Was sind Matrizen?

Wir können uns Matrizen veralgemeinernd als "Zahlenfelder" vorstellen.

Eine $m \times n$ Matrix A hat die Form:

$$A = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}}\right\} m \text{ Zeilen} \longrightarrow \boxed{A \in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

(Zeilen zuerst, Spalten später)

$a_{ij} = (A)_{ij}$ ist der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Matrizen mit nur einer Spalte oder Zeile sind Spalten- bzw. Zeilenvektoren

Wichtige Matrizen:

→ Quadratisch := $m = n$

→ Nullmatrix := $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alle Einträge sind null

→ Obere Dreiecksmatrix
Rechtsdreiecksmatrix := $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i > j$

→ Untere Dreiecksmatrix
Linksdreiecksmatrix := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i < j$

→ Diagonalmatrix := $\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, d_{33})$ (Skaliert)

→ Einheitsmatrix
Identität := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$ (wie „1")

Transponieren:

Die Transponierte von A ist A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist wie Spiegeln an einer Diagonalen

Ein transponierter Zeilenvektor wird zu einem Spaltenvektor und umgekehrt.

→ Symmetrische Matrizen := $A = A^T$, $m = n$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

→ Antisymmetrische Matrizen := $A^T = -A$, $m = n$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

was muss auf der Diagonalen stehen?

Rechnen mit Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

Addition: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd addiert

Subtraktion: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd subtrahiert

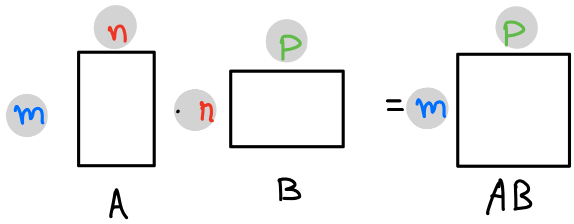
Multiplikation:

- mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- mit einer anderen Matrix :

  seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

  nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingun ist:



$$m \times \underbrace{n \cdot n}_{=} \times p = m \times p$$

wenn Bedingung erfüllt ist das Produkt definiert durch:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \, (B)_{kj}$$

Formel sieht komplizierter aus als es eigentlich ist. (Skalarprodukt von Zeilen und Spalten)

→ Zusammenfassend: Spalten auf Zeilen legen.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$2 \times \underbrace{3 \quad 3}_{=} \times 2 = 2 \times 2 \longrightarrow \text{Bedingung erfüllt}$$

Berechnen wir nun das Ergebnis a_{12}. Dafür brauchen wir:

1. Zeile der erstem Matrix und 2. Spalte der zweiten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = (1 \; 0 \; 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & 2 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Analog für a_{11}, a_{21}, a_{22}

$$a_{11} = (1 \; 0 \; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad a_{21} = (0 \; 2 \; 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad a_{22} = (0 \; 2 \; 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

Rechenregeln:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(C + D) = AC + AD$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

$$\boxed{\text{ACHTUNG: } AB \neq BA}$$

im allgemeinen Fall

Matrix-Vektor Multiplikation: (Spaltenstruktursatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und $x^{3\times1}$ dann ist Ax ein 3×1 Spaltenvektor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun einige Spezialfälle:

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ erste Spalte von A

Wenn nun $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ zweite Spalte von A

Sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

→ zwei mal zweite Spalte

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Generell gilt für Ax: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^{n\times1}$

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots x_n a^{(n)}}_{\text{Linearkombination der Spalten von } A}$$

$a^{(j)} =$ j-te Spalte von A

Die Matrizen verhalten sich also ähnlich wie Funktionen. Wenn man einen Vektor mit einer Matrix multipliziert kommt wieder ein Vektor raus. Analog zu einer Funktion z.B. $f(x)$.

In der Linearen Algebra nennen wir dies Transformation oder Abbildung.

Was wenn x eine Matrix ist? Seien also $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können dieses Produkt wie zwei Multiplikationen von Matrix mit Vektor sehen

$$AB = \left(Ab^{(1)} \quad Ab^{(2)} \quad \dots \quad Ab^{(p)} \right)$$

Dadurch kann man Matrix Multiplikationen in bestimmten Fällen einfach ablesen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zwei mal erste Spalte

zweite Spalte
+ dritte Spalte

Wenn wir wieder an Matrizen als Transformationen denken, so ist das Multiplizieren von Matrizen wie ein konsekutives Ausführen von Transformationen.

$$ABx = Ax' = x''$$

Reihenfolge der Multiplikation

1.) Zuerst transformiert B den Eingabevektor x. Das generiert den transformierten Vektor x'

2.) Danach transformiert A den bereits transformierten Vektor x' zu x''

Wir können von Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Können wir auch "dividieren"?

In den reellen Zahlen können wir Division als eine Multiplikation schreiben: $\frac{x}{a} = xa^{-1}$

Inverse Matrizen:

Die $n \times n$ Inverse von einer $n \times n$ Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt:

$$A A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Bildlich macht A^{-1} die Transformation von A Rückgängig.

Rechenregeln:

$$I^{-1} = I \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad rang(A^{-1}) = rang(A)$$

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

$$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Um nun die Inverse einer beliebigen $n \times n$ Matrix zu berechnen benutzen wir den Gauss-Jordan Algorithmus:

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-5\,\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\,\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Allgemein führen wir folgende Operation durch: $A | \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} | A^{-1}$

Für 2×2 Matrizen gilt ausserdem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp: Bestimme die Inverse von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2\cdot 3 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

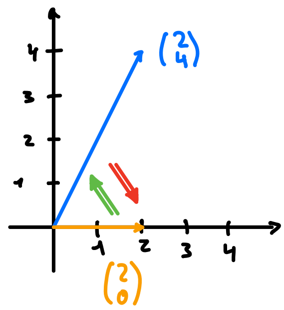
Wie kann es sein das nicht immer eine Inverse exsistiert?

