



## Processos Estocásticos e Aplicações

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Nuno M. Brites

Setembro de 2025



# Conteúdo

	5
<b>1 Introdução aos processos estocásticos</b>	<b>7</b>
1.1 Conceitos fundamentais . . . . .	7
1.2 Tipos clássicos de processos estocásticos . . . . .	12
1.2.1 Processos de incrementos independentes e estacionários . . . . .	12
1.2.2 Processo estocástico real de 2ª ordem . . . . .	13
1.2.3 Processos estacionários . . . . .	14
1.2.4 Martingalas . . . . .	17
1.2.5 Processos de Markov . . . . .	18
<b>2 Cadeias de Markov em tempo discreto</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução . . . . .	19
2.1.1 Conceitos básicos . . . . .	19
2.2 Classificação de estados de uma C.M. . . . .	23
2.2.1 Decomposição do espaço de estados . . . . .	31
2.3 Probabilidades de absorção em estados recorrentes . . . . .	33
2.4 Teoremas limite . . . . .	36
<b>3 Cadeias de Markov em tempo contínuo</b>	<b>43</b>
3.1 Processo de Poisson homogêneo . . . . .	43
3.2 Processo de nascimento puro . . . . .	49
3.3 Processo de nascimento e morte . . . . .	53
3.3.1 Definição e equações de Chapman–Kolmogorov . . . . .	53
3.3.2 Tempo de espera . . . . .	54
3.3.3 Equações diferenciais de processos de nascimento e morte . . . . .	55
<b>4 Complementos de processos estocásticos</b>	<b>59</b>
4.1 Processo de Wiener . . . . .	59
4.2 O integral de Itô . . . . .	63
<b>5 Bibliografia</b>	<b>77</b>





Todas as informações relacionadas com esta UC encontram-se no Fénix.

Agradeço ao Professor Alfredo Egídio dos Reis (ISEG) a cedência de alguns exercícios presentes neste texto. Agradeço igualmente ao Professor Pedro Soares (ISEG) pela profunda e competente revisão do texto.

Todos os erros e omissões são da minha inteira responsabilidade. Caso detete algum erro ou gralha, muito agradeço que me informe. Sugestões e comentários também serão muito bem-vindos.

Obrigado,

Nuno M. Brites

[nbrites@iseg.ulisboa.pt](mailto:nbrites@iseg.ulisboa.pt)

ISEG, Setembro de 2025

**Todos os direitos reservados. É expressamente proibida a reprodução, cópia, distribuição, comunicação pública, transformação ou qualquer outra forma de utilização, total ou parcial, dos conteúdos deste sítio, incluindo textos, código e imagens, sem autorização prévia e por escrito do autor. Qualquer utilização não autorizada constitui violação dos direitos de autor e poderá dar lugar à responsabilidade civil e criminal nos termos da lei em vigor.**

2025 | Nuno M. Brites | [nbrites@iseg.ulisboa.pt](mailto:nbrites@iseg.ulisboa.pt)



# Capítulo 1

## Introdução aos processos estocásticos

### 1.1 Conceitos fundamentais

Nesta secção procede-se a uma revisão sumária de noções basilares de probabilidade e de variáveis aleatórias. Seguidamente, introduz-se o conceito de processo estocástico, entendido como uma família de variáveis aleatórias definidas sobre um espaço de probabilidade e indexadas por um conjunto de parâmetros, usualmente interpretados como o tempo. Finalmente, analisam-se algumas classes fundamentais de processos estocásticos, em particular os processos com incrementos independentes e estacionários, bem como os processos estacionários em sentido forte e em sentido fraco.

Designa-se, como habitualmente, por **espaço amostral** o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória, representado por  $\Omega$ . No que se segue, consideramos que  $\Omega$  é um conjunto não vazio.

**Definição 1.1** (Sigma-álgebra). Uma  $\sigma$ -álgebra é uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$  e  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- ii) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$ , onde  $A^c$  denota o complementar de  $A$  relativamente a  $\Omega$ ;
- iii) Se  $A_n \subseteq \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ .

Os elementos de  $\mathcal{F}$  designam-se por conjuntos mensuráveis (ou  $\mathcal{F}$ -mensuráveis, para explicitar a  $\sigma$ -álgebra a que pertencem).

**Definição 1.2** (Medida de probabilidade). Uma medida de probabilidade  $P$  na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é uma função  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- ii)  $P(\Omega) = 1$ ;
- iii) Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos em  $\mathcal{F}$ , então

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

**Definição 1.3** (Espaço de probabilidade). Um espaço de probabilidade é um terno  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , onde  $\Omega$  é um conjunto,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  e  $P$  é uma medida de probabilidade em  $\mathcal{F}$ .

Os elementos de  $\mathcal{F}$  chamam-se acontecimentos;  $P(A)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , representa a probabilidade do acontecimento  $A$ .

**Definição 1.4** (Sigma-álgebra de Borel). Uma  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ , definida num conjunto  $E$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $\emptyset \in \mathcal{B}$  e  $E \in \mathcal{B}$ ;
- $\mathcal{B}$  é fechada relativamente ao complementar, isto é,  $\forall A \in \mathcal{B} : A^c \in \mathcal{B}$ ;
- $\mathcal{B}$  é fechada relativamente à reunião numerável, isto é, se  $A_i \in \mathcal{B}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}$ .

Uma  $\sigma$ -álgebra de Borel é um caso particular de uma  $\sigma$ -álgebra e aplica-se aos conjuntos abertos de  $E$ . A  $\sigma$ -álgebra de Borel mais comum é a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ , que se denota por  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , ou simplesmente  $\mathcal{B}$  caso não existam ambiguidades.

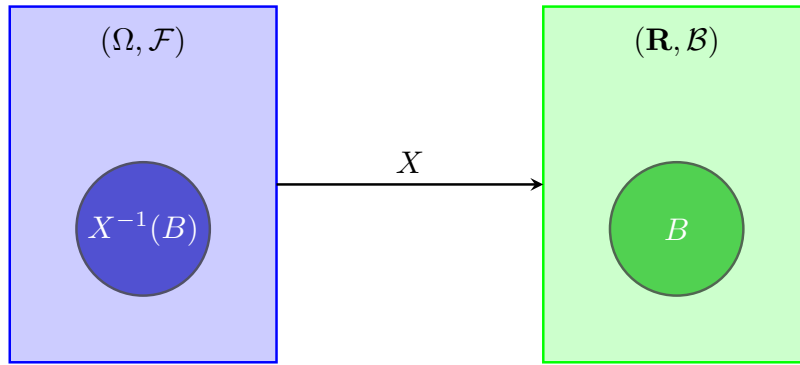
**Definição 1.5** (Variável aleatória). Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. Diz-se que uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória (v.a.) se

$$\forall B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F},$$

onde  $\mathcal{B}$  denota a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ .

Adicionalmente, diz-se que  $X$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável, ou simplesmente mensurável quando a  $\sigma$ -álgebra associada estiver subentendida.

Em termos gráficos,



**Teorema 1.1.** Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma variável aleatória. Defina-se

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Então,  $\sigma(X)$  é a menor  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  para a qual  $X$  é mensurável. Esta  $\sigma$ -álgebra, que está contida em  $\mathcal{F}$ , designa-se por  **$\sigma$ -álgebra gerada por  $X$** .

**Definição 1.6** (Média e variância). Sejam  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma variável aleatória. Define-se o **valor esperado** (ou média) e a **variância** de  $X$  da seguinte forma:

**1. Caso geral (medida de probabilidade  $P$ ):**

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP, \quad \text{Var}(X) = \int_{\Omega} (X - E(X))^2 dP,$$

desde que estes integrais existam e sejam finitos.

**2. Caso discreto:**

Se  $X$  assume valores em um conjunto discreto  $\{x_1, x_2, \dots\}$  com probabilidades  $p_i = P(X = x_i)$ , então

$$E(X) = \sum_i x_i p_i, \quad \text{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i.$$



**3. Caso contínuo:**

Se  $X$  possui densidade  $f_X(x)$  relativamente à medida de Lebesgue, então

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx, \quad \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx.$$

**Definição 1.7.** Sejam  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $X$  uma variável aleatória definida nesse espaço.

i) Diz-se que  $X$  é uma variável aleatória de quadrado integrável quando

$$E(X^2) < +\infty;$$

ii) O espaço  $L^2$  é o conjunto das variáveis aleatórias de quadrado integrável definidas em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ;

iii) A norma  $L^2$  é a norma definida por

$$\forall X \in L^2 : \|X\|_{L^2} = (E(X^2))^{1/2}.$$

*Nota .* Relativamente à definição de espaço  $L^2$ , na realidade deveríamos dizer: “espaço constituído pelas classes de equivalência de variáveis aleatórias...”, isto é, para duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  definidas em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , considere-se a relação de equivalência

$$X \sim Y \iff P(X \neq Y) = 0$$

e constrói-se o espaço  $L^2$  a partir da classe de equivalência  $[X] = \{Y : X \sim Y\}$ .

**Definição 1.8.** Seja  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  uma sucessão de variáveis aleatórias em  $L^2$ . Diz-se que  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $X$  em  $L^2$  se

$$\|X_n - X\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

ou, de modo equivalente,

$$E((X_n - X)^2) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

A este tipo de convergência chama-se convergência em média quadrática e representa-se por

$$X_n \xrightarrow{m.q.} X \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty$$

ou

$$l.i.m._{n \rightarrow +\infty} X_n = X.$$

**Definição 1.9.** Sejam  $X$  uma variável aleatória e  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  uma sucessão de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

i) Diz-se que  $X_n$  converge quase certamente (q.c.), ou que converge com probabilidade 1 para  $X$ , e denota-se por

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad q.c.,$$

se  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega \setminus N$ , onde  $N \in \mathcal{F}$  é um conjunto de medida nula, isto é,  $P(N) = 0$ .

ii) Diz-se que  $X_n$  converge em probabilidade (ou converge estocasticamente) para  $X$ , e denota-se por

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \text{ou} \quad P - \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X,$$

se, para todo  $\delta > 0$ ,

$$P(|X_n - X| > \delta) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Quando se pretende estudar fenómenos que não têm qualquer evolução, usam-se **amostras aleatórias** (repetições de observações i.i.d.'s). Mas, e se estivermos perante **variáveis aleatórias** que já se observaram (ou podiam observar) no passado e que poderemos observar no futuro? Tal ocorre quando pretendemos estudar, por exemplo:

- cotação diária de uma ação na bolsa de valores;
- evolução da taxa de desemprego num dado período;
- número de pessoas que chegam a uma certa fila para serem atendidas;
- evolução da temperatura num local;
- ...

Nos casos acima descritos dispomos apenas de uma única observação (chamada **trajetória**) a partir da qual se pretende extrair conclusões. Nesta trajetória não existe independência entre observações. Tipicamente pretendemos fazer:

- previsão de observações futuras;
- identificação do tipo de evolução;
- filtragem (previsão com a ajuda de observações parciais).

**Definição 1.10** (Processo estocástico). Um **processo estocástico** (PE) é uma família de v.a  $\{X_t, t \in T\}$ , definida sobre o mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e assumindo valores num mesmo espaço mensurável  $(E, