

**Facteurs de couleur
de la chromodynamique quantique (QCD)**

Vera Derya

Superviseur : I. Schienbein

1ere version : Octobre 3, 2008
Version actuelle : Janvier, 2023

Traduit de l'anglais par :
Filip Croijmans et Xu Wentao

Sommaire

1 Préface	3
1.1 A propos du LPSC.....	3
1.2 Organisation du contenu.....	3
2 Le groupe SU(N)	4
2.1 Générateurs de SU(N).....	4
2.2 Algèbre de Lie $\mathfrak{su}(N)$	5
2.3 Représentation adjointe de $\mathfrak{su}(N)$	6
2.4 SU(2) et SU(3).....	7
2.5 Quelques relations utiles.....	7
2.6 Opérateurs de Casimir.....	8
3 Facteurs de couleur	9
3.1 QCD.....	9
3.2 Règles de Feynman.....	9
4 Exemples de calcul de facteurs de couleur	11
4.1 Correction d'une boucle au propagateur de quarks.....	11
4.2 Correction d'une boucle-gluon au propagateur de gluons.....	11
4.3 Correction d'une boucle-quark au propagateur de gluons.....	12
4.4 Correction d'une boucle au vertex quark-gluon.....	12
4.5 Correction d'une boucle au vertex à trois quarks 1.....	13
4.6 Correction d'une boucle au vertex à trois quarks 2.....	13
4.7 Processus $g + g \rightarrow g + g$	13
4.8 Processus $q + q \rightarrow q + q$	14
4.9 Processus $g + q \rightarrow g + q$	14
4.10 Processus $g + q \rightarrow q + \gamma$	15
5 Algorithme	15
5.1 Code source.....	16
A Opérateur de projection	20

1 Préface

1.1 A propos du LPSC

Le présent rapport a été rédigé pendant un stage de cinq semaines au sein du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC) à Grenoble. Le LPSC rassemble environ 200 employés et constitue un notable institut de recherche fondamentale en France avec plusieurs collaborateurs internationaux.

Il s'agit d'une union de l'IN2P3 (Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules), ST2I (Sciences et Technologies de l'Information et de l'Ingénierie), CNRS (Centre National de Recherche Scientifique), UGA (Université Grenoble-Alpes, anciennement Université Joseph-Fourier) et INP-UGA (Institut d'ingénierie et de management de l'Université Grenoble-Alpes, anciennement INPG).

Les principaux champs de recherche sont la physique des particules et symétries, l'astrophysique, la cosmologie, la physique nucléaire avec ses applications énergétiques et médicales, ainsi que le développement et mise au point des accélérateurs de particules.

1.2 Organisation du contenu

Tout d'abord nous nous focaliserons sur le groupe $SU(N)$, ses générateurs et l'algèbre de Lie. Cela est essentiel puisque $SU(3)$ est le groupe de jauge de la chromodynamique quantique (cf. Sec. 3).

Ensuite nous introduirons les facteurs de couleur en parallèle avec les règles de Feynman avant de présenter le calcul sur quelques exemples.

Enfin, nous mettrons en place un algorithme, et son implémentation dans *Mathematica*, pour le calcul des facteurs de couleur.

2 Groupe SU(N)

Le groupe spécial unitaire $SU(N)$ est un sous-groupe du groupe unitaire $U(N)$. Le groupe unitaire est constituée de toutes les matrices unitaires $N \times N$, tandis que le groupe spécial unitaire ne contient que les matrices unitaires spéciales $N \times N$ dont le déterminant vaut 1. Ainsi nous avons deux conditions quant à un élément $A \in SU(N)$:

1. Unitaire : $A^\dagger A = \mathbb{1}_N$ (avec A^\dagger la matrice transposée-conjuguée ou adjointe)
2. Déterminant : $\det A = 1$

Une matrice A de $SU(N)$ a N^2 composantes complexes A_{ij} et peut être décrite par $2N^2$ valeurs réelles $\Re(A_{ij})$ et $\Im(A_{ij})$. En effet, le nombre de paramètres réels indépendants déterminant la matrice est plus petit. La première condition conduit à N^2 équations pour les éléments de la matrice et avec la deuxième condition nous obtenons $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ paramètres réels indépendants appelés $\alpha_1, \dots, \alpha_{N^2-1}$.

Nous avons trouvé une paramétrisation $h : \mathbb{R}^{N^2-1} \rightarrow SU(N)$ pour les éléments du groupe $SU(N)$ qui est continu et qui possède une fonction inverse également continue. La fonction inverse h^{-1} est un homéomorphisme et peut être considérée comme une table de dimension $(N^2 - 1)$. Le groupe $SU(N)$ est aussi une variété différentielle de dimension $(N^2 - 1)$ et pour cette raison il est un groupe de Lie.

2.1 Générateurs de SU(N)

Soit D une représentation du groupe. Nous pouvons la paramétriser avec un ensemble de paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_{N^2-1}$ et nous choisissons la matrice identité comme la valeur de D en $\alpha = 0$. Dans le voisinage de l'identité nous développons D en une série de Taylor :

$$D(\alpha) = D(0) + \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \alpha_a + \dots [5]$$

avec la convention sommatoire d'Einstein que nous appliquerons désormais sans mention explicite.

