Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet u Sarajevu
Odsijek za računarstvo i informatiku

Zadaća 5

Diskretna matematika

Ime i prezime: Ema Rudalija
Broj indexa: 18555
Grupa: PET 12:00

Januar, 2020. godina

Zadatak 1 [0.5 poena]

Dat je periodični diskretni signal perioda 6, čije vrijednosti u trenucima 0, 1, 2, 3, 4 i 5 respektivno iznose −4, −7, 7, 8, 9 i 7.

a. Predstavite ovaj diskretni signal formulom u kojoj se javlja cijeli dio broja;
b. Predstavite ovaj signal diskretnim Fourierovim redom;
c. Odredite amplitudni i fazni spektar za ovaj signal i predstavite ga u vidu sume harmonika.

Rješenje:

a) Svaki periodični signal se može predstaviti formulom:

$$x_n = x_{-1} + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - x_{-1}) \left\lfloor \frac{n-k}{N} \right\rfloor$$

Gdje N predstavlja period periodičnog signal.

U našem primjeru N = 6, te $x_0 = -4,\ x_1 = -7,\ x_2 = 7,\ x_3 = 8,\ x_4 = 9,\ x_5 = 7,$ $x_{-1} = x_5 = 7.$
Uvrštavanjem ovih vrijednosti u gornju jednačinu i njenim raspisivanjem, dobivamo sljedeći izraz:

$$x_n = 7 + (-4-7)\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + (-7-(-4))\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + (7-(-7))\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + (8-7)\left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + (9-8)\left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor + (7-9)\left\lfloor \frac{n+5}{6} \right\rfloor$$

$$x_n = 7 - 11\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 14\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n+5}{6} \right\rfloor.$$

b) svaki periodični signal perioda N može se predstaviti diskretnim Fourierovim redom.

$$x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\frac{2kn\pi}{N} + b_k \sin\frac{2kn\pi}{N}$$

gdje su koeficijenti a_k i b_k jednaki respektivno:

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\frac{2kn\pi}{N}, \qquad k = 0,1,\ldots \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n sin\frac{2kn\pi}{N}, \qquad \text{k} = 0,1,\ldots \left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$$

$$a_0 = \frac{2}{6}(-4\cos0 - 7\cos0 + 7\cos0 + 8\cos0 + 9\cos0 + 7\cos0) = \frac{1}{3}20 = \frac{20}{3}$$
$$a_1 = \frac{1}{3}\left(-4cos0 - 7cos\frac{\pi}{3} + 7cos\frac{2\pi}{3} + 8cos\pi + 9cos\frac{4\pi}{3} + 7cos\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{20}{3}$$
$$a_2 = \frac{1}{3}\left(-4cos0 - 7cos\frac{2\pi}{3} + 7cos\frac{4\pi}{3} + 8cos2\pi + 9cos\frac{8\pi}{3} + 7cos\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}(-4cos0 - 7cos\pi + 7cos2\pi + 8cos3\pi + 9cos4\pi + 7cos5\pi) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$b_0 = \frac{2}{6}(-4\sin0 - 7\sin0 + 7\sin0 + 8\sin0 + 9\sin0 + 7\sin0) = 0$$
$$b_1 = \frac{1}{3}\left(-4sin0 - 7sin\frac{\pi}{3} + 7sin\frac{2\pi}{3} + 8sin\pi + 9sin\frac{4\pi}{3} + 7sin\frac{5\pi}{3}\right) = -8\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$b_2 = \frac{1}{3}\left(-4sin0 - 7sin\frac{2\pi}{3} + 7sin\frac{4\pi}{3} + 8sin2\pi + 9sin\frac{8\pi}{3} + 7sin\frac{10\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$$
$$b_3 = \frac{1}{3}(-4sin0 - 7sin\pi + 7sin2\pi + 8sin3\pi + 9sin4\pi + 7sin5\pi) = 0$$

Ukoliko dobivene vrijednosti uvrstimo i raspišemo prethodnu formula za diskretni Fourierov red dobijemo sljedeći izraz:

$$x_n = \frac{10}{3} + \left(-\frac{20}{3}cos\frac{n\pi}{3} - 8\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{n\pi}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}cos\frac{2n\pi}{3} - 2\sqrt{3}sin\frac{2n\pi}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}cosn\pi\right)$$

c) Koristeći elementarne trigonometrijske transformacije, prethodno napisani članovi se mogu napisati kao $A_k\cos(\Omega_k n + \varphi_k)$, gdje je $A_k\ amplitudni\ spektar\ a\ \varphi_k\ fazni\ spektar$.

$$\frac{10}{3} = A_0 \cos\varphi_0$$
$$A_0 = \frac{10}{3}, \varphi_0 = 0$$

$$\frac{-20}{3}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} = A_1\cos\left(\frac{n\pi}{3} + \varphi_1\right) = A_1\cos\frac{n\pi}{3}\cos\varphi_1 - A_1\sin\frac{n\pi}{3}\sin\varphi_1$$
$$(1)\ A_1\cos\varphi_1 = -\frac{20}{3}$$
$$(2) - A_1\sin\varphi_1 = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{(2)}{(1)} \to -\tan\varphi_1 = \frac{8\sqrt{3}}{20} \to \varphi_1 = \tan^{-1} - \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx -34.72°$$
$$A_1 = -\frac{4\sqrt{37}}{3}$$

$$\frac{-4}{3}\cos\frac{2n\pi}{3} - 2\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3} = A_1\cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \varphi_1\right) = A_1\cos\frac{2n\pi}{3}\cos\varphi_1 - A_1\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\varphi_1$$

$$(1)\ A_2 \cos \varphi_2 = -\frac{4}{3}$$

$$(2) - A_2 \sin \varphi_2 = -2\sqrt{3}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow -\tan \varphi_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -68.95°$$

$$A_2 = -\frac{2\sqrt{31}}{3}$$

$$A_3 \cos(n\pi + \varphi_3) = \frac{2}{3} \cos n\pi$$

$$A_3 = \frac{2}{3}, \varphi_3 = 0$$

Konačno:

$$x_n = \frac{10}{3} + \left(-\frac{4\sqrt{37}}{3} \cos\left(\frac{n\pi}{3} + \tan^{-1} \frac{-2\sqrt{3}}{5}\right)\right) + \left(-\frac{2\sqrt{31}}{3} \cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \tan^{-1} \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{2}{3} \cos n\pi$$

Zadatak 2 [0.4 poena]

Ispitajte koji su od sljedećih diskretnih signala periodični a koji nisu. Za one koji jesu, nađite osnovni period N:

a. $n \sin(2n\pi/5)$
b. $(-1)^n \cos(4n\pi/7)$
c. $(n+1)\cos(n\pi/5) - n\cos(9n\pi/5)$
d. $3\sin(2n\pi + \pi/3) - 2\cos(3n\pi - \pi/2)$

Odgovori moraju biti obrazloženi, inače se neće priznavati!

Rješenje:

Diskretni signal je periodičan ukoliko postoji cijeli broj N različit od nule, takav da za svako n iz skupa cijelih brojeva, vrijedi sljedeća relacija:

$x_n = x_{n+N}$.

a) $n \sin(2n\pi/5)$

Ovaj diskretni signal nije trigonometrijski, radi umnoška koji komplicira stvari.
Posmatrat ćemo podniz n = 5k+1.
Ukoliko ovaj izraz za n uvrstimo u funkciju dobivamo sljedeće:

$(5k+1)\sin\frac{2\pi(5k+1)}{5} = (5k+1)\sin\frac{10\pi k+2\pi}{5} = (5k+1)\sin\frac{2\pi}{5}.$

Primjetimo sada da je ovo umnožak rastućeg polinoma i konstante, što nam daje monotono rastući i neograničen podniz.
Međutim, da bi postojao neki period N, onda bi, za naš niz x_n vrijedilo:
$x_1 = x_{N+1} = \cdots = x_{5N+1}$, što narušava činjenicu da je podniz 5k+1 strogo rastući.

b) $(-1)^n \cos\left(\frac{4n\pi}{7}\right)$

$(-1)^n$ zapisujemo kao $\cos(n\pi)$, te nam početni diskretni signal dobiva sljedeći oblik: $\cos(n\pi)\cos\left(\frac{4n\pi}{7}\right)$. Kada imamo ovakav proizvod trigonometrijskih funkcija, njihov ukuoni period bit će jednak njihovom najvećem zajedničkom sadržiocu. Dakle računamo zasebno periode prvog faktora, pa zatim drugog.
Period $\cos(n\pi)$ jednak je 2.
Period $\cos\left(\frac{4n\pi}{7}\right)$ određujemo na sljedeći način: neka nam je faktor uz $n\pi$ u brojniku jednak p. P tada iznosi 4. Zatim, neka nam je nazivnik jednak q, koji ima vrijednost jednaku 7. Ostaje nam još da označimo period od $n\pi$ kao r. Vrijednost r je

izračunata prethodno i jednaka je 2. Ukupan period dobivamo prema sljedećoj formuli: $\frac{rq}{p}$. Dakle nakon uvrštavanja period je jednak $\frac{7}{2}$. Međutim to nam nije krajnje rješenje, jer period diskretnog signal mora biti cijeli broj, te ga množimo najmanjim cijelim brojem do prvog cijelog broja, kako bismo dobili osnovni period. Ukoliko pomnožimo sa 2, dobivamo da je period jednak 7.

Na kraju, ukupni period signala jednak je $\text{NZS}(2,7) = 14$.

c) $(n + 1) \cos (\frac{n\pi}{5}) - n \cos (\frac{9n\pi}{5})$

Ovdje ćemo iskoristiti trik negativnog ugla. Znamo da je $\cos(\frac{9n\pi}{5}) = \cos(\frac{-n\pi}{5})$.
Zatim ćemo iskoristiti to da je kosinus parna funkcija: $\cos(\frac{-n\pi}{5}) = \cos(\frac{n\pi}{5})$.
Dobili smo isti ugao kao i u prvom članu, te izraz pojednostavimo klasičnim oduzimanjem:
$(n + 1) \cos(\frac{n\pi}{5}) - n \cos(\frac{n\pi}{5}) = \cos(\frac{n\pi}{5})$.
Zadatak nam se nakon naznačenih operacija oporilično pojednostavio te računamo period sljedeće trigonometrijske funkcije: $\cos(\frac{n\pi}{5})$, na isti način opisan prethodno.
r = 2, p = 1, q = 5. Ukupan period je dakle jednak $\frac{2*5}{1} = 10$.

d) $3 \sin (2n\pi + \frac{\pi}{3}) - 2 \cos (3n\pi - \frac{\pi}{2})$

Posmatrajmo prvi izraz, $3 \sin (2n\pi + \frac{\pi}{3})$. Možemo ga pojednostaviti: $3 \sin(\frac{\pi}{3})$. Dobili smo izraz umnožak dvije konstante, što je također konstanta, dakle nema perioda. Sada možemo posmatrati samo drugi dio $- 2 \cos (3n\pi - \frac{\pi}{2})$. I ovaj izraz je također konstantan. Ukoliko se osvrnemo na trigonometrijsku kružnicu primjetimo da je ovaj izraz uvijek jednak 0. Dakle, perioda nema.

