Оглавление

1 Интерполяция функции одной переменной

Рассмотрим набор попарно различных точек $\{x_i\}_{i=0}^n, x_i \in [a, b]$. Пусть $\{y_i\}_{i=0}^n$- значения некоторой функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$: в этих точках: $y_i = f(x_i)$. Предполагается, что сама функция f не известна, а известны только её значения в точках x_i. Задача интерполяции функции 1 переменной - построить функцию $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, такую что выполняются следующие условия: $\varphi(x_i) = y_i$. Т.е. построенная функция φ должна совпадать с неизвестной функцией f в заданном наборе узлов. Далее будут рассмотрены 3 способа построения функции φ: линейный, полиномиальный и кубическая интерполяция. Также будут рассмотрены B-сплайны, которые не интерполируют функцию, а приближают её.

1.1 Линейная интерполяция

Линейная интерполяция - наиболее простой способ интерполяция, при котором φ является кусочно-линейной функцией. При таком способе интерполяции соседние узлы соединены прямой линией. Интерполирующая функция φ имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = y_i + (y_{i+1} - y_i)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{1}$$

Преимущества:

- простота реализации;
- высокая скорость построения φ;
- высокая скорость вычисления $\varphi(x)$;

Недостатки:

- φ не является непрерывно-диффферецируемой;

Временная сложность метода:

Построение φ: $O(n \log n)$ - требуется отсортировать все узлы.

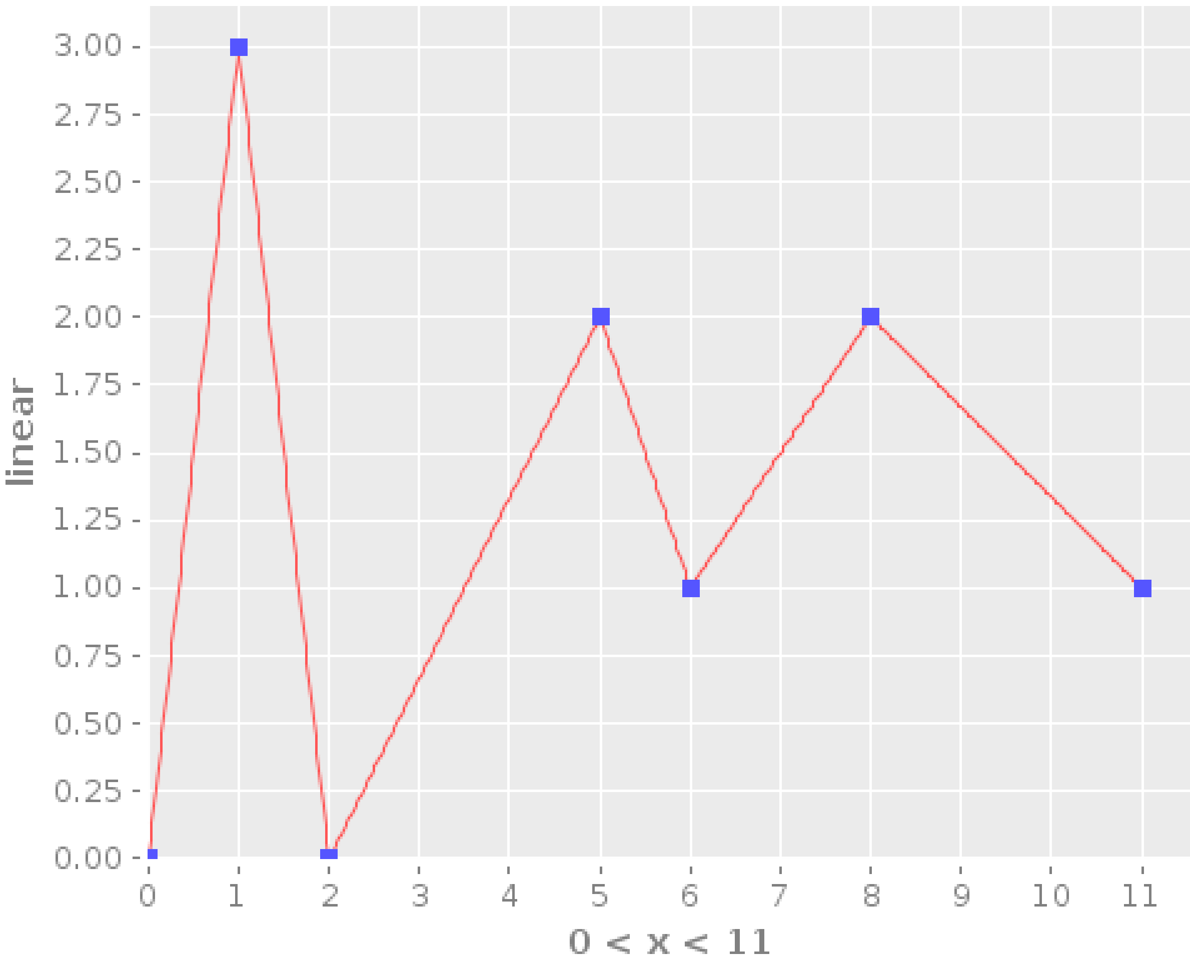
Вычисление $\varphi(x)$: $O(\log n)$ - поиск соответствующего узла.