En utilisant la définition de certains générateurs $T^a := -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha) \Big|_{\alpha=0}$ on obtient :

$$D(\alpha) = 1 + iT^a \alpha_a + \dots$$

Si α est proche de 0, nous pouvons ne prendre en compte que la partie linéaire. Généralement la représentation pourrait être réalisé par

$$D(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iT^a \alpha_a}{k} \right)^k = e^{iT^a \alpha_a}$$

ce qui explique pourquoi on appelle les T^a des générateurs. Elles forment la base de l'espace tangent de la matrice unité : $T_1 SU(N)$.

Les conclusions ci-dessus étaient assez générales et si maintenant nous considérons encore une fois le groupe $SU(N)$, nous pouvons poser la question suivante 'comment pouvons-nous trouver des générateurs de ce groupe ?'. Dans ce qui suit nous allons voir que les matrices hermitiennes, de trace nulle, sont lesdites générateurs.

- T^a hermitienne $\Rightarrow D(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a}$ unitaire :

Preuve :

$$D(\alpha)^\dagger D(\alpha) = e^{-i(T^a)^\dagger \alpha_a} e^{iT^a \alpha_a} = e^{-iT^a \alpha_a} e^{iT^a \alpha_a} = 1$$

- T^a hermitienne et de trace nulle $\Rightarrow \det(e^{i\alpha_a T^a}) = 1$:

Preuve :

Une combinaison linéaire $H := \alpha_a T^a$ de générateurs hermitiens et de traces nulles est une matrice hermitienne, de trace nulle. H est diagonalisable puisqu'elle est hermitienne et il est possible de choisir une base S dans laquelle H est diagonale. Le déterminant peut être calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \det(e^{iH}) &= \det(e^{iS^{-1}HS}) \\ &= \prod_k e^{(iS^{-1}HS)_{kk}} \\ &= e^{i\text{Tr}(S^{-1}HS)} = e^{i\text{Tr}(H)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé la propriété que le déterminant et la trace d'une matrice sont invariants par changement de base.

2.2 Algèbre de Lie $\mathfrak{su}(N)$

L'avantage majeur de l'utilisation des générateurs est qu'elles établissent un espace vectoriel $\mathfrak{su}(N)$. Une base $\{T^a\}$ de matrices hermitiennes et de traces nulles doit contenir $(N^2 - 1)$ matrices linéairement indépendantes car c'est la dimension de cet espace.

Maintenant il est possible de trouver une autre structure sur $\mathfrak{su}(N)$ en considérant le commutateur de matrices comme une application bilinéaire de $\mathfrak{su}(N) \times \mathfrak{su}(N)$ dans $\mathfrak{su}(N)$.

Nous prenons la définition suivante pour une algèbre de Lie [7] :

Soit L un espace vectoriel sur le corps k . L est une algèbre de Lie \Leftrightarrow il existe une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ avec $[x, x] = 0$ pour tout $x \in L$ et $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ pour tout $x, y, z \in L$ (identité de Jacobi).

Le premier attribut du crochet dit de Lie est évidemment respecté avec le commutateur de matrices et le second suit en développant les commutateurs. Ainsi $\mathfrak{su}(N)$ est une algèbre de Lie.

Il est souvent utile d'avoir une autre expression du commutateur $[T^a, T^b]$. Dans ce qui suit nous allons voir que $i[T^a, T^b]$ est un élément de $\mathfrak{su}(N)$.

- $(i[T^a, T^b])^\dagger = -i[T^b, T^a] = i[T^a, T^b]$ parce que T^a et T^b sont hermitiennes.
- $\text{Tr}([T^a, T^b]) = \text{Tr}(T^a T^b) - \text{Tr}(T^b T^a) = 0$ car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

$i[T^a, T^b]$ est une matrice hermitienne, de trace nulle, et de ce fait elle peut être exprimée comme une combinaison linéaire de générateurs :

$$i[T^a, T^b] = -f^{abc}T^c \Rightarrow [T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (2.1)$$

avec les coefficients f^{abc} nommés coefficients de structure, spécifiant l'algèbre de Lie. Ils dépendent de la base de $\mathfrak{su}(N)$ et sont réels et antisymétriques. Pour montrer cela, nous avons recours à l'anticommutativité du commutateur et le fait que les générateurs sont hermitiens :

$$\begin{aligned} if^{abc}T^c &= [T^a, T^b] = -[T^b, T^a] = -if^{bac}T^c \\ \Rightarrow f^{abc} &= -f^{bac}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} if^{abc}T^c &= [T^a, T^b] = [T^b, T^a]^\dagger = -i(f^{bac})^*T^c \\ \Rightarrow f^{abc} &= (f^{abc})^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

En résumé, comme nous pouvons voir sur la Fig. 1., nous avons exploité la structure du groupe de Lie $SU(N)$ afin d'obtenir certains générateurs qui appartiennent à l'espace tangent de la matrice unité. Ces générateurs, combinés avec le commutateur matriciel, établissent l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(N)$.

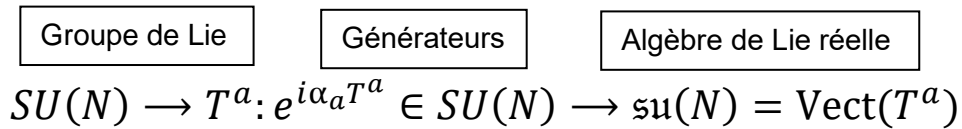


Figure 1. : Lien entre un groupe de Lie et une algèbre de Lie

2.3 Représentation adjointe de $\mathfrak{su}(N)$

Elle est générée par les constantes de structure. Ils peuvent être évoqués pour définir des matrices $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ [5] :

$$F_{bc}^a := -if^{abc} \quad (2.4)$$

Il est possible de réécrire l'identité de Jacobi pour les générateurs avec $[T^a[T^b, T^c]] = -f^{bcd}f^{ade}$ ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} f^{abd}f^{cde} + f^{bcd}f^{ade} + f^{cad}f^{bde} &= 0 \\ \Leftrightarrow -if^{abd}F_{ce}^d + [F^a, F^b]_{ce} &= 0 \Rightarrow [F^a, F^b] = if^{abc}F^c. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.4 SU(2) et SU(3)

$SU(2)$ et $SU(3)$ sont des algèbres importantes en physique des particules. Les générateurs standards de $SU(2)$ en physique sont $T^a = \frac{1}{2}\sigma_a$, ($a = 1, \dots, 3$), avec σ_a les matrices de Pauli. Pour $SU(2)$ les coefficients de structure de l'algèbre sont équivalents au symbole de Levi-Civita $f^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$.

Les générateurs standards de $SU(3)$ en physique sont $T^a = \frac{1}{2}\lambda_a$, ($a = 1, \dots, 8$), avec λ_a les matrices de Gell-Mann [1,5].

2.5 Quelques relations utiles

Dans cette partie nous présentons une liste de relations utiles pour l'algèbre de Lie $SU(N)$. Elles seront implémentées dans le code *Mathematica* décrit dans la partie 5.1.

$$\text{Coefficients de structure antisymétriques : } [T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (2.6)$$

$$\text{Trace nulle : } \text{Tr}(T^a) = 0. \quad (2.7)$$

$$\text{Normalisation : } \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (2.8)$$

$$\text{Coefficients de structure symétriques : } \{T^a, T^b\} = \frac{1}{N}\delta_{ab} + d^{abc}T^c. \quad (2.9)$$

$$\text{Opérateur de projection : } T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}). \quad (2.10)$$

La démonstration de l'équation (2.10) a été reporté dans l'appendice.

A partir des équations (2.6) - (2.10) nous pouvons facilement déduire les formules suivantes :

$$f^{abc} = -2i\text{Tr}(T^a[T^b, T^c]), \quad (2.11)$$

$$d^{abc} = 2\text{Tr}(T^a\{T^b, T^c\}), \quad (2.12)$$

$$T^a T^b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \delta_{ab} + (d^{abc} + i f^{abc}) T^c \right), \quad (2.13)$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} (d^{abc} + i f^{abc}), \quad (2.14)$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^a T^c) = -\frac{1}{4N} \delta_{bc}, \quad (2.15)$$

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta_{ab}, \quad (2.16)$$

$$f^{acd} d^{bcd} = 0, \quad (2.17)$$

$$f^{ade} f^{bef} f^{cfd} = \frac{N}{2} f^{abc}. \quad (2.18)$$

2.6 Operateurs de Casimir

$T^a T^b$ est un opérateur de Casimir de la représentation fondamentale de $\mathfrak{su}(N)$. Cela se traduit par le fait que $T^a T^b$ commute avec les générateurs de $SU(N)$ et, par conséquent, avec tous les éléments de l'algèbre de Lie, ce que nous verrons dans la suite.

En considérant une composante de $T^a T^b$ indexée par (i, j) , nous avons avec l'équation (2.10) :

$$\begin{aligned} (T^a T^a)_{ij} &= T_{ik}^a T_{kj}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} \delta_{kk} - \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{kj} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} N - \frac{1}{N} \delta_{ij} \right) = \delta_{ij} \frac{N^2 - 1}{2N} \\ \Rightarrow (T^a T^a)_{ij} &= \delta_{ij} C_F \text{ avec } C_F := \frac{N^2 - 1}{2N} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Alors $T^a T^a = C_F \mathbb{1}_N$ est un multiple de la matrice unité et commute avec les générateurs de $SU(N)$.

Analogiquement nous considérons l'opérateur de Casimir de la représentation adjointe et nous utilisons la relation (2.16) :

$$\begin{aligned} (F^c F^c)_{ab} &= F_{ad}^c F_{db}^c = i^2 f^{cad} f^{cdb} = f^{acd} f^{bcd} = \delta_{ab} N \\ \Rightarrow (F^c F^c)_{ab} &= \delta_{ab} C_A \text{ avec } C_A := N. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ce qui veut dire que $F^c F^c = C_A \mathbb{1}_{N^2-1}$ commute avec les générateurs de la représentation adjointe.

