ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1

Лабораторная работа № 1

1.1 Тема работы. Цель работы. Порядок выполнения работы

Тема: решение краевых задач математической физики методом конечных разностей.

Цель работы: получение практических навыков построения и исследования разностных схем для задач математической физики, разработки вычислительных алгоритмов и компьютерных программ для их решения.

Порядок выполнения лабораторной работы:

а) осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте работы.

б) осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы;

в) провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики;

г) разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи;

д) разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи;

е) провести исследование зависимости численного решения от величин параметров дискретизации;

ж) оформить отчет о проделанной работе в соответствии с требованиями, изложенными в методических указаниях.

1.2 Индивидуальное задание на лабораторную работу

Разработать программу численного моделирования процесса остывания тонкой однородной пластины, имеющей форму диска радиусом R и толщиной l. Между гранями пластины и окружающей средой, имеющей температуру u_c, происходит теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена α. На боковой поверхности $r = R$ пластины поддерживается температура u_b. В начальный момент времени поле пластины обладает осевой симметрией, т.е. распределение температуры по пластине зависит только от радиальной координаты r полярной системы, т.е. $u|_{t=0} = \psi(r), 0 \leq r \leq R$.

Пластина выполнена из материала, характеризуемого коэффициентами теплопроводности k, объемной теплоемкости .

Для численного решения задачи теплопроводности на временном промежутке использовать:

а) Простейшую явную конечно-разностную схему;

б) Простейшую неявную конечно-разностную схему;

При проведении расчетов использовать значения параметров R, l, u_c, u_b, α, T, k, c и выражение функции $\psi(r)$, указанные преподавателем.

Таблица 1.1 — Значения параметров задачи

Радиус пластины R	6 см
Толщина пластины l	$0,5$ см
Температура окружающей среды u_c	$20°$ C
Коэффициент теплообмена α	$0,002 \ \dfrac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{K}}$
Температура боковой поверхности u_b	$(20 + \psi(r))°\text{C}$
Продолжительность эксперимента T	50 c
Коэффициент теплопроводности k	$0,59 \ \dfrac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{K}}$
Объемная теплоемкость c	$1,65 \ \dfrac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \cdot \text{K}}$

1.3 Описание этапов выполнения лабораторной работы

1.3.1 Математическая поставновка задачи

Процесс, происходящий в пластинке, описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c}\nabla^2 u + f(r,t) \tag{1.1}$$

В постановке задачи указано, что начальное распределение имеет радиальную симметрию. Учтем это и заключим, что дальнейший процесс так же имеет радиальную симметрию, т.е

$$u = u(r,t), \quad u(\varphi) = const \tag{1.2}$$

тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + f(r,t) \tag{1.3}$$

Теплообмен между поверхностью пластинки и окружающей средой согласно условию задачи описывается при помощи закона Ньютона в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial S} = \alpha \Delta u = \alpha(u_c - u) \tag{1.4}$$

Если считать, что температура окружающей среды однородна, то:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha S}{cSl}(u_c - u) = \frac{\alpha}{cl}(u_c - u) = f(r,t) \tag{1.5}$$

Особо следует рассмотреть граничное условие в точке $r = 0$. Используя соотношение (23) из методических указаний найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{cl}(u_c - u) \tag{1.6}$$

Тогда, учитывая выражения (1.3), (1.5) и (1.6), а также условие задачи, постановка задачи Коши выглядит следующим образом:

$$(1.7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}(u_c - u), 0 < r \leq R \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{2k}{c}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\alpha}{cl}(u_c - u), r = 0 \\ \\ u(0, r) = \psi(r), 0 \leq r \leq R \\ \\ u(t, R) = u_b + J_0\left(\dfrac{\mu r}{R}\right), 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

1.3.2 Построение аналитического решения

Рассмотрим систему (1.7) в следующем виде:

$$(1.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \dfrac{\alpha}{cl}(u_c - u), 0 < r \leq R \\ \\ u(0, r) = u_b + J_0\left(\dfrac{\mu r}{R}\right), 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

Преобразуем правую часть первого уравнения этой системы:

$$(1.9)\quad a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) - \frac{\alpha}{cl}(u - u_c) \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \beta(u - u_c)$$

Осуществим замену:

Таким образом правая часть представляет собой оператор Штурма-Лиувилля, для которого можно решить спектральную задачу:

$$(1.10)\quad \hat{L}v = \lambda v$$

$$(1.11)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \beta v = \lambda v$$

Это можно привести к уравнению Бесселя:

1.3.3 Построение разностной схемы

Для построения разностной схемы для начала введем равномерную сетку с шагами h_r — пространственный шаг и h_t — шаг по времени:

$$(1.12)\quad \begin{aligned} r_i &= ih_r, \quad i = \overline{0, I} \\ t_k &= kh_t, \quad k = \overline{0, K} \end{aligned}$$

Значения шагов равномерной сетки можно найти из следующих соотношений:

$$(1.13)\quad h_r = \frac{R}{I}$$

$$(1.14)\quad h_t = \frac{T}{K}$$

И рассмотрим 4 разностных отношения для производных по времени и пространству:

$$(1.15)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(r_i, t_k)} = \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t}, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{1, K}$$

$$(1.16)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(r_i, t_k)} = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t}, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}$$

$$(1.17)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{(r_i, t_k)} = \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r}, \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}$$

$$(1.18)\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{(r_i, t_k)} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2}, \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}$$

Построение неявной разностной схемы При построении явной разностной схемы воспользуемся соотношениями (1.16), (1.17), (1.18):

$$(1.19)\quad \begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} = \alpha^2\left(\dfrac{1}{ih_r}\dfrac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h_r}+\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h_r^2}\right)+\dfrac{\alpha}{cl}\left(u_c-u\right)\\ i=\overline{1,I-1},\quad k=\overline{0,K-1}\\ \dfrac{u_0^{k+1}-u_0^k}{h_t} = \dfrac{2k}{c}\cdot\dfrac{u_1^k-2u_0^k+u_{-1}^k}{h_r^2}+\dfrac{\alpha}{cl}(u_c-u)\\ u_i^0=\psi(ih_r)\\ i=\overline{0,I-1}\\ u_I^k=u_b\\ k=\overline{0,K} \end{cases}$$

В связи с радиальной симметрией запишем соотношение для первой пространственной производной:

$$(1.20)\quad \frac{u_1-u_{-1}}{h_r}=0$$

Из этого соотношения получим:

$$(1.21)\quad u_{-1}=u_1$$

В соответствии с этим получим:

$$(1.22)\quad \begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t} = \alpha^2\left(\dfrac{1}{ih_r}\dfrac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h_r}+\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h_r^2}\right)+\dfrac{\alpha}{cl}\left(u_c-u\right)\\ i=\overline{1,I-1},\quad k=\overline{0,K-1}\\ \dfrac{u_0^{k+1}-u_0^k}{h_t} = \dfrac{4k}{c}\cdot\dfrac{u_1^k-u_0^k}{h_r^2}+\dfrac{\alpha}{cl}(u_c-u_0^k)\\ u_i^0=\psi(ih_r)\\ i=\overline{0,I-1}\\ u_I^k=u_b\\ k=\overline{0,K} \end{cases}$$

1.3.4 Исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы

ГЛАВА 2

Лабораторная работа №2

2.1 Тема работы. Цель работы. Порядок выполнения работы

2.2 Описание этапов выполнения лабораторной работы

2.2.1 Описание тестовой задачи, ее аналитическое решение

2.2.2 Экспериментальное исследование фактической скорости сходимости сеточного решения к точному для тестовой задачи