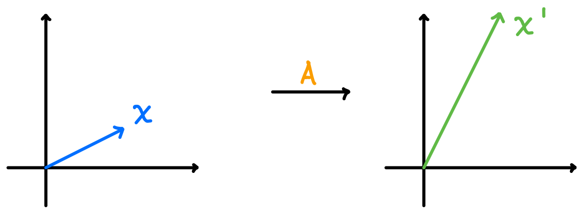
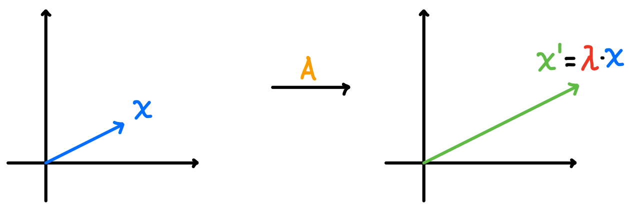
Betrachten wir zunächst eine lineare Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$ $(A \in \mathbb{C}^{n \times n})$.

Die Abbildung nimmt einen Vektor x und bildet ihn auf den Vektor $x' = Ax$ ab.



Wir fragen uns nun, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung $x \mapsto Ax$ nur um einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht werden.



Wir wissen also, dass in diesem Fall für eine Abbildung, gegeben durch $x \mapsto Ax$, folgendes gelten muss:

$Ax = x' = \lambda \cdot x$. Aus dem bekommen wir dann die allgemeine Gleichung:

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

Der Vektor x welcher durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht wird, nennt sich **Eigenvektor**.

Der Faktor λ, um welchen gestreckt bzw. gestaucht wird, wird **Eigenwert** genannt.

Eigenwerte:

Wir suchen also ein λ sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Wobei $x \neq 0$. Durch umstellen erhalten wir ein HLGS der Form:

$$(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$$

Wann hat dieses HLGS nur nicht triviale Lösungen $(x \neq 0)$

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- $det(A) \neq 0$

Das HLGS hat nicht triviale Lösungen genau dann wenn $\boxed{\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0}$

Mit dieser Gleichung können wir nun λ bestimmen.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, bestimme alle Eigenwerte λ_i von A.

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow (3-\lambda)(-6-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -6$

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$ heisst characteristisches Polynom. Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann ist $p_A(\lambda)$ ein Polynom n-ten Grades.

In unserem Beispiel ist der EW 3 eine doppelte Nullstelle des characteristisches Polynoms.

Wir sagen dann, dass die algebraische Vielfachheit des EW 3, gleich 2 ist. D.h.:

$\lambda_{1,2} = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2

$\lambda_3 = -6$ mit algebraischer Vielfachheit 1

Merkmale von EW von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

i. A hat mindestens einen EW $\lambda \in \mathbb{C}$

ii. A hat höchstens n verschiedene EW $\lambda \in \mathbb{C}$

iii. A hat genau n EW $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn man die EW mit ihrer algebraischen Vielfachheit zählt.

Weitere Definitionen zu EW:

i. Die Menge aller EW von A heisst Spektrum von A

ii. Zwei Matrizen $A, B\ \mathbb{C}^{n \times n}$ heissen ähnlich, wenn für eine reguläre Matrix $T\ \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $B = T^{-1} A T$. A und B haben dann:
das selbe characteristische Polynom
die selben EW mit den selben alg. Vf.
das selbe Spektrum
die selbe Determinante

Eigenvektoren:

Wir wissen nun wie wir EW bestimmen, nun müssen wir noch die dazugehörigen Eigenvektoren EV bestimmen. D.h. den Vektor x finden für welchen gilt:

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0).$$

Das Problem kann wieder zu $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ umgeschrieben werden. Nun setzen wir einen der EW ein und lösen das HLGS. Demnach sind die EV immer mit einem EW verbunden.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 3$ und $\lambda_3 = -6$. Bestimme die EV.