3 Facteurs de couleur

3.1 QCD

La chromodynamique quantique (QCD) est une théorie de champ de l'interaction forte et décrit l'interaction des quarks et des gluons. Selon la charge électrique de l'électrodynamique quantique (QED), il existe une charge de couleur en QCD mais, contrairement à la QED, il existe trois charges de couleur différentes (appelées rouge (R), vert (G) et bleu(B)) en QCD. Chaque quark porte une couleur mais l'échange de gluons peut changer la couleur d'un quark. Les gluons sont des particules élémentaires qui servent de médiateur à l'interaction forte et ils portent également une charge de couleur qui conduit à la possibilité d'une auto-interaction. La charge de couleur d'un gluon est une combinaison de couleur et d'anti-couleur. Il existe huit types de gluons différents qui forment un octet de $SU(3)$:

$$R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})$$

Le singlet symétrique $\frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$ n'existe pas parce qu'il ne peut pas médialiser la couleur.

Toutes les particules observées ne portent pas de charge de couleur nette. Elles sont blanches ou incolores.

La force de couplage en QCD est $\frac{1}{2}c_1c_2\alpha_s$ où $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$, g est la constante de couplage fort dépendant de l'énergie [4] et c_1, c_2 sont des coefficients de couleur. En QED, la force de couplage est similaire : $e_1e_2\alpha$ où e_1 et e_2 sont les charges électriques en unités de la charge élémentaire e et $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ est la constante de structure fine.

Le terme $\frac{1}{2}|c_1c_2|$ est appelé facteur de couleur.

3.2 Règles de Feynman

Les règles de Feynman découlent du lagrangien de la QCD. Le Lagrangien libre en QCD est

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q \quad [4] \quad (3.1)$$

où q est un champ de couleur de quark et γ^μ sont les matrices de Dirac. Le fait d'exiger l'invariance du lagrangien de la QCD sous la transformation $SU(3)$ ($q \rightarrow e^{i\alpha_a T^a} q$) résulte en des termes d'interaction :

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu T^a q)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad [4] \quad (3.2)$$

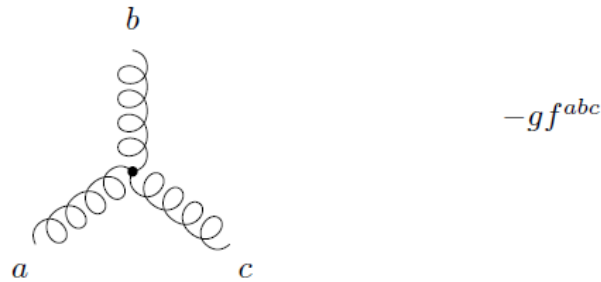
où G_μ^a sont les huit champs de gluons qui se transforment en

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - f^{abc} \alpha_b G_\mu^c$$

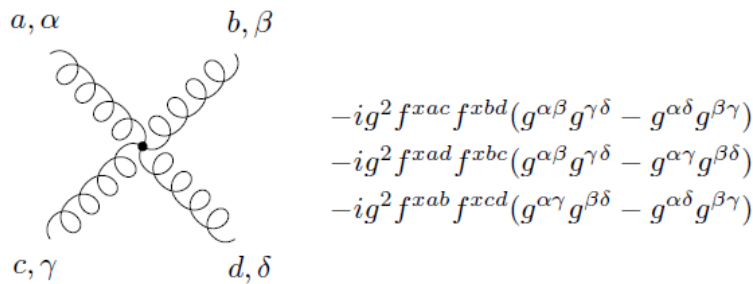
et $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ est le tenseur de champ [4].

Le premier terme du Lagrangien correspond au propagateur des quarks, le second au vertex quark-gluon et le troisième terme conduit au propagateur des gluons et aux termes d'interaction vertex trois-gluons et quatre-gluons. Nous pouvons interpréter les différents termes par des diagrammes de Feynman. Cela conduit aux règles de Feynman suivantes, tirées de [3], où nous nous concentrons sur les termes de couleur.

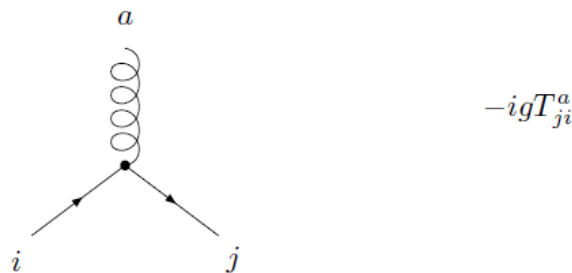
Vertex à trois gluons :



Vertex de quatre gluons :



Vertex quark-gluon :



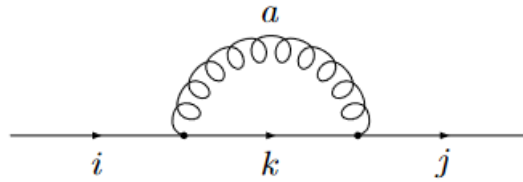
4 Exemples de calcul de facteurs de couleur

Dans la suite nous considérons quelques exemples de ce calcul analytique des facteurs de couleur.

