. $W(n) = U * V(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(m)V(n-m) = U(0)V(n) + U(1)V(n-1)$

quand $n=0$ $\quad W(0) = U(0)V(0) = 2\times 5 = 10$

$n=1$ $\quad W(1) = U(0)V(1) + U(1)V(0) = 2\times 3 + (-\frac{1}{2})\times 5 = 3.5$

$n=2$ $\quad W(2) = U(0)V(2) + U(1)V(1) = 2\times 4 + (-\frac{1}{2})\times 3 = 6.5$

$n=3$ $\quad W(3) = U(1)V(2) = (-\frac{1}{2})\times 4 = -2$

$$W(n) = \begin{cases} 10 & n=0 \\ 3.5 & n=1 \\ 6.5 & n=2 \\ -2 & n=3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On définit la convolution sur question (2) est $W'(n)$, $U'(n)$

ici On a $U_{-1} = U'_0 \quad U_0 = U'_1 \Rightarrow W(n) = W'(n+1)$

Comme $W(n) = U * V(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(n-m)V(m)$

$= U(n)V(0) + U(n-1)V(1) + U(n-2)V(2)$

$= 5U(n) + 3U(n-1) + 4U(n-2)$

en pareil avec exercice 1

C'est un système a) Linéaire

b) Invariante par translation

donc

$$W(n) = \begin{cases} 10 & n=-1 \\ 3.5 & n=0 \\ 6.5 & n=1 \\ -2 & n=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Suite U est la somme des deux suites U précédentes

On définit les suites U précédentes commes U_1 et U_2

donc $U(n) = U_1(n) + U_2(n)$

parce que c'est un système linéaire et ~~Invariante~~ par ~~t~~ translation

On a $W(n) = W_1(n) + W_2(n)$

$$\Rightarrow \quad W(n) = \begin{cases} 10 & n=-1 \\ 13.5 & n=0 \\ 10 & n=1 \\ 4.5 & n=2 \\ -2 & n=3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. $U_n = (-\frac{1}{2})^n \quad (n \geq 0) \qquad V(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$W(n) = U * V(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(n-m)V(m)$

$= U(n)V(0) + U(n-1)V(1)$

$\cancel{= (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1}}$

$= U(n) + \frac{1}{2}U(n-1)$

$$\Rightarrow \quad W(n) = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$$