Algoritmizace NPRG062 – úkol č. 1

Asymptotická složitost, cykly, algoritmy
pátek 9:50

Řešení úloh vypracujte ručně (na papír, případně ve Wordu / LaTeXu)[1] a odevzdejte do ReCodExu nejlépe v jednom PDF souboru. Svůj postup řešení podrobně popište – odpovědi *ano*, *lineární*, apod. nestačí. Pokud používáte papír a nemáte přístup ke skeneru, můžete využít některou mobilní aplikaci pro skenování pomocí fotoaparátu.

1 Tranzitivita [3 body]

Dokažte nebo vyvraťte:

Horní odhad asymptotické složitosti je tranzitivní: Pokud $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ a $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, pak platí $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.

2 Exponenciely [3 body]

Dokažte nebo vyvraťte:

a) $2^{n+1} \in \mathcal{O}(2^n)$

b) $2^{2n} \in \mathcal{O}(2^n)$

3 Jednotková matice [3 body]

Určete asymptotickou těsnou mez (Θ) časové složitosti algoritmu pro inicializaci jednotkové čtvercové matice. Mez vyjádřete jako funkci řádu matice n.

```
for i in range(n):
    for j in range(n):
        M[i][j] = 0

for i in range(n):
    M[i][i] = 1
```

4 Hvězdičky [3 body]

Kolik vytiskne následující program hvězdiček v závislosti na vstupní hodnotě $n \in \mathbb{N}^+$? Vyjádřete přesným vzorcem a určete asymptotickou horní mez ($\mathcal{O}$) časové složitosti programu.

[1] Grafickou úpravu nehodnotím ;)

```python
i = 1
while i < n*n:
    print("*")
    i *= 2
```

5 Mince [3 body]

Máte 9 mincí. Víte, že mezi nimi je jedna falešná mince, která je lehčí než ostatní. Všechny ostatní mince váží stejně. Dále máte k dispozici rovnoramenné váhy, které umožňují porovnat váhu předmětů na levé a pravé misce.[2]

1. Jaký je nejmenší počet vážení, se kterým můžete zaručeně odhalit falešnou minci?
2. Uvažujme, že mincí je n. Jaké je nejvyšší n, pro které dokážeme zaručit, že odhalíme falešnou minci na 3 vážení?
3. Odvoďte obecný vztah, pro jaké nejvyšší n můžeme zaručeně odhalit falešnou minci, pokud máme k dispozici $i \in \mathbb{N}^+$ vážení.

[2] Pozor, vážit se dají i skupiny mincí, ne pouze jednotlivé mince.