

---

## Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 4

---

**Úloha 1.** Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare. Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

- |  |  |
|--|--|
| a) $p$   | i) $((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg p)$                 |
| b) $\neg r$  | j) $((p \wedge q) \vee (q \vee \neg(r \wedge p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$       |
| c) $\neg \neg q$   | k) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$   |
| d) $((p \vee q) \rightarrow r)$  | l) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| e) $((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r))$                            | m) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| f) $((p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge \neg r))$                       | n) $((p \vee q) \wedge (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \vee \neg p)$   |
| g) $(p \wedge (q \wedge \neg(q \wedge \neg r)))$                       | o) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee \neg(r \wedge \neg p)$  |
| h) $((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ | p) $((p \vee q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \wedge \neg p)$   |

**Úloha 2.** Pre každú formulu  $X$  z úlohy 1, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v  $X$ , ktoré spĺňajú  $X$ .

**Úloha 3.** Pomocou algoritmu  $\text{CNF}_1$  z prednášky nájdite k nasledujúcim formulám ekvivalentné formuly v CNF:

- a)  $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r))$   
b)  $((r \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \wedge (p \vee s))$

Určte stupeň formuly vytvorenej algoritmom  $\text{CNF}_1$  pre formulu z úlohy 1.l).

**Úloha 4.** Pomocou algoritmu  $\text{CNF}_2$  z prednášky nájdite ekvivalentné formuly v CNF k formulám z úlohy 3 a k formule 1.l).

**Úloha 5.** Nech  $A, B, C$  a  $D$  sú formuly. Dokážte priamo z definície ekvivalentnosti formúl alebo vyvráťte:

- a) Ak  $A$  je ekvivalentná s  $C$  a  $B$  je ekvivalentná s  $D$ , tak  $(A \wedge B)$  je ekvivalentná s  $(C \wedge D)$ .  
b) Ak  $(A \wedge B)$  je ekvivalentná s  $(C \wedge D)$ , tak  $A$  je ekvivalentná s  $C$  a  $B$  je ekvivalentná s  $D$ .

**Domáca úloha du02.** Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **27. marca 2017**:

- v **čitateľnej** papierovej podobe na začiatku prednášky o **11:30**;
- elektronicky najneskôr o **23:59:59** cez svoj repozitár na [github.com](https://github.com) ako pull-request do vetvy (base) **du02** repozitára (base fork) **FMFI-UK-1-AIN-412/lpi17-vášAisLogín**.  
Odovzdávaný dokument uložte do súboru **du02.pdf** v adresári **du02** vo vetve **du02**. Dokument **musí byť vo formáte PDF**. Vytvorte ho podľa svojich preferencií (TeXom, textovým procesorom, tlačou do PDF z webového prehliadača, ...), **nesmie** však obsahovať obrázky rukou písaného textu ani screenshoty.

Úloha má hodnotu **2 body** [po 1 bode za každú časť a), b)]. Plné hodnotenie môže získať iba riešenie so **zrozumiteľným a zdôvodneným postupom**.

- a) Prechádzate sa v labyrinte a zrazu sa ocitnete na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

*Strážnik zlatej cesty:* „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

*Strážnik mramorovej cesty:* „Ani zlato, ani kamienky vás nedovedú do stredu labyrintu.“

*Strážnik kamennej cesty:* „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

Môžete si byť istí, že niektoré z ciest vedú do stredu labyrintu? Ak áno, ktorú cestu si vyberiete?

Viete o niektorých cestách s určitou povedať, že do stredu labyrintu nevedú? Ak áno, ktoré to sú?

Je o niektorých nemožné povedať, či do stredu labyrintu vedú alebo nevedú? Ak áno, o ktorých?

Vašou úlohou je:

- (i) Formalizovať uvedené skutočnosti ako množinu výrokových formúl a stručne popísať význam použitých výrokových premenných.
- (ii) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky z predloženého problému.
- (iii) Zodpovedať otázky a odpovede dokázať.

b) Nech  $T$  je teória, nech  $A$  a  $B$  sú formuly. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- (i) Ak z  $T$  vyplýva formula  $(A \rightarrow B)$ , tak z  $T \cup \{\neg B\}$  vyplýva  $\neg A$ .
- (ii) Ak z  $T$  nevyplýva formula  $(A \wedge B)$ , tak z  $T$  vyplýva  $\neg A$  alebo z  $T$  vyplýva  $\neg B$ .
- (iii) Ak z  $T$  nevyplýva formula  $(A \vee B)$ , tak z  $T$  nevyplýva  $A$  a z  $T$  nevyplýva  $B$ .
- (iv) Ak z  $T$  vyplýva formula  $(A \rightarrow B)$ , tak z  $T$  nevyplýva  $(A \wedge \neg B)$ .