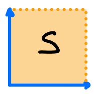
Intuition:

Der orientierte Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von zwei Vektoren aufgespannt wird, lässt sich mit dem Kreuzprodukt berechnen.

Betrachten wir zunächst die Fläche die von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ beschrieben wird.

Mit dem Kreuzprodukt erhalten wir:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\cdot 1 - 0\cdot 0\end{pmatrix} \longrightarrow |1| = 1$$



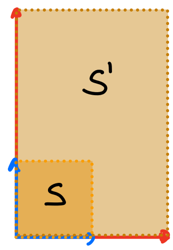
$S = 1$

Was passiert nun mit dem Einheitsquadrat wenn wir auf beide Vektoren eine Matrix A anwenden.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

Die Fläche S' lässt sich durch $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = 6$ berechnen.

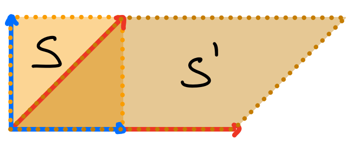
Im Vergleich zum Einheitsquadrat ist die Fläche 6 mal grösser geworden.



Betrachten wir nun ein ähnliches Beispiel indem die Vektoren durch eine Matrix C transformiert werden

$$C = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$S' = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2$$



Die Fläche ist 2 mal grösser geworden.

Wie können wir diesen Faktor allgemein bestimmen?

Wenden wir uns nochmals an das Einheitsquadrat. Wir nutzen, dass $AB = (Ab^{(1)} \;\; Ab^{(2)})$ gilt und somit können wir die transformierten Einheitsvektoren aus dem Produkt AB auslesen. Wobei $b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 \quad \text{d.h. } AB = A$$

Wir erkennen nun, dass die Spalten der Matrix A die transformierten Einheitsvektoren sind.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir können also direkt aus A die transformierten Einheitsvektoren auslesen und die Definition des Kreuzproduktes anwenden.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = S$$

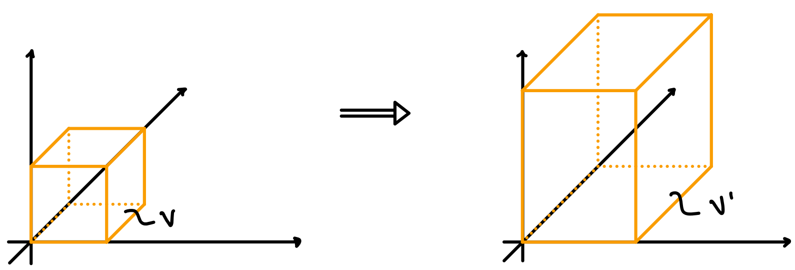
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = \text{Faktor mit welchem Flächen skaliert werden.}$$

$$= \det(A)$$

diese Grösse heisst Determinante.

Erinnerung: Orientierter Flächeninhalt! Eine negative Determinante bedeutet dass die Fläche skaliert und Ihre orientierung invertiert wird.

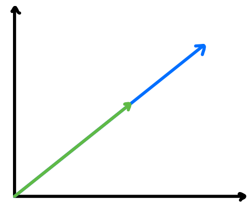
In 3-D beschreibt die Determinante wie sich Volumen verändern:



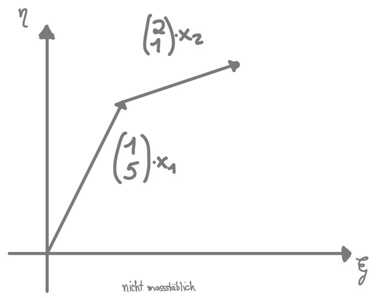
Spezialfall:

Wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ parallel sind ist die Fläche des, von ihnen aufgespannten, Parallelograms null

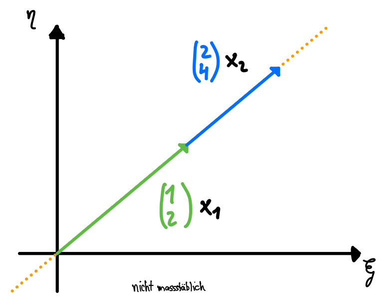
Es gilt dann $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Eine 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ hat also $\det = 0$ wenn die Spalten parallel sind. Erinnern wir uns nun an die Spalteninterpretation von LGS der Form $Ax = b$ zurück



Rang voll



Rang nicht voll

sahen wir, dass wenn beide Spalten in die selbe Richtung zeigen bzw. parallel sind, der Rang(A) nicht voll ist. Rang und Determinante hängen also zusammen.

