Definition:

Gleichungssysteme sind Mengen von Gleichungen mit einer oder mehreren Variabeln.

Wann ist ein Gleichungssystem linear?

→ Wenn die Unbekannten nur in der ersten Potenz vorkommen. Meistens werden die Variabeln mit reellen Skalaren multipliziert.

Bsp: linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$$

nicht linear:

$$\begin{cases} e^{x_1} + x_2^2 = 6 \\ \frac{1}{x_1} + \cos(x_2) = 2 \end{cases}$$

Notation:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 9 \end{array}$$

Matrix-Vektorprodukt $Ax = b$:

$$A := \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n}}_{} \Bigg\} m$$

$m \times n$ Matrix

m Gleichungen

n Unbekannte

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

das Produkt wird definiert als:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} = b$$

Lösungsverfahren:

Ein LGS hat entweder:

→ eine eindeutige Lösung

→ unendlich viele Lösungen

→ keine Lösung

Um Lösungen zu finden benutzen wir den Gausschen Algorithmus. Dieser besteht aus elementaren Zeilenumformungen.

I.) vertauschen von zwei Zeilen

II.) addieren eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Die Lösungsmenge bleibt durch diese Operationen unverändert. Mit Hilfe dieser Zeilenumformungen bringen wir das LGS in die Zeilenstufenform. In dieser Form lässt sich das LGS durch Rückwärtseinsetzen lösen und wir können die Pivots identifizieren.

für $m = n$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}$$

für $m \neq n$

$\bigcirc \rightarrow$ Pivot

Die Anzahl Pivots ist auch gleich dem Rang des LGS. Wie können wir nun wissen ob ein LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat? Betrachten wir einige LGS in Zeilenstufenform.

$$\text{rang}=3 \left\{ \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 \; x_2 \; x_3}}^{n=3}} & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array} \right. \qquad \text{rang}=2 \left\{ \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 \; x_2 \; x_3}}^{n=3}} & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \qquad \text{rang}=2 \left\{ \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 \; x_2 \; x_3}}^{n=3}} & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Wenn Rang gleich Anzahl Unbekannte.

eindeutige Lösung

Wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letzte Zeile immer gültig. (Nullzeile)

unendlich viele Lösungen

Wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letzte Zeile nie gültig (Verträglichkeitsbedingungen)

Keine Lösung

Geometrische Interpretation:

Zeileninterpretation:

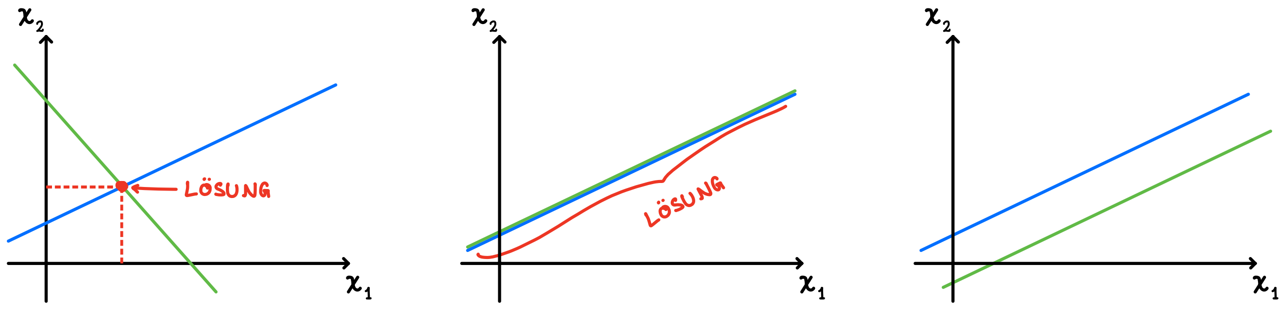
Betrachten wir die einzelnden Zeilen eines 2×2 LGS, so können wir 2 Geraden im 2-D Raum definieren.

Analog in 3-D mit Ebenen.

Bsp:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 = 5 & \Leftrightarrow & x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2} \\ 5x_1 + 1x_2 = 7 & \Leftrightarrow & x_2 = 7 - 5x_1 \end{array}$$

Abhänig von der Lösungsmenge können in 2-D folgende Fälle auftreten.



eindeutige Lösung — unendlich viele Lösungen — keine Lösung

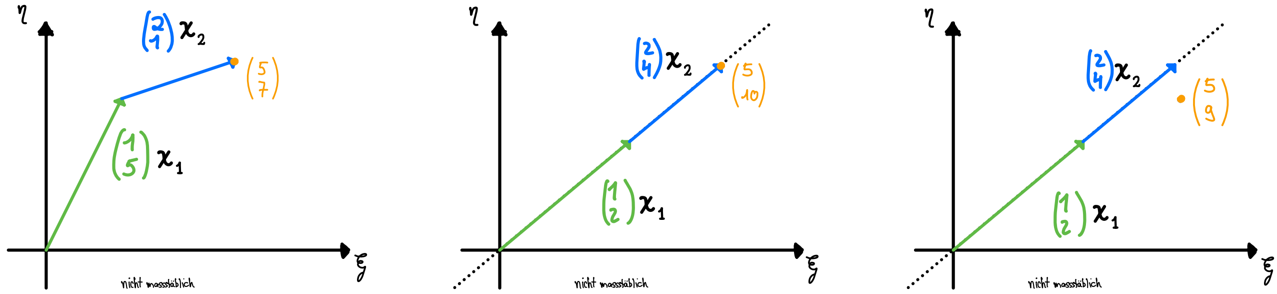
Spalteninterpretation:

Dafür nehmen wir die Spalten als Vektoren und stellen unser LGS als Linearkombination der Spalten dar. Linearkombination bedeutet hier skalieren und addieren der Vektoren.

Bsp.:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 5x_1 + 1x_2 &= 7 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}x_2 = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

Graphisch:



eindeutige Lösung

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

keine Lösung

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wenn die Spaltenvektoren wie im ersten Beispiel in unterschiedliche Richtungen zeigen gibt es für jedes b ($Ax = b$) eine eindeutige Lösung. In diesem Fall sagen wir, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Wir erkennen ausserdem, dass der Rang voll ist ($r = m$). Gleichermassen, wenn der Rang nicht voll ist ($r < m$) sind mind. zwei Spalten linear abhängig (zeigen in dieselbe Richtung). Der Rang sagt uns also u.A. wie viele Spaltenvektoren linear unabhängig sind und dadurch auch die Dimension des Lösungsraum

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig