Definition:

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heisst

$$\mathcal{F}: V \to W, \quad x \mapsto \mathcal{F}(x)$$

lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

i. $\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ und ii. $\mathcal{F}(\alpha x) = \alpha \mathcal{F}(x)$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob i. und ii. gelten

Beispiele:

- $\mathcal{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$

  i. $\mathcal{F}(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$

  ii. $\mathcal{F}(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha \cdot 3x = \alpha \mathcal{F}(x)$

  linear

- $\mathcal{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 2$

  i. $\mathcal{F}(x+y) = 3(x+y) + 2 = 3x + 3y + 2 \neq \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ nicht linear (affin linear)

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $\mathcal{F}: V \to W$ durch eine $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto A x$$

A heisst dann Abbildungsmatrix von $\mathcal{F}$

Beispiel:

- $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen und Matrizen:

Wie wir gesehen haben, können wir lineare Abbildungen durch eine Matrix beschrieben ($x \mapsto Ax$)

Anhand der Abbildungsmatrix können wir viel über die Abbildung herausfinden.

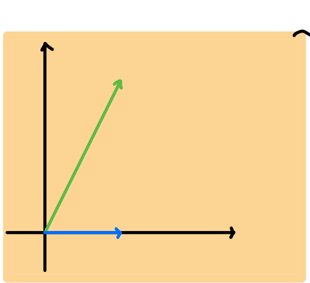
Bild:

Ganz am Anfang von LinAlg I sahen wir die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3$$

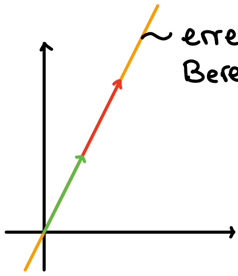
Das heisst alle möglichen Vektoren die durch das Produkt Ax entstehen können, werden durch die Linearkombination der Spalten von A beschrieben. Zum Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2$

Dieser „erreichbare Bereich" nennt sich Bild einer Matrix. Die Diemension des Bildes ist der Rang.

Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\text{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = Ax \}} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

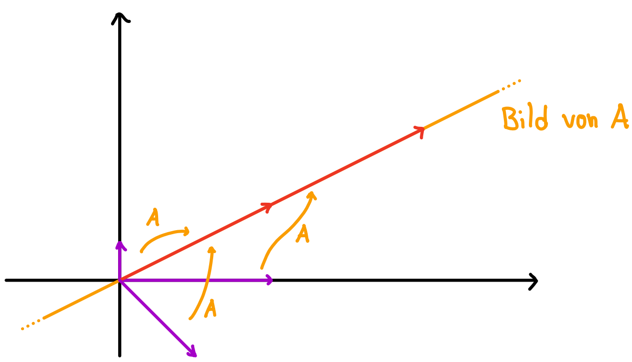
Kern:

Wie gerade gesehen, beschreibt das Bild einer Matrix den Raum auf welchen beliebige Vektoren x durch A abgebildet werden.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



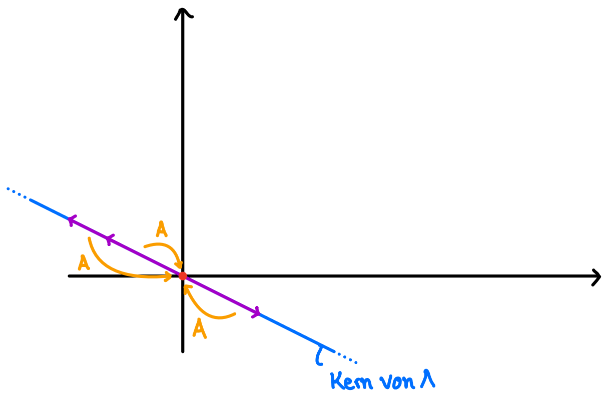
Wir fragen uns nun ob es Vektoren gibt die auf Null abgebildet werden.

D.h. wir suchen alle x, sodass $Ax=0$

$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

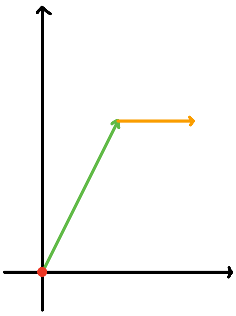


Mathematisch formuliert: $\boxed{Kern(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}}$

Zusammenhang mit LGS:

$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$ Rang voll

$\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_2\stackrel{!}{=}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$



nur die triviale Lösung $x_1=x_2=0$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ Rang nicht voll

$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}x_2\stackrel{!}{=}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

uendlich viele Lösungen

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax=b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax=b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax=0$ hat nur die triviale Lösung $(x=0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A)\neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor

Zusammenhang: $\boxed{\dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild}) = n}$

Beweis:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Der Kern von A ist die Lösungsmenge des HLGS $Ax=0$. Diese Lösungsmenge hat $n-r$ freie Parameter. Dabei ist r der Rang von A (Anzahl Pivots).

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{7}{5}t$, $x_1 = -\frac{6}{5}t$

$r = 2 \quad n = 3 \quad n - r = 1$

Der Lösungsraum von $Ax=0$ hat also die Dimension 1. Damit hat auch der Kern die Dimension 1.

$$\dim(\text{Kern } A) = n - r$$

Durch das Gaussverfahren zum lösen von $Ax=0$ haben wir die Zeilenstufenform R von A gefunden. Die Bilder von A und R lassen sich durch die jeweiligen Spalten beschreiben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\} = \text{Bild}(R) = \text{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\}$$

Da A und R die selbe Lösungsmenge beschreiben, spannen sie auch den selben Raum auf. Dadurch haben sie die selbe Dimension.

Die Dimension von R ist einfach zu bestimmen da sie gleich dem Rang r ist.

$$\dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\text{Bild}(R)) = r$$

Dadurch ist $\quad \dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n - r + r = n$

$$\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n$$

Basiswechsel:

Wie wir bereits gesehen haben, können wir für den selben VR verschiedene Basen wählen. Oft kann die Wahl einer bestimmten Basis ein Problem stark vereinfachen. Um von einer Basis in die andre zu wechseln benutzten lineare Abbildungen.

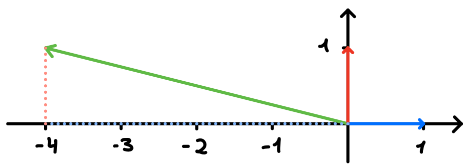
Basiswechsel für Vektoren:

Koordinaten beschreiben um wie viel die Basisvektoren des asoziierten Vektorraums skaliert werden.

D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab!

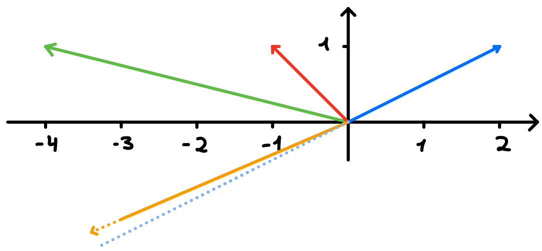
z.B. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ in der Standartbasis:

$$-4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



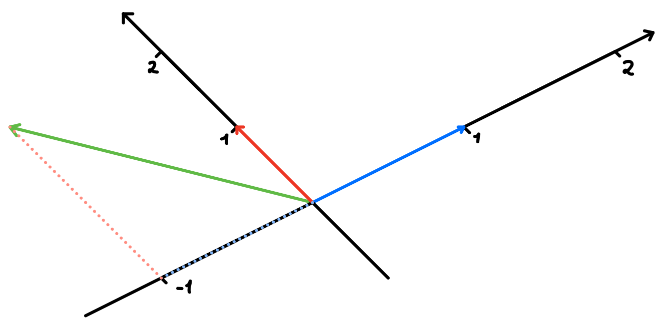
Würden wir z.B. die Basis mit Basisvektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wählen und die Koordinaten nicht ändern, würden wir einen anderen Vektor erhalten.

$$-4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Mit den neuen Basisvektoren wären die richtigen Koordinaten für den selben Vektor

$$-1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



In der neuen Basis sind die Koordinaten also $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\text{Standart}}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\text{Neu}}$ beschreiben gleichen punkt

Wenn wir also von einer Basis in eine andere wechseln, müssen wir auch die Koordinaten ändern. Dafür führen wir das Konzept der Übergangsmatrix ein.

Nennen wir hierfür unsere Standartbasis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ und die andere Basis $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Wir wollen nun von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ transformieren.

Wir suchen also die Koordinaten eines Vektors aus $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

Mathematisch ausgedrückt $\quad x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$

$\Downarrow$ Form eines LGS in Matrix-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ transformiert einen Vektor aus der Basis $\mathcal{B}'$ in die Basis $\mathcal{B}$. Wir wollen jedoch die Transformation von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Dafür nehmen wir die Inverse

Unsere Übergangsmatrix ist also $T^{-1}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Zusammenfassend:</u>

Für beliebige Basen $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ gilt:

$$\boxed{T_{Q \to W} = \left([q_1]_W, [q_2]_W, \dots, [q_n]_W \right)}$$

$$\boxed{[v]_W = T_{Q \to W} [v]_Q}$$

$$\boxed{T_{Q \to W} = T^{-1}_{W \to Q}}$$

Basiswechsel für Darstellungsmatrizen:

Wir können nun Vektoren von einer Basis in eine andere Transformieren. Nun stellt sich die Frage ob das auch für Matrizen gilt. Denn lineare Abbildungen und deren Darstellungsmatrizen sind auch an eine Basis gebunden.

Sei A eine Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung in der Basis q. Dann gilt:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q$$

wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in der Basis ω. Also:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

Durch umformen erhalten wir:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q \qquad \Big| \cdot T_{Q \to W}$$

$$T_{Q \to W} [A]_q [x]_q = T_{Q \to W} [y]_q \qquad \Big| \; T_{Q \to W} [y]_q = [y]_\omega$$

$$T_{Q \to W} [A]_q [x]_q = [y]_\omega \qquad \Big| \; \mathbb{I} = T^{-1}_{Q \to W} T_{Q \to W}$$

$$T_{Q \to W} [A]_q T^{-1}_{Q \to W} T_{Q \to W} [x]_q = [y]_\omega \qquad \Big| \; T_{Q \to W} [x]_q = [x]_\omega$$

$$\underbrace{T_{Q \to W} [A]_q T^{-1}_{Q \to W}}_{[A]_\omega} [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$\boxed{[A]_\omega = T_{Q \to W} [A]_q T^{-1}_{Q \to W}}$$

Bei einer genauen Betrachtung fällt folgendes auf:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$T_{Q \to W} [A]_q T^{-1}_{Q \to W} [x]_\omega = [y]_\omega$$

Transformation des Eingabevektor zu Basis q.

Abbildung in Basis q

Rücktransformation zu Basis ω