Nous commençons avec des corrections d'une boucle aux propagateurs de gluons et de quarks et puis nous considérons des fonctions à trois points. Enfin, nous calculons les facteurs de couleur pour certaines fonctions à quatre points. Pour faire cela, nous avons recours aux règles de Feynman (cf. Sec. 3.2) associées aux vertex. Les nombres figurant en-dessus des signes d'égalité renvoient aux relations fournies dans Sec. 2.5.

Les opérateurs de Casimir C_F et C_A et la condition de renormalisation $\text{Tr}(T^a T^b) = T_F \delta_{ab}$ ($T_F = \frac{1}{2}$) peuvent être vus comme des facteurs de couler fondamentaux.

4.1 Correction d'une boucle au propagateur de quarks

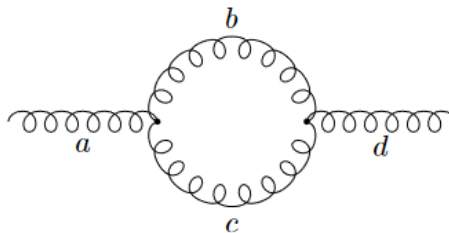


$$\begin{aligned} T_{ki}^a T_{jk}^a &\stackrel{2.10}{=} \frac{1}{2} \left(\delta_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{N} \delta_{ki} \delta_{jk} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(N \delta_{ij} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ij} = C_F \delta_{ij} \end{aligned}$$

Après sommation sur des états de couleur finaux et en moyennant sur des états de couleur initiaux :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ij} = \frac{1}{2N} \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ii} = \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) = C_F$$

4.2 Correction d'une boucle-gluon au propagateur de gluons

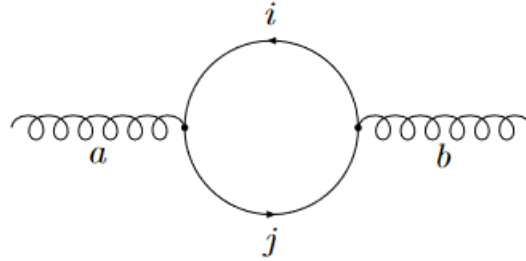


$$f^{abc} f^{dbc} \stackrel{2.16}{=} N \delta_{ab} = C_A \delta_{ab}$$

En sommant et en moyennant sur des états finaux et initiaux :

$$\frac{1}{N^2 - 1} N \delta_{aa} = N = C_A$$

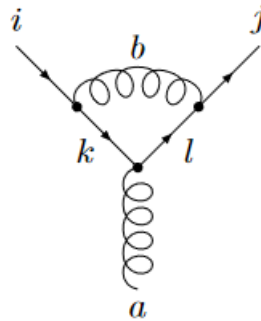
4.3 Correction d'une boucle-quark au propagateur de gluons



$$\begin{aligned} T_{ji}^a T_{ij}^b &= \text{Tr}(T^a T^b) \\ &\stackrel{2.8}{=} \frac{1}{2} \delta_{ab} = T_F \delta_{ab} \end{aligned}$$

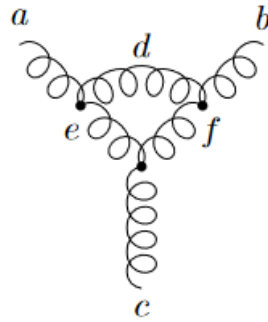
Ici nous avons $N^2 - 1$ états de couleur initiaux et nous obtenons le facteur de couleur $T_F = \frac{1}{2}$ après la prise de moyenne et la sommation.

4.4 Correction d'une boucle au vertex quark-gluon



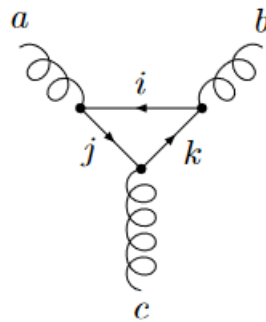
$$\begin{aligned} T_{ki}^b T_{jl}^b T_{lk}^a &\stackrel{2.10}{=} \frac{1}{2} \left(\delta_{kl} \delta_{ij} - \frac{1}{N} \delta_{ki} \delta_{jl} \right) T_{lk}^a \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} T_{kk}^a - \frac{1}{2N} T_{ji}^a \\ &\stackrel{2.7}{=} -\frac{1}{2N} T_{ji}^a \end{aligned}$$

4.5 Correction d'une boucle au vertex à trois quarks 1



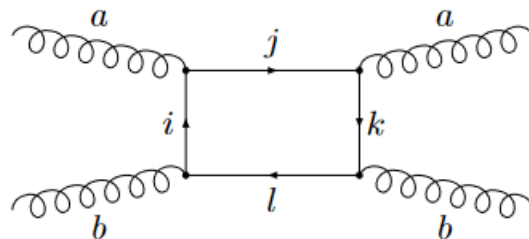
$$f^{ade} f^{efc} f^{dbf} = f^{ade} f^{cef} f^{bfd} \stackrel{2.18}{=} -\frac{N}{2} f^{abc}$$

4.6 Correction d'une boucle au vertex à trois quarks 2



$$T_{ji}^a T_{kj}^b T_{ik}^c = \text{Tr}(T^a T^c T^b) \stackrel{2.14}{=} \frac{1}{4} (d^{acb} + i f^{acb})$$