Letzte Woche sahen wir, dass bei einem Produkt zwischen Matrix und Vektor wieder ein Vektor entsteht. Das Resultat kann also als transformierte Version des ursprünglichen Vektors gesehen werden. Mit der Inversen A^{-1} von A können wir die Transformation rückgängig machen. Mathematisch heisst das:

wenn $A \cdot v = w$ dann ist $A^{-1} \cdot w = v$

Die Multiplikation mit A^{-1} macht die Multiplikation von A rückgänig

i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_1^{-1}$



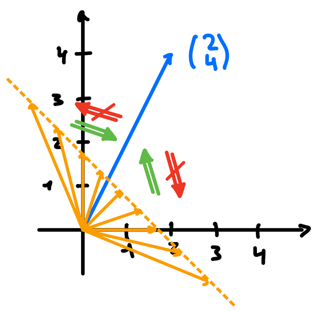
Welche Lösung hat dann $A_1 x = b$?

→ Es gibt ein eindeutiges x für jedes b

Es kann also eine Matrix existieren, sodass eindeutig

$$A_1^{-1} b = x$$

ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_2^{-1}$



Welche Lösung hat dann $A_2 x = b$?

→ Es gibt unendlich viele x für jedes b.

Jedes x der Form $\binom{1}{1} + t \cdot \binom{1}{-1}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$

Betrachten wir nochmal genauer A_1 & A_2. Was fällt auf?

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Rang$(A_1) = 2$ $\quad \Rightarrow$ A ist regulär

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Rang$(A_2) = 1$ $\quad \Rightarrow$ A ist singulär

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

Orthogonale Matrizen:

Eine nxn Matrix heisst orthogonal, falls:

$$A^T A = I_n \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = A^T$$

→ d.h. orthogonale Matrizen sind u.A. sehr leicht invertierbar!

Orthogonale Matrizen erfüllen immer diese Eigenschaften:

i. Zeilen haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

ii. Spalten haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

Bsp: Sei A orthogonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

ii. $\sqrt{a_1^2 + a_3^2} \overset{!}{=} 1$, $\sqrt{a_2^2 + a_4^2} \overset{!}{=} 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

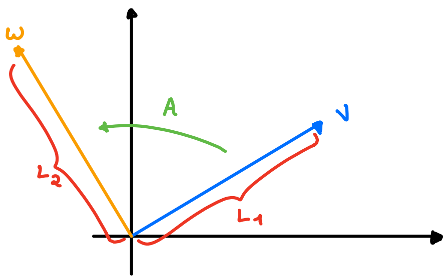
Wenn Bedingungen erfüllt → Orthogonal! (Es reicht eine von beiden)

Transformationen von orthogonalen Matrizen:

i. Vektoren bleiben gleich lang.

$Av = w$

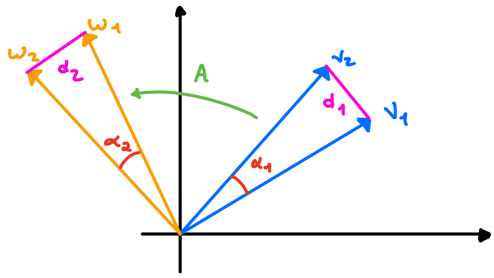
$L_1 = L_2$



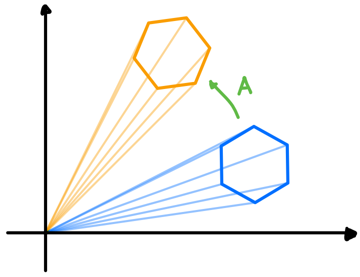
ii. Distanzen bzw. Winkel bleiben erhalten.

$Av = w$

$\alpha_1 = \alpha_2$, $d_1 = d_2$



Insgesamt behalten Formen ihre Geometrie bei.



Beispiele sind Rotationen und Spiegelungen

LR-Zerlegung:

Wie können wir ein LGS der Form $Ax=b$ für viele b schnell lösen?

Idee:

Zerlege $A = LR$

L ist dabei eine Linksdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$

R ist eine Rechtsdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$

mit hilfe dieser Zerlegung müssen wir nicht mehr Gaussen! Es gilt dann:

$$Ax = LRx = Ly = b$$

d.h. um für ein generelles b zu lösen gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

i. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\text{Aus Aufgabe}}$ ii. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Lösung für } Ax=b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Kochrezept anwenden können! Ist alles auf Zusammenfassung:

2.8 LR-Zerlegung

$$\boxed{A = L \cdot R}$$

Mit der LR-Zerlegung kann man eine quadratische Matrix A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L sowie einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegen. Dies ermöglicht ein effizienteres Lösen von $Ax = b_i$ mit vielen verschiedenen b_i.

Bsp: Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vorgehen:

1. Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

   Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

   $\boxed{2}$: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

2. Bestimme L und R. L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

   Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).
4. Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei 1 zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.
Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A, und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P. L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt. Bei 3 löse man nun $Ly = Pb$, bei 4 weiterhin $Rx = y$.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar/regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen/Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor
- Kein Eigenwert von A ist 0