

Was sind Matrizen?

Wir können uns Matrizen verallgemeinert als "Zahlenfelder" vorstellen.

Eine $m \times n$ Matrix A hat die Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n Spalten

} *m Zeilen* $\rightarrow A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
(Zeilen zuerst, Spalten später)

$a_{ij} = (A)_{ij}$ ist der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Matrizen mit nur einer Spalte oder Zeile sind **Spalten- bzw. Zeilenvektoren**.

Wichtige Matrizen:

→ Quadratisch := $m=n$

→ Nullmatrix := $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alle Einträge sind null

→ Obere Dreiecksmatrix := $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $m=n$ und $(A)_{ij}=0$ für $i>j$
 Rechtsdreiecksmatrix

→ Untere Dreiecksmatrix := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $m=n$ und $(A)_{ij}=0$ für $i<j$
 Linksdreiecksmatrix

→ Diagonalmatrix := $\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, d_{33})$

→ Einheitsmatrix Identität := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$ (wie „1“)

Transponieren:

Die Transponierte von A ist A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist wie
Spiegeln an einer Diagonalen

Ein transponierter Zeilenvektor wird zu einem Spaltenvektor und umgekehrt.

\rightarrow Symmetrische Matrizen := $A = A^T$, $m = n$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

\rightarrow Antisymmetrische Matrizen := $A^T = -A$, $m = n$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Rechnen mit Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

Addition: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

\rightarrow Einträge werden einzeln addiert

Subtraktion: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

\rightarrow Einträge werden einzeln subtrahiert

Multiplikation:

- mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- mit einer anderen Matrix:

seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingung ist:

$$\begin{array}{ccc} m & \square^n & \cdot & n & \square^p & = & m & \square^p \\ & A & & B & & & AB & \end{array}$$

$$m \times n \quad \cdot \quad n \times p \quad = \quad m \times p$$

Gleich

wenn Bedingung erfüllt ist das Produkt definiert durch:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (B)_{kj}$$

Formel sieht komplizierter aus als es eigentlich ist.

\rightarrow Zusammenfassend: Spalten auf Zeilen legen.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$2 \times \underline{\underline{3}} \quad \underline{\underline{3}} \times 2 = 2 \times 2 \rightarrow \text{Bedingung erfüllt}$$

Berechnen wir nun das Ergebnis a_{12} . Dafür brauchen wir:

1. Zeile der ersten Matrix und 2. Spalte der zweiten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Analog für a_{11}, a_{21}, a_{22}

$$a_{11} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad a_{21} = (0 \ 2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad a_{22} = (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

Rechenregeln:

$$A+B = B+A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$A(C+D) = AC+AD$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ACHTUNG: $AB \neq BA$

im allgemeinen Fall

Matrix-Vektor Multiplikation: (Spaltenstruktursatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ dann ist Ax ein 3×1 Spaltenvektor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun einige Spezialfälle:

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{erste Spalte von } A$$

Wenn nun $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{zweite Spalte von } A$$

Sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{zwei mal zweite Spalte}$$

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{erste Spalte + zweite Spalte}$$

Generell gilt für Ax : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)}}_{\text{Linearkombination der Spalten von } A} \quad a^{(j)} = j\text{-te Spalte von } A$$

Was wenn x eine Matrix ist? Seien also $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A \cdot B}$$

Wir können dieses Produkt wie zwei Multiplikationen von Matrix mit Vektor sehen.

$$AB = (Ab^{(1)} \quad Ab^{(2)} \quad \dots \quad Ab^{(p)}) \quad \text{p-te Spalte von } B$$

Dadurch kann man Matrix Multiplikationen in bestimmten Fällen einfach ablesen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

↓
zwei mal erste Spalte

zweite Spalte
+ dritte Spalte

Matrizen als Transformationen:

Matrizen können wir ähnlich wie Funktionen interpretieren. Wenn man einen Vektor mit einer Matrix multipliziert kommt wieder ein Vektor raus. Analog zu einer Funktion $f(x) = y$, wo für jedes x ein y rauskommt. In der Linearen Algebra nennen wir dies **Transformation** oder **Abbildung**.

Wenn wir an Matrizen als Transformationen denken, so ist das Multiplizieren von Matrizen wie ein konsekutives Ausführen von Transformationen.

$$ABx = Ax' = x''$$

- 1.) Zuerst transformiert B den Eingabevektor x . Das generiert den transformierten Vektor x'
- 2.) Danach transformiert A den bereits transformierten Vektor x' zu x''

Die gesamte Transformation von $x \rightarrow x''$ wird dann durch das Produkt $C = A \cdot B$ beschrieben.

Wir können nun Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Können wir auch "dividieren"?

In den reellen Zahlen können wir Division als eine Multiplikation schreiben: $\frac{x}{a} = x \cdot a^{-1}$

Inverse Matrizen:

Die $n \times n$ Inverse von einer $n \times n$ Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt:

$$A A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A **regulär** oder **invertierbar**.

Bildlich macht A^{-1} die Transformation von A Rückgängig.

Rechenregeln:

$$I^{-1} = I$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{rang}(A^{-1}) = \text{rang}(A)$$

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

$$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Um nun die Inverse einer beliebigen $n \times n$ Matrix zu berechnen benutzen wir den **Gauss-Jordan Algorithmus**:

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - 2R_2 \\ R_3 + R_2}} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{R_2 - 5R_3} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right| \xrightarrow{R_1 + R_3} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{R_2 + \frac{1}{5}R_3} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right| \xrightarrow{R_1 + R_2} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right| \xrightarrow{R_1 + R_2} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right| \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot R_1} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right|$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Allgemein führen wir folgende Operation durch: $A | \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} | A^{-1}$

Für 2×2 Matrizen gilt ausserdem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp: Bestimme die Inverse von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

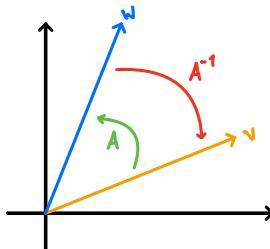
Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Wie kann es sein das nicht immer eine Inverse existiert?

