Algoritmizace NPRG062 – úkol č. 1

Asymptotická složitost, cykly, algoritmy pátek 9:50

Řešení úloh vypracujte ručně (na papír, případně ve Wordu / ĽTĘXu)¹ a odevzdejte do ReCodExu nejlépe v jednom PDF souboru. Svůj postup řešení podrobně popište – odpovědi *ano, lineární*, apod. nestačí. Pokud používáte papír a nemáte přístup ke skeneru, můžete využít některou mobilní aplikaci pro skenování pomocí fotoaparátu.

1 Tranzitivita [3 body]

Dokažte nebo vyvraťte:

Horní odhad asymptotické složitosti je tranzitivní: Pokud $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ a $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, pak platí $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.

2 Exponenciely [3 body]

Dokažte nebo vyvraťte:

- a) $2^{n+1} \in \mathcal{O}(2^n)$
- b) $2^{2n} \in \mathcal{O}(2^n)$

3 Jednotková matice [3 body]

Určete asymptotickou těsnou mez (Θ) časové složitosti algoritmu pro inicializaci jednotkové čtvercové matice. Mez vyjádřete jako funkci řádu matice n.

```
for i in range(n):
    for j in range(n):
        M[i][j] = 0

for i in range(n):
    M[i][i] = 1
```

4 Hvězdičky [3 body]

Kolik vytiskne následující program hvězdiček v závislosti na vstupní hodnotě $n \in \mathbb{N}^+$? Vyjádřete přesným vzorcem a určete asymptotickou horní mez (\mathcal{O}) časové složitosti programu.

¹Grafickou úpravu nehodnotím ;)

```
i = 1
while i < n*n:
    print("*")
    i *= 2</pre>
```

5 Mince [3 body]

Máte 9 mincí. Víte, že mezi nimi je jedna falešná mince, která je lehčí než ostatní. Všechny ostatní mince váží stejně. Dále máte k dispozici rovnoramenné váhy, které umožňují porovnat váhu předmětů na levé a pravé misce.²

- 1. Jaký je nejmenší počet vážení, se kterým můžete zaručeně odhalit falešnou minci?
- 2. Uvažujme, že mincí je n. Jaké je nejvyšší n, pro které dokážeme zaručit, že odhalíme falešnou minci na 3 vážení?
- 3. Odvoďte obecný vztah, pro jaké nejvyšší n můžeme zaručeně odhalit falešnou minci, pokud máme k dispozici $i \in \mathbb{N}^+$ vážení.

²Pozor, vážit se dají i skupiny mincí, ne pouze jednotlivé mince.