Fundamento matemático: Proyecto Física Matematica 1

Nancy Carolina Burgos Bedoya

11 de noviembre de 2025

Resumen

En este documento se presentan los cálculos fundamentales de varias series de Fourier en base a señales periodicas usadas en la aplicación:

- Señal cuadrada.
- Señal triangular.
- Peridica.
- Diente de sierra
- Beats.

1. La serie de Fourier

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo 2π. Si f es integrable en $[-\pi, \pi]$ podemos escribirla de la siguiente manera:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big),$$

donde los coeficientes se definen como:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Si la función tiene simetrías (par/ímpar) los coeficientes se simplifican de la siguiente manera:

- Si f es par: todos los $b_n = 0$.
- Si f es impar: todos los $a_n = 0$.

2. Señal cuadrada

Dado una señal con período $\mathrm{T} = 2\pi$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

Esta función es impar, por tanto $a_n = 0$ para todo n y solo hay coeficientes b_n.

Calculamos b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{sq}}(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right].$$

Como $\cos(n\pi) = (-1)^n$, entonces

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

Observamos que si n es par, $1-(-1)^n = 0 \Rightarrow b_n = 0$. Si n es impar, $1-(-1)^n = 2$ entonces

$$b_n = \frac{4}{\pi n}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Así la serie de Fourier para una señal cuadrada es

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\big((2k+1)x\big).$$

3. Señal triangular

Dado una señal triangular con T = 2 π definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi}, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 2\Big(1-\dfrac{x}{\pi}\Big), & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$$

Nótese que la función es impar, todos los coeficientes a_n son cero y la serie de Fourier toma la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{tri}}(x)\sin(nx)\,dx.$$

Calculamos b_n resolviendo la integral

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f_{\text{tri}}(x)\sin(nx)\,dx.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2}\frac{2x}{\pi}\sin(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 2\Big(1-\frac{x}{\pi}\Big)\sin(nx)\,dx\right).$$

$$b_n = \frac{8}{\pi^2}\,\frac{\sin\big(\frac{\pi n}{2}\big)}{n^2}.$$

Analizando el valor de $\sin\big(\frac{\pi n}{2}\big)$ tenemos que:

$$\sin\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Por tanto $b_n = 0$ para n par, y para n impar (escribiendo $n = 2k+1$) obtenemos:

$$b_n = \frac{8}{\pi^2}\,\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Y la serie de Fourier queda:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,\sin\big((2k+1)x\big)$$

4. Parábola

Considérese $f(x) = x^2$ definida en $[-\pi, \pi]$ y período 2π. Esta función es par, por tanto $b_n = 0$. Calculamos los otros coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3},$$

luego $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{\pi^2}{3}$.

Para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx.$$

Integrando por partes (dos veces) se obtiene la fórmula estándar

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Por tanto la serie completa es:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

5. Diente de sierra

Consideremos con período 2π-definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi,$$

Como $f(x)$ es impar, $a_n = 0$ y nos queda solo b_n

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Por simetría (función impar),

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx.$$

Calculamos la integral por partes. Sea

$$I_n = \int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx,$$

con $u = x$, $dv = \sin(nx)\,dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$, por lo que

$$I_n = \Big[-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx.$$

La segunda integral vale cero, pues $\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}\sin(n\pi) = 0$. Por tanto,

$$I_n = -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) = -\frac{\pi}{n}(-1)^n.$$

Sustituyendo en la expresión de b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi^2}I_n = \frac{2}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

De modo que los coeficientes de Fourier son:

$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

Reescribiendo la serie completa:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

6. Beats

Sea la suma de dos sinusoidales de igual amplitud A y frecuencias f_1, f_2:

$$y(t) = A\sin(2\pi f_1 t) + A\sin(2\pi f_2 t).$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

con $\alpha = 2\pi f_1 t,\ \beta = 2\pi f_2 t$, obtenemos

$$y(t) = 2A\sin\left(2\pi\frac{f_1+f_2}{2}\,t\right)\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}\,t\right).$$

Interpretación:

- La señal se ve como una portadora de frecuencia central

  $$f_c = \frac{f_1+f_2}{2},$$

  multiplicada por una envolvente que varía a baja frecuencia

  $$f_{\text{env}} = \frac{|f_1-f_2|}{2}.$$

- Cuando $f_1 \approx f_2$ la diferencia f_b es pequeña, por lo que la envolvente cambia lentamente y se aprecian claramente los batidos.
- Si $f_1 = f_2 = f$ entonces

  $$y(t) = 2A\sin(2\pi f t),$$

  es decir hay interferencia constructiva permanente y la amplitud es el doble.

Las envolventes superior e inferior que encierran la oscilación rápida son

$$y_{\text{sup}}(t) = +2A\left|\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right)\right|, \qquad y_{\text{inf}}(t) = -2A\left|\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right)\right|.$$

7. Notas

- Las series de Fourier nos permiten obtener una aproximación de la función original sumando términos con senos y cosenos, modulados por coefientes.
- En la aplicación se muestra también una métrica numérica que cuantifica la diferencia entre la señal original y la suma parcial llamada error cuadrático medio. Mientras menos sea su valor más cercana es la aproximación.
- El caso de beats ilustra la relación entre dominio temporal y el dominio de la frecuencia: dos picos cercanos en frecuencia producen una modulación en el dominio del tiempo.