

## Intuition:

Wenn wir Zählen lernen, entwickeln wir ein abstraktes Gefühl für Zahlen.

$$\text{apple apple} \quad \triangle \triangle \triangle \quad \times \times \times \quad \square \square \square \longrightarrow "3"$$

egal welches Objekt wir können einer gewissen Anzahl Objekten eine Zahl zuweisen.

Die Zahl 3 ist demnach nicht nur an Äpfel gebunden, sondern kann auch auf Dreiecke, Kreuze, etc. angewendet werden.

Wir wissen auch was passiert wenn wir zuerst 3 Äpfel und dann 2 Äpfel haben.

$$\begin{array}{c} \text{apple apple apple} \\ \text{apple apple} \end{array} \longrightarrow "5"$$

Dieses Gefühl für Addition gilt nicht exklusiv für Äpfel, sondern lässt sich auch auf andere Objekte übertragen.

$$\text{square square square} + \text{square square} \longrightarrow "5" \quad \square \square \square + \square \square \longrightarrow "5"$$

Wir können Geld genau so gut wie Äpfel, Birnen und Rechtecke addieren. Wir haben also den Begriff der Addition abstrahiert (auf allgemeine Fälle erweitert).

Analog auch die Multiplikation.

Dasselbe machen wir nun mit Vektoren.

Bis jetzt haben wir Vektoren v.a. als Pfeile im Raum bzw. Ebene kennengelernt. Wir wissen schon wie man mit ihnen rechnet. Nun können Vektoren, genau wie Zahlen, nicht nur Pfeile darstellen, sondern beliebige Objekte z.B.

- Kräfte
- Position
- Liste von Zahlen
- Funktionen usw.

Wir wissen bereits wie wir mit Pfeilen im Raum rechnen können:

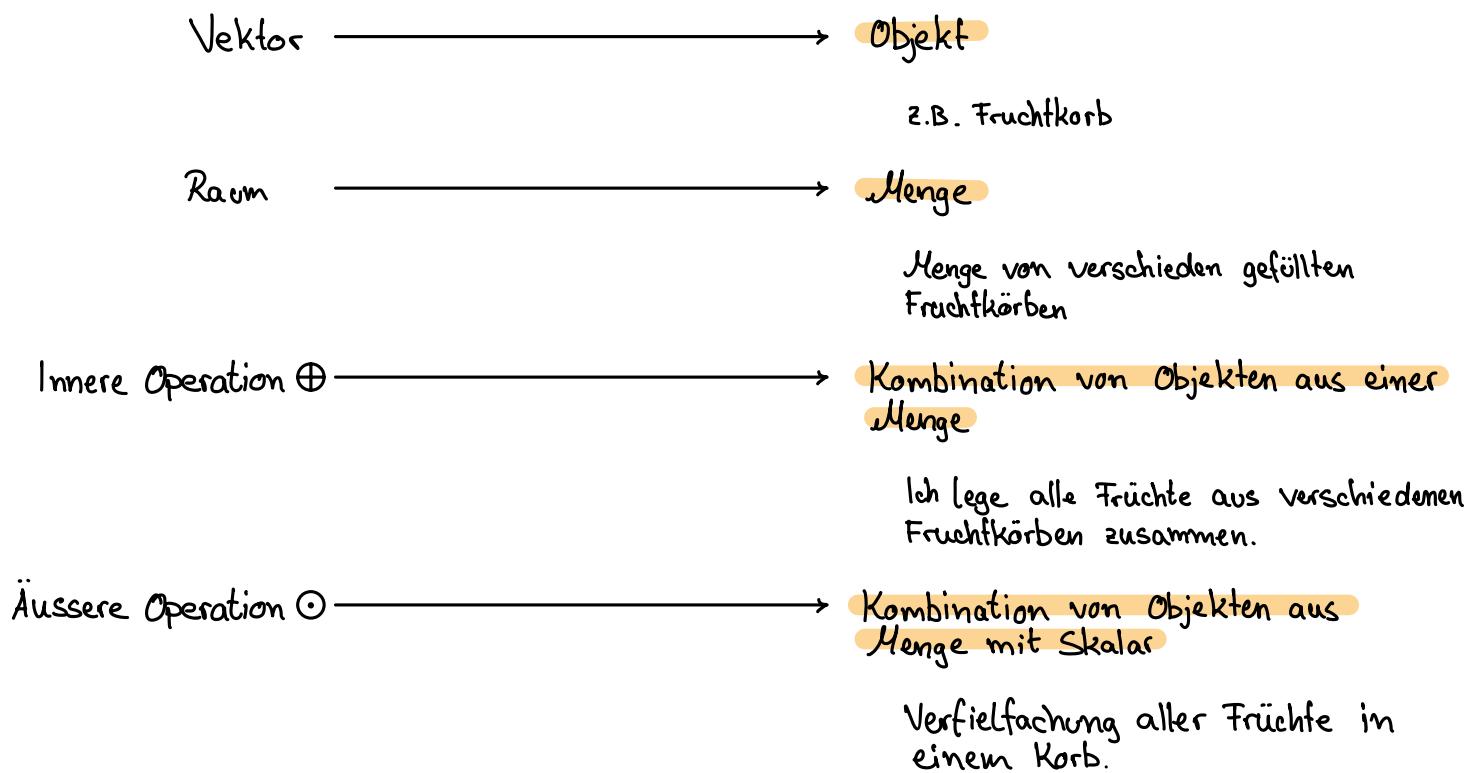


Nun wollen wir auch diese Operationen auf alle Anwendungen von Vektoren abstrahieren.

Ausschlaggebend sind dafür die Regeln der Operation nicht die Objekte.

→ Rechenregeln werden zu Axiomen

### Wichtige Begriffe:



## 4. Vektorräume

### 4.1 Definition Vektorraum

Sei  $V$  eine Menge von Objekten.  $V$  heißt Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äußere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

**Innere Operation:**

$$\oplus: V \times V \rightarrow V \\ (a, b) \mapsto a \oplus b$$

**Äußere Operation:**

$$\odot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V \\ (\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$$

## Axiome:

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äußere Operation definiert werden.

$\oplus: V \times V \rightarrow V$  ( $\oplus$  nimmt zwei Vektoren aus der Menge  $V$  und ordnet dem Paar einen anderen Vektor in  $V$  zu.)

$(a, b) \mapsto a \oplus b$  (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\odot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  ( $\odot$  nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in  $V$ )

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$  (so wird die äußere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äußeren Operationen, folgende Axiome gelten.

Axiome:	
(A1) $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u$	Vektorielles Kommutativgesetz
(A2) $\forall u, v, w \in V : (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$	Vektorielles Assoziativgesetz
(A3) $\exists 0 \in V, \forall u \in V : u \oplus 0 = u$	Neutrales Element (Nullvektor)
(A4) $\forall u \in V, \exists -u \in V : u \oplus (-u) = 0$	Inverses Element
(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$	Skalares Assoziativgesetz
(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V : (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$ $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$	Distributivgesetz
(M3) $\forall u \in V : 1 \odot u = u$	Neutrales Element

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob eine Menge mit bestimmten Operationen einen Vektorraum beschreibt. Dafür müssen wir alle Axiome prüfen.

## Zusammenfassend:

Wir wollen unsere Vorstellung von Vektoraddition und Multiplikation, von den uns bekannten Vektorpfeilen im Raum und Ebene, auf alle möglichen Vektoren abstrahieren (verallgemeinern). Damit können wir dann später die Eigenschaften von Vektoren auch auf andere Objekte (welche sich als Vektoren darstellen lassen) anwenden.

## Unterräume:

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge  $U$  eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

- (i)  $\forall a, b \in U: a+b \in U$  → Summe von zwei Elementen von  $U$  ist weiterhin Teil von  $U$
- (ii)  $\forall a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot a \in U$  → Wird ein Element von  $U$  mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von  $U$ .

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum.

### Bsp. I:

Sei  $V$ : alle affin-linearen Funktionen der Form:  $a(x) = a_1x + a_2$

und  $U$ : alle affin-linearen Funktionen mit Steigung 2:  $f(x) = 2x + b$

Ist  $U$  ein Unterraum von  $V$ ?

$$(i) \forall a, b \in U: a+b \in U$$

$$\rightarrow (2x + b_1) + (2x + b_2) = 4x + b_1 + b_2 \rightarrow \text{nicht Teil von } U$$

$U$  ist kein Unterraum von  $V$

### Bsp. II:

Sei  $V$ : alle affin-linearen Funktionen der Form:  $a(x) = a_1x + a_2$

und  $U$ : alle konstanten Funktionen:  $f(x) = b$

Ist  $U$  ein Unterraum von  $V$ ?

