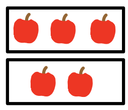
Intuition:

Wenn wir Zählen lernen entwickeln wir ein abstraktes Gefühl für Zahlen.

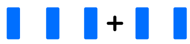
 ⟶ „3"

egal welches Objekt wir können einer gewissen Anzahl Objekten eine Zahl zuweisen.
Die Zahl 3 ist demnach nicht nur an Äpfel gebunden, sondern kann auch auf Dreiecke, Kreuze, etc. angewendet werden.

Wir wissen auch was passiert wenn wir zuerst 3 Äpfel und dann 2 Äpfel haben.

 ⟶ „5"

Dieses Gefühl für addition gilt nicht exklusiv für Äpfel, sondern lässt sich auch auf andere Objekte übertragen.

 ⟶ „5"    ⟶ „5"

Wir können Geld genau so gut wie Äpfel, Birnen und Rechtecke addieren. Wir haben also den Begriff der Addition abstrahiert (auf allgemeine Fälle erweitert).
Analog auch die Multiplikation.

Dasselbe machen wir nun mit Vektoren.
Bis jetzt haben wir Vektoren nur als Pfeile im Raum bzw. Ebene kennengelernt. Wir wissen schon wie man mit ihnen rechnet. Nun können Vektoren, genau wie Zahlen, nicht nur Pfeile darstellen, sondern beliebige Objekte z.B.

→ Kräfte

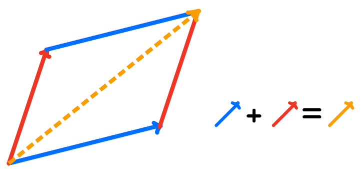
→ Position

→ Liste von Zahlen

→ Funktionen usw.

Wir wissen bereits wie wir mit Pfeilen im Raum rechnen können:

addieren



multiplizieren

Nun wollen wir auch diese Operationen auf alle Anwendungen von Vektoren abstrahieren.

Ausschlaggebend sind dafür die Regeln der Operation <u>nicht</u> die Objekte.

→ Rechenregeln werden zu Axiomen

<u>Wichtige Begriffe:</u>

Vektor ⟶ **Objekt**

z.B. Fruchtkorb

Raum ⟶ **Menge**

Menge von verschieden gefüllten Fruchtkörben

Innere Operation $\bigoplus$ ⟶ **Kombination von Objekten aus einer Menge**

Ich lege alle Früchte aus verschiedenen Fruchtkörben zusammen.

Äussere Operation $\bigodot$ ⟶ **Kombination von Objekten aus Menge mit Skalar**

Verfielfachung aller Früchte in einem Korb.

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

Innere Operation:

$\bigoplus$: $V \times V \to V$

$(a, b) \mapsto a \bigoplus b$

Äussere Operation:

$\bigodot$: $\mathbb{K} \times V \to V$

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \bigodot a$

Axiome:

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äussere Operation definiert werden.

$\oplus : V \times V \to V$ ($\oplus$ nimmt zwei Vektoren aus der Menge V und ordnet dem Paar einen anderen Vektor in V zu.)

$(a,b) \mapsto a \oplus b$ (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ ($\odot$ nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in V)

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$ (so wird die äussere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äusseren Operationen, folgende Axiome gelten.

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V$:	$u \oplus v = v \oplus u$	Vektorielles Kommutativgesetz
(A2) $\forall u, v, w \in V$:	$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$	Vektorielles Assoziativgesetz
(A3) $\exists 0 \in V$, $\forall u \in V$:	$u \oplus 0 = u$	Neutrales Element (Nullvektor)
(A4) $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$:	$u \oplus (-u) = 0$	Inverses Element
(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$:	$(\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$	Skalares Assoziativgesetz
(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$:	$(\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$ $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$	Distributivgesetz
(M3) $\forall u \in V$:	$1 \odot u = u$	Neutrales Element

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob beispielsweise die bekannten 2-D Vektorpfeile einen Vektorraum beschreiben. Dafür müssen wir <u>alle</u> Axiome prüfen.

Zusamenfassend:

Wir wollen unsere Vorstellung von Vektoraddition und Multiplikation, von den uns bekannten Vektorpfeilen im Raum und Ebene, auf alle möglichen Vektoren abstrahieren (verallgemeinern). Damit können wir dann später die Eigenschaften von Vektoren auch auf z.B. Funktionen (welche sich als Vektoren darstellen lassen) anwenden.

Unterräume:

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) $\forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U$ → Summe von zwei Elementen von U ist weiterhin Teil von U

(ii) $\forall\, a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U$ → Wird ein Element von U mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von U.

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum.

Bsp. I:

Sei V: alle linearen Funktionen der Form: $a(x) = a_1 x + a_2$

und U: alle linearen Funktionen mit Steigung 2 : $f(x) = 2x + b$

Ist U ein Unterraum von V?

(i) $\forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U$

$\rightarrow (2x+b_1)+(2x+b_2) = 4x + b_1 + b_2 \longrightarrow$ nicht Teil von U

U ist <u>kein</u> Unterraum von V

Bsp. II:

Sei V: alle linearen Funktionen der Form: $a(x) = a_1 x + a_2$

und U: alle konstanen linearen Funktionen : $f(x) = b$

Ist U ein Unterraum von V?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i) } \forall\, a,b \in U: \quad a+b \in U & \longrightarrow f_1(x)+f_2(x) = b_1 + b_2 \\ \text{(ii) } \forall\, a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U & \longrightarrow \alpha f_1(x) = \alpha \cdot b_1 \end{array}\right\} \text{Teil von } U$$

U ist ein Unterraum von V

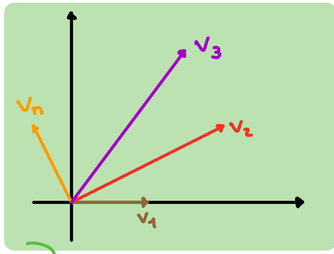
Erzeugendensysteme und Basen:

Sei $v := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, dann ist v eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ (V ist ein VR)

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Menge aller Linearkombinationen nennt sich Lineare Hülle und wird mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum V. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind dann ein Erzeugendensystem von V.



Vektorraum $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

Es lassen sich nun alle Vektoren in V durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.

Betrachten wir Beispielsweise 2D Vektorpfeile ($V = \mathbb{R}^2$). Es lassen sich beliebig viele Erzeugendensysteme finden:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\vdots$

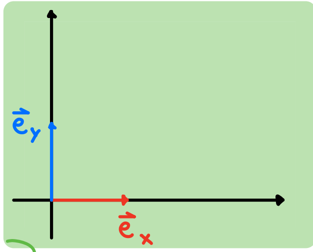
etc.

Wenn, alle Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines Erzeugendensystems linear unabhänig sind dann handelt es sich um eine **Basis**. Die Vektoren heissen Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standartbasis" $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ verwendet.

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann <u>eindeutig</u> als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

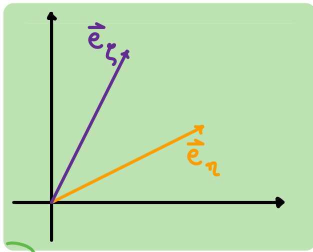


Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere linear unabhänige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B. $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann <u>eindeutig</u> als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Die Anzahl von Basisvektoren bleibt jedoch erhalten. Diese Anzahl nennt man **Dimension**.

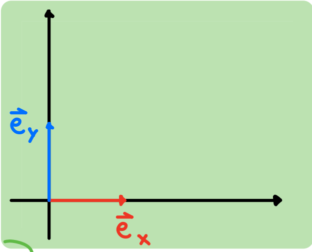
In unserem Fall mit $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, hat der VR V die Dimension 2.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **äquivalent**:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhänig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

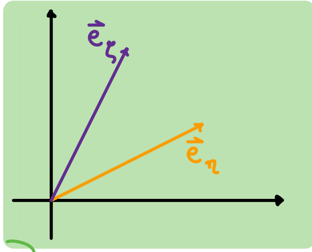
Es ist also möglich mehrere Basen für einen endlichdimensionalen Vektorraum zu finden.

z.B.:



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Wobei: $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Versuchen wir nun einen spezifischen Vektor in der Standartbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ auszudrücken. Betrachten wir hierfür zunächst $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 3$ sein muss.

Somit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{xy}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Standartbasis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 1$ sein muss

nun ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\eta\zeta}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$.

<u>Der Koordinatenvektor hängt also von der Basis ab.!</u>

<u>Normierte Vektorräume:</u>

Eine Norm ist eine fixe Regel mit welcher man jedem Vektor, in einem VR, eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man sie dann Vergleichen.

Mathematisch lässt sich das wie folgt durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \ , \quad v \mapsto \|v\|$$

Es gibt viele Möglichkeiten diese Zuordnung zu machen.

geometrische Länge (Euklidische Norm)

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow \|v\|_2 = \sqrt{18}$$

$$\|w\|_2 = \sqrt{17}$$

grösster Eintrag (Maximumsnorm)

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) \longrightarrow \|v\|_\infty = 3$$

$$\|w\|_\infty = 4$$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

$\forall\, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele solcher Normen sind:

Auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \quad \text{(Euklidische Norm)}$$

$$\|v\|_\infty := \max(|v_1|, \ldots, |v_n|) \quad \text{(Maximumsnorm)}$$

$$\|v\|_p := (|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{p-Norm}, 1 \leq p < \infty)$$

Auf $\mathbb{R}^{n \times m}$:

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \quad \text{(Hibert-Schmidt-Norm)}$$

$$\|A\|_{SM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(Spaltenmaximumsnorm)}$$

$$\|A\|_{ZM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(Zeilenmaximumsnorm)}$$

Skalarprodukt:

Wir haben nun ein Tool um die Grösse von Vektoren in einem Vektorraum zu vergleichen. In diesem nächsten Schritt wollen wir die **Beziehung** zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl beschreiben. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall \ x,y,z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
3. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$ und $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\langle x,y \rangle = 0$ dann sind x,y **orthogonal** $(x \perp y)$

Es gibt viele weitere Skalarprodukte! Oft müsst ihr zeigen ob eine Abbildung ein Skalarprodukt ist.

Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden.

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

Diese Norm erfüllt immer alle Bedingung für eine Norm, egal welches Skalarprodukt.

Überblick:

7.1 Definition Vektornorm

Eine Norm im Vektorraum V ordnet jedem Vektor v eine relle Zahl $||v||$ zu und kann so als eine Art Mass verstanden werden.

Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. $||v|| \geqslant 0$ und $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\alpha \cdot v|| = |\alpha| \cdot ||v||$
3. $||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$

Eine Norm ordnet jedem Vektor eine reelle Zahl zu.

8.1 Definition Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Paar x, y von Vektoren eine Zahl $\langle x, y \rangle$ zu.

Es muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Beispiele für Skalarprodukte

- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$
- Funktionenskalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Rechenregeln:

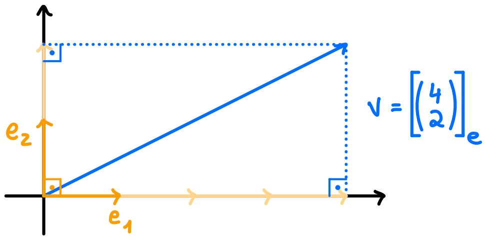
$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T Ay \rangle$$

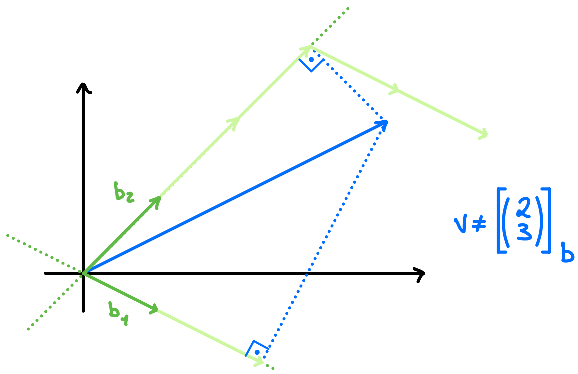
$$cos\phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\|\|b\|} \qquad \forall\, a \wedge b \in \mathbb{R}^2$$

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zu.

Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Orthonormalbasis (ONB)





Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

z.B.: $e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.

Bei einer herkömmlichen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

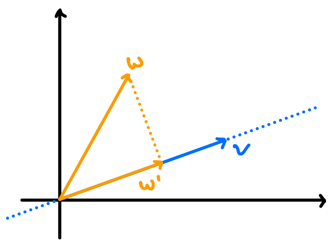
z.B.: $b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn <u>nicht</u> orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Orthonormalprojektion:

Ein Vektor w lässt sich auf einen Vektor v wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$



Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Bzw. kann ich aus jeder herkömmlichen Basis eine Orthonormalbasis basteln?

<u>Ja!</u>

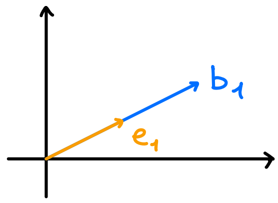
Dazu benutzen wir das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren.

Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis $B = \{b_1, \dots, b_k\}$
ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{e_1, \dots, e_k\}$

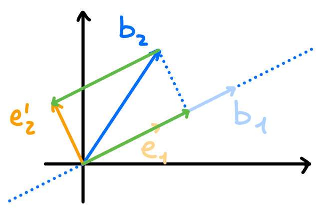
i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



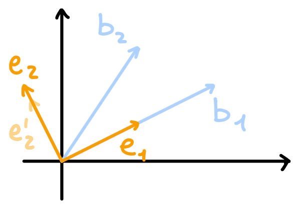
ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab

$$e_2' = b_2 - \boxed{\langle b_2, e_1 \rangle \, e_1}$$



und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e_2'}{\| e_2' \|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\| e_i' \|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!