Пример:

```
; define points
(def points [[0 0] [1 3] [2 0] [5 2] [6 1] [8 2] [11 1]])

; build interpolation function
(def lin (interpolate points :linear))

; view plot on [0, 11]
(view (function-plot lin 0 11))
```



1.2 Полиномиальная интерполяция

В данном способе интерполяции φ является многочленом степени n. Для построение φ используется формула Ньютона с разделёнными разностями. Вычисления производятся по следующим формулам:

$$\begin{gathered}
\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i]\omega_i(x) \\
\omega_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_i) \\
f[x_0, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \forall i \geq 1 \\
f[x_j] = f(x_j), \forall j
\end{gathered} \tag{2}$$

Преимущества:

- φ имеет производную любого порядка;

Недостатки:

- при больших n интерполяционный многочлен будет иметь большую погрешность интерполирования;
- низкая скорость построенире φ;
- низкая скорость вычисления $\varphi(x)$;

Временная сложность метода:

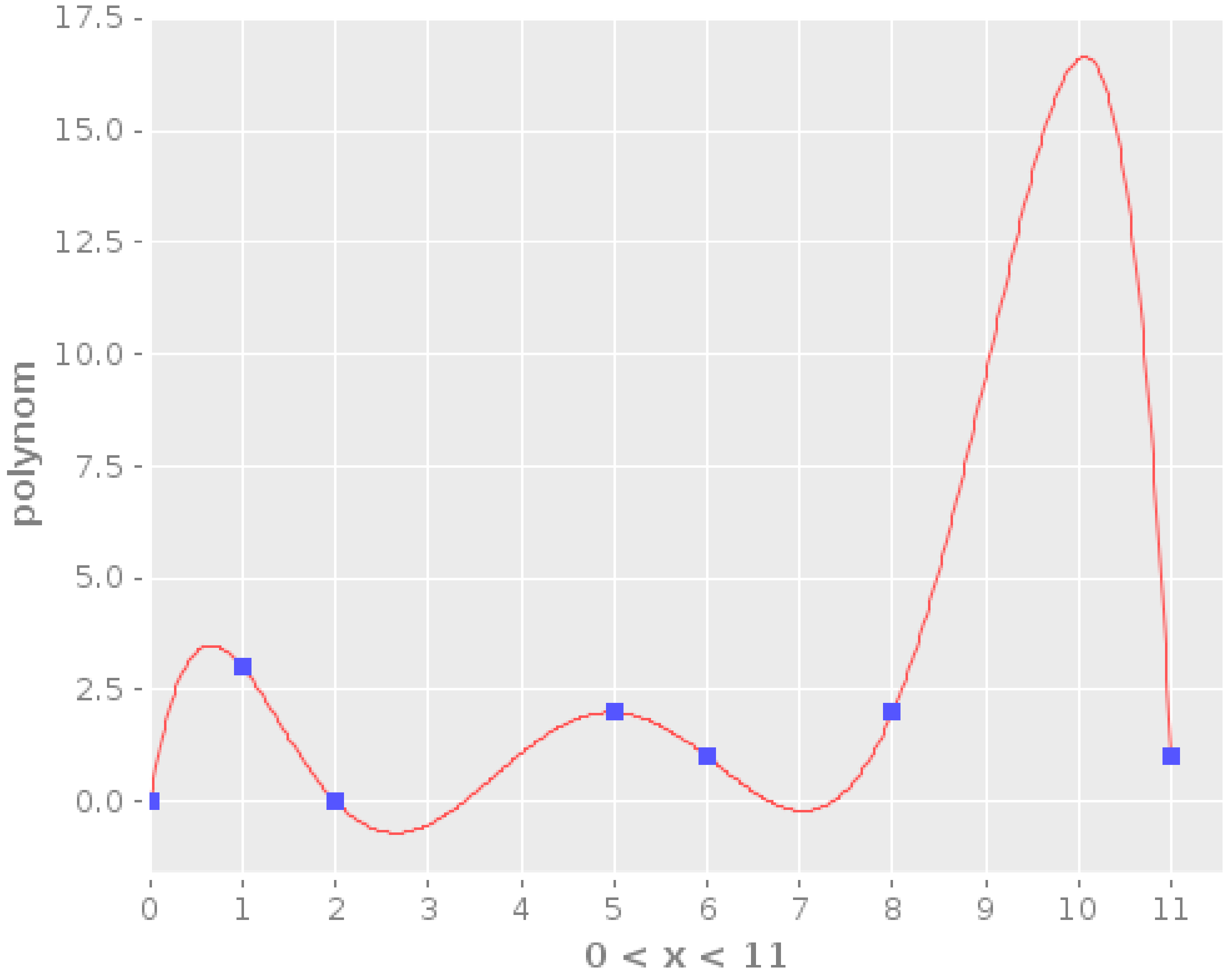
Построение φ: $O(n^2)$
Вычисление $\varphi(x)$: $O(n)$

