

## Aufgabe 1: Doppelpendel

a)

Koordinaten:

$$\begin{aligned}x_1 &= L_1 \sin \theta_1 \\y_1 &= -L_1 \cos \theta_1 \\x_2 &= L_2 \sin \theta_2 + x_1 \\y_2 &= -L_2 \cos \theta_2 + y_1\end{aligned}$$

Ableitungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 \\\dot{y}_1 &= \dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 \\\dot{x}_2 &= \dot{\theta}_2 L_2 \cos \theta_2 + \dot{x}_1 \\\dot{y}_2 &= \dot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 + \dot{y}_1\end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned}V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\&= -(m_1 + m_2) g L_1 \cos \theta_1 - m_2 g L_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\&= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\&= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \right]\end{aligned}$$

b)

Winkelbeschleunigung in Kleinwinkelnherung:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -\frac{g}{L} (2\theta_1 - \theta_2) \\\ddot{\theta}_2 &= 2\frac{g}{L} (\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

Ableiten von  $\theta_i = a_i \cos \omega t$  und einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}0 &= -\omega^2 a_1 + \frac{g}{l} (2a_1 - a_2) \\0 &= -\omega^2 a_2 - 2\frac{g}{l} (a_1 - a_2)\end{aligned}$$

Umformen nach bspw  $a_1$ , einsetzen und umformen nach  $\omega$  liefert dann:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{g}{\ell} (2 \pm \sqrt{2})}$$