

Deflexión de una placa delgada

Deflection of a thin plate.

Nicolás Fernando Blanco Blanco

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería, Bogotá, Colombia.

nblancob@unal.edu.co

Resumen: En la ingeniería estructural se considera como placa al sólido tridimensional el cual tiene una de sus dimensiones, el espesor, mucho menor que las otras, el cálculo de placas tiene su origen con los trabajos que realizó Euler en el siglo XIII, a partir de los cuales se han desarrollado la teoría fundamental de placas.

Para este trabajo se analizará los esfuerzos en una placa delgada mediante la teoría clásica de placas de Kirchhoff la cual desprecia la deformación por córtate, lo que permite expresar la ecuación con derivadas parciales en función de la deflexión.

En esta ecuación se plantea la deflexión transversal $w(x, y)$ como una ecuación de cuarto orden, la cual requiere satisfacer dos condiciones de borde en cada extremo:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q_z(x, y)}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

x, y = Coordenadas de un punto en la placa

w = Deflexión en dirección z

q_z = Fuerza estática distribuida uniformemente

D = Rigidez a la flexión

h = Espesor de la placa

ν = Relación de Poisson

E = Modulo de elasticidad

Para resolver esta ecuación existen diversos métodos aproximados en este caso se buscará solucionar la ecuación por el método de diferencias finitas implementado en el lenguaje de programación Matlab y explicado a lo largo de este artículo.

Palabras claves: deflexión, ecuaciones diferenciales, ecuación de cuarto orden, operador biarmónico, puntos ficticios, condiciones de borde, diferencias finitas.

PROCEDIMIENTO:

Para poder implementar el método de diferencias finitas, se le debe realizar un tratamiento algebraico a la ecuación diferencial, esto con el fin de expresar las derivadas como derivadas aproximadas deducidas a partir del polinomio interpolador de Taylor.

1) Expandir el operador biarmónico $\nabla^4 = \nabla^2 * \nabla^2$ y reescribir la ecuación diferencial:

La ecuación biarmónica es una ecuación diferencial parcial de orden 4, esta puede ser representada como:

$$\nabla^4 w = \Delta^2 w$$

Donde ∇ es el operador nabla y Δ es el operador laplaciano, en el caso bidimensional para un sistema de coordenadas cartesiano, el operador biarmónico se escribe:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 * \partial y^2}$$

Reescribiendo la ecuación diferencial para hallar la deflexión transversal tenemos:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 * \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z(x, y)}{D}$$

2) Consultar o desarrollar las ecuaciones de aproximación de derivadas necesarias en la ecuación diferencial:

Usando el polinomio de Taylor podemos encontrar una expresión aproximada para las derivadas como diferencias finitas :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \left[\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} \right] = \frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{\Delta x^4}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx \left[\frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} \right] = \frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{\Delta y^4}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 * \partial y^2} \approx \left\{ \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right] \right\} = \frac{4w_{i,j} - 2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 * \Delta y^2}$$

4) Consultar y explicar en qué consisten los puntos ficticios por fuera del dominio para aplicar las condiciones de borde:

Para la solución por diferencias finitas, las derivadas parciales de la ecuación para la deflexión de la placa se transforman a cocientes entre incrementos finitos.

Se forma una malla con la misma forma de la placa, y se toma como incógnita para cada nodo la deflexión, de esta forma las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales pasan a ser un sistema de ecuaciones algebraicas con numerosas incógnitas.

Las funciones algebraicas para cada nodo se obtienen a partir del polinomio interpolador de Taylor y resultan adecuadas para puntos dentro del dominio de una placa alejados de borde, pero a medida que nos acercamos al borde los puntos necesarios para satisfacer la ecuación no estarán disponibles porque caerían fuera de la placa, es por eso por lo que se genera un conjunto de puntos auxiliares ficticios, que están ubicados fuera del dominio físico de la placa y servirán para dar apoyo a los operadores centrales.

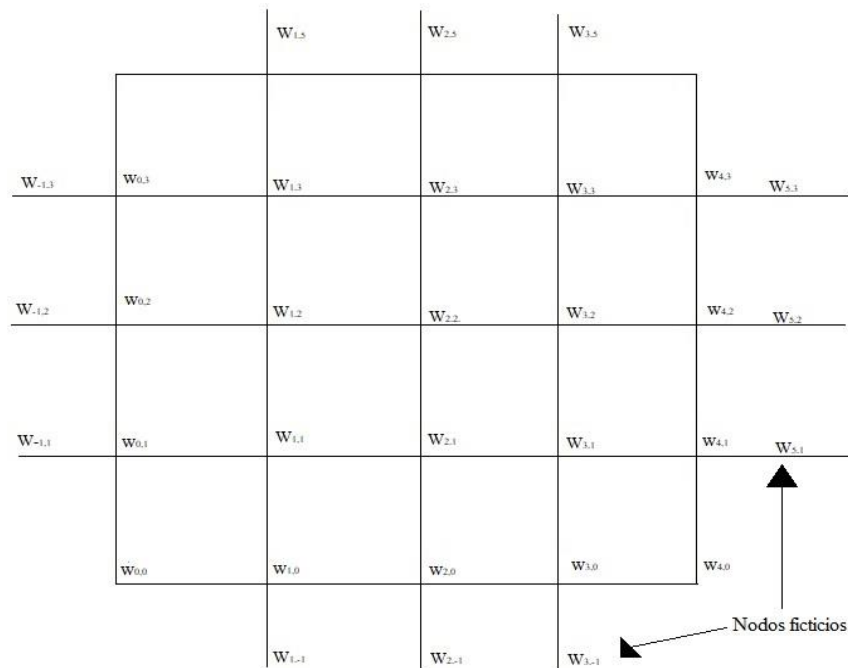


Imagen 1: Malla de puntos, elaborada para desarrollar el método de diferencias finitas.

Las condiciones de contorno son también condiciones diferenciales que se pueden representar de manera aproximada usando diferencias finitas. Las condiciones de contorno se pueden clasificar de la siguiente forma:

1) Simplemente apoyado

Las condiciones de este tipo de apoyo son desplazamiento nulo y momentos (o curvaturas) nulos en dirección perpendicular al contorno.

$$w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Suponiendo un conjunto de nodos ficticios se puede representar la condición de curvatura nula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}w_1 &= 0 \\w_3 &= -w_2\end{aligned}$$

De esta manera el nodo ficticio 3 tiene un valor de desplazamiento igual y de signo contrario al de un punto 2 a igual distancia del borde para hacia el interior.

2) Empotrado

En un contorno empotrado se tiene:

$$\begin{aligned}w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

La condición de rotación nula puede representarse suponiendo un conjunto de nodos ficticios, de donde resulta:

$$\begin{aligned}w_1 &= 0 \\w_3 &= w_2\end{aligned}$$

3) Libre

En un borde libre se tiene que el momento y el cortante son nulos

$$\begin{aligned}M_{1,1} &= 0 \\N_{1,3} &= 0\end{aligned}$$

Estas condiciones se pueden representar también en términos de w como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

4) Condiciones de simetría

Cuando existe una condición de simetría, los desplazamientos a uno y otro lado de la línea de simetría son iguales:

$$w_{1,3} = w_{3,3}$$

$$w_{1,2} = w_{2,2}$$

5) Simular la deflexión de una placa de 4m x 3m con diferentes condiciones de apoyos en los bordes

- | | |
|--|---|
| 1) Ancho de placa: 4m | 2) Altura de placa: 3m |
| 3) Espesor de la placa: $h = 100 \text{ mm}$ | 4) Módulo de elasticidad: $E = 200 \text{ GPa}$ |
| 5) Relación de Poisson: $\nu = 0.3$ | 6) Carga distribuida: $q = 10 \text{ kN/m}^2$ |

Usando la ecuación $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ podemos calcular el parámetro para reemplazar en la ecuación de diferencias:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200 \times 10^9 \text{ Pa} * (0.10 \text{ m})^3}{12(1-0.3^2)} = 1.8315 \times 10^7 \text{ N} * \text{m}$$

Obteniendo una ecuación que puede ser evaluada en cada nodo teniendo en cuentas las condiciones de borde para los extremos:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = \frac{h^2 * 10000 \text{ N/m}^2}{1.8315 \times 10^7 \text{ N} * \text{m}}$$

En donde h dependerá del número de nodos de la malla.

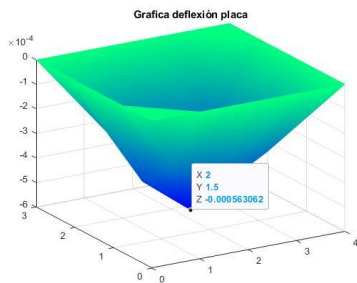
Para condiciones empotradas en los tenemos que las condiciones de los extremos serán:

$$u = 0$$

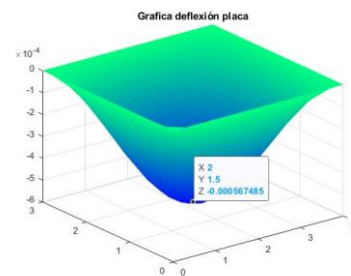
$$z = 0$$

Resolviendo los dos sistemas de ecuaciones a través de un script de Matlab y graficando los resultados encontramos:

- Con una malla de 5x5



- Con una Malla de 15x15



- Con una malla de 55x55

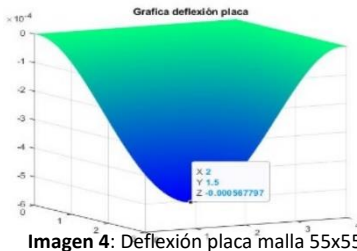


Imagen 4: Deflexión placa malla 55x55.

- Con una malla de 80x100

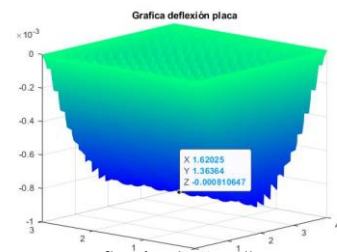


Imagen 5: Deflexión placa malla 80x100.

Al implementar el algoritmo en Matlab encontramos que la deflexión máxima tiende a $w_{\max} = -0.000567 \text{ m} = -0.567 \text{ mm}$, si usamos una malla rectangular los resultados son irregulares.

Para una placa con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes empotrados:

Realizando el análisis para una malla de 5x5, se hace necesario usar un conjunto de puntos ficticios fuera de la geometría de la placa:

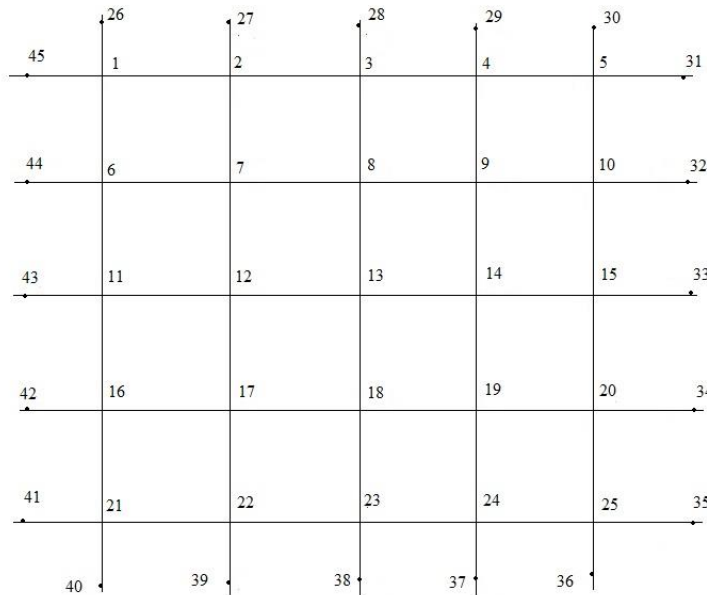


Imagen 2: Malla de puntos, con nodos ficticios necesarios para desarrollar el método de diferencias finitas

Considerando la ecuación en diferencias deducida:

$$20w_{i,j} - 8(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}) + w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2} = \frac{h^4 q_z(x,y)}{D}$$

Evaluando en el punto 13 tenemos:

$$20w_{13} - 8(w_{14} + w_{12} + w_8 + w_{18}) + 2(w_9 + w_7 + w_{19} + w_{17}) + w_{15} + w_{11} + w_3 + w_{23} = \frac{h^4 q_z(x,y)}{D}$$

Todos los puntos están ubicados sobre la placa, sin embargo; algunos se encuentran sobre el borde, evaluando para el punto 8 tenemos:

$$20w_8 - 8(w_9 + w_7 + w_3 + w_{13}) + 2(w_4 + w_2 + w_{14} + w_{12}) + w_{10} + w_6 + w_{28} + w_{18} = \frac{h^4 q_z(x,y)}{D}$$

El punto w_{28} hace parte del conjunto de los nodos ficticios, como se tienen condiciones de contorno simplemente apoyadas entre los puntos 1 y 5 y entre los puntos 21 y 25, sabemos que los desplazamientos son nulos:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_{21} = w_{22} = w_{23} = w_{24} = w_{25} = 0$$

Aplicando la segunda condición para bordes simplemente apoyados tenemos:

$$w_{26} = -w_6$$

$$w_{27} = -w_7$$

$$w_{28} = -w_8$$

$$W_{29} = -W_9$$

$$W_{30} = -W_{10}$$

... etc

En las partes del borde que están empotradas, se sabe que los desplazamientos son nulos:

$$w_1 = w_6 = w_{11} = w_{16} = w_{21} = w_5 = w_{10} = w_{15} = w_{20} = w_{25} = 0$$

