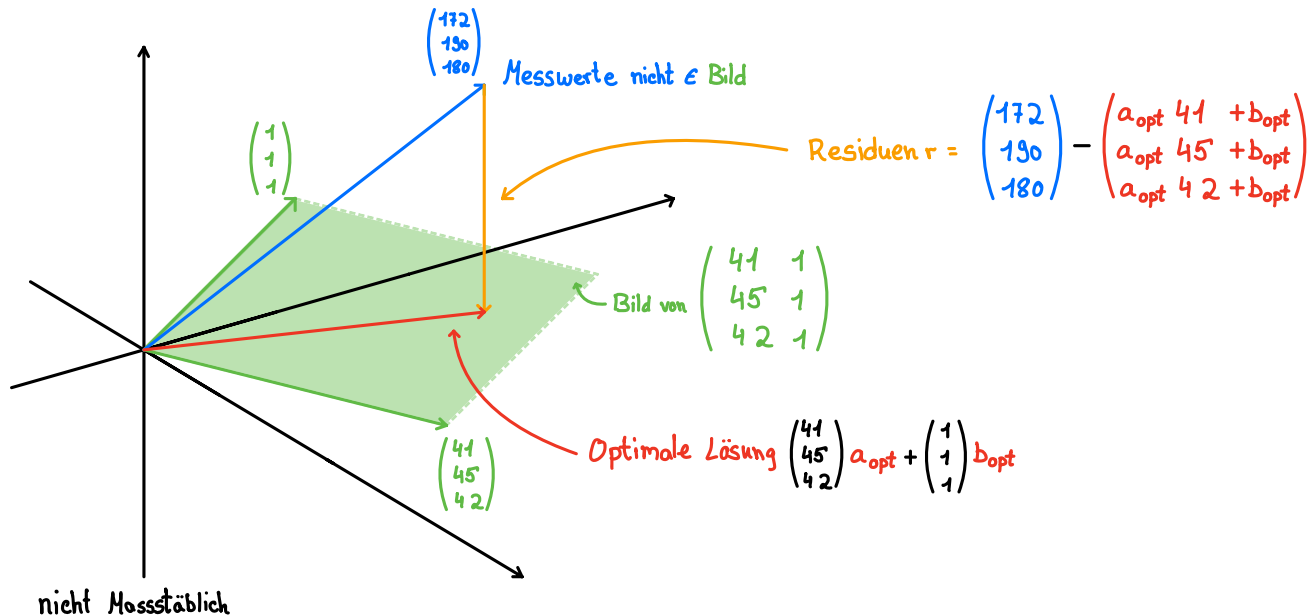


Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein überbestimmtes LGS $Ax=c$ finden?

Nehmen wir als Bsp ein System mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 172 &= a \cdot 41 + b \\ 190 &= a \cdot 45 + b \\ 180 &= a \cdot 42 + b \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie folgt vorstellen:



Wir wollen nun die Länge des Residuenvektors minimieren:

$$\|r\| = \sqrt{((a \cdot 41 + b) - 172)^2 + ((a \cdot 45 + b) - 190)^2 + ((a \cdot 42 + b) - 180)^2}$$

Wie finde ich nun a und b , so dass $\|r\|$ minimal ist?

a_{opt} und b_{opt} finden wir durch:

$$A \cdot y \perp r \quad (\text{Bild von } A \text{ orthogonal zu } r)$$

$$\langle A \cdot y, r \rangle = 0$$

$$(A \cdot y)^T \cdot r = 0 \quad (\text{Skalarprodukt ausgeschrieben})$$

$$y^T A^T (A \cdot \begin{pmatrix} a_{\text{opt}} \\ b_{\text{opt}} \end{pmatrix} - c) = 0 \quad (r \text{ eingesetzt})$$

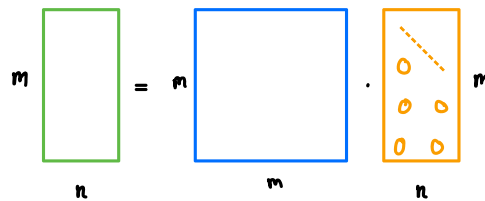
$$y^T A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{\text{opt}} \\ b_{\text{opt}} \end{pmatrix} - y^T A^T c = 0$$

$$A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{\text{opt}} \\ b_{\text{opt}} \end{pmatrix} = A^T c$$

QR-Zerlegung:

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer Rechtsdreiecksmatrix

$$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$$



Anwendung: Die QR-Zerlegung wird für ein alternatives Lösungsverfahren der kleinsten Quadrate gebraucht, welches numerisch bessere Resultate liefert.

Berechnung:

11.2 QR-Zerlegung

Mit der QR-Zerlegung kann eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer oberen Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verwandelt werden:

$$A = Q \cdot R$$

Vorgehen:

Wir wollen nacheinander alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen von A eliminieren.

- ① Man wähle zu eliminierendes Element und benenne es a_{ij} .

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{31}$ soll eliminiert werden

- ② Lese i, j ab und notiere a_{jj}, a_{ij}

Bsp: $i = 3, j = 1 \Rightarrow a_{jj} = 1, a_{ij} = 1$

- ③ Berechne $w = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$

Bsp: $w = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

- ④ Man finde die richtige Rotationsmatrix Q'^T . Man nehme zuerst die Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und setze $i_{ii} = \cos(\alpha)$, $i_{ij} = -\sin(\alpha)$, $i_{ji} = \sin(\alpha)$, $i_{jj} = \cos(\alpha)$.

Bsp: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

- ⑤ Setze in Rotationsmatrix $\sin(\alpha) = \frac{a_{ij}}{w}$ und $\cos(\alpha) = \frac{a_{jj}}{w}$

Bsp: $Q'^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- ⑥ Berechne $Q'^T \cdot A = A'$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- ⑦ Falls A' keine obere Dreiecksmatrix, wiederhole (finde Q''^T etc.) bis alle nötigen Elemente eliminiert.

Bsp: $Q''^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ⑧ Wenn $A'' = R$ gefunden, berechne $Q = (Q''^T \cdot Q'^T)^T \Rightarrow A = Q \cdot R$

Anwendung für kleinste Quadrate:

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung

Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

- ① Man bestimme A und c wie bei 10.1.

$$\text{Bsp: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ② Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

$$\text{Bsp: } Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ③ Man berechne $d = Q^T \cdot c$

$$\text{Bsp: } d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- ④ Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot \boxed{x} = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

$$\text{Bsp: } R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

→ optimale Lösung