Пример:

```
; define points
(def points [[0 0] [1 3] [2 0] [5 2] [6 1] [8 2] [11 1]])

; build interpolation function
(def polynom (interpolate points :polynomial))
```

```
; view plot on [0, 11]
(view (function-plot polynom 0 11))
```



1.3 Кубический сплайн

Функция φ является кусочной и на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$ задаётся отдельным кубическим многочленом:

$$\varphi(x) = s_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\delta_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{\delta_i}{6}(x - x_i)^3, x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (3)$$

Также накладываются требования наличия непрерывной первой и второй производной φ, из чего получаем дополнительные условия:

$$\begin{aligned} s'_{i-1}(x_{i-1}) &= s'_i(x_{i-1}), i = \overline{2, n} \\ s''_{i-1}(x_{i-1}) &= s''_i(x_{i-1}), i = \overline{2, n} \end{aligned} \quad (4)$$

Используя эти условия и условия интерполяции получаем следующие формулы для вычисления коэффициентов $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, $\{\delta_i\}$:

$$\begin{gathered}
h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n} \\
\alpha_i = y_i, i = \overline{0, n} \\
\beta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{2\gamma_i + \gamma_{i-1}}{6}, i = \overline{1, n} \\
\delta_i = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h_i}, i = \overline{2, n}
\end{gathered} \tag{5}$$

Коэффициенты $\{\delta_i\}$ можно получить, решив следующую 3-диагональную систему линейных уравнений:

$$h_i\gamma_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})\gamma_i + h_{i+1}\gamma_{i+1} = 6(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i-1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}), i = \overline{i, n-1} \tag{6}$$

Данная система имеет $n-2$ уравнений и n неизвестных. Задавая различные граничные условия можно получить недостающие уравнения и решить систему, тем самым получая коэффициенты для кубического сплайна. Были реализованы 2 вида граничных условий:

1. Естественные граничные условия. Полагают $\varphi''(x_0) = \varphi''(x_n) = 0$.
2. Периодические (замкнутые) граничные условия. Полагают $\varphi'(x_0) = \varphi'(x_n)$, $\varphi''(x_0) = \varphi''(x_n)$.

Временная сложность метода:

Построение φ: $O(n)$

Вычисление $\varphi(x)$: $O(\log n)$ - поиск соответствующего промежутка.

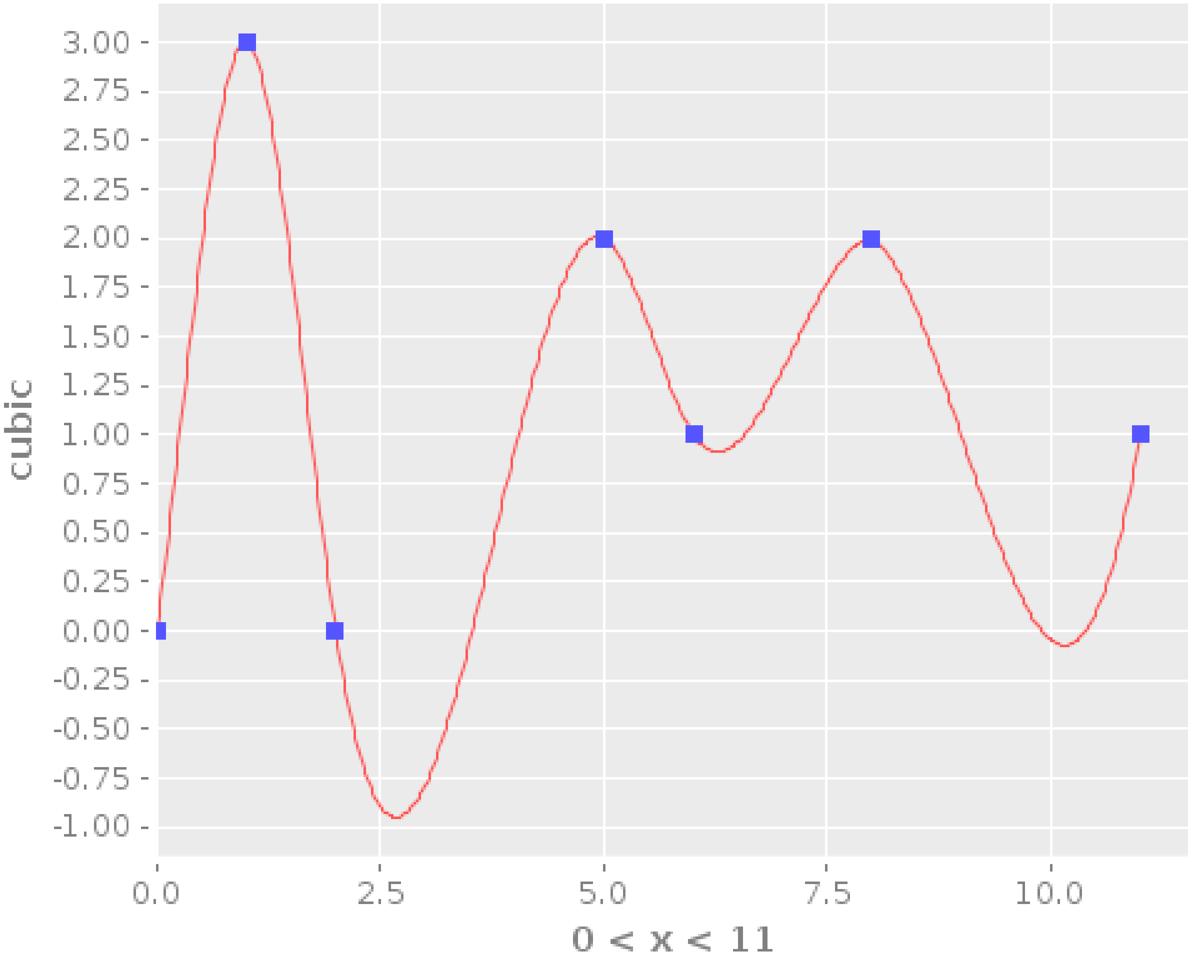
Пример:

```
; define points
(def points [[0 0] [1 3] [2 0] [5 2] [6 1] [8 2] [11 1]])

; build interpolation function
```

```clojure
(def cubic (interpolate points :cubic-spline :boundaries :closed))

; view plot on [0, 11]
(view (function-plot cubic 0 11))
```



1.4 Кубический эрмитов сплайн

Кусочно-полиномиальная функция φ называется эрмитовым сплайном третьей степени для $f \in C^1[a, b]$, если

$$\begin{gathered} s\mid_{x\in\Delta_i} = s_i \in \mathbb{P}_3 \\ s(x_i) = f(x_i) \text{ и } s'(x_i) = f'(x_i) \ \ \forall i = \overline{0, n} \end{gathered} \tag{7}$$

Каждая функция s_i является интерполяционным многочленом Эрмита третьей степени. Вычислять его будем используя форму Ньютона:

$$s_i(x) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_{ij}\omega_{ij}(x) \tag{8}$$

Где

$$\begin{array}{ll} \alpha_{i0} = f(x_{i-1}) & \omega_{i0}(x) = 1 \\ \alpha_{i1} = f'(x_{i-1}) & \omega_{i1}(x) = x - x_{i-1} \\ \alpha_{i2} = f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] & \omega_{i2}(x) = (x - x_{i-1})^2 \\ \alpha_{i3} = f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i] & \omega_{i3}(x) = (x - x_{i-1})^2(x - x_i) \end{array} \tag{9}$$

Первые производные функции в узлах x_i приближались используя конечные разности:

$$f'(x_i) \approx \begin{cases} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & i = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right) & i = \overline{1, n-1} \\ \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} & i = n \end{cases} \tag{10}$$

Временная сложность метода:

Построение φ: $O(n)$

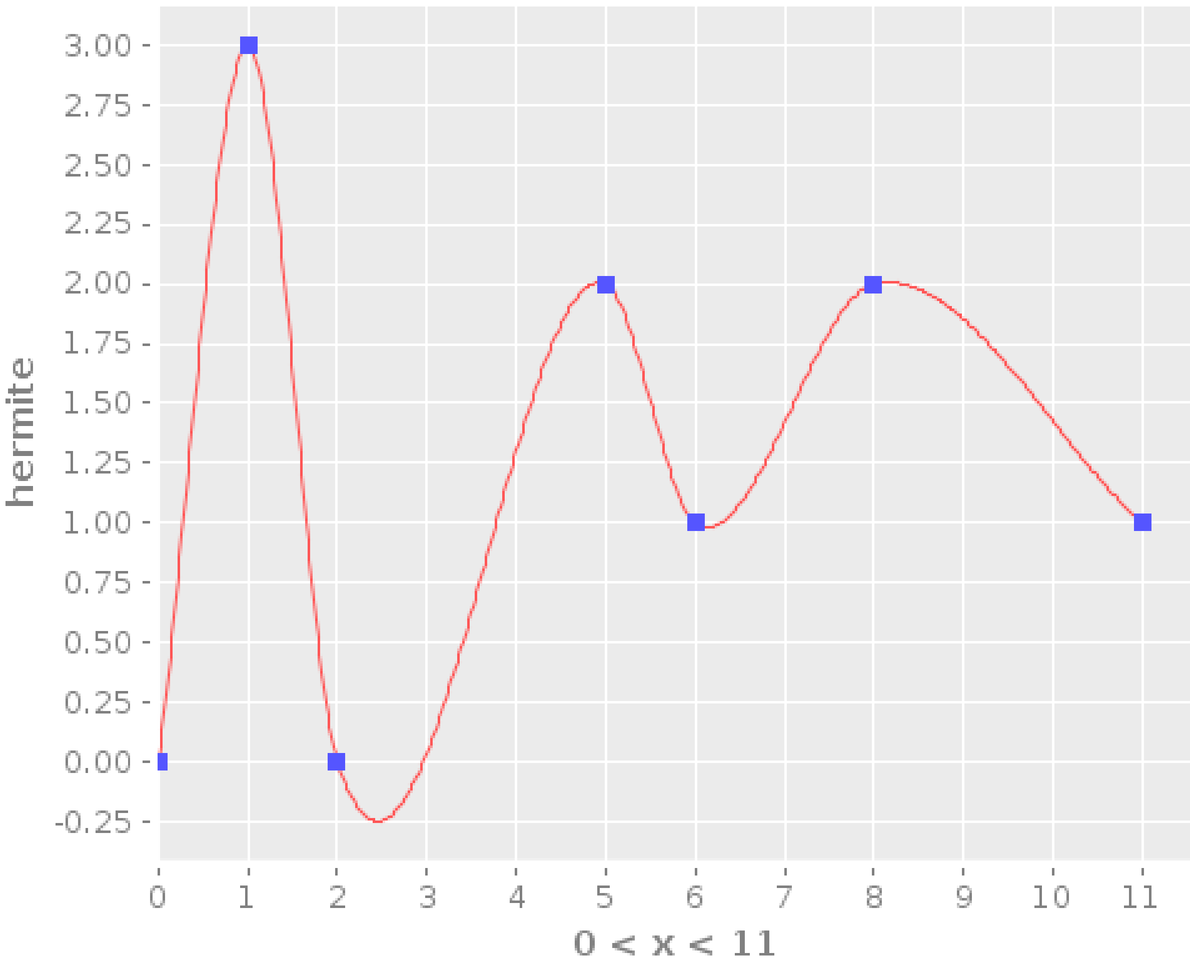
Вычисление $\varphi(x)$: $O(\log n)$ - поиск соответствующего промежутка.

Пример:

```
; define points
(def points [[0 0] [1 3] [2 0] [5 2] [6 1] [8 2] [11 1]])

; build interpolation function
(def hermite (interpolate points :cubic-hermite-spline :boundaries :

; view plot on [0, 11]
(view (function-plot hermite 0 11))
```



1.5 B-сплайн

B-сплайны не интерполируют узлы, как ранее расмотренные методы, а приближают их. При построении B-сплайновой кривой узлы $\{x_i\}$ обычно не задаются, они вычисляются в процессе построения кривой. Задаются только значения $\{y_i\}$.

Временная сложность метода:

Построение φ: $O(n)$
Вычисление $\varphi(t)$: $O(d^2)$, где d - степень сплайна

Пример:

```
; define points
(def points [[0 0] [1 3] [2 0] [5 2] [6 1] [8 2] [11 1]])
```

```
; build approximation function
(def b-spline (interpolate-parametric points :b-spline :degree 3))

; view plot on [0, 1]
(view (parametric-plot cubic 0 1))
```