Aplicando la segunda condición para bordes empotrados de rotaciones nulas:

$$w_{44} = w_7$$

$$w_{43} = w_{12}$$

$$w_{42} = w_{17}$$

$$W_9 = W_{32}$$

$$w_{14} = w_{33}$$

$$W_{19} = W_{34}$$

Evaluando en los nodos tenemos:

$$\begin{aligned} 20w_7 - 8(w_8 + w_{12}) + 2(w_{13}) + w_9 + w_{17} &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 19w_8 - 8(w_7 + w_9 + w_{13}) + 2(w_{12} + w_{14}) + w_{18} &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 20w_9 - 8(w_8 + w_{14}) + 2(w_{13}) + w_7 + w_{19} &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 21w_{12} - 8(w_{13} + w_7 + w_{17}) + 2(w_8 + w_{18}) + w_{14} &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 20w_{13} - 8(w_{14} + w_{12} + w_8 + w_{18}) + 2(w_9 + w_7 + w_{19} + w_{17}) &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 21w_{14} - 8(w_{13} + w_9 + w_{19}) + 2(w_8 + w_{18}) + w_{12} &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 20w_{17} - 8(w_{18} + w_{12}) + 2(w_{13}) + w_{19} + w_7 &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 19w_{18} - 8(w_{19} + w_{17} + w_{13}) + 2(w_{14} + w_{12}) + w_8 &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ 20w_{19} - 8(w_{18} + w_{14}) + 2(w_{15} + w_{13}) + w_{17} + w_9 &= \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 20 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -8 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 21 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & -8 & 20 & -8 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 21 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 20 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{14} \\ w_{17} \\ w_{18} \\ w_{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h^4 q_z(x, y)}{D} \\ h^4 q_z(x, y) \\ \frac{D}{h^4 q_z(x, y)} \\ D \\ D \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema mediante un script de Matlab obtenemos las siguientes graficas:

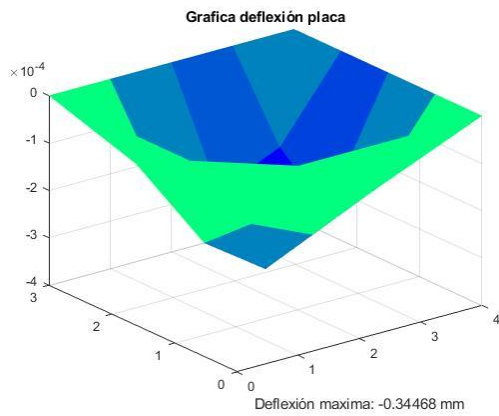


Imagen 6: Deflexión placa malla 5x5.

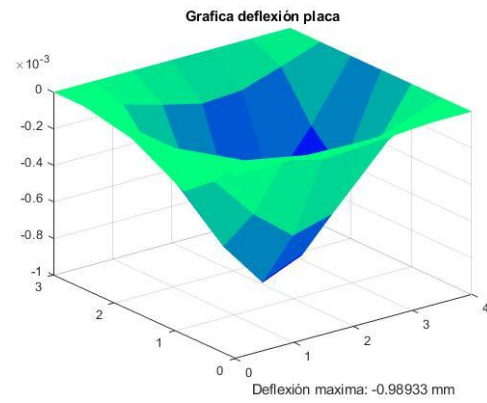


Imagen 7: Deflexión placa malla 7x7.

El código implementado para solucionar el problema se encuentra en el siguiente repositorio: [deflection of a thin plate.](#)

BIBLIOGRAFIA :

- [1] Chapra, Steven; Canale Raymond P. Métodos numéricos para ingenieros. 5ta edición. Editorial McGraw Hill Interamericana. México D.F. 2007.
- [2] Quintana, Pedro; Villalobos Eloisa. Métodos numéricos con aplicación en Excel. 4ta edición. Editorial Reverte Ediciones. México D.F. 2005
- [3] Alvarez, L.M., Analisis de Estructuras Laminas Plegadas Prismaticas, Informe Técnico, Departamento de Estructuras, FCEFN, Universidad Nacional de Córdoba, febrero, 1973.
- [4] Szilard, R. (1974), Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods, Prentice-Hall.
- [5] Estrada, M. Diferencias finitas para EDP, Métodos numéricos para ingeniería civil. Universidad Nacional de Colombia.