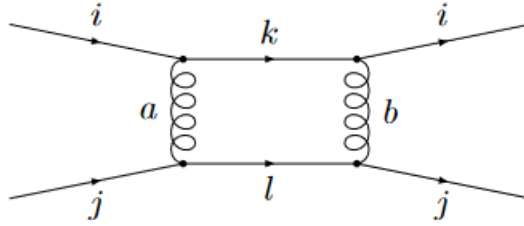
4.7 Processus $g + g \rightarrow g + g$



$$\begin{aligned}
T_{ji}^a T_{il}^b T_{lk}^b T_{kj}^a &\stackrel{2.10}{=} \frac{1}{4} \left(\delta_{jj} \delta_{ik} - \frac{1}{N} \delta_{ji} \delta_{kj} \right) \left(\delta_{ik} \delta_{ll} - \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{lk} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(N \delta_{ik} - \frac{1}{N} \delta_{ki} \right) \left(\delta_{ik} N - \frac{1}{N} \delta_{ik} \right) \\
&= \frac{1}{4} \delta_{ik}^2 \left(N - \frac{1}{N} \right)^2 = \frac{1}{4} N \left(N - \frac{1}{N} \right)^2 = \frac{1}{4N} (N^2 - 1)^2 \\
&= C_A C_F^2
\end{aligned}$$

Le facteur de couleur pour cet exemple est $\frac{1}{4N} = \frac{T_F^2}{C_A}$ car il y a $(N^2 - 1)^2$ états initiaux pour deux gluons.

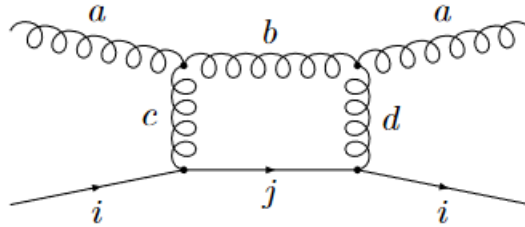
4.8 Processus $q + q \rightarrow q + q$



$$\begin{aligned}
T_{ki}^a T_{ik}^b T_{lj}^a T_{jl}^b &= \text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^a T^b) \\
&= \frac{1}{4} \delta_{ab} \delta_{ab} = \frac{1}{4} (N^2 - 1) = \frac{1}{2} C_A C_F
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que nous obtenons, en moyennant, $\frac{1}{4N^2} (N^2 - 1) = \frac{T_F C_F}{C_A}$.

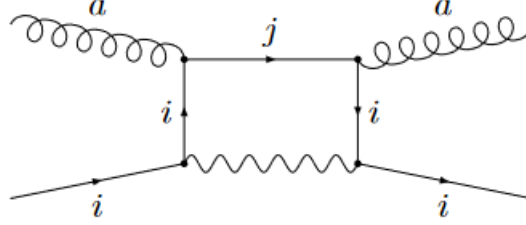
4.9 Processus $g + q \rightarrow g + q$



$$\begin{aligned}
f^{abc} f^{abd} T_{ji}^c T_{ij}^d &= f^{cab} f^{dab} \text{Tr}(T^c T^d) \stackrel{2.8}{=} \frac{1}{2} \delta_{cd} f^{cab} f^{dab} \\
&\stackrel{2.16}{=} \frac{1}{2} f^{cab} f^{cab} = \frac{1}{2} N \delta_{aa} = \frac{1}{2} N (N^2 - 1) = C_A^2 C_F
\end{aligned}$$

En moyennant sur $N(N^2 - 1)$ états initiaux donne comme résultat le facteur de couleur $T_F = \frac{1}{2}$.

4.10 Processus $g + q \rightarrow q + \gamma$



$$T_{ji}^a T_{ij}^a = \text{Tr}(T^a T^a) = \frac{1}{2} \delta_{aa} = \frac{1}{2} (N^2 - 1) = C_A C_F$$

Nous retrouvons le facteur de couleur $\frac{1}{2N} = \frac{T_F}{C_A}$ avec $N(N^2 - 1)$ états initiaux.

5 Algorithme

Les exemples ci-dessus n'avaient que jusqu'à quatre vertex, mais si l'on considère les diagrammes de Feynman avec de nombreux vertex, le terme des générateurs et des coefficients de structure devient très long. Par conséquent, il est utile d'implémenter un algorithme simple qui calcule les facteurs de couleur en appliquant des règles de remplacement spécifiées. Le calcul des facteurs de couleur en appliquant les règles de Feynman pour un élément de matrice au carré conduit toujours à des indices de couleur appariés [1]. C'est pourquoi l'algorithme suivant est suffisant pour calculer les facteurs de couleur du carré des amplitudes.

L'algorithme général consiste en deux étapes [1,2].

INPUT : L'expression des entrées T_{ij}^a des générateurs et coefficients de structure f^{abc}, d^{abc}

PREMIERE ETAPE :

Remplacement des vertex à trois gluons par les termes des générateurs

$$f^{abc} \rightarrow -2i \text{Tr}(T^a [T^b, T^c]) \quad (5.1)$$

$$d^{abc} \rightarrow 2 \text{Tr}(T^a \{T^b, T^c\}) \quad (5.2)$$

OUTPUT : Entrées de chaînes de caractères T_{ij}^a des générateurs.