Genauer können wir sagen: Rang(A) ist voll $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

Berechnung:

Allgemein

Kann man die Determinante rekursiv definieren:

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{oder} \quad \det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Zum ausrechnen mit dem Lapceschen Entwicklungssatz: (für jede nxn Matrix)

$$\text{Sei} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

> **Laplace'scher Entwicklungssatz:**
> Bei den meisten Matrizen ineffizient. Kann jedoch bei Matrix mit vielen Nullen in einer Zeile oder Spalte geschickt angewendet werden.
>
> 1. Zeile oder Spalte auswählen (dort wo viele Nullen).
> 2. Jedem Element dieser Zeile/Spalte ein Vorzeichen zuordnen (Schachbrett).
> 3. Für jedes Element die zugehörige Zeile und Spalte streichen und Unterdeterminante bestimmen.
> 4. Jede Unterdeterminante mit zugehörigem Element und Vorzeichen multiplizieren und addieren.

i.) Zeile /Spalte auswählen (viele Nullen)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

ii.) Vorzeichen (Schachbrett)

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

iii.) Unterdeterminanten bestimmen

$$\begin{pmatrix} {}^{+}0 & {}^{-}{-2} & {}^{+}3 \\ {}^{-}{-2} & {}^{+}1 & {}^{-}{-2} \\ {}^{+}3 & {}^{-}6 & {}^{+}5 \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Erstes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{-2} & \cancel{3} \\ \cancel{-2} & 1 & -2 \\ \cancel{3} & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow +0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Zweites Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & -2 & 3 \\ -2 & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ \cancel{3} & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow -(-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Drittes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & -2 & 3 \\ \cancel{-2} & 1 & -2 \\ 3 & \cancel{6} & \cancel{5} \end{pmatrix} \rightarrow +3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

iv.) Zusammen addieren:

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = +0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-10-18) + 3(4-3) = -53$$

Spezialformeln:

- Für 2x2:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

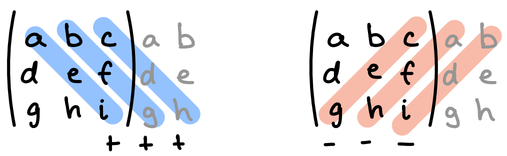
- Für 3x3 gibt es Regel von Sarrus: (Spatprodukt)

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

$$\left|\left(\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}\right) \underset{\text{Skalarprod.}}{\circ} \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}\right|$$

Positiv wenn Vektoren in Multiplikationsreihenfolge ein Rechtssystem bilden.

"Bildlich":

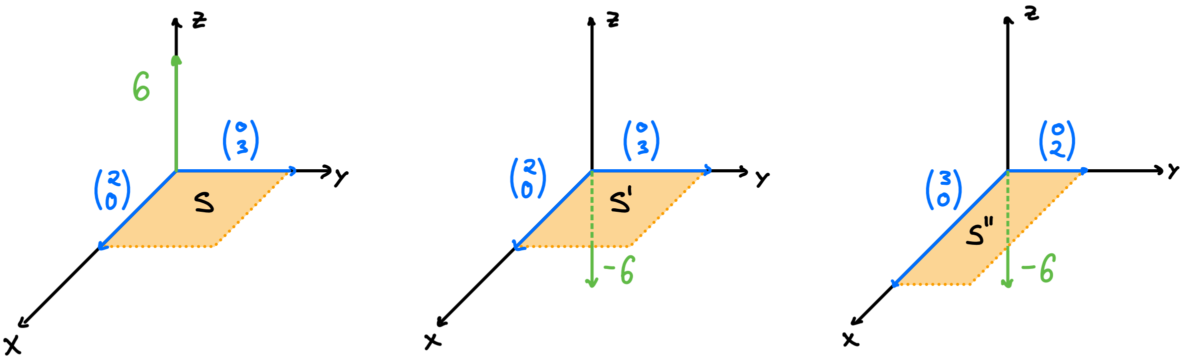


$aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Durch geschicktes modifizieren von A lässt sich die Rechnung vereinfachen. Wir können folgende Modifikationen durchführen.

i.) Vertauschen von Zeilen/Spalten → Vorzeichen der Determinante wechselt

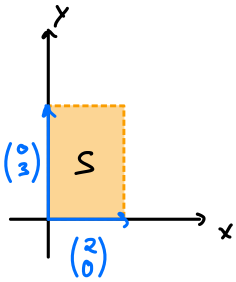
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

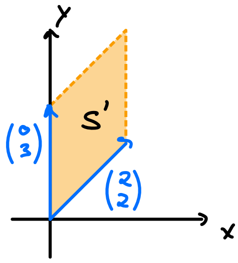


$2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6$ $\qquad$ $0 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6$ $\qquad$ $0 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$

ii.) Bei Spalten-Zeilenaddition bleibt Determinante gleich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$





$S = 6 \qquad S' = 6$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix lässt sich einfach bestimmen:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - 0b = ad$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = aei + bf0 + c00 - 0ec - 0fa - i0b = aei$$

Wenn A eine Nullzeile / Nullspalte besitzt, so ist $\det(A) = 0$. Man könnte immer nach der Nullzeile / Nullspalte entwickeln und 0 erhalten.

Besitzt A zwei identische Zeilen so ist $\det(A) = 0$. Der Rang ist nicht voll (es kann eine Nullzeile durch Spalten - Zeilenaddition erzeugt werden.

Alle Regeln sind auch auf der Zsfg.

3.2 Rechenregeln Determinante

Neben den Zeilen/Spalteneigenschaften von 3.1 gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} det(AB) &= det(A) \cdot det(B) \\ det(A^T) &= det(A) \\ det(diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)) &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \\ det(Dreiecksmatrix) &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \\ det(A^{-1}) &= 1/det(A) \end{aligned}$$