- (i)  $\forall a, b \in U: a+b \in U \rightarrow f_1(x) + f_2(x) = b_1 + b_2 \quad \left. \right\} \text{Teil von } U$
- (ii)  $\forall a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot a \in U \rightarrow \alpha f_1(x) = \alpha \cdot b_1 \quad \left. \right\} \text{Teil von } U$

$U$  ist ein Unterraum von  $V$

## Normierte Vektorräume:

Eine Norm ist eine fixe Regel mit welcher man jedem Vektor, in einem VR, eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man sie dann vergleichen.

Mathematisch lässt sich das wie folgt durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

Es gibt viele Möglichkeiten diese Zuordnung zu machen. Z.B.:

geometrische Länge (Euklidische Norm)

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

größter Eintrag (Maximumsnorm)

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

$\forall v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$  muss gelten:

1.  $\|v\| \geq 0$  und  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3.  $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele solcher Normen sind:

Auf  $\mathbb{R}^n$  {

$\ v\ _2 := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$	(Euklidische Norm)
$\ v\ _\infty := \max( v_1 , \dots,  v_n )$	(Maximumsnorm)
$\ v\ _p := ( v_1 ^p + \dots +  v_n ^p)^{\frac{1}{p}}$	(p-Norm, $1 \leq p < \infty$ )

Auf  $\mathbb{R}^{n \times m}$  {

$\ A\ _2 := \sqrt{\sum_{i,j}  a_{ij} ^2}$	(Hilbert-Schmidt-Norm)
$\ A\ _{SM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m  a_{ij} $	(Spaltenmaximumsnorm)
$\ A\ _{ZM} := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n  a_{ij} $	(Zeilenmaximumsnorm)

## Skalarprodukt:

Wir haben nun ein Tool um die Grösse von Vektoren in einem Vektorraum zu vergleichen. In diesem nächsten Schritt wollen wir die Beziehung zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl beschreiben. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$  muss gelten:

1.  $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2.  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  dann sind  $x, y$  orthogonal ( $x \perp y$ )

Es gibt viele weitere Skalarprodukte! Oft müsst ihr zeigen ob eine Abbildung ein Skalarprodukt ist.

Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden.

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Diese Norm erfüllt immer alle Bedingung für eine Norm, egal welches Skalarprodukt.

## Überblick:

### 7.1 Definition Vektornorm

Eine Norm im Vektorraum  $V$  ordnet jedem Vektor  $v$  eine reelle Zahl  $\|v\|$  zu und kann so als eine Art Mass verstanden werden.

Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

- ①  $\|v\| \geq 0$  und  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- ②  $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
- ③  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

### 8.1 Definition Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Paar  $x, y$  von Vektoren eine Zahl  $\langle x, y \rangle$  zu.

Es muss folgende Bedingungen erfüllen:

- ①  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- ②  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- ③  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ④  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beispiele für Skalarprodukte

- Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ :  $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$
- Funktionenskalarprodukt:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Rechenregeln:

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T Ay \rangle$$

$$\cos \phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2$$

Eine Norm ordnet jedem Vektor eine reelle Zahl zu.

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zu.

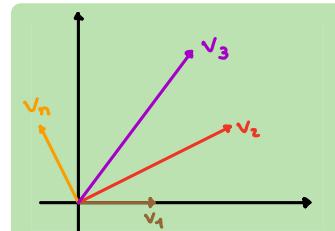
## Erzeugendensysteme und Basen:

Sei  $v := \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , dann ist  $v$  eine Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$ . Dabei sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  und  $v_1, \dots, v_n \in$  von einem VR.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Menge aller möglichen Linearkombinationen nennt sich **Lineare Hülle** und wird mit  $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$  abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum  $V$ . Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind dann ein **Erzeugendensystem** von  $V$ .



$$\text{Vektorraum } V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

Es lassen sich nun alle Vektoren in  $V$  durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.

Betrachten wir Beispielsweise 2D Vektorpfeile ( $V = \mathbb{R}^2$ ). Es lassen sich beliebig viele Erzeugendensysteme finden:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

⋮

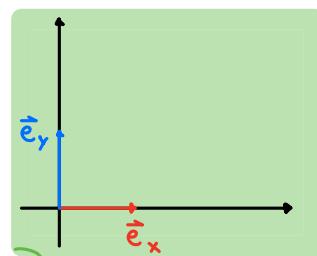
etc.