DEUXIEME ETAPE :

Remplacement des lignes de gluons internes par l'opérateur de projection de gluons

$$T_{ij}^a T_{kl}^a \rightarrow \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (5.3)$$

OUTPUT : L'expression des fonctions delta de Kronecker qui peuvent se simplifier en utilisant les propriétés du delta de Kronecker. La simplification conduit au facteur de couleur.

Afin d'améliorer les performances de l'algorithme, nous pouvons également implémenter les règles suivantes :

$$\text{Tr}(T^a) = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (5.5)$$

Il est nécessaire d'implémenter certaines règles pour les fonctions delta.

5.1 Code source

Le code source suivant est un package *Mathematica*. Il peut être chargé dans un cahier *Mathematica* en saisissant «&color.m. Ensuite, toutes les fonctions définies dans le package peuvent être utilisées dans ce cahier, comme cela va être décrit ci-dessous.

La première partie du package est un en-tête. L'en-tête n'est qu'un commentaire et n'est donc pas nécessaire pour le programme, mais il est utile pour la documentation. Le format d'en-tête est conforme aux en-têtes standard pour les packages [8].

```
(* :Title: color.m
Last change: 26.09.08
*)

(* :Context: color' *)

(* :Author: Vera Derya *)

(* :Summary: The "color" package can be used to calculate SU
(N) color factors as they appear in QCD for example. *)

(* :Package Version: 1.0 *)

(* :Mathematica Version: 6.0 *)

(* :Keywords: SU(N), color, colorfactor, color factor, QCD
*)

(* :Limitations: It is often necessary to Expand[] the
expression to get the result. *)

(* :Examples: TrT[a, b]
TrT[a, b, a, c]
Expand[f[a, b, c] f[b, a, d] T[c, j, i] T[d, i, j]]
Expand[f[a, c, d] f[b, d, c]]
Expand[f[a, e, d] f[b, c, e] TrT[a, d, c, b]]
*)
```


Dans la partie suivante, les fonctions et variables du package sont déclarées avec la commande `::usage::`. En outre, il est donné une brève description de la signification des variables. Ces descriptions peuvent être récupérées dans un cahier Mathematica en saisissant `?name`. Voici une liste des fonctions utilisées dans le programme :

- $f[a,b,c] \hat{=} f^{abc}$
- $d[a,b,c] \hat{=} d^{abc}$
- $T[a,i,j] \hat{=} T_{ij}^a$
- $KDf[i,j] \hat{=} \delta_{ij}$
- $KDad[a,b] \hat{=} \delta_{ab}$
- $TrT[a_1, \dots, a_n] \hat{=} Tr(T^{a_1} \dots T^{a_n})$

`BeginPackage ["color"]` démarre un contexte nommé `color`'. Toutes les fonctions ci-dessus sont déclarées dans ce contexte.

```
BeginPackage ["color'"]
(* Note: All expressions are in Einstein summation
   convention *)

N::usage = "SU(N)"
T::usage = "T[a, i, j] means the (i, j)th entry of the SU(
  N)-generator matrix T^a. i,j=1,...,N and a=1,...,(N
  ^2-1)"
Implemented rules:
  T[a, i, j]T[a, k, l] = 1/2 ( KDf[i, l] KDf[j, k] - 1/N
    KDf[i, j] KDf[k, l] )
  Tr(T^a) = 0
  Tr(T^a T^b) = 1/2 KDad[a, b]"

f::usage = "f[a, b, c] is the structure constant that is
  defined by the commutator relation [T^a, T^b]=i f[a, b
  , c]T^c.
  Implemented rule: f[a, b, c] = -2i*Tr(T^a[T^b, T^c])"

d::usage = "d[a, b, c] is the structure constant that is
  defined by the anti-commutator relation {T^a, T^b}=1/N
  KDad[a, b]+d[a, b, c]T^c
  Implemented rule: d[a, b, c] = 2*Tr(T^a{T^b, T^c})"
```

```

KDf::usage = "KDf[i, j] is the Kronecker Delta function in
the fundamental representation of SU(N). i,j=1,...,N
Implemented rules:
Attributes[KDf] = {Orderless}"

KDf[i, i] = N
KDf[i, j] KDf[j, k] = KDf[i, k]
KDf[i, j]^2 = N
KDf[i, j] T[a, i, k] = T[a, j, k]
KDf[i, j] T[a, k, i] = T[a, k, j]

KDad::usage = "KDad[a, b] is the Kronecker Delta function
in the adjoint representation of SU(N). a,b=1,...,(N
^2-1)
Implemented rules:
Attributes[KDad] = {Orderless}"

KDad[a, a] = N^2 - 1
KDad[a, b] KDad[b, c] = KDad[a, c]
KDad[a, b]^2 = N^2-1
KDad[a, b] T[a, i, j] = T[b, i, j]

TrT::usage = "TrT builds the trace of a product of
generators T^a_1...T^a_n:
TrT[a_1, a_2, ..., a_n] creates a string of T like T[a_1
, i_1, i_2] T[a_2, i_2, i_3]...T[a_n, i_n, i_1] with
auxiliary symbols i_1, ..., i_n."