Zadatak 3 [0.5 poena]

Odredite i nacrtajte amplitudno-frekventnu i fazno-frekventnu karakteristiku diskretnog sistema opisanog diferentnom jednačinom $y_n - 5y_{n-1} = 7\, x_n - 6\, x_{n-1}$, a nakon toga, odredite odziv ovog sistema na periodični signal iz Zadatka 1. Uputa: razmotrite prolazak svakog od harmonika posebno.

Rješenje:

Prvo nalazimo funkciju sistema H(z). Ukoliko uvrstimo $x_n = z^n$ i $y_n = z^n H(z)$
Sada diferentna jednačina postaje:

$$z^n H(z) - 5\, z^{n-1} H(z) = 7z^n - 6z^{n-1}$$

Sada izrazimo H(z):

$$\mathrm{H(z)} = \frac{7z^n - 6z^{n-1}}{z^n - 5z^{n-1}} = \frac{7z-6}{z-5}$$

Kauzalni sistemi su stabilni ako i samo ako je analitički izraz H(z) definisan za sve kompleksne vrijednosti |z|≥1. Kod nas je to zadovoljeno, dakle sistem je stabilan.

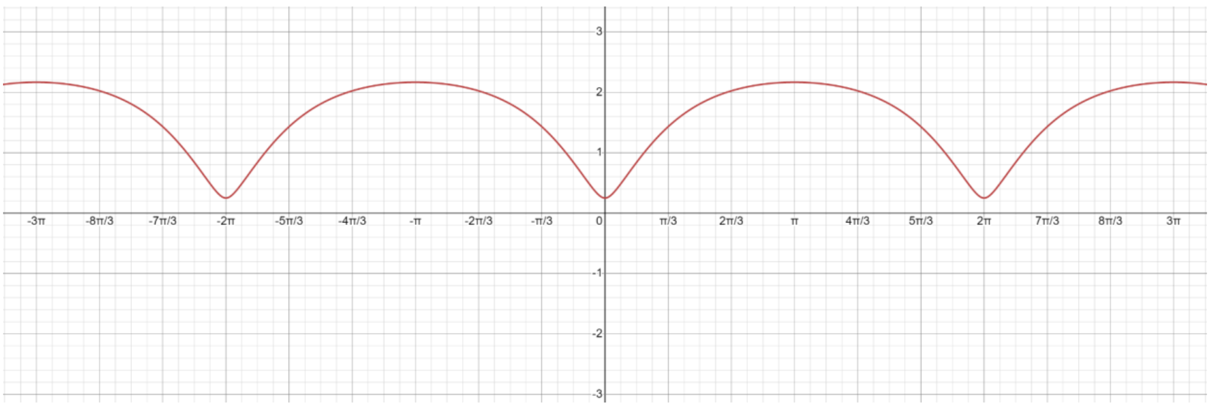
Prelazimo na račuanje amplitudno-frekventnu karakteristiku $\mathrm{A}(\Omega) = |\mathrm{H}(e^{i\Omega})|$.

U izraz za H(z), umjesto promjenive z uvrstit ćemo $e^{i\Omega}$, te na kraju izračunati modula kompleksnog broja. Tijekom računa iskoristiti ćemo poznati identitet:

$$e^{i\Omega} = cos\Omega + \mathrm{i}\sin\Omega$$

$$\mathrm{A}(\Omega) = \left|\frac{7e^{i\Omega}-6}{e^{i\Omega}-5}\right| = \left|\frac{7cos\Omega+7\mathrm{i}\sin\Omega-6}{\cos\Omega+\mathrm{i}\sin\Omega-5}\right| = \sqrt{\frac{(7cos\Omega-6)^2 + (7sin\Omega)^2}{(cos\Omega-5)^2+(sin\Omega)^2}} = \sqrt{\frac{49cos^2\Omega + 49sin^2\Omega - 84\cos\Omega + 36}{cos^2\Omega + sin^2\Omega - 10\cos\Omega + 25}} = \sqrt{\frac{85-84\cos\Omega}{26-10\cos\Omega}}.$$

Grafički predstavljena amplitudno-frekventna karakteristika:

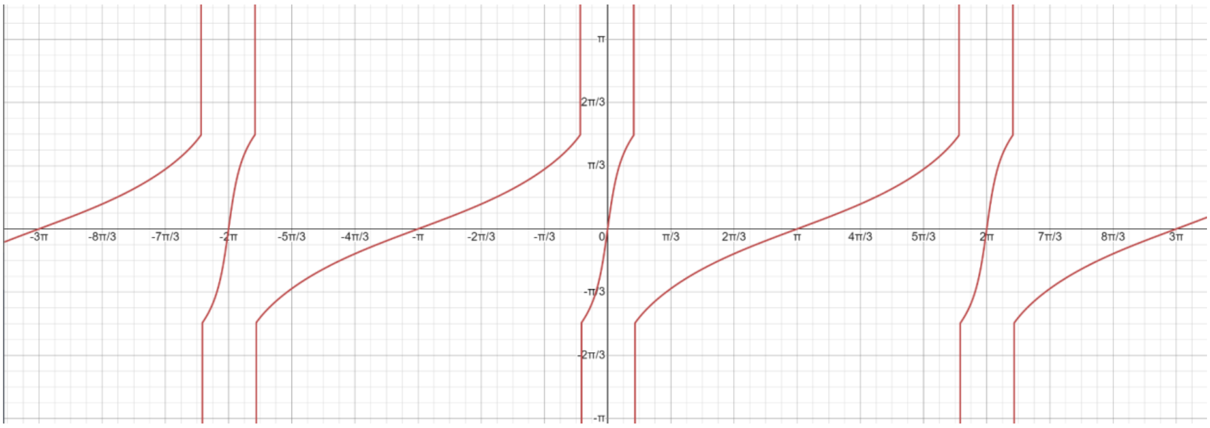


Fazno-frekventnu karakteristiku računamo kao $\varphi\ (\Omega)\ = \arg\ (\mathrm{H}(e^{i\Omega}))$.

$$\frac{7cos\Omega+7\mathrm{isin}\Omega-6}{\cos\Omega+\mathrm{isin}\Omega-5}\frac{cos\Omega-5-\mathrm{isin}\Omega}{\cos\Omega-5+\mathrm{isin}\Omega} = \frac{-41cos\Omega+37-29\mathrm{isin}\Omega}{cos^2\Omega+sin^2\Omega-10\cos\Omega+25} = \frac{37-41cos\Omega}{26-10cos\Omega} + i\,\frac{-29sin\Omega}{26-10cos\Omega}$$

$$\arg(z) = \mathrm{arctg}\,\frac{Im(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \mathrm{arctg}\,\frac{-29sin\Omega}{26-10cos\Omega}$$

Grafčki predstavljena fazno-frekventna karakterisitka:



Odziv sistema $\mathrm{H(z)}\ = \frac{7z-6}{z-5}$

Na periodični signal:

$$x_n = \frac{10}{3} + \left(-\frac{20}{3}cos\frac{n\pi}{3} - 8\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{n\pi}{3}\right) + (-\frac{4}{3}cos\frac{2n\pi}{3} - 2\sqrt{3}sin\frac{2n\pi}{3}) + (\frac{2}{3}cosn\pi)$$

Računamo tako što gledamo svaki od harmonica zasebno:

Prolazak 1. harmonika:

$$x_1 = \frac{10}{3}$$
$$y_{n1} = x_1 z^n \mathrm{H(z)}$$
$$y_{n1} = \frac{10}{3}\mathrm{H}(1)$$
$$y_n = \frac{10}{3}\frac{1}{-4} = -\frac{5}{6}$$

Prolazak 2. harmonika:

$$x_2 = \left(-\frac{4\sqrt{37}}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3} + \tan^{-1}\frac{-2\sqrt{3}}{5}\right)\right)$$
$$= -\frac{4\sqrt{37}}{3}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\cdot\frac{5\sqrt{37}}{37} - \sin\frac{n\pi}{3}\cdot\left(\frac{-2\sqrt{111}}{37}\right)\right)$$

$$Z\left\{\cos\frac{n\pi}{3}\right\} = \frac{z(2z-1)}{2(z^2-z+1)}$$
$$Z\left\{\sin\frac{n\pi}{3}\right\} = \frac{z\sqrt{3}}{2(z^2-z+1)}$$

$$y_n = Z^{-1}\{Z\{x_2\}\cdot H(z)\}$$
$$y_n = Z^{-1}\left\{-\frac{4\sqrt{37}}{3}\cdot\frac{5\sqrt{37}}{37}\cdot\frac{z(2z-1)}{2(z^2-z+1)}\cdot\frac{7z-6}{z-5}\right\}$$
$$+ Z^{-1}\left\{-\frac{4\sqrt{37}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{111}}{37}\cdot\frac{z\sqrt{3}}{2(z^2-z+1)}\cdot\frac{7z-6}{z-5}\right\}$$
$$= -\frac{20}{3}Z^{-1}\left\{\frac{z(2z-1)(7z-6)}{(z^2-z+1)(z-5)}\right\} - 4Z^{-1}\left\{\frac{z(7z-6)}{(z^2-z+1)(z-5)}\right\}$$
$$= -\frac{20}{3}I_1 - 4I_2$$

$$z_1 = 5$$
$$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$P_1(z) = (2z-1)(7z-6)$$
$$P_2(z) = (7z-6)$$
$$Q_1(z) = z^2 - z + 1$$
$$Q_2(z) = (z-5)\left(z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$
$$Q_3(z) = (z-5)\left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$I_1 = \frac{P_1(z_1)}{Q_1(z_1)}(z_1)^n + \frac{P_1(z_2)}{Q_2(z_2)}(z_2)^n + \frac{P_1(z_3)}{Q_3(z_3)}(z_3)^n$$
$$= \frac{87}{7}(5)^n + \frac{33 - 29i\sqrt{3}}{42}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{33 + 29i\sqrt{3}}{42}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$I_2 = \frac{P_2(z_1)}{Q_1(z_1)}(z_1)^n + \frac{P_2(z_2)}{Q_2(z_2)}(z_2)^n + \frac{P_2(z_3)}{Q_3(z_3)}(z_3)^n$$
$$= \frac{29}{21}(5)^n + \frac{-29 + 11i\sqrt{3}}{42}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{-29 - 11i\sqrt{3}}{42}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Prolazak 3. harmonika:

