Aufgabe 1: Doppelpendel

a)

Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= L_1 \sin\theta_1 \\
y_1 &= -L_1 \cos\theta_1 \\
x_2 &= L_2 \sin\theta_2 + x_1 \\
y_2 &= -L_2 \cos\theta_2 + y_1
\end{aligned}
$$

Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= \dot{\theta_1} L_1 \cos\theta_1 \\
\dot{y_1} &= \dot{\theta_1} L_1 \sin\theta_1 \\
\dot{x_2} &= \dot{\theta_2} L_2 \cos\theta_2 + \dot{x_1} \\
\dot{y_2} &= \dot{\theta_2} L_2 \sin\theta_2 + \dot{y_1}
\end{aligned}
$$

Potentielle Energie:

$$
\begin{aligned}
V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\
&= -\left(m_1 + m_2\right) g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g L_2 \cos\theta_2
\end{aligned}
$$

Kinetische Energie:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2\right) \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2\right) \\
&= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]
\end{aligned}
$$

b)

Winkelbeschleunigung in Kleinwinkelnherung:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta_1} &= -\frac{g}{L}\left(2\theta_1 - \theta_2\right) \\
\ddot{\theta_2} &= 2\frac{g}{L}\left(\theta_1 - \theta_2\right)
\end{aligned}
$$

Ableiten von $\theta_i = a_i \cos \omega t$ und einsetzen liefert:

$$0 = -\omega^2 a_1 + \frac{g}{l}\left(2a_1 - a_2\right)$$
$$0 = -\omega^2 a_2 - 2\frac{g}{l}\left(a_1 - a_2\right)$$

Umformen nach bspw a_1, einsetzen und umformen nach ω liefert dann:

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{g}{\ell}(2 \pm \sqrt{2})}$$

und somit

$$\omega_\pm = \pm\sqrt{\frac{g\left(2a_1 - a_2\right)}{a_1 L}} \tag{1}$$