Oben sahen wir, dass bei einem Produkt zwischen Matrix und Vektor wieder ein Vektor entsteht. Das Resultat kann also als transformierte Version des ursprünglichen Vektors gesehen werden. Mit der Inversen A^{-1} von A können wir die Transformation rückgängig machen. Mathematisch heisst das:

$$\text{wenn } A \cdot v = w \text{ dann ist } A^{-1} \cdot w = v$$

Die Multiplikation mit A^{-1} macht die Multiplikation von A rückgängig



Das können wir auch in Verbindung mit LGS bringen.

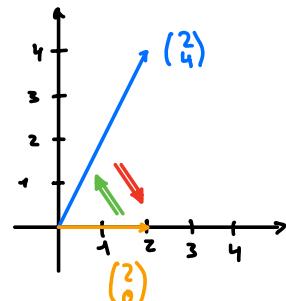
i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ A_1^{-1}

Welche Lösung hat dann $A_1 x = b$?

→ Es gibt ein eindeutiges x für jedes b

Es kann also eine Matrix existieren, sodass eindeutig

$$A_1^{-1} b = x$$



ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ A_2^{-1}

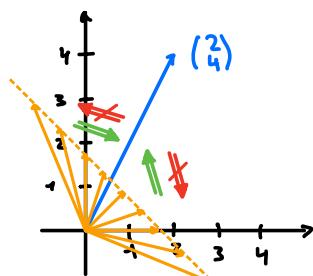
Welche Lösung hat dann $A_2 x = b$?

→ Es gibt unendlich viele x für jedes b .

Jedes x der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$



Betrachten wir nochmal genauer A_1 & A_2 . Was fällt auf?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Rang}(A_1) = 2 \Rightarrow A \text{ ist regulär}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rang}(A_2) = 1 \Rightarrow A \text{ ist singulär}$$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung ($x = 0$)
- A ist invertierbar/regular**
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

Orthogonale Matrizen:

Eine $n \times n$ Matrix heißt orthogonal, falls:

$$A^T A = I_n \text{ bzw. } A^{-1} = A^T$$

→ d.h. orthogonale Matrizen sind u.A. sehr leicht invertierbar!

Orthogonale Matrizen erfüllen immer diese Eigenschaften:

- i. Zeilen haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander
- ii. Spalten haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

Bsp: Sei A orthogonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

ii. $\sqrt{a_1^2 + a_3^2} = 1, \sqrt{a_2^2 + a_4^2} = 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

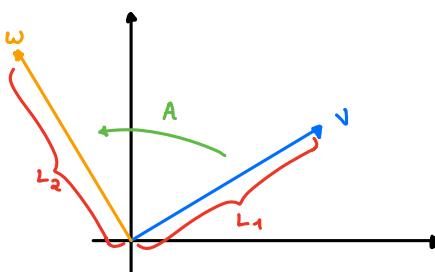
Wenn Bedingungen erfüllt → Orthogonal! (Es reicht eine von beiden i oder ii.)

Transformationen von orthogonalen Matrizen:

- i. Vektoren bleiben gleich lang.

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$L_1 = L_2$$

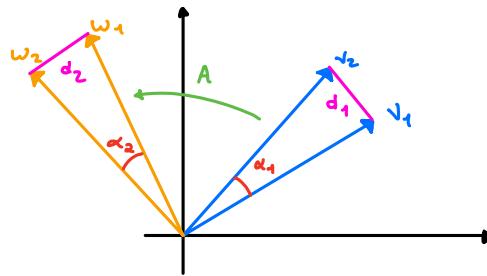


ii. Distanzen bzw. Winkel bleiben

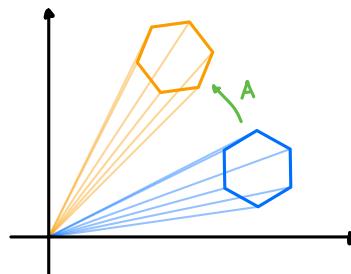
erhalten.

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2, d_1 = d_2$$



Insgesamt behalten Formen ihre Geometrie bei.



Beispiele sind **Rotationen und Spiegelungen**.

LR-Zerlegung:

Wie können wir ein LGS der Form $Ax=b$ für viele b schnell lösen?

Idee:

Zerlege $A = LR$

L ist dabei eine Linksdreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{41} & a_{51} & a_{61} \end{pmatrix}$$

R ist eine Rechtsdreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{44} & a_{54} \\ 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe dieser Zerlegung müssen wir nicht mehr Gaußsen! Es gilt dann:

$$Ax = LRx = Ly = b$$

d.h. um für ein generelles b zu lösen gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{i. } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{Aus Aufgabe}$$

$$\text{ii. } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}}_R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung für } Ax=b$$

Kochrezept anwenden können! Ist alles auf Zusammenfassung:

2.8 LR-Zerlegung

$$A = L \cdot R$$

Mit der LR-Zerlegung kann man eine quadratische Matrix A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L sowie einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegen. Dies ermöglicht ein effizienteres Lösen von $Ax = b_i$ mit vielen verschiedenen b_i .

Bsp: Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vorgehen:

- ① Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

2: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

- ② Bestimme L und R . L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

Bsp: $\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- ③ Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).

- ④ Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$P \cdot A = L \cdot R$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei ① zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.

Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A , und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P . L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt.

Bei ③ löse man nun $Ly = Pb$, bei ④ weiterhin $Rx = y$.