v_{λ_1}: $(A - \lambda_1 \mathbb{I})x = (A - 3\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \quad \rightarrow x_3 = t \in \mathbb{R}\ ;\ x_2 = 0\ ;\ x_1 = 0$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

v_{λ_3}: $(A - \lambda_3 \mathbb{I})x = (A + 6\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)x = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} x = 0 \quad \rightarrow x_1 = 0\ ;\ x_2 = -9x_3$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

v_{λ_2}: $(A - \lambda_2 \mathbb{I})x = (A - 3\mathbb{I})x = 0$

$v_{\lambda_1} = v_{\lambda_2}$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da wir hier ein HLGS mit $\det = 0$ lösen wird es immer unendlich viele Lösungen für $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ geben. D.h. jede mögliche Linearkombination von EV von einem EW ist auch wieder ein EV. Der dadurch aufgespannte Vektorraum ist dann ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ und nennt sich Eigenraum.

Eigenräume werden mit E_{λ_i} bezeichnet.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Bestimme die EV.

$E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2} = E_1 : (A - \lambda \mathbb{I})x = (A - 1\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \rightarrow$ zwei freie Parameter:

$x_3 = t$; $x_2 = s$ $\quad s,t \in \mathbb{R}$

$x_1 = -t - s$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_4 analog.

In diesem Beispiel ist also der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ beschrieben durch $E_1 = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Dimension des Eigenraums $\dim(E_{\lambda_i})$ heisst geometrische Vielfachheit von λ_i.

In unserem Beispiel ist also die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 2$.

Die geom. Vf ist gleich der Anzahl der freien Parameter im HLGS $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$

$\rightarrow$ Allgemein ist immer zu beachten, dass für einen EW λ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gelten muss:

$$1 \leqslant \text{geom. Vf. von } \lambda \leqslant \text{alg. Vf. von } \lambda \leqslant n$$

Diagonalisierung:

Für Abbildungen ist es vorteihaft wenn die Abbildungsmatrix diagonal ist, da Diagonalmatrizen leicht invertierbar sind und Matrixmultiplikation einfacher ist. Beim Diagonalisieren wollen wir also einen Basiswechsel machen, so dass die Matrix in der neuen Basis diagonal ist.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wollen wir also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ finden, so dass:

$$T^{-1} A T = D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

D ist dann die Abbildung A in einer neuen Basis.

Bei Diagonalmatrizen werden Basisvektoren nur um Skalare von der Diagonalen skaliert. D.h. die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte　　　　Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Wir wählen also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basis. Der Faktor mit welchem skaliert wird sind genau die Eigenwerte.

Die Übergangsmatrix T enthält dann als Spalten die EV von A. Die Diagonalmatrix D muss nun auf der Diagonalen die EW von A haben. D.h. $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Da wir für eine Diagonalisierung $T^{-1} A T = D$, T^{-1} brauchen muss T regulär sein. Sonst lässt sich A nicht diagonalisieren. Die allgemeine Bedingung für die Diagonalisierbarkeit lautet:

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$$\boxed{A \text{ halbeinfach} \iff A \text{ diagonalisierbar}}$$

Was bedeutet es für eine Matrix wenn sie halbeinfach ist?

$$\boxed{\text{Eine Matrix } A \text{ ist halbeinfach wenn jedes } \lambda \text{ alg Vfh.} = \text{g. Vfh.}}$$

In anderen Worten: Jeder EW λ_i (mit Vfh. gezählt) hat einen EV welcher linear unabhänig von allen anderen EV ist. Deshalb gilt auch:

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n \iff$ die Matrix ist halbeinfach.

Recall:

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar / regulär
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Dadurch, dass A halbeinfach ist garantieren wir dass T regulär ist und somit ist A diagonalisierbar.

Spezialfall: Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch dann gilt:

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis
- $\exists$ eine orthogonale Matrix T so dass, $T^{-1} A T = T^{T} A T$ diagonal ist.

Anwendung: Potenzen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Berechne A^3

Da A diagonalisierbar ist gilt: $A = T D T^{-1}$

Nun ist $A^3 = A \cdot A \cdot A = (TD\underbrace{T^{-1})(T}_{I}D\underbrace{T^{-1})(T}_{I}DT^{-1}) = TD^3T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3)\, T^{-1}$

Generell gilt $\boxed{A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\, T^{-1}}$

Dadurch vereinfacht sich auch das Matrixexponential $\boxed{e^A = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\, T^{-1}}$

Hauptachsentransformation quadratischer Formen:

Quadratische Formen:

Es gibt quadratische Funktionen in mehreren Variablen. Z.B. in zwei Variabeln.

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass diese Funktion auch mit einer Matrix beschrieben werden kann

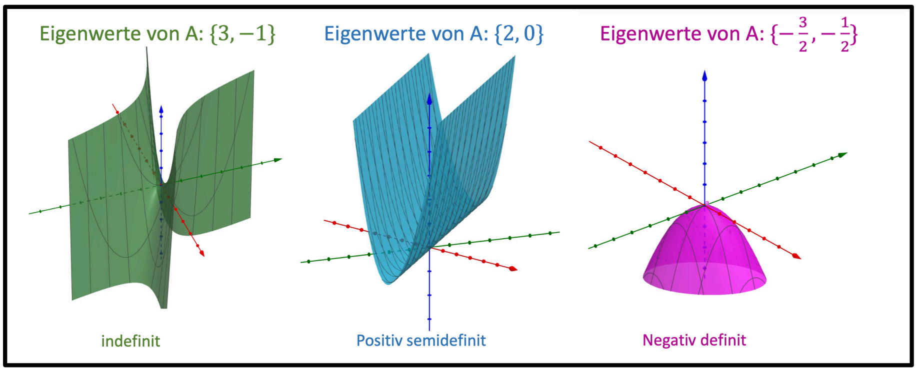
$$q(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ die quadratische Form von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein können wir für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die dazugehörige quadratische Form finden. Sie ist wie folgt definiert: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{aligned} q_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}}$$

Je nach Matrix kann die quadratische Form graphisch anders aussehen. Bsp. für 2 Variabeln.



Die unterschiedlichen quadratischen Formen lassen sich klassifizieren.

10.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0 \; \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

Eine rein quadratische Form hat keine Mischterme. D.h. sie wird mit einer Diagonalmatrix gebidet:

$$q(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$$

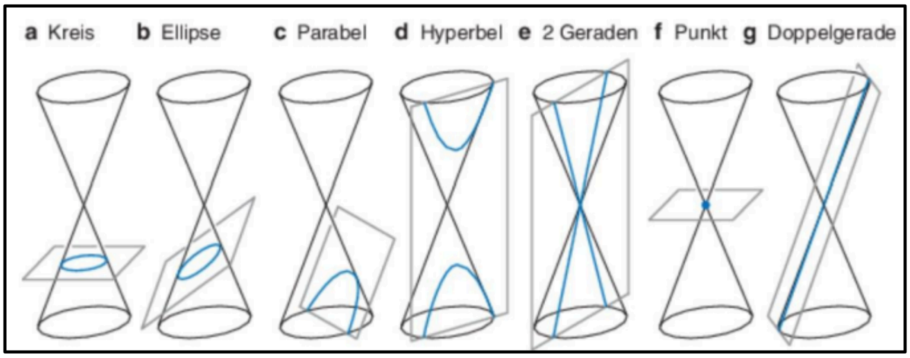
Durch eine Transformation können wir eine nicht reine Form in eine reine Form umwandeln. Dafür nehmen wir die EV der Matrix A und wählen sie als neue Basis (Diagonalisieren). Durch diese Transformation bringen wir die quadratische Form in ihre Normalform.

Kegelschnitte:

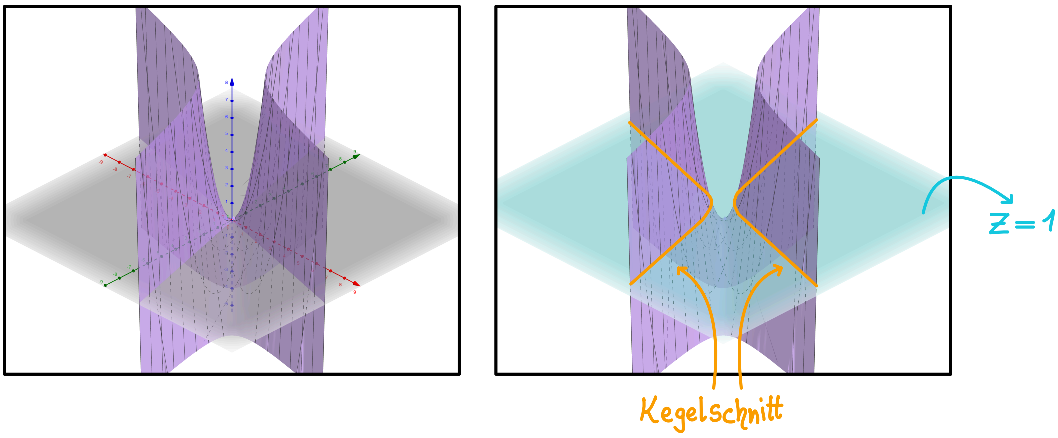
Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$$

ein Kegelschnitt. Verschiedene symmetrische Matrizen liefern einen dieser Kegelschnitte.



Für die quadratische Form $q_A = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$:



Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$$

eine Quadrik oder Fläche 2. Grades. Verschiedene quadratische Formen liefern verschiedene Quadriken

Die Normalformen aller Kegelschnitte sind:

Rang$(A) = 2$:

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Ellipse/Kreis
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$	leere Menge
$x^2 + \beta^2 y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - \beta^2 y^2 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar

Rang$(A) = 1$:

$x^2 - \gamma y = 0$	Parabel
$x^2 - \alpha^2 = 0$	paralleles Geradenpaar
$x^2 + \alpha^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Gerade

wobei α, β, γ alle $\neq 0$.

Hauptachsentransformation:

10.7 Hauptachsentransformation einer quadr. Form

Wir können durch zwei Koordinatentransformationen (Drehung $y = Tx$ und Verschiebung $z = y + c$) jede quadratische Form rein quadratisch machen.

Während der Koordinatenvektor x die quadratische Form in der Standardbasis darstellt, stellt der Koordinatenvektor z die quadratische Form in der neuen Basis dar.

Die Basis, in der $q(x)$ rein quadratisch wird, ist die Eigenbasis der zugehörigen symmetrischen Matrix A.

Bsp: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2$

Vorgehen:

Je nach Aufgabe müssen nicht alle Punkte durchgeführt werden. Für ausschliesslich Hauptachsentransformation reicht 1-3.

1. Man bestimme die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $q(x) = x^T Ax$

   Trick: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$s

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Man diagonalisiere die Matrix A (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T. Da A symmetrisch ist, kann T orthogonal gewählt werden und $T^{-1} = T^T$.

   T orthogonal wählen! Spalten von T normieren, falls zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert: 8.4

   Bsp: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Multipliziere aus: $q(y) = y^T \cdot D \cdot y$. Wir haben nun unsere Hauptachsentransformation durchgeführt.

   Bsp: $y^T Dy = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

4. Falls in Aufgabe gefragt: Bringe Quadrik $q(x) + a^T x + b = 1$ in Normalform.
   Bestimme $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

   Bsp: $q(x) + 2x_3 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{3}$

5. Schreibe Quadrik in transformierter Form (ausmultiplizieren): $y^T Dy + a^T Ty + b = 1$

   Bsp: $y^T Dy + a^T Ty + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3} = 1$

6. Falls noch lineare Terme übrig: Ergänze quadratisch

   Bsp:
   $$\begin{aligned} 0 &= -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1^2 - \tfrac{2}{3}y_1) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3((y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - (\tfrac{2}{2\cdot 3})^2) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} + 3\cdot(\tfrac{1}{3})^2 \\ &= -3(y_1 - \tfrac{1}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 1 \end{aligned}$$

   Durchführung der zweiten Koordinatentransformation $z = y + c$ (Verschiebung). Man bestimme Vektor c.

   Danach enthält die Gleichung nur noch rein quadratische Terme.

   Bsp: $c = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(z) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$

7. Falls gefragt: Gib die zusammengesetzte Koordinatentransformation an: $z = T^T x + c$