Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung gegeben durch: $y'(t) = a\,y(t) \quad (a \in \mathbb{R}, \text{ konstant})$

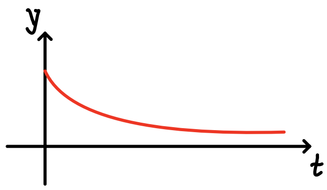
Mit der Lösung: $y(t) = c\, e^{at} \quad , c \in \mathbb{R}$

Ein konkretes Beispiel hierfür ist: $y'(t) = -2\, y(t)$

Mit der Anfangsbedingung: $y(0) = 3$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = y(0)\, e^{-2t} = 3e^{-2t}$$



Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{ y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = a y \}$ ist ein 1-D UR von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

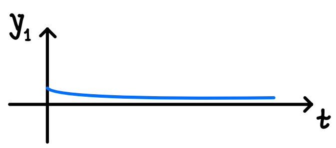
Genau wie wir auch schon mit den LGS sahen, können wir Gleichungen in einen System beschreiben. Das geht auch mit DGL's. Betrachten wir dafür ein Beispiel:

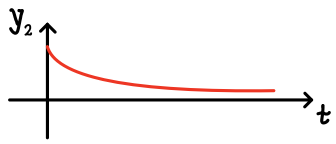
$$\begin{cases} y_1'(t) = -2\, y_1(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4\, y_2(t) & y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Dieses System ist entkoppelt da beide Gleichungen unabhänig von einander sind. Dadurch können wir sie auch separat lösen.

$$y_1(t) = y_1(0)\, e^{-2t} = e^{-2t}$$

$$y_2(t) = y_2(0)\, e^{-4t} = 3e^{-4t}$$

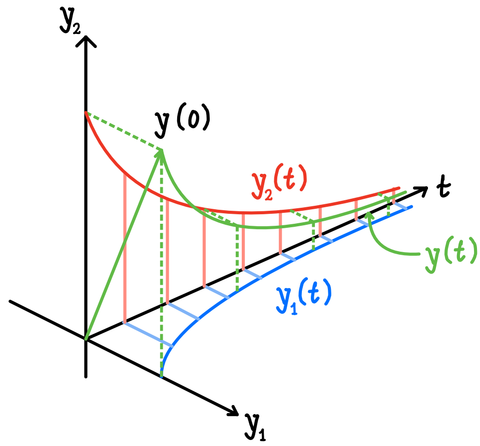




Und da wir in LinAlg sind können wir auch solche Systeme in Matrixschreibweise ausdrücken.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie herkömmliche Linearkombinationen vorstellen, bloss das jetzt alles auch von t abhängt



Es kann aber auch sein, dass die Gleichungen abhänig von einander sind, beispielsweise:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4\, y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2\, y_1(t) - 3\, y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{Das Können wir nicht mehr direkt lösen.}}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Matrizen der zwei Beispiele vergleichen fällt folgendes auf:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

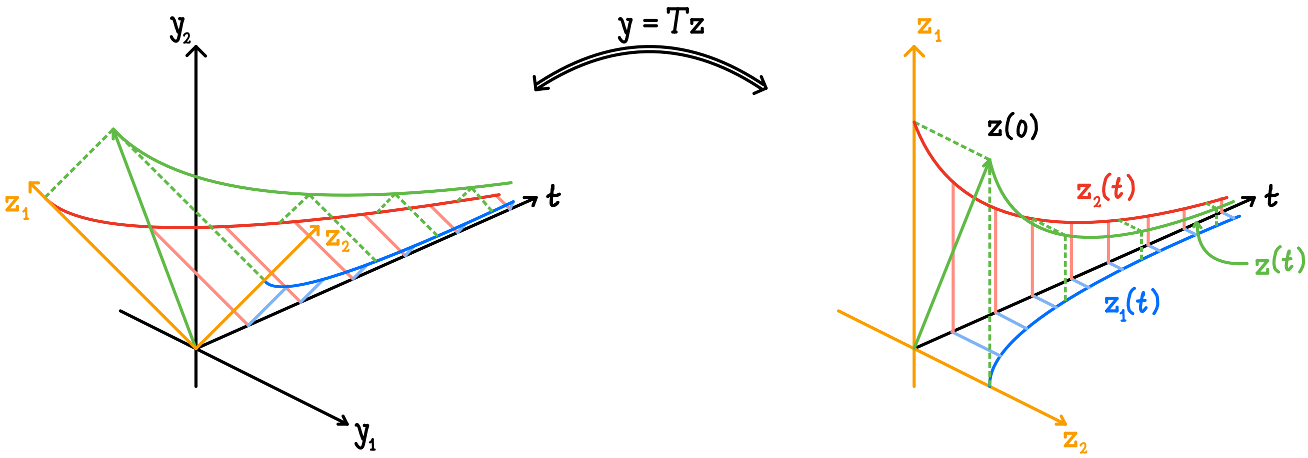
Die Matrix A_1 ist Diagonal! Wenn wir nun unsere Matrix A_2 diagonalisieren, sollten wir das System wie oben lösen können. Wir führen also einen Basiswechsel $y = Tz$ in die Eigenbasis durch mit $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ EV von A_2

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \overset{z = T^{-1}y}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{T^{-1}AT} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}y(0)}$$

In der Basis z können wir das System nun lösen und danach zurück Transformieren.

$$z(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{y = Tz}{\Longrightarrow} \quad y(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Generell können wir jedes System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kompakt mit Matrizen darstellen.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots = \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \longrightarrow Y' = AY \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingung ist dann: $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$

und die allgemeine Lösung lautet: $Y(t) = e^{At}\,Y_0$

Wenn nun A diagonalisierbar ist, vereinfacht sich die allgemeine Lösung enorm:

$$\boxed{Y(t) = e^{At}\,Y_0 = T\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\,T^{-1}\,Y_0}$$

Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Bis jetzt haben wir nur Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, also Differentialgleichungen in denen maximal die 1. Ableitung vorkommt. Wie lösen wir aber Differentialgleichungen höherer Ordnung? Betrachten wir hierfür die Gleichung:

$$y'''(t) + 4y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Durch eine Substitution können wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares System 1. Ordnung umwandeln:

$y_0 := y$

$y_1 := y'$ $\quad y_1 = y_0'$

$y_2 := y''$ $\quad y_2 = y_1'$

$y_3 := y'''$ $\quad y_3 = y_2'$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{y_2'(t) + 4y_2(t) + 2y_1(t) - 3y_0(t) = 0}_{\text{DGL 1. Ordnung mit 3 Variabeln.}}$$

Damit die Informationen der Substitution nicht verloren gehen, werden Sie mit Gleichungen in das System eingebunden

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = 3y_0 - 2y_1 - 4y_2$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Sidenote: Die Subtituition funktioniert auch bei nicht konst. Koeffizienten und inhomogenen Gleichungen.