$$x_3 = \left(-\frac{2\sqrt{31}}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \tan^{-1}\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\frac{2\sqrt{31}}{3}\left(\frac{2\sqrt{31}}{31}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{3\sqrt{93}}{31}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$Z\left\{\cos\frac{2n\pi}{3}\right\} = \frac{z(2z+1)}{2(z^2+z+1)}$$
$$Z\left\{\sin\frac{2n\pi}{3}\right\} = \frac{z\sqrt{3}}{2(z^2+z+1)}$$

$$y_n = Z^{-1}\{Z\{x_3\} \cdot H(z)\}$$

$$y_n = Z^{-1}\left\{-\frac{2\sqrt{31}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{31}}{31} \cdot \frac{z(2z+1)}{2(z^2+z+1)} \cdot \frac{7z-6}{z-5}\right\}$$
$$+ Z^{-1}\left\{-\frac{2\sqrt{31}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{93}}{31} \cdot \frac{z\sqrt{3}}{2(z^2+z+1)} \cdot \frac{7z-6}{z-5}\right\}$$
$$= \frac{-2}{3}Z^{-1}\left\{\frac{z(2z+1)(7z-6)}{(z^2+z+1)(z-5)}\right\} - 3Z^{-1}\left\{\frac{z(7z-6)}{(z^2+z+1)(z-5)}\right\}$$
$$= \frac{-2}{3}I_1 - 3I_2$$

$$z_1 = 5$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$P_1(z) = (2z+1)(7z-6)$$
$$P_2(z) = (7z-6)$$
$$Q_1(z) = z^2 + z + 1$$

$$Q_2(z) = (z-5)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$Q_3(z) = (z-5)\left(z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{P_1(z_1)}{Q_1(z_1)}(z_1)^n + \frac{P_1(z_2)}{Q_2(z_2)}(z_2)^n + \frac{P_1(z_3)}{Q_3(z_3)}(z_3)^n \\ &= \frac{319}{31}(5)^n + \frac{115 - 29i\sqrt{3}}{62}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{115 + 29i\sqrt{3}}{62}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{P_2(z_1)}{Q_1(z_1)}(z_1)^n + \frac{P_2(z_2)}{Q_2(z_2)}(z_2)^n + \frac{P_2(z_3)}{Q_3(z_3)}(z_3)^n \\ &= -\frac{29}{31}(5)^n + \frac{-87 - 115i\sqrt{3}}{186}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ &\quad + \frac{-87 + 115i\sqrt{3}}{186}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Prolazak 4. harmonika:

$$x_1 = \frac{2}{3}\cos n\pi$$

$$y_n = Z^{-1}\{Z\{x_4\} \cdot H(z)\}$$

$$Z\{x_4\} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{z}(\mathrm{z}+1)}{\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 1}$$

$$\begin{aligned} y_n &= Z^{-1}\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{\mathrm{z}(\mathrm{z}+1)}{\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 1} \cdot \frac{7\mathrm{z} - 6}{\mathrm{z} - 5}\right\} = \frac{2}{3}Z^{-1}\left\{\frac{z(z+1)(7\mathrm{z} - 6)}{(\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 1)(\mathrm{z} - 5)}\right\} \\ &= -\frac{1}{9}(13 \cdot (-1)^n + 29 \cdot (5)^n) \end{aligned}$$

Zadatak 4 [0.5 poena]

Nađite z-transformaciju sekvence $x_n = (n^2 \cos(n\pi / 4) + (-5)^n / (2n + 1)!$
$) u_{n-4}$. Pri tome se po potrebi možete koristiti tablicama i osobinama z-transformacije.

Rješenje:

Ukoliko zanemarimo u_{n-4}, dobivamo izraz: $x_n = (n^2 \cos(n\pi / 4) + (-5)^n / (2n + 1)!$.

Prvu osobinu z-transformacije koju ćemo upotrijebiti je linearnost:
Z{ax+ by} = aZ{x} + bZ{y}.

Dobivamo:
$Z\{ x_n \} = Z\{ n^2 \cos(n\pi / 4)\} + Z\,(-5)^n / (2n + 1)! \}$

Prvo ćemo zasebno izračunati prvu z – transformaciju: $Z\{ n^2 \cos(n\pi / 4)\}$.
Primjenit ćemo osobinu z-transformacije:
$Z\{ n^k x_n \} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)$.

U našem primjeru k = 2, dakle imat ćemo drugi izvod X(z).

