Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Natalia Bratek, 26.03.2024
Laboratorium 04

Aproksymacja

1. Treści zadań

1.1 Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x^3 w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla w(x)=1
1.2 Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x^3 w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a
1.3 Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia
1.4 Oblicz wartości funkcji f(x)= 1-x^2 w dyskretnych punktach xi: xi=-1+ 0.5*i, i=0,1..4, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego
1.5 Wykonać aproksymację funkcję |sin(x)| funkcjami trygonometrycznymi w zakresie [-pi, pi].

2. Rozwiązania

2.1 Zadanie pierwsze – metoda średniokwadratowa

f(x) = $1 + x^3$

przedział: [0,1]
waga: w(x) = 1

Postać wielomianu stopnia pierwszego:

q(x) = $c_0 + c_1 x$

Mamy więc: $\varphi_0(x) = 1$ oraz $\varphi_1(x) = x$

$\int_0^1 p(x)\,\varphi_0(x)\varphi_0(x)$ dx = $\int_0^1 1\,dx = 1$

$\int_0^1 p(x)\,\varphi_0(x)\varphi_1(x)$ dx = $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 p(x)\,\varphi_1(x)\varphi_1(x)$ dx = $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$\int_0^1 p(x)\, f(x)\, \varphi_0(x)$ dx = $\int_0^1 1 + \; x^3 \; dx = \frac{5}{4}$

$\int_0^1 p(x)\, f(x)\, \varphi_1(x)$ dx = $\int_0^1 x + \; x^4 \; dx = \frac{7}{10}$

Układ równań wygląda następująco:

$$c_0 + \frac{1}{2} c_1 = \frac{5}{4}$$

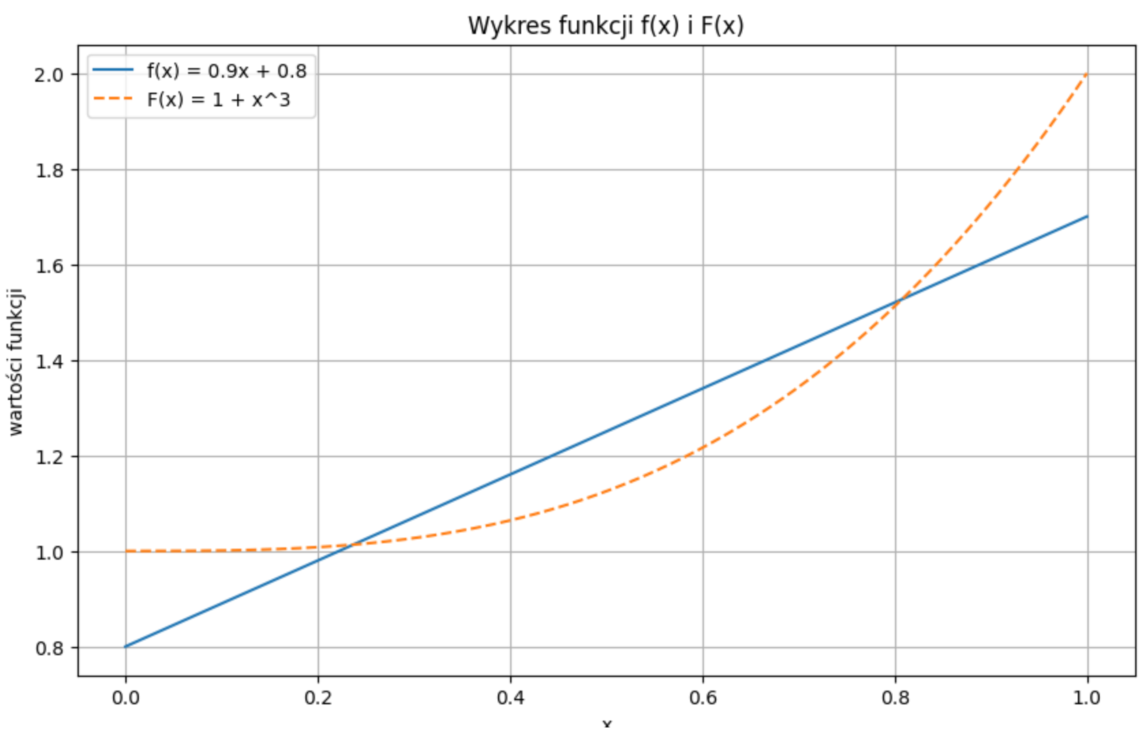
$$\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{3} c_1 = \frac{7}{10}$$

Stąd:

$c_0 = \frac{4}{5}$

$c_1 = \frac{9}{10}$

q(x) = $\frac{9}{10} x + \frac{4}{5}$



Rys.1 Wykres funkcji

2.2 Zadanie drugie – wielomianów Legendre'a

Aproksymacja funkcji przy użyciu wielomianów Legendre'a w przedziale [0,1] polega na wykorzystaniu ortogonalności tych wielomianów w tym przedziale do znalezienia najlepszych współczynników dla aproksymowanego wielomianu

f(x) = $1 + x^3$

przedział: [0,1]

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = x$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Aby przeprowadzić aproksymację w przedziale [0,1], potrzebujemy przeskalować wielomiany Legendre'a z ich standardowego przedziału [−1,1] do przedziału [0,1]. Możemy to zrobić, przekształcając zmienną *x* do nowej zmiennej t = 2*x*−1, która mapuje [0,1] na [−1,1].

t = $2(x - \frac{1}{2})$
x = $\frac{1}{2}(t + 1)$

Funkcja aproksymowana przyjmuje postać:

$$f(t) = (\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1, \quad t \in [-1,1]$$

A funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{2} c_i L_i(t), \quad t \in [-1,1]$$

Wracając do zmiennej x otrzymamy funkcję interpolującą.
Postać macierzowa:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} L_1(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} L_2(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Tą postać można uprościć:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt & 0 & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt & 0 \\ 0 & 0 & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Z tego otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} c_0 \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt \\ c_1 \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt \\ c_2 \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$c_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)L_i(t)dt}{\int_{-1}^{1} L_i^2(t)dt}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1dt = 2.5$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt = \int_{-1}^{1} t*((\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1)dt = 0.3$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3t^2-1)((\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1)dt = 0.1$$

$$\int_{-1}^{1} L_0^2(t)dt = \int_{-1}^{1} 1^2dt = 2$$

$$\int_{-1}^{1} L_1^2(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} L_2^2(t)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2}(3t^2-1))^2dt = 0.4$$

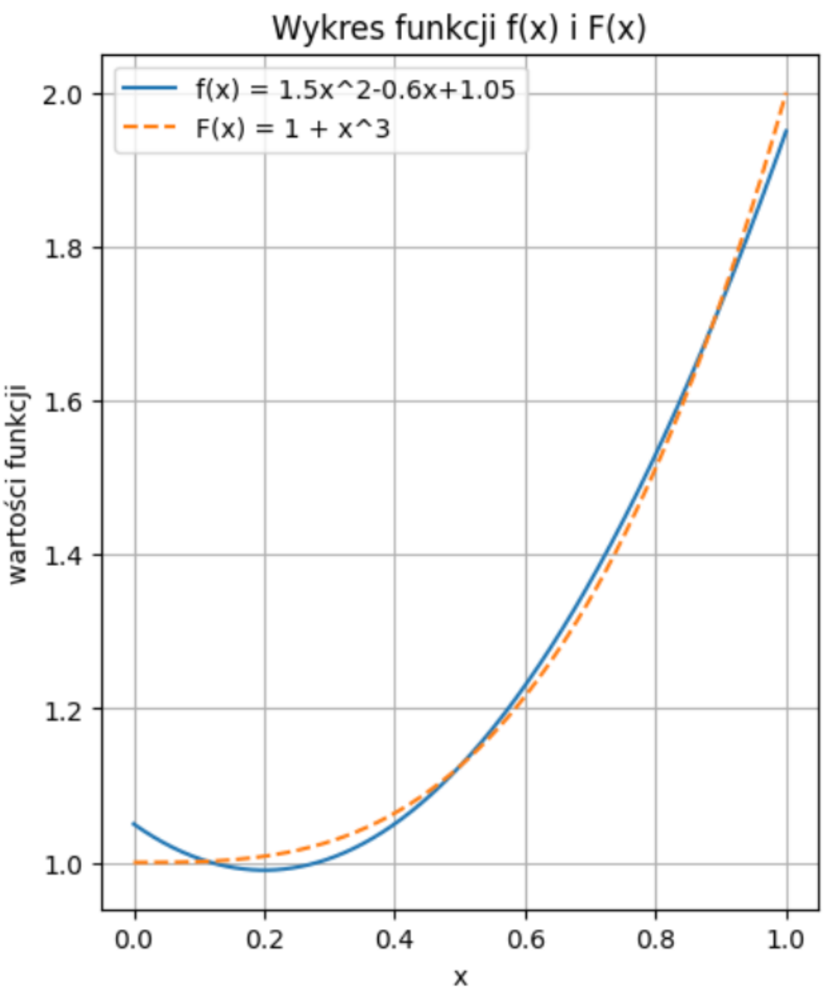
$$\begin{cases} c_0 = \frac{2.5}{2} = 1.25 \\ c_1 = \frac{0.3}{\frac{2}{3}} = 0.45 \\ c_2 = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \end{cases}$$

Z tego wynika, że:

$$F(t) = 1.25 + 0.45t + 0.25 \cdot \frac{1}{2}(3t^2-1)$$

Wracając do zmiennej x:

$$F(x) = 1.25 + 0.45 \cdot (2x-1) + 0.25 \cdot \frac{1}{2}(3(2x-1)^2-1) = 1.5x^2 - 0.6x + 1.05$$



Rys.2 Wykres funkcji

2.3 Zadanie trzecie – procedura realizująca metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia

Metoda aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia jest jednym z podejść w aproksymacji funkcji. W tym przypadku szukamy wielomianu F(x) = $c_2x^2 + c_1x + c_0$,który najlepiej pasuje do danego zbioru punktów danych

Pierwszy krok: wczytanie danych o punktach x_i i wartościach aproksymowanej f(x_i)

Drugi krok: Rozwiązanie układu równania

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) \end{bmatrix}$$

Trzeci krok: Rozwiązaniem jest funkcja F(x) = $c_2x^2 + c_1x + c_0$

2.4 Zadanie czwarte – obliczanie wartości funkcji

f(x)= 1-x^2
dyskretne punkty xi: xi=-1+ 0.5*i, i = 0,1..4

Wartości funkcji f(x))= 1-x^2 dla dyskretnych punktów x_i = -1 + 0.5i wynoszą:

$x_0 = -1$, f(x_0) = 0
$x_1 = -0.5$, f(x_1) = 0.75
$x_2 = 0$, f(x_2) = 1
$x_3 = 0.5$, f(x_3) = 0.75
$x_4 = 1$, f(x_4) = 0

Teraz, gdy mamy zestaw punktów możemy przystąpić do aproksymacji tej funkcji wielomianami Grama stopnia trzeciego.

Funkcja aproksymująca zbudowana na wielomianach Grama ma postać

$$y_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} F_k^{(n)}(q) \qquad .$$

gdzie:

$$s_k = \sum_{q=0}^{n} \left[F_k^{(n)}(q)\right]^2$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i F_k^{(n)}(x_i)$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$ punkty są równoodległe $x_i = x_0 + ih \quad i = 0,1,\ldots n$

$$F_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[s]}}$$ wielomiany Grama

$$r^{[s]} = r(r-1)\cdots(r-s+1)$$

Wielomiany mają postać:

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = 1 - 2\frac{t}{n}$$

$$P_2 = 1 - 6\frac{t}{n} + 6\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$$

$$P_3 = 1 - 12\frac{t}{n} + 30\frac{t(t-1)}{n(n-1)} - 20\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

Dla n = 4 otrzymujemy:

$$P_{0,4}(x) = 1$$

$$P_{1,4}(x) = x$$

$$P_{2,4}(x) = 2x^2 - 1$$

$$P_{3,4}(x) = \frac{-20}{3}x^3 + \frac{17}{3}x$$

Korzystając ze wzoru na c_k otrzymujemy:

$$c_0 = 0.5$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -0.5$$

$$c_3 = 0$$

Czyli otrzymujemy:

F(x) = 0.5 – 0.5($2x^2 - 1$) = - x^2 + 1

2.5 Zadanie piąte - aproksymacja funkcji |sin(x)|

f(x) = |sin(x)|

zakres: [-pi, pi]

Będziemy korzystać z funkcji sinus i cosinus o różnych częstotliwościach, aby najlepiej dopasować się do kształtu funkcji | sin(x)| w przedziale [π,π].

