Definition:

Gleichungssysteme sind Mengen von Gleichungen mit einer oder mehreren Variabeln.

Wann ist ein Gleichungssystem linear?

→ Wenn die Unbekannten nur in der ersten Potenz vorkommen. Meistens werden die Variabeln mit reellen Skalaren multipliziert.

Bsp: linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$$

nicht linear:

$$\begin{cases} e^{x_1} + x_2^2 = 6 \\ \frac{1}{x_1} + \cos(x_2) = 2 \end{cases}$$

Notation:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 9 \end{aligned} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 9 \end{array}$$

Matrix-Vektorprodukt $Ax = b$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix

m Gleichungen

n Unbekannte

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

das Produkt wird definiert als:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} = b$$

Lösungsverfahren:

Ein LGS hat entweder:

→ eine eindeutige Lösung

→ unendlich viele Lösungen

→ keine Lösung

Um Lösungen zu finden benutzen wir den Gausschen Algorithmus. Dadurch bringen wir das LGS in eine Form in der es einfach zu lösen ist. Diese Form heisst Zeilenstufenform.

für $m = n$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}$$

für $m \neq n$

○ → Pivot

In dieser Form lässt sich das LGS durch Rückwärtseinsetzen lösen. Um auf die Zeilenstufenform zu gelangen benutzen wir den Gausschen Algorithmus. Dieser besteht aus elementaren Zeilenumformungen.

I.) vertauschen von zwei Zeilen

II.) addieren eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Die Lösungsmenge bleibt durch diese Operationen unverändert.

Hat mein LGS nun eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Betrachten wir einige LGS in Zeilenstufenform.

$$\text{rang} = 3 \left\{ \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 \quad x_2 \quad x_3}}^{n=3}} & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array} \right.$$

Wenn Rang gleich Anzahl Unbekannte.

eindeutige Lösung

$$\text{rang} = 2 \left\{ \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 \quad x_2 \quad x_3}}^{n=3}} & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letzte Zeile immer gültig.

unendlich viele Lösungen

$$\text{rang} = 2 \left\{ \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 \quad x_2 \quad x_3}}^{n=3}} & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letzte Zeile nie gültig (Verträglichkeitsbedingungen)

Keine Lösung

Geometrische Interpretation:

Zeileninterpretation:

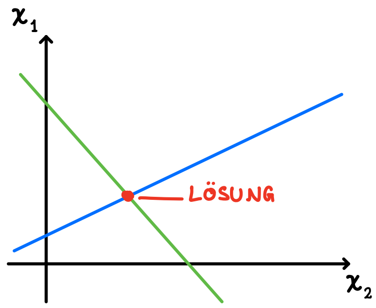
Betrachten wir die einzelnden Zeilen eines 2×2 LGS, so können wir 2 Geraden im 2-D Raum definieren.

Analog in 3-D mit Ebenen.

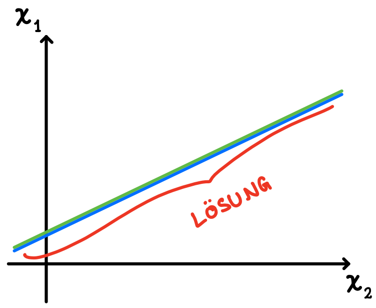
Bsp:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2} \\ 5x_1 + 1x_2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 7 - 5x_1 \end{array}$$

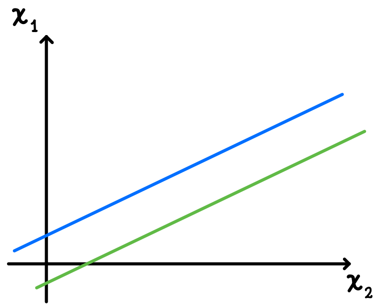
Abhänig von der Lösungsmenge können in 2-D folgende Fälle auftreten.



eindeutige Lösung



unendlich viele Lösungen



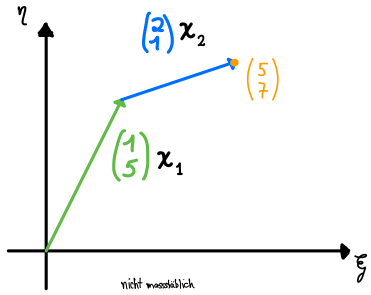
keine Lösung

<u>Spalteninterpretation:</u>

Dafür nehmen wir die Spalten als Vektoren und stellen unser LGS als Linearkombination der Spalten dar. Linearkombination bedeutet hier skalieren und addieren.

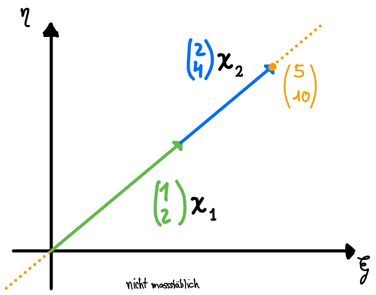
Bsp.:

$$\begin{matrix} 1x_1 + 2x_2 = 5 \\ 5x_1 + 1x_2 = 7 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$



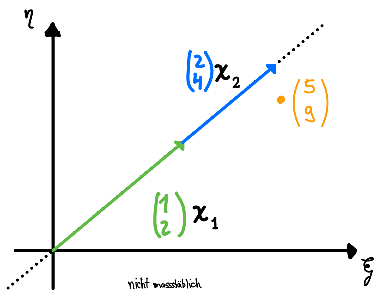
eindeutige Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$



unendlich viele Lösungen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

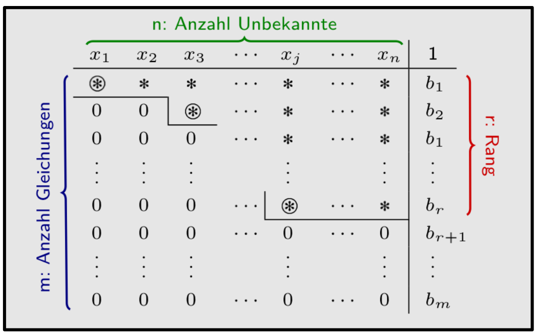


keine Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wenn der Rang voll ist ($r = m$) gibt es für jedes b ($Ax = b$) eine eindeutige Lösung (denn alle Spaltenvektoren sind linear unabhänig)

Wenn der Rang nicht voll ist ($r < m$) sind mind. zwei Spalten linear abhängig. Der Rang sagt uns wie viele Spaltenvektoren linear unabhängig sind und dadurch auch die Dimension des Lösungsraum



Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig