Groupes et représentations de groupes : notions de base

Filip Croijmans

Janvier, 2023

Ce document succinct, largement inspiré des ouvrages de référence (listés à la fin), vise à fournir quelques notions de base sur la théorie de groupes et leurs représentations, particulièrement intéressantes en ce qui concerne les applications dans le domaine de la physique des particules. Il ne prétend en aucun cas être exhaustif et chaque partie est traitée de manière assez arbitraire.

Sommaire

1. Généralités

1.1 Définition d'un groupe

⇛ Soit un ensemble *G*, muni d'une loi de composition interne « ∗ ». On l'appelle un *groupe multiplicatif*, noté (*G*,∗), si $\forall\, a, b \in G,\ a * b \in G$ et :

- « ∗ » est associative sur *G*, i.e. : $\forall\, a, b, c \in G,\ (a * b) * c = a * (b * c)$;
- (*G*,∗) admet un *élément neutre n* tel que $\forall\, g \in G, n * g = g * n = g$;
- tout élément de *G* est *symétrisable* : $\exists!\ g^{-1} \in G, g * g^{-1} = g^{-1} * g = n$. Le symétrisé g^{-1} est appelé *l'inverse* de g.

Un groupe (*G*,∗) est dit *commutatif* ou *abélien* si la loi interne est commutative par rapport aux éléments de *G*. Dans le cas d'un *groupe additif* (possédant des caractéristiques semblables à celles de l'addition dans ℤ et dont la loi interne devient « + », sous condition que cela n'entraîne pas d'ambiguïté contextuelle), qui est commutatif, l'élément neutre est souvent symbolisé par 0 et le symétrique de a par $-a$.

Donnons quelques exemples :

- Groupes additifs : $(\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$;
- Groupe linéaire $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$: ensemble des matrices réelles carrées inversibles d'ordre p, muni d'un produit de matrices ; non-commutatif pour $p \geq 2$;
- Rotations vectorielles du plan : l'ensemble des rotations de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ laissant l'origine invariante est un groupe commutatif (quant aux rotations de l'espace orienté $\mathbb{R}^3$, il s'agit d'un groupe non-commutatif).

1.2 Morphismes

Considérons deux groupes : $(G,*)$ et $(G',\circ)$. S'il existe une application φ préservant la loi interne :

$$\varphi :\ G \longrightarrow G'$$

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2) \in G'$$

alors on dit que ces deux groupes sont *isomorphes*. Une opération qui préserve ainsi la structure d'un groupe s'appelle un *morphisme de groupes* ; si elle est bijective, c'est un *isomorphisme de groupes*. Un isomorphisme d'un groupe dans lui-même est un *automorphisme*.

⇛ Un *sous-groupe* de *G* est une partie de *G*, contenant son élément neutre et stable par produit et passage au symétrique.

⇛ Le *noyau* d'un morphisme $\varphi : G \longrightarrow G'$ est par définition l'ensemble :

$$\text{Ker}\,\varphi = \{g \in G\,;\ \varphi(g) = n_{G'}\}$$

C'est un sous-groupe de G.

Exemples :

- L'ensemble M des matrices $\mathrm{M}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, muni de la multiplication matricielle, est un groupe. On peut vérifier que $\mathrm{M}_x \times \mathrm{M}_y = \mathrm{M}_{x+y}$ pour tous *x* et *y* réels. L'application $\xi : x \longmapsto \mathrm{M}_x$ est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et (M,×) ;

- Soit l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, avec $\mathbb{U} = \{z \in C\,;\ |z| = 1\}$, définie par $\phi(\theta) = e^{i\theta}$, qui est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et (𝕌,×). Son noyau est $\text{Ker}\,\phi = \{\theta \in \mathbb{R}\,;\ \phi\,(\theta) = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$.

Le dernier exemple ci-dessus nous conduit à la définition de représentations des groupes.

1.3 Représentations de groupes

Dans le cas le plus général, on parlera de *représentation* du groupe *G* par *G'* si la condition d'existence de morphisme reliant les deux est remplie. Les représentations envoyant le groupe (*G*,×) dans l'ensemble $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ méritent une attention particulière.

⇛ On appelle *représentation linéaire* du groupe *G* sur le corps 𝕂 tout couple (V, *f*) où V est un 𝕂-espace vectoriel et *f* un morphisme de *G* dans $\mathcal{G}\ell(\mathrm{V})$, groupe des automorphismes de *f*. Une telle représentation est de degré fini si V est un e.v. de dimension finie, et on appelle *degré de la représentation* dim(V). Dans ce cas, $\mathcal{G}\ell(\mathrm{V})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et on parle de *représentation matricielle*. Exemple :

- $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,;\ x \longmapsto \varphi(x) = \mathrm{M}_x$ est une représentation matricielle de ℝ. Notons que φ est injective, la représentation est dite *fidèle*.

2. Le groupe SO(3) et les rotations de l'espace

2.1 Propriétés

⇛ On appelle *groupe spécial orthogonal*, ou *groupe des rotations*, de l'espace euclidien, noté $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$, le groupe des applications linéaires $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant :

- $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^3,\ \langle v, w\rangle = \langle \mathcal{R}(v), \mathcal{R}(w)\rangle$ ($\mathcal{R}$ préserve le produit scalaire)

- L'image de toute base directe est une base directe ($\mathcal{R}$ préserve l'orientation de l'espace)

Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique. Si on note R la matrice représentative d'une rotation $\mathcal{R}$, on a :

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^3, \qquad \langle v, w\rangle = \langle \mathrm{R}v, \mathrm{R}w\rangle = \langle v, \mathrm{R}^{\mathrm{t}}\mathrm{R}w\rangle$$

ce qui montre que R est inversible et que :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{t}} = \mathrm{R}^{-1}$$

Une telle matrice est dite *orthogonale*. Le groupe $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ des rotations est tacitement identifié avec le groupe SO(3) des matrices représentatives d'une rotation dans une base orthonormée. Le groupe correspondant aux matrices orthogonales, qui préservent le produit scalaire réel, est le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) \cup \{-\mathrm{M}\,;\ \mathrm{M} \in \mathrm{SO}(3)\}$, qui n'est pas connexe.

SO(3)

« S » pour *spécial* :

$\forall\, \mathrm{M} \in \mathrm{SO}(3), \det(\mathrm{M}) = 1$

« O » pour *orthogonal* :

$\forall\, \mathrm{M} \in \mathrm{SO}(3), \mathrm{M}^{\mathrm{t}} = \mathrm{M}^{-1}$

2.2 Générateurs de SO(3)

Considérons une rotation $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}$ de l'espace (transformation passive), caractérisée par un vecteur $\boldsymbol{\theta} = \theta\hat{n}$ ayant pour norme $\theta \in [0,2\pi[$ (angle de la rotation) et colinéaire au vecteur $\hat{n}$ (axe de la rotation). Prenons pour simplifier $\hat{n} = \mathbf{e_3}$, ainsi :

$$\mathrm{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui dénote une rotation passive selon l'axe Oz.

Généralement, pour une rotation quelconque, $\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta})$ s'écrit en fonction du paramètre $\boldsymbol{\theta} = \alpha\mathbf{e_1} + \beta\mathbf{e_2} + \gamma\mathbf{e_3}$ dans la base canonique. Il faut garder à l'esprit que l'ordre dans lequel nous réalisons les rotations suivant chaque axe compte (puisqu'on a vu qu'il s'agit d'un groupe non-commutatif). Pour une *transformation infinitésimale*, c'est-à-dire une rotation d'un angle $\delta\theta$ « très petit » :

$$\mathrm{R}_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3 + \delta\theta \mathrm{J}_z$$

$$\text{avec} \quad \mathrm{J}_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{R}_z(\theta)\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On définit de la même façon J_x et J_y :

$$\mathrm{J}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{R}_x(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J}_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{R}_y(\beta)\Big|_{\beta=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\Bigg|_{\beta=0} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

⇛ On appelle *générateurs infinitésimaux des rotations* les matrices $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J}_x$, $\mathrm{J}_2 = \mathrm{J}_y$ et $\mathrm{J}_3 = \mathrm{J}_z$ définies ci-dessus.

On remarque que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{R}_z(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = \begin{pmatrix}-sin\,\theta_0 & cos\,\theta_0 & 0\\ -cos\,\theta_0 & -sin\,\theta_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{J}_z \times \mathrm{R}_z(\theta_0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{R}_z(\theta) = \mathrm{R}_z(0) \times exp(\theta \mathrm{J}_z) = exp(\theta \mathrm{J}_z)$$

$$= \mathrm{I}_3 + \theta \mathrm{J}_z + \frac{\theta^2}{2!}{\mathrm{J}_z}^2 + \ldots + \frac{\theta^n}{n!}{\mathrm{J}_z}^n + \ldots$$

d’après le développement de l’exponentielle en série.

Comme pour les nombres, cette série est convergente. L’exponentielle d’une matrice possède des propriétés utiles, voici quelques-unes (certaines sont bien connues).

Soient des matrices de la forme $\mathbf{M}(t) = e^{t\mathbf{A}}$. Elles vérifient :

$$\text{(I)} \quad e^{t_1\mathbf{A}}e^{t_2\mathbf{A}} = e^{(t_1+t_1)\mathbf{A}}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$$

$$\text{(III)} \quad e^{t\mathbf{A}} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{I} + t\frac{\mathbf{A}}{n}\right)^n$$

$$\text{(IV)} \quad \det\left(e^{t\mathbf{A}}\right) = e^{t\mathrm{Tr}(\mathbf{A})}$$

Ces matrices forment un groupe commutatif à un paramètre entièrement déterminé par son *générateur* $\mathbf{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{M}(t)\Big|_{t=0}$, ou par la forme infinitésimale $\mathbf{M}(\epsilon) = \mathbf{I} + \epsilon\mathbf{A}$.

Exemples :

- Les rotations (actives) d’angle θ dans le plan (x, y) :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = exp\left[\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

- Les *boosts* de Lorentz de rapidité ϑ dans le plan (x, ct) :

$$\begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} = exp\left[\vartheta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

- Les *boosts* de Galilée de vitesse V dans le plan (x, t) :

$$\begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = exp\left[V\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Ces résultats permettent d'énoncer le théorème suivant :

- Si $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}$ est une rotation caractérisée par le vecteur $\boldsymbol{\theta}$, alors, en notant $\mathbf{J} = (\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \mathrm{J}_3)$, sa matrice représentative est $\mathrm{R}(\boldsymbol{\theta}) = exp(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J})$.

N.B. : Les J_i ne commutent pas entre elles :

$$exp(\alpha\mathrm{J}_1 + \beta\mathrm{J}_2 + \gamma\mathrm{J}_3) \neq exp(\alpha\mathrm{J}_1)exp(\beta\mathrm{J}_2)exp(\gamma\mathrm{J}_3)$$

2.3 L'algèbre de Lie SO(3)

En utilisant le *commutateur de matrices* (voir plus bas), on constate facilement que :

$$[\mathrm{J}_i, \mathrm{J}_j] = -\varepsilon_{ijk}\mathrm{J}_k$$

avec ε_{ijk} le tenseur de Levi-Civita, totalement antisymétrique (ε_{ijk} vaut 1 si (i, j, k) est une permutation paire de (1,2,3), -1 si elle est impaire et 0 si l'un des indices apparait deux fois)

Ces relations de commutations définissent *l'algèbre de Lie* SO(3), dont les nombres $-\varepsilon_{ijk}$ sont les *coefficients de structure*. Le signe « $-$ » provient du fait qu'on a considéré des transformations actives dans cette partie et il n'a pas d'importance.

- Un ensemble de matrices stable par combinaisons linéaires et par opérations de commutation forme une *algèbre de Lie*. Soient trois matrices carrées $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, on appelle commutateur de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ la matrice $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$. On vérifie :

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$$

$$\big[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]\big] + \big[\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]\big] + \big[\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\big] = \mathbf{0} \quad \text{(identité de Jacobi)}$$

<u>Remarque</u> : Ces propriétés sont analogues pour le *crochet de Poisson* « $\{\cdot,\cdot\}$ » (de deux fonctions $f\ et\ g$), un précurseur de l'opérateur commutateur :

$$\{f(\{q_i\}, \{p_i\}), g(\{q_i\}, \{p_i\})\}_{q_i, p_i} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

La connaissance de l'algèbre de Lie du groupe suffit pour connaitre la structure locale du groupe. Pourtant, plusieurs groupes « globalement » différents peuvent avoir la même algèbre de Lie. C'est notamment le cas de SO(3) et SU(2).

3. Le groupe SU(2)

3.1 Propriétés

On envisage désormais l'espace $\mathbb{C}^2$, muni de sa structure préhilbertienne canonique :

$$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{C}^2, \qquad \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \overline{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}^{\dagger} \cdot \boldsymbol{n} = \overline{m}_1 n_1 + \overline{m}_2 n_2$$

où $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ sont deux matrices (vecteurs) colonnes et $\boldsymbol{m}^{\dagger} = \overline{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{t}}$ symbolise la matrice adjointe.

⇒ On appelle *groupe spécial unitaire*, et on note SU($\mathbb{C}^2$), le groupe des applications linéaires telles que leurs matrices représentatives **M** satisfont :

- $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^2,\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \mathbf{Mx}, \mathbf{My} \rangle = \overline{(\mathbf{Mx})}^{\mathrm{t}} \cdot (\mathbf{My}) = \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{M}}^{\mathrm{t}}\mathbf{My} \rangle$

ce qui montre que $\overline{\mathbf{M}}^{\mathrm{t}}\mathbf{M} = \mathbf{I_2} \Leftrightarrow \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M} = \mathbf{I_2}$. Une telle matrice est appelée *unitaire.* En outre :

$$|det\ \mathbf{M}|^2 = det\ \mathbf{M} \times \overline{det\ \mathbf{M}^t} = det(\mathbf{MM}^{\dagger}) = \mathbf{1}, \text{ donc } det\ \mathbf{M} \text{ est de la forme } e^{ia}.$$

On note SU(2) le groupe des matrices d'ordre 2, unitaires et de déterminant unité.

SU(2)

« S » pour *spécial* :

$\forall\ \mathrm{M} \in \mathrm{SU(2)}, \det(\mathrm{M}) = 1$

« U » pour *unitaire* :

$\forall\ \mathrm{M} \in \mathrm{SO(3)}, \overline{\mathrm{M}^{\mathrm{t}}} = \mathrm{M}^{-1}$

3.2 Générateurs de SU(2)

Comme on a vu précédemment, toute matrice de rotation pouvait s'écrire sous la forme de l'exponentielle d'une combinaison linéaire de matrices élémentaires J_i. On va voir que la même procédure s'applique pour SU(2).

- ❖ On admet que toute matrice de SU(2) est de la forme $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $det\ \mathbf{U} = 1 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$.

En posant $a = \alpha + i\beta$ et $b = \gamma + i\delta$, $|a|^2 + |b|^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$. On écrit alors $\alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $(\delta, \gamma, \beta) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ normé. Cela donne $\mathbf{U}(\theta) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\mathbf{I_2} + \left[i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ où on a posé $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Les composantes du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ sont trois matrices *hermitiennes* (i.e. $\sigma_i = {\sigma_i}^{\dagger}$) et de trace nulle, connues sous le nom de *matrices de Pauli* :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elles jouent pour SU(2) le même rôle que les J_i pour SO(3).

- Soit $\boldsymbol{\theta} = \theta\hat{n}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La matrice $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ est hermitienne, tandis que la matrice $\mathbf{U}(\theta) = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}}$ est unitaire. De plus $\mathbf{U}(\theta)\mathbf{U}(\theta)^\dagger = \mathbf{I_2}$. Les matrices de Pauli vérifient les propriétés suivantes :

$$\sigma_i = {\sigma_i}^\dagger \qquad \mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{I_2} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbf{I_2}$$

3.3 Lien avec SO(3)

Les groupes SO(3) et SU(2) présentent des similitudes. En effet :

$$\forall\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = exp(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}) \in \mathrm{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) \in \mathrm{SU}(2)$$

Les matrices de Pauli vérifient les mêmes relations de commutation :

$$\left[\frac{i\boldsymbol{\sigma_i}}{2},\frac{i\boldsymbol{\sigma_j}}{2}\right] = -\varepsilon_{ijk}\frac{i\boldsymbol{\sigma_k}}{2}$$

Les coefficients de structure de SO(3) et de SU(2) sont identiques. Il doit donc exister un lien fort entre ces deux groupes. Ce lien est explicité par le théorème suivant :

- Le groupe SO(3) réalise une représentation de SU(2) ; il existe un morphisme

$$\mathrm{R}: \ \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \quad ; \quad \mathrm{U} \to \mathrm{R_U}$$

de noyau Ker R $= \{\pm \mathrm{I}_2\}$. En particulier, pour tout $\mathrm{U} \in \mathrm{SU}(2)$, les matrices U et $-$U ont la même image : $\mathrm{R_U} = \mathrm{R_{-U}}$. On peut montrer que $\mathrm{R_U}$ est une rotation.

Remarquons que SU(2) est *simplement connexe,* alors que SO(3) est *doublement connexe* (i.e. *tout chemin fermé composé deux fois est homotope à un point*). Une conséquence de cela est que, quelle que soit la loi suivie par un objet physique lors d'une rotation, une rotation de 4π est **toujours** équivalente à une rotation nulle.

Bibliographie :

- Walter Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens* - 5eme édition, éditions H&K

- Jean-Pierre Provost, Bernard Raffaelli, Gérard Vallée, *Mathématiques en physique - Concepts et outils*, 2019 Dunod