Szereg Fouriera jest dany wzorem:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right)$$

o współczynnikach określonych następującymi wzorami:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rozwinięcie funkcji |sin(x)| w szereg trygonometryczny w bazie funkcji cosinusów można przeprowadzić przy użyciu metody szeregów Fouriera, ponieważ jest to funkcja parzysta

(symetryczna względem osi y), więc zawiera tylko współczynniki dla funkcji cosinus (wszystkie współczynniki dla sinusów będą zerami).
Ogólna postać takiego szeregu dla funkcji f(x) o okresie T wyraża się wzorem:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

gdzie współczynniki są dane wzorami:

- $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx$
- $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\, dx$

W przypadku funkcji |sin(*x*)| o okresie *T*=2*π*, wzory te przyjmują następującą postać:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\, dx$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx)\, dx$

Ponieważ funkcja |sin(*x*)| jest parzysta i okresowa, można upraszczać obliczenia korzystając z własności symetrii i ograniczyć zakres całkowania od 0 do *π*:

- $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$
- $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx)\, dx$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \frac{2}{\pi}[-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(1-(-1)) = \frac{4}{\pi}$$

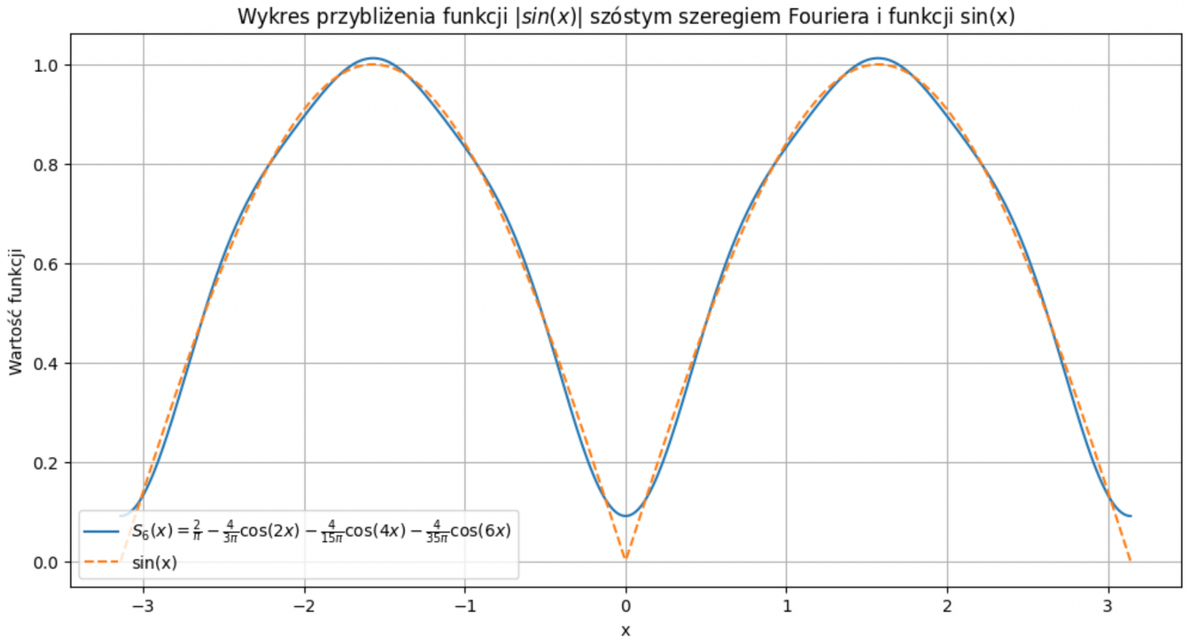
$$a_2 = \frac{-4}{3\pi}$$

$$a_4 = \frac{-4}{15\pi}$$

$$a_6 = \frac{-4}{35\pi}$$

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx$$

$$S_6(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(2x) - \frac{4}{15\pi} \cdot \cos(4x) - \frac{4}{35\pi} \cdot \cos(6x)$$



Rys.3 Wykres

3. Bibliografia

- Wykłady
- https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/aproksymacja.pdf
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_Fouriera
- https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/wielomianygrama.pdf