```

La dernière partie du package commence par la commande `Begin ["Private"]` qui démarre un nouveau contexte privé `color'Private'` afin d'éviter les conflits avec les noms des variables utilisées en interne. C'est la partie principale du programme car les fonctions sont définies ici. Les relations (5.1) à (5.5) sont implémentées ici.

```

Begin ["Private"]

(* Definition for f: f[a,b,c] -> -2i*Trace(T^a[T^b,T^c])
*)

f /: f[a_, b_, c_] := Module[{i, k, l}, -2*I*(T[a, i, k]
T[b, k, l] T[c, l, i] - T[a, i, k] T[c, k, l] T[b,
l, i])];

(* Definition for d: d[a,b,c] -> 2*Trace(T^a{T^b,T^c}) *)

d /: d[a_, b_, c_] := Module[{i, k, l}, 2*(T[a, i, k] T[
b, k, l] T[c, l, i] + T[a, i, k] T[c, k, l] T[b, l, i
])];

```

```

(* Definitions for T in order to reduce expressions to
   Kronecker Delta functions KDf and KDad *)

T /: T[a_, i_, j_] T[a_, k_, l_] := 1/2 (KDf[i, l] KDf[j
    , k] - 1/N KDf[i, j] KDf[k, l] );
T /: T[a_, i_, i_] := 0;
T /: T[a_, i_, j_] T[b_, j_, i_] := 1/2 KDad[a, b];

(* Rules and Attributes for the Kronecker Delta functions
   KDf and KDad *)

Attributes[KDf] = {Orderless};
Attributes[KDad] = {Orderless};

KDf /: KDf[i_, i_] := N;
KDad /: KDad[a_, a_] := N^2 - 1;

KDf /: KDf[i_, j_] KDf[j_, k_] := KDf[i, k];
KDad /: KDad[a_, b_] KDad[b_, c_] := KDad[a, c];

KDf /: KDf[i_, j_]^2 := N;
KDad /: KDad[a_, b_]^2 := N^2-1;

KDf /: KDf[i_, j_] T[a_, i_, k_] := T[a, j, k];
KDf /: KDf[i_, j_] T[a_, k_, i_] := T[a, k, j];
KDad /: KDad[a_, b_] T[a_, i_, j_] := T[b, i, j];

(* Definition of the trace function TrT *)

TrT[x__] := Expand[Module[{mnr = $ModuleNumber, i},
    Product[T[{x}][[j]], i[j + mnr], i[j + mnr + 1]], {j
        , 1, Length[{x}] - 1}]*
    T[{x}][[Length[{x}]]], i[Length[{x}] + mnr], i[mnr
        + 1]]];

End[ ]

Protect["color '*"];

EndPackage[ ]

```

A Opérateur de projection

Assertion : $T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$

Preuve :

Les générateurs et la matrice identité construisent une base de matrices hermitiennes $N \times N$.

Soit M une matrice hermitienne $N \times N$ arbitraire qui peut être représentée par une combinaison linéaire : $M = m_0 \mathbb{1}_N + m_a T^a$ avec $m_0, m_a \in \mathbb{R}$. Nous obtenons les coefficients m_0 et m_a en calculant les traces de M et $T^a M$:

$$\text{Tr}(M) = m_0 \cdot N \Rightarrow m_0 = \frac{1}{N} \text{Tr}(M) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T^a M) &= m_b \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} m_b \delta_{ab} = \frac{1}{2} m_a \Rightarrow m_a = 2 \text{Tr}(T^a M) \\ \Rightarrow M &= \frac{1}{N} \text{Tr}(M) \mathbb{1}_N + 2 \text{Tr}(T^a M) T^a \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A présent nous considérons l'élément (i, j) de M :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{1}{N} M_{kk} \delta_{ij} + 2 T_{kl}^a M_{lk} T_{ij}^a = M_{lk} \underbrace{\left(\frac{1}{N} \delta_{kl} \delta_{ij} + 2 T_{kl}^a T_{ij}^a \right)}_{=\delta_{il} \delta_{jk}} \quad \forall M \\ \Rightarrow T_{ij}^a T_{kl}^a &= \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned}$$

■

Références

- [1] Ingo Bojak. *NLO QCD corrections to the polarized photoproduction and hadroproduction of heavy quarks*. PhD thesis, University of Dortmund, 2000.
- [2] Predrag Cvitanovic. Group theory for feynman diagrams in non-abelian gauge theories. *Phys. Rev.*, 14(6), 1976.
- [3] R.K. Ellis, W.J. Stirling, and B.R. Webber. *QCD and Collider Physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [4] Richard D. Field. *Applications of Pertubative QCD*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [5] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. Perseus Books, 2nd edition, 1999.
- [6] Francis Halzen and Alan D. Martin. *QUARKS & LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [7] Steffen Koenig. Glossar zur Vorlesung Lie-Algebren. Glossary of a lecture at the University of Cologne, 2008.
- [8] Roman Maeder. *Programming in Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Company, 3rd edition, 1997.
- [9] J.A.M. Vermaseren. Axodraw. *Comp. Phys. Comm.*, 83, 1994.