Kako bismo dobili X(z), prvenstveno izračunamo z-transformaciju $Z\{ \cos(n\pi / 4)\}$.
Primjenit ćemo tabličnu transformaciju:

$Z\{\cos\Omega\} = \frac{z(z-cos\Omega)}{z^2-2zcos\Omega+1}$
U našem primjeru $\Omega = \frac{n\,\pi}{4}$.
Sada uvrštavanjem svih spomenutih transformacija dobivamo slijedeći račun:

$$Z\{\cos\frac{n\,\pi}{4}\} = \frac{z(z-cos\frac{\pi}{4})}{z^2-2zcos\frac{\pi}{4}+1} = \frac{z^2-\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2-\sqrt{2}z+1}$$

$$Z\{ n^2 \cos\frac{n\,\pi}{4}\} = \left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\frac{z^2-\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2-\sqrt{2}z+1}\right)\right) = \left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2\sqrt{2}-4z+\sqrt{2}}{2(z^2-\sqrt{2}z+1)^2}\right)\right) = z\frac{z^4\sqrt{2}-6z^3+6z-\sqrt{2}}{2(z^2-\sqrt{2}z+1)^3}$$

Sada računamo drugu transformaciju:
$Z\{\frac{1}{n!}\} = e^{\frac{1}{z}}$
Jedna od osobina z-transformacije je:

$Z\{ y_n \} = Y(z) \rightarrow Z_{y_{2n}} = \frac{Y(\sqrt{z})+Y(-\sqrt{z})}{2}$

Stoga je

$Z\{\frac{1}{(2n+1)!}\} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}+e^{\frac{-1}{\sqrt{z}}}}{2}$

Sada koristimo sljedeću osobinu z-transformacije:

Z { y_n} $= \mathrm{Y(z)} \rightarrow \mathrm{Z}a^n y_n = \mathrm{Z} = \mathrm{Y(z)} \rightarrow \mathrm{Z}y_{2n} = \mathrm{Y}(\frac{z}{a})$

Stoga je

$Z\{\frac{(-5)^n}{(2n+1)!}\} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{-z/5}}}+e^{\frac{1}{\sqrt{-z/5}}}}{2} = \frac{e^{\frac{1i}{\sqrt{z/5}}}+e^{\frac{-1i}{\sqrt{z/5}}}}{2} = \cos\frac{1}{\sqrt{z/3}}$

Konačno je:

Z { y_n} $= Z\{ n^2 \cos\frac{n\,\pi}{4}\} + Z\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\} = z\frac{z^4\sqrt{2}-6z^3+6z-\sqrt{2}}{2(z^2-\sqrt{2}z+1)^3} + \cos\frac{1}{\sqrt{z/3}}$

Z{ x_n} = Z { $y_n\, u_{n-2}$ } = Z{ $w_{n-2}\, u_{n-2}$ } $= z^{-2}\, Z\{Y_{n+2}\} = z^{-k}\, (z^k Y(z) - \sum_{i=0}^{1} y_i)$

$X(z) = z\frac{z^4\sqrt{2}-6z^3+6z-\sqrt{2}}{2(z^2-\sqrt{2}z+1)^3} + \cos\frac{1}{\sqrt{z/3}} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2z} + \frac{5}{6z}$

Zadatak 5 [0.6 poena]

Dat je diskretni sistem opisan diferentnom jednačinom $7\, y_{n+1} - 3\, y_n = 5\, x_{n+1} - 2\, x_{n-2}$. Nađite odziv ovog sistema na pobudu $x_n = n \cos(3\, n\, \pi / 4)\, u_n$. Rješenje treba izraziti u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi.

Zadatak 6 [0.5 poena]

Neki linearni, stacionarni i kauzalni sistem ima impulsni odziv $h_n = (108 + 36\,n)\,(-5)^n + 17\,\delta_n - 30\,\delta_{n-1}$ za $n \geq 0$ i $h_n = 0$ za $n < 0$. Nađite impulsni odziv $h_n{}'$ inverznog sistema ovog sistema koristeći tehnike zasnovane na z-transformaciji. Provjerite rezultat tako što ćete naći vrijednosti $h_n{}'$ za $n = 0\,..\,5$ postupkom diskretne dekonvolucije.

Rješenje:

Poznata nam je relacija: $h_n = Z^{-1}\{H(z)\}$, iz koje slijedi da je $H(z) = Z\{h_n\}$.

Pomoću ovih osobina rješavamo ovaj zadatak. Tražimo z-transformaciju impuslnog odziva datog u postavci zadatka:

$H(z) = Z\{(108 + 36\,n)\,(-5)^n + 17\,\delta_n - 30\,\delta_{n-1}\}$.

Pomoću osobina linearnosti, pojednostavljujemo izraz:

$H(z) = Z\{(108 + 36\,n)\,(-5)^n\} + Z\{17\,\delta_n\} - Z\{30\,\delta_{n-1}\}$

Prvo rješavamo prvu z-tranafomaciju.

$Z\{(108 + 36\,n)\,(-5)^n\} = Z\{108(-5)^n + 36n(-5)^n\}$, pa ponovnim primjenjivanjem linearnosti, dobivamo:

$Z\{108(-5)^n\} + Z\{36n(-5)^n\}$.

Sada pomoću tablica, rješavamo zasebno z-transformacije:

$Z\{108(-5)^n\} = \frac{108z}{z+5}$

$Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$

$Z\{36n(-5)^n\} = \frac{-180z}{(z+5)^2}$

Dobili smo prvu z- transformaciju, prelazimo na rješavanje ostale dvije:

$Z\{17\,\delta_n\} = 17$

$Z\{30\,\delta_{n-1}\} = \frac{30}{z}$

Sada sve možemo uvrstiti nazad u formulu, kako bismo dobili izraz za H(z), koji nakon fakotrizacije izgleda:

$H(z) = \frac{125(z-1)(z+2)(z+3)}{z(z+5)^2}$

$H'_{\delta(z)} = \frac{1}{H(Z)} = \frac{z(z+5)^2}{125(z-1)(z+2)(z+3)}$

Sada inverznom Z- transformacijom računamo impulsni odziv h_n'

Z-transformaciju racionalne funkcije računamo na isti način kao što je prikazano u prethodnim primjerima.

$h_n' = \frac{1}{125}((-3)^n - 3(-2)^n + 3))$

Slijedi provjeravanje rezultata, računanjem prvih 5 vrijednosti h_n' postupkom diskretne konvolucije.

h_0 = (108+0)*1 + 17*1 – 30*0=125

h_1 = (108+36)(-5) + 17*0-30*1 = -750

h_2 = (108+36*2) $(-5)^2$ +17*0 – 30*0= 4500

h_3 = -27000

h_4 = 157500

h_5 = -900000

Sada slijedi računanje vrijednosti h'_n za $n = 0, .., 5$ postupkom diskretne dekonvolucije.

$$h'_0 = \frac{1}{h_0} = \frac{1}{125}$$

$$h'_1 = -\frac{1}{h_0}\sum_{k=0}^{0} h'_k h_{n-k} = \frac{6}{125}$$

$$h'_2 = -\frac{1}{h_0}\sum_{k=0}^{1} h'_k h_{n-k} = 0$$

$$h'_3 = -\frac{1}{h_0}\sum_{k=0}^{2} h'_k h_{n-k} = 0$$

$$h'_4 = -\frac{1}{h_0}\sum_{k=0}^{3} h'_k h_{n-k} = \frac{36}{125}$$

$$h'_5 = -\frac{1}{h_0}\sum_{k=0}^{4} h'_k h_{n-k} = -\frac{144}{125}$$

Sada slijedi računanje vrijednosti h'_n za $n = 0, \ldots, 5$ pomoću izračunate formule.

$$h'_0 = \frac{1}{125}$$

$$h'_1 = \frac{6}{125}$$

$$h'_2 = 0$$

$$h'_3 = 0$$

$$h'_4 = \frac{36}{125}$$

$$h'_5 = -\frac{144}{125}$$

Vidimo da se svi rezultati poklapaju, dakle izvedeni izraz je tačan.

Zadatak 7 [0.5 poena]

Data su dva diskretna sistema opisana diferentnim jednačinama $12\,y_n + 7\,y_{n-1} + y_{n-2} = 2\,x_n - 4\,x_{n-1}$ i $5\,y_n + y_{n-1} = x_n + 4\,x_{n-1}$. Nađite diferentne jednačine kojima se opisuju paralelna i serijska (kaskadna) veza ova dva sistema, a nakon toga odredite odziv serijske veze ovih sistema na pobudu $x_n = \sin^3(5n\pi/3)$, $n \in \mathbb{Z}$ (u krajnjem rješenju ne smiju figurirati kompleksni brojevi). Uputa: razmotrite kako glase funkcije sistema paralelne odnosno serijske veze dva sistema ukoliko su poznate njihove funkcije sistema i kako možete rekonstruisati diferentnu jednačinu koja opisuje neki sistem ukoliko znate njegovu funkciju sistema. Što se tiče pobude x_n, razmotrite kako se ona može prikazati u vidu linearne kombinacije pobuda oblika z^n.

Rješenje:

Potrebno je izračunati $H_1(z)$ i $H_2(z)$. Koristimo sljedeće smjene:

$$x_n = z^n$$
$$y_n = z^n H(z)$$

Ove smjene uvrštavamo u prvu diferencijalnu jednačinu i dijelimo sa z^{n-2}. Dobijamo:

$$H_1(z) = \frac{2z^2 - 4z}{12z^2 + 7z + 1}$$

Ove smjene uvrštavamo i u drugu diferencijalnu jednačinu i dijelimo sa z^{n-1}. Dobijamo:

$$H_2(z) = \frac{z + 4}{5z + 1}$$

Paralelna veza sistema se računa kao $H_p(z) = H_1(z) + H_2(z)$. Dobijamo:

$$H_p(z) = \frac{22z^3 + 37z^2 + 25z + 4}{60z^3 + 47z^2 + 12z + 1}$$

Diferentna jednačina za paralelnu vezu:

$$60y_{n+3} + 47y_{n+2} + 12y_{n+1} + y_n = 22x_{n+3} + 37x_{n+2} + 25x_{n+1} + 4x_n$$

Serijska veza sistema se računa kao $H_s(z) = H_1(z)H_2(z)$. Dobijamo:

$$H_s(z) = \frac{2z^3 + 4z^2 - 16z}{60z^3 + 47z^2 + 12z + 1}$$

Diferentna jednačina za serijsku vezu:

$$60y_{n+3} + 47y_{n+2} + 12y_{n+1} + y_n = 2x_{n+3} + 4x_{n+2} - 16x_{n+1}$$

Sada računamo z-transformaciju na pobudu.

$$Z\left\{\left(\sin\frac{5n\pi}{3}\right)^3\right\} = Z\left\{\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{5n\pi}{3} - \sin 5n\pi\right)\right\} = \frac{3}{4}Z\left\{\sin\frac{5n\pi}{3}\right\} - \frac{1}{4}Z\{\sin 5n\pi\}$$

Međutim od dvije dobivene transformacije, računamo samo prvu, jer je $\sin(n\pi) = 0$.

$$\frac{3}{4}Z\left\{\sin\frac{5n\pi}{3}\right\} = \frac{-3\sqrt{3}z}{8(z^2 - z + 1)}$$

$$Z\left\{\left(\sin\frac{5n\pi}{3}\right)^3\right\} = \frac{-3\sqrt{3}z}{8(z^2 - z + 1)}$$

Sada je $Y(z) = X(z)H_s(z)$

$$Y(z) = \frac{-6\sqrt{3}z^2(z-2)(z+4)}{8(z^2 - z + 1)(3z+1)(5z+1)(4z+1)}$$

I na kraju odziv glasi:

$$\begin{aligned}
&-\frac{387\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} - \frac{813\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{22568} - \frac{813\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} - \\
&\frac{813\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} + \frac{135}{7}\sqrt{3}\;4^{-n-1}\cos(\pi n) - \frac{77}{104}\times 3^{3/2-n}\cos(\pi n) - \\
&\frac{627}{248}\sqrt{3}\;5^{-n}\cos(\pi n) - \frac{387\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} + \frac{387\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{22568} + \\
&i\left(\frac{813\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} + \frac{387\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{22568} + \frac{135}{7}\sqrt{3}\;4^{-n-1}\sin(\pi n) - \right. \\
&\quad \frac{77}{104}\times 3^{3/2-n}\sin(\pi n) - \frac{627}{248}\sqrt{3}\;5^{-n}\sin(\pi n) + \frac{387\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} - \\
&\quad \left.\frac{387\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} - \frac{813\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{22568} + \frac{813\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{22568}\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 8 [0.5 poena]

Odredite vrijednosti struja i_n, $n = 0 .. 7$ u električnom kolu na slici, ukoliko je poznato da je E = 7 V, R_1 = 4 K i R_2 = 2 K:

Uputa: Za sve konture osim prve i posljednje, jednačine po II Kirchoffovom zakonu imaju isti oblik, koji povezuje struje sa tri susjedna indeksa. Stoga je moguće napisati diferentnu jednačinu koja povezuje vrijednosti i_n, i_{n+1} i i_{n+2}. Da bismo riješili ovu diferentnu jednačinu, trebaju nam početne vrijednosti i_0 i i_1 koje, na žalost, ne znamo. Stavimo $i_0 = c$ gdje je c neka konstanta koju ćemo naknadno odrediti. Iz prve konture može se napisati jednačina koja povezuje i_0 i i_1, tako da možemo izraziti i_1 preko c. Sada treba riješiti dobijenu diferentnu jednačinu, pri čemu će rješenje za i_n naravno zavisiti od nepoznate konstante c. Konačno, iz posljednje konture može se napisati jednačina koja povezuje i_6 i i_7. Ukoliko u tu jednačinu uvrstimo vrijednosti i_6 i i_7 koji slijede iz nađenog rješenja za i_n uz uvrštavanje $n = 6$ odnosno $n = 7$, dobija se jednačina u kojoj je c jedina nepoznata. Nakon što odredimo c, lako nalazimo konačno rješenje za i_n uvrštavanjem nađene vrijednosti za c u ranije nađeno "djelimično" rješenje za i_n. Tražene struje i_n, $n = 0 .. 7$ se naravno dobijaju uvrštavanjem vrijednosti za n od 0 do 7 u nađeno opće rješenje za i_n. Alternativno, one se mogu odrediti i postupno iz diferentne jednačine, s obzirom da sada znamo i_0 i i_1.

Rješenje:

Ukoliko primjenimo prvi I drugi Kirchoffov zakon dobit ćemo slijedeći izraz:

$$i_n \mathrm{R1} + (i_n - i_{n+1})\mathrm{R2} = (i_{n-1} - i_n)\mathrm{R2}$$

Što možemo zapisati kao slijedeću diferentnu jednačinu:

$4i_n + 2i_n - 2i_{n+1} = 2i_{n-1} - 2i_n$

$8i_n - 2i_{n+1} - 2i_{n-1} = 0$

8$i_{n+1} - 2i_{n+2} - 2i_n$

Koristit ćemo slijedeće z transformacije za rješavanje:

$Z\{i_n\} = \mathrm{I(z)}$

Z{i_{n+1} } = z I(z) - i_0z

Z{i_{n+2}} = z^2I(z) -$i_0 z^2$-i_1z

Primjenimo na diferentnu jednačinu:

8 z I(z) - 8i_0z -2z^2I(z) + 2$i_0 z^2$ + 2i_1z - 2 I(z) = 0

Izrazimo I(z) = $\frac{8i_0\text{z}-2i_0 z^2-2i_1\text{z}}{8\text{ z}-2z^2-2}$

Da bi rješili ovaj izraz moramo naći vrijednosti i_0 I i_1, što možemo naći ukoliko zavrtimo zadnju lijevu konturu. Dobijemo izraz:

E = i_0 R1 + $(i_0 - i_1)$ R2

Uvrstimo vrijednosti E i R, da bismo dobili naše nepoznate:

$$i_1 = \frac{6i_0 - 7}{2}$$

Ovo rješenje nazad uvrstimo u I(z) i dobijemo: