Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Natalia Bratek, 25.03.2024
Laboratorium 03

Interpolacja

1. Treści zadań

1.1 Dane są trzy węzły interpolacji (-1,2.4), (1,1.8), (2,4.5), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

a) jednomiany
b) wielomiany Lagrange'a
c) wielomiany wg wzoru Newton'a

Pokazać, że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian

1.2 Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: p(t) = 3t^3 – 7t^2 + 5t – 4

1.3 Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

a) jednomiany
b) wielomiany Lagrange'a
c) wielomiany Newtona

1.4 Znaleźć kompromis między granicą błędu a zachowaniem wielomianu interpolacyjnego dla funkcji Rungego f(t) = 1/(1 + 25t^2), dla równoodległych węzłów na przedziale [-1,1]

1.5 (a) sprawdzić czy pierwsze siedem wielomianów Legendre'a są wzajemnie ortogonalne

(b) sprawdzić, czy one spełniają wzór na rekurencję

(c) wyrazić każdy z sześciu pierwszych jednomianów 1, t, …, t^6 jako liniową kombinację pierwszych siedmiu wielomianów Legendre'a, p0, …, p6

1.6 Dana jest funkcja określona w trzech punktach x_0, x_1, x_2, rozmieszczonych w jednakowych odstępach ($x_1=x_0+h$, $x_2=x_1+h$):

$f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

Proszę wykonać interpolację danej funkcji sklejanymi funkcjami sześciennymi.

2. Rozwiązania

2.1 Zadanie pierwsze

a) jednomiany

trzy węzły interpolacji (-1,2.4), (1,1.8), (2,4.5)

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

a, b, c $\neq$ 0

p (-1) = 2.4

p (1) = 1.8

p (2) = 4.5

$$\begin{cases} a - b + c = 2.4 \\ a + b + c = 1.8 \\ a + 2b + 4c = 4.5 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymamy:

a = 1.1

b = -0.3

c = 1

p(x) = 1.1 – 0.3x + x^2

b) wielomiany Lagrange'a

$$L_k(x) = \frac{d}{m} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{(x_k - x_i)} \ ,$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f(x_k)}_{\text{współczynniki}} \underbrace{L_k(x)}_{\text{baza Lagrange'a}}$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

trzy węzły interpolacji (-1, 2.4), (1, 1.8), (2, 4.5)

P(x) = $2.4\,\frac{(x-1)(x-2)}{2*3} + 1.8\,\frac{(x+1)(x-2)}{(-2)*1} + 4.5\frac{(x-1)(x+1)}{(-3)*(-1)} = x^2 - 0.3x + 1.1$

c) wielomiany wg wzoru Newtona

$$N(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$
$$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0,x_1] = -0.3$$
$$f[x_1,x_2] = 2.7$$
$$f[x_0,x_1,x_2] = 1.0$$

N(x) = 2.4 + (x+1)(-0.3) + (x+1)(x-1) = $x^2 - 0.3x + 1.1$

To pokazuje, jak różne metody interpolacji mogą prowadzić do tego samego wyniku, dając ten sam wielomian.

2.2 Zadanie drugie

p(t) = $3t^2 - 7t^2 + 5t$ – 4 = t(3t^2 -7t+5) – 4 = t(t(3t-7)+5) – 4

2.3 Zadanie trzecie

a) Jednomiany
do obliczenia wyrażenia x^k potrzeba (k − 1) mnożeń. Warto jednak istnieje także metoda potęgowania szybkiego, wtedy liczba potrzebnych do obliczenia mnożeń rośnie logarytmicznie w stosunku do wykładnika. Przy takim założeniu do wyliczenia składnika zawierającego x i należy wykonać 'i' mnożeń. W takim razie całe wyrażenie wymaga **(n^2 – n)/2** mnożeń. Dodatkowo można też zastosować metodę Hornera, która wymaga maksymalnie n mnożeń.

b) Wielomiany Lagrange'a

Zarówno licznik jak i mianownik L mają n składników, więc do ich ewaluacji potrzeba (n − 1) mnożeń. Można uznać dzielenie za mnożenie przez odwrotność mianownika. Wtedy dla każdego L potrzeba (2n − 1) mnożeń. Sumujemy n takich składników, każdy mnożąc dodatkowo przez yi , co daje w sumie **n · 2n** = 2n^2 mnożeń.

c) Wielomiany Newtona

Składników jest n. Kolejne składniki wymagają 0, 1 . . . n mnożeń. Jest to więc ciąg arytmetyczny. Potrzebna liczba mnożeń to

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

2.4 Zadanie czwarte

Efekt Rungego – pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów *n* przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście *n,* zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Kompromis to n = 5. Przy większym n rozbieżności są już znaczne.

2.5 Zadanie piąte – wielomiany Legendre'a

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

a) Wielomiany Legendre'a są rodziną wielomianów, które są ortogonalne względem siebie na przedziale $[-1,1]$ z wagą $w(x)=1$. Ortogonalność tych wielomianów oznacza, że ich iloczyn skalarny na tym przedziale jest równy zero dla różnych wielomianów.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

Ułatwić można sobie sprawę zauważając, że każdy wielomian o nieparzystym numerze jest nieparzysty, a każdy o parzystym numerze - parzysty. Przez to iloczyn wielomianu o parzystym numerze i nieparzystym dają wielomian nieparzysty. Funkcje nieparzyste całkowane na symetrycznym obszarze względem 0 zawsze są równe 0.

b) Wzór rekurencyjny dla wielomianów Legendre'a

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

n > 0
$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

L = $(n+1)P_{n+1}(x)$ = 3x * x= 3*$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

R = $(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ = 5x * $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

L = R

Czyli spełniają one wzór na rekurencję.

c) Kombinacja liniowa

$1 = P_0(t)$

$t = P_1(t)$

$3t^2 - P_0(t) = 2P_2(t) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{3}(2P_2(t) + P_0(t))$

$5t^3 - 3t = 2P_3(t) \Leftrightarrow t^3 = \frac{1}{5}(2P_3(t) + 3P_1(t))$

$35t^4 - 30t^2 + 3 = 8P_4(t) \Leftrightarrow t^4 = \frac{1}{35}(8P_4(t) + 30t^2 - 3) = \frac{1}{35}\left(8P_4(t) + 30(\frac{1}{3}\left(2P_2(t) + P_0(t)\right) - 3P_0(t)\right) = \frac{1}{35}(8P_4(t) + 20P_2(t) - 2P_0(t))$

$63t^5 - 70t^3 + 15t = 8P_5(t) \Leftrightarrow \frac{1}{63}(8P_5(t) + 70t^3 - 15t) = \frac{1}{63}\left(8P_5(t) + 70(\frac{1}{5}(2P_3(t) + 3P_1(t)) - 15P_1(t)\right) = \frac{1}{63}(8P_5(t) + 28P_3(t) + 17P_1(t))$

2.6 Zadanie szóste

Punkty: x_0, x_1, x_2
Odstępy: ($x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$)

f(x_0) $= y_0$
f(x_1) $= y_1$
f(x_2) $= y_2$

Interpolacja sklejanymi funkcjami sześciennymi polega na wyznaczeniu zbioru funkcji sześciennych, gdzie każda z nich jest zdefiniowana na jednym z podprzedziałów podziału dziedziny funkcji

$[x_i, x_{i+1}]$

Funkcja sześcienna:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Ponieważ mamy tylko trzy punkty, zamiast rozwiązywać układ równań dla znalezienia wielu funkcji sklejanych, skupimy się na znalezieniu jednej funkcji sześciennej, która przechodzi przez wszystkie trzy punkty, co jest uproszczeniem zadania. To uproszczenie jest właściwe, gdy liczba punktów jest zbyt mała, aby zastosować pełną metodę interpolacji sklejanej. W takim przypadku, metodologia redukuje się do interpolacji wielomianowej.
Rozwiązanie układu równań dla interpolacji funkcji sklejanymi funkcjami sześciennymi w trzech punktach daje nam wartości współczynników *a*, *b*, *c*, zależne od wartości *d*, której jednak bezpośrednio nie można wyznaczyć z trzech punktów dla pojedynczej funkcji sześciennej. Ponieważ mamy tylko trzy punkty, nie możemy wyznaczyć czterech niezależnych współczynników dla pojedynczej funkcji sześciennej bez dodatkowych założeń (np. o pochodnych w punktach skrajnych).

3. Bibliografia

Wykłady
https://pl.wikipedia.org/wiki/Posta%C4%87_Newtona_wielomianu
https://pl.wikipedia.org/wiki/Efekt_Rungego
https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a