Лабораторная работа №1

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва

1 Постановка задачи

Целью этой лабораторной работы является решение следующего уравнения переноса методом бегущего счета:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + a\frac{du}{dx} = t^2 x \\ u(0,x) = x^4, \qquad 0 \le x \le X \\ u(t,0) = t, \qquad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{1}$$

Для решения задачи используется равномерная сетка с шагами τ по времени и h по координате. Функция $u(t,x)$ рассматривается в точках $t = k\tau$, $x = mh$, $0 \le k \le K$, $0 \le m \le M$, $T = K\tau$, $X = Mh$.

в данной работе будем использовать явную центральную трехточечную схему.

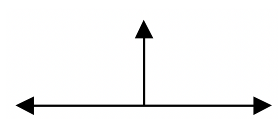

Рис. 1: Явная центральная трехточечная схема

Разностная схема записывается следующим образом:

$$\frac{u_m^{k+1} - 0.5(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k)}{\tau} + \frac{u_{m+1}^k - u_{m-1}^k}{2h} = f_m^k \tag{2}$$

2 Бегущий счет

На рисунке 2 показан метод вычисления по явной центральной трехточечной схеме. Как видим на риснуке, для точек $1 \le m \le M-1$ вычисляется по разностной схеме 2. Но для точки $m = M$ такая схема не подходит, так как для нее необходима точка $m = M+1$, которая не принадлежит сетке.

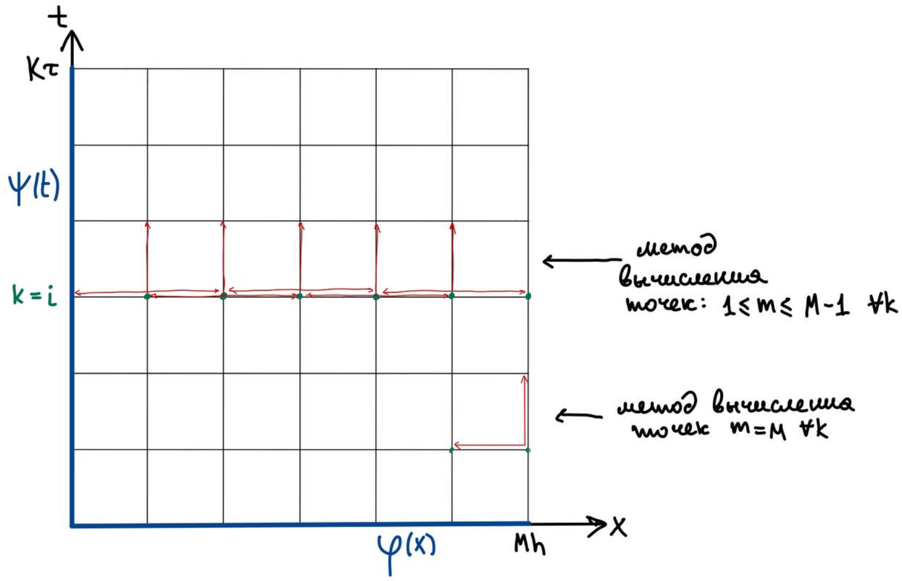

Рис. 2: Метод вычисления

Для вычисления этой точки используется схема явный левый уголок, для которой разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\tau} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{h} = f_m^k \tag{3}$$

3 Реализация и результаты

С помощью последовательных вычислений на каждом слое (как описано в разделе 1) решим уравнение переноса.

На рис. 3 и 4 соответственно показаны графики решения уравнения на плоскости и в пространстве.

4 Вывод

Таким образом, в данной лабораторной работе мы изучили, как с помощью бегущего счета можно вычислить решение уравнения переноса, решили и построили графики решения.

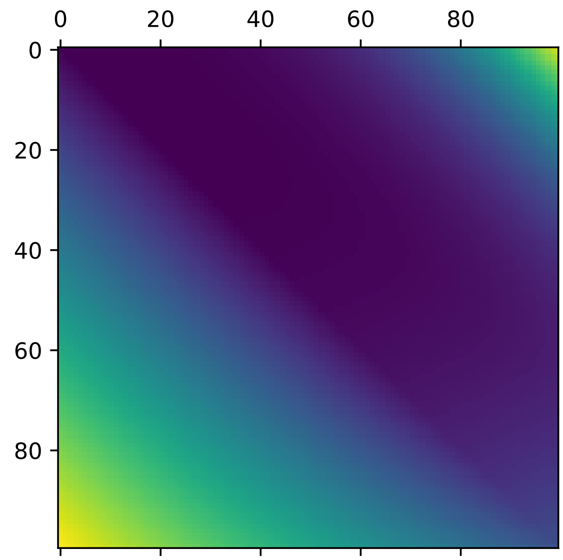

Рис. 3: Двумерных график

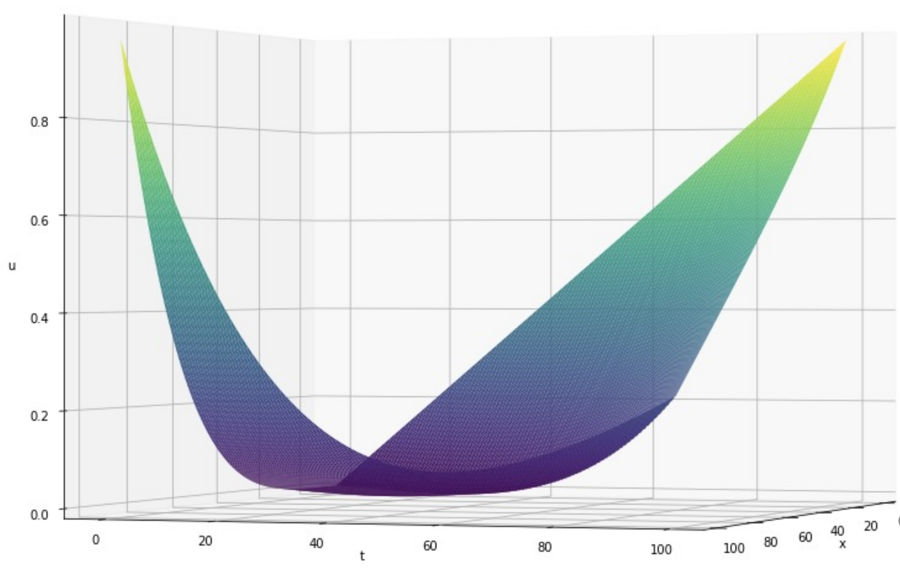

Рис. 4: Трехмерный график