Wenn alle Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  eines Erzeugendensystems linear unabhängig sind dann handelt es sich um eine Basis. Die Vektoren heißen dann Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standartbasis“  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  verwendet.

Wobei:  $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

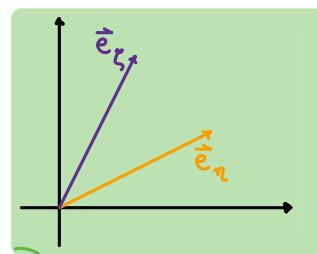


Vektorraum  $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere, linear unabhängige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B.  $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wieder kann jeder Vektor eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



Vektorraum  $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Die Anzahl der benötigten Basisvektoren bleibt erhalten. Diese Anzahl nennt man Dimension.

In unserem Fall mit  $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ , hat der VR  $V$

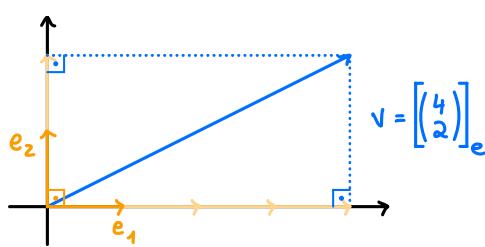
die Dimension 2.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  äquivalent:

- $A$  hat vollen Rang
- $Ax = b$  besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$  ist für beliebiges  $b$  lösbar
- Das homogene LGS  $Ax = 0$  hat nur die triviale Lösung ( $x = 0$ )
- $A$  ist invertierbar/regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von  $A$  sind eine Basis von  $\mathbb{R}^n$

## Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

### Orthonormalbasis (ONB)

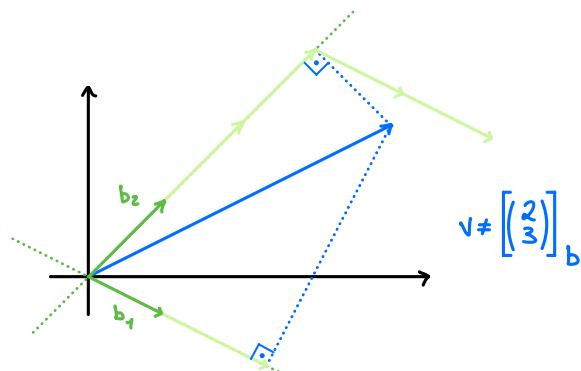


Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

Z.B.:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.



Bei einer nicht ortho-normalen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

Z.B.:

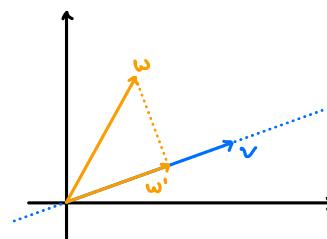
$$b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn nicht orthogonal projizieren. (LGS lösen)

### Orthonormalprojektion:

Ein Vektor  $w$  lässt sich auf einen Vektor  $v$  wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$



Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis des Vektorraums  $V$ , dann gilt  $\forall x \in V$ :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Bzw. Kann ich aus jeder herkömmlichen Basis eine Orthonormalbasis basteln?

Ja!

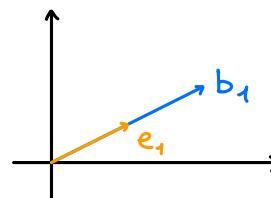
Dazu benutzen wir das **Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren**.

Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  und ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis  $E = \{e_1, \dots, e_k\}$

i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor  $b_1$  und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



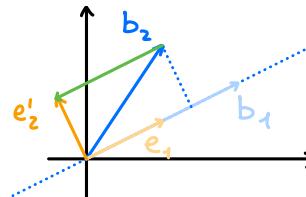
ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor  $b_2$ , ziehe zuerst den zu  $b_1$  parallelen

Teil ab

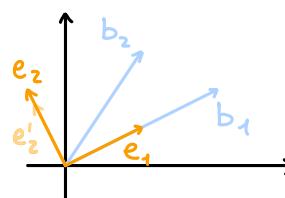
$$e'_2 = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1$$

projektion von  
 $b_2$  auf  $e_1$

und normiere ihn dann



$$e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{e'_2}{\sqrt{\langle e'_2, e'_2 \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor  $b_i$

$$e'_i = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|} = \frac{e'_i}{\sqrt{\langle e'_i, e'_i \rangle}}$$

Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!