Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева»

Факультет информатики

Кафедра технической кибернетики

Отчет по лабораторным работам №1 и №2
по дисциплине «Численные методы математической физики»

Тема: **РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

Вариант 9

Выполнил студент Барсков Н. М.
Группа 6406
Преподаватель Дегтярев А. А.

2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ГЛАВА 1

Лабораторная работа № 1

1.1 Тема работы. Цель работы. Порядок выполнения работы

Тема: решение краевых задач математической физики методом конечных разностей.

Цель работы: получение практических навыков построения и исследования разностных схем для задач математической физики, разработки вычислительных алгоритмов и компьютерных программ для их решения.

Порядок выполнения лабораторной работы:

а) осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте работы.

б) осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы;

в) провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики;

г) разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи;

д) разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи;

е) провести исследование зависимости численного решения от величин параметров дискретизации;

ж) оформить отчет о проделанной работе в соответствии с требованиями, изложенными в методических указаниях.

1.2 Индивидуальное задание на лабораторную работу

Разработать программу численного моделирования процесса остывания тонкой однородной пластины, имеющей форму диска радиусом R и толщиной l. Между гранями пластины и окружающей средой, имеющей температуру u_c, происходит теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена α. На боковой поверхности $r = R$ пластины поддерживается температура u_b. В начальный момент времени поле пластины обладает осевой симметрией, т.е. распределение температуры по пластине зависит только от радиальной координаты r полярной системы, т.е. $u|_{t=0} = \psi(r), 0 \leq r \leq R$.

Пластина выполнена из материала, характеризуемого коэффициентами теплопроводности k, объемной теплоемкости .

Для численного решения задачи теплопроводности на временном промежутке использовать:

а) Простейшую явную конечно-разностную схему;

б) Простейшую неявную конечно-разностную схему;

При проведении расчетов использовать значения параметров R, l, u_c, u_b, α, T, k, c и выражение функции $\psi(r)$, указанные преподавателем.

Таблица 1.1 — Значения параметров задачи

Радиус пластины R	6 см
Толщина пластины l	$0,5$ см
Температура окружающей среды u_c	$20°$ C
Коэффициент теплообмена α	$0,002\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{K}}$
Температура боковой поверхности u_b	$(20 + \psi(r))°$C
Продолжительность эксперимента T	50 с
Коэффициент теплопроводности k	$0,59\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{K}}$
Объемная теплоемкость c	$1,65\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \cdot \text{K}}$

1.3 Описание этапов выполнения лабораторной работы

1.3.1 Математическая поставновка задачи

Процесс, происходящий в пластинке, описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c}\nabla^2 u + f(r,t)$$

В постановке задачи указано, что начальное распределение имеет радиальную симметрию. Учтем это и заключим, что дальнейший процесс так же имеет радиальную симметрию, т.е

$$u = u(r,t), \quad u(\varphi) = const$$

тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + f(r,t)$$

Теплообмен между поверхностью пластинки и окружающей средой согласно условию задачи описывается при помощи закона Ньютона в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial S} = \alpha \Delta u = \alpha(u_b - u)$$

Если считать, что температура окружающей среды однородна, то:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha S}{cSl}(u_b - u) = \frac{\alpha}{cl}(u_b - u) = f(r,t)$$

Особо следует рассмотреть граничное условие в точке $r = 0$. Используя соотношение (23) из методических указаний найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{cl}(u_b - u)$$

Тогда, учитывая вышеперечисленные выражения, а также условие задачи, постановка задачи Коши выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}(u_b - u), 0 < r \le R \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}(u_c - u), r = 0 \\ u(r,0) = u_b + J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{R}\right), 0 \le r \le R \\ u(R,t) = u_b, 0 \le t \le T \end{cases} \tag{1.1}$$

1.3.2 Построение аналитического решения

Рассмотрим систему (1.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}(u_b - u), 0 < r \le R \\ u(r,0) = u_b + J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{R}\right), 0 \le r \le R \\ u(R,t) = u_b \end{cases} \tag{1.2}$$

В этом уравнении $J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{R}\right)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а μ_1 — первый корень уравнения $J(\mu) = 0$.

Воспользуемся вспомогательной задачей на собственные значения уравнения Лапласа. Для начала, сделаем так чтобы граничные условия были однородными, для этого осуществим замену:

$$u = v + u_b$$

Тогда задача (1.2) будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) - \dfrac{\alpha}{cl}v, 0 < r \le R \\ v(r,0) = J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{R}\right), 0 \le r \le R \\ v(R,t) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\hat{L}v = \lambda v$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \lambda v$$

Это уравнение можно привести к уравнению Бесселя и записать его решение в следующем виде:

$$v = C(t)J_0\left(\sqrt{-\lambda}r\right)$$

Решение системы (1.3) можно записать в виде бесконечного ряда по собственным функциям оператора Лапласа:

$$v(r,t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) J_0\left(\sqrt{-\lambda_i} r\right) \tag{1.4}$$

Рассмотрим граничное условие $v(R,t) = 0$:

$$v(R,t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) J_0\left(\sqrt{-\lambda_i} R\right) = 0 \Rightarrow J_0\left(\sqrt{-\lambda_i} R\right) = 0 \Rightarrow \lambda_i = -\frac{\mu_i^2}{R^2}$$

Теперь рассмотрим другое граничное условие $v(r,0) = J_0\left(\frac{\mu_1 r}{R}\right)$:

$$v(r,0) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(0) J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) = J_0\left(\frac{\mu_1 r}{R}\right) \Rightarrow C_i(0) = \begin{cases} 1, i = 1 \\ 0, i \neq 1 \end{cases}$$

Подставим разложение (1.4) в первое уравнение системы (1.3)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\left(\frac{\mu_i^2}{R^2} a^2 + \frac{\alpha}{cl}\right) C_i = -\gamma_i C_i \Rightarrow C_i = A_i \exp\left(-\gamma_i t\right)$$

Подставим граничные условия для $C_i(t)$, получим

$$A_i = \begin{cases} 1, i = 1 \\ 0, i \neq 1 \end{cases}$$

Тогда решение системы (1.3) запишется в виде:

$$v(r,t) = \exp\left[\left(\frac{\mu_1^2}{R^2} a^2 + \frac{\alpha}{cl}\right) t\right] J_0\left(\frac{\mu_1 r}{R}\right)$$

Решение уравнения $J_0(\mu) = 0$, найдем при помощи математического пакета $\mu_1 = 2.4048255$.

1.3.3 Построение разностной схемы

Для построения разностной схемы для начала введем равномерную сетку с шагами h_r — пространственный шаг и h_t — шаг по времени:

$$\begin{aligned} r_i &= i h_r, \quad i = \overline{0, I} \\ t_k &= k h_t, \quad k = \overline{0, K} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Значения шагов равномерной сетки можно найти из следующих соотношений:

$$h_r = \frac{R}{I}$$

$$h_t = \frac{T}{K}$$

И рассмотрим 4 разностных отношения для производных по времени и пространству:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(r_i,t_k)} = \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t}, \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{(r_i,t_k)} = \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r}, \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{(r_i,t_k)} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2}, \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}$$

На основе этих соотношений построим неявную конечно-разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = a^2 \left(\dfrac{1}{ih_r}\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r} + \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}\left(u_c - u_i^k\right) \\ i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1} \\ \dfrac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h_t} = 2a^2 \dfrac{u_1^k - 2u_0^k + u_{-1}^k}{h_r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}(u_c - u_0^k) \\ u_i^0 = u_b + J_0\left(\dfrac{\mu_1 ih_r}{R}\right) \\ i = \overline{0, I-1} \\ u_I^k = u_b \\ k = \overline{0, K} \end{cases}$$

В связи с радиальной симметрией запишем соотношение для первой пространственной производной:

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{h_r} = 0$$

Из этого соотношения получим:

$$u_{-1} = u_1$$

В соответствии с этим получим:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = a^2 \left(\dfrac{1}{ih_r}\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r} + \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}\left(u_c - u_i^k\right) \\ i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1} \\ \dfrac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h_t} = 2a^2 \dfrac{u_1^k - u_0^k}{h_r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}(u_c - u_0^k) \\ u_i^0 = u_b + J_0\left(\dfrac{\mu_1 ih_r}{R}\right) \\ i = \overline{0, I-1} \\ u_I^k = u_b \\ k = \overline{0, K} \end{cases} \tag{1.6}$$

Перепишем первое уравнение этой схемы в виде, удобном для решения дискретной задачи:

$$Au_{i-1}^k + Bu_i^k + Cu_{i+1}^k = Du_i^{k-1} + E$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем значения коэффициентов A, B, C, D, E, F:

$$A = -\frac{a^2 h_t}{2ih_r} + \frac{a^2 h_t}{h_r^2}$$

$$B = 1 - \frac{2h_t a^2}{h_r^2} - \frac{\alpha h_t}{cl}$$

$$C = \frac{a^2 h_t}{2ih_r^2} + \frac{a^2 h_t}{h_r^2}$$

$$D = -1$$

$$E = -\frac{\alpha u_c h_t}{cl}$$

Аналогично представим второе уравнение этой системы и коэффициенты F, G, H:

$$u_0^k = Fu_0^{k-1} + Gu_1^k + H$$

$$F = \frac{1}{1 + \dfrac{2a^2 h_t}{h_r^2} + \dfrac{\alpha h_t}{cl}}$$

$$G = \frac{\dfrac{2a^2 h_t}{h_r}}{1 + \dfrac{2a^2 h_t}{h_r^2} + \dfrac{\alpha h_t}{cl}}$$

$$H = \frac{\dfrac{\alpha h_t}{cl} u_1^k}{1 + \dfrac{2a^2 h_t}{h_r^2} + \dfrac{\alpha h_t}{cl}}$$

1.3.4 Исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы

Систему уравнений (1.1) можно представить в операторном виде:

$$\hat{L}u = \left\{ \begin{array}{c} \hat{L}^1 u \\ \hat{L}^2 u \\ \hat{L}^3 u \\ \hat{L}^4 u \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}\right)\right] u \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - 2a^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}\right] u \\ u|_{t=0} \\ u|_{r=R} \end{array} \right\}, f = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\alpha u_c}{cl} \\ \dfrac{\alpha u_c}{cl} \\ u_c + J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{R}\right) \\ u_c \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

Конечно – разностная задача (1.6) можно также представить в операторном виде:

$$\hat{L}_h u_h = \left\{ \begin{array}{c} \hat{L}_h^1 u \\ \hat{L}_h^2 u \\ \hat{L}_h^3 u \\ \hat{L}_h^4 u \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} - a^2\left(\dfrac{1}{ih_r}\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r} + \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}u_i^k \\ \dfrac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h_t} - 2a^2\dfrac{u_1^k - u_0^k}{h_r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}u_0^k \\ u_i^0 \\ u_N^k \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

Определение порядка аппроксимации. Рассмотрим первый компонент вектора невязки

$$\delta f_h^1 = \left\{L_h^1[u]_h - f_h^1\right\}_{(r_i,t_k)} = \frac{u(r_i,t_k) - u(r_i,t_{k-1})}{h_t} -$$
$$-a^2\left(\frac{1}{ih_r}\frac{u(r_{i+1},t_k) - u(r_{i-1},t_k)}{2h_r} + \frac{u(r_{i+1},t_k) - 2u(r_i,t_k) + u(r_{i-1},t_k)}{h_r^2}\right) +$$
$$+\frac{\alpha}{cl}u(r_i,t_k) - \frac{\alpha u_c}{cl} \quad (1.9)$$

Воспользуемся разложением Тейлора для функции u, предварительно обозначив $u(r_i,t_k) \equiv u$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial r^k} \equiv u_r^{(k)}$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} \equiv u_t^{(k)}$:

$$u(r_i,t_{k-1}) = u - u_t^{(1)}\frac{h_t}{1!} + u_t^{(2)}\frac{h_t^2}{2!} - u_t^{(3)}\frac{h_t^3}{3!} + u_t^{(4)}\frac{h_t^4}{4!} + O(h_t^5)$$
$$u(r_{i-1},t_k) = u - u_r^{(1)}\frac{h_r}{1!} + u_r^{(2)}\frac{h_r^2}{2!} - u_r^{(3)}\frac{h_r^3}{3!} + u_r^{(4)}\frac{h_r^4}{4!} - u_r^{(5)}\frac{h_r^5}{5!} + u_r^{(6)}\frac{h_r^6}{6!} + O(h_r^7)$$
$$u(r_{i+1},t_k) = u + u_r^{(1)}\frac{h_r}{1!} + u_r^{(2)}\frac{h_r^2}{2!} + u_r^{(3)}\frac{h_r^3}{3!} + u_r^{(4)}\frac{h_r^4}{4!} + u_r^{(5)}\frac{h_r^5}{5!} + u_r^{(6)}\frac{h_r^6}{6!} + O(h_r^7)$$

Воспользуемся этими выражениями для δf_h^1:

$$\delta f_h^1 = \left\{\frac{1}{h_t}\left(u - u + u_t^{(1)}\frac{h_t}{1!} - u_t^{(2)}\frac{h_t^2}{2!} + u_t^{(3)}\frac{h_t^3}{3!} - u_t^{(4)}\frac{h_t^4}{4!} + O(h_t^5)\right) -\right.$$
$$-a^2\left(\frac{1}{ih_r}\frac{1}{2h_r}\left(u + u_r^{(1)}\frac{h_r}{1!} + u_r^{(2)}\frac{h_r^2}{2!} + u_r^{(3)}\frac{h_r^3}{3!} + u_r^{(4)}\frac{h_r^4}{4!} + u_r^{(5)}\frac{h_r^5}{5!} +\right.\right.$$
$$u_r^{(6)}\frac{h_r^6}{6!} + O(h_r^7) - u + u_r^{(1)}\frac{h_r}{1!} - u_r^{(2)}\frac{h_r^2}{2!} + u_r^{(3)}\frac{h_r^3}{3!} - u_r^{(4)}\frac{h_r^4}{4!} + u_r^{(5)}\frac{h_r^5}{5!} -$$
$$\left.-u_r^{(6)}\frac{h_r^6}{6!} + O(h_r^7)\right) + \frac{1}{h_r^2}\left(u + u_r^{(1)}\frac{h_r}{1!} + u_r^{(2)}\frac{h_r^2}{2!} + u_r^{(3)}\frac{h_r^3}{3!} + u_r^{(4)}\frac{h_r^4}{4!} +\right.$$

$$+u_r^{(5)}\frac{h_r^5}{5!}+u_r^{(6)}\frac{h_r^6}{6!}+O(h_r^7)-2u+u-u_r^{(1)}\frac{h_r}{1!}+u_r^{(2)}\frac{h_r^2}{2!}-u_r^{(3)}\frac{h_r^3}{3!}+u_r^{(4)}\frac{h_r^4}{4!}-$$

$$-u_r^{(5)}\frac{h_r^5}{5!}+u_r^{(6)}\frac{h_r^6}{6!}+O(h_r^7)\Big)\Big)+\frac{\alpha u}{cl}-\frac{\alpha u_c}{cl}\Bigg\}_{(r_i,t_k)}$$

Осуществляем сокращения:

$$\delta f_h^1=\Bigg\{u_t-u_t^{(2)}\frac{h_t}{2!}+u_t^{(3)}\frac{h_t^2}{3!}-u_t^{(4)}\frac{h_t^3}{4!}+O(h_t^4)-a^2\Bigg(\frac{1}{ih_r}\Bigg(u_r^{(1)}+u_r^{(3)}\frac{h_r^2}{2!}+u_r^{(5)}\frac{h_r^4}{5!}+$$

$$+O(h_r^6)\Big)+2u_r^{(2)}\frac{1}{2!}+2u_r^{(4)}\frac{1}{4!}+O(h_r^6)\Bigg)+\frac{2\alpha}{cl}u-\frac{2\alpha}{cl}u_c\Bigg\}_{(r_i,t_k)}=\big\{O(h_t)-O(h_r^2)\big\}_{(r_i,t_k)}$$

Аналогичные результаты получим для второго компонента вектора невязки:

$$\delta f_h^2=\big\{L_h^2[u]_h-f_h^2\big\}_{(r_i,t_k)}=\big\{O(h_t)+2a^2O(h_r^2)\big\}_{(r_0,t_k)}$$

Для третьей и четвертой компонент невязки получим:

$$\delta f_h^3=\big\{L_h^3[u]_h-f_h^3\big\}_{(r_i,t_0)}=0$$

$$\delta f_h^4=\big\{L_h^2[u]_h-f_h^2\big\}_{(r_I,t_k)}=0$$

Таким образом дискретная задача (1.6) аппроксимирует непрерывную задачу (1.1) с первым порядком по времени и вторым порядком по координате.

ГЛАВА 2

Лабораторная работа №2

2.1 Тема работы. Цель работы. Порядок выполнения работы

2.2 Описание этапов выполнения лабораторной работы

2.2.1 Описание тестовой задачи, ее аналитическое решение

2.2.2 Экспериментальное исследование фактической скорости сходимости сеточного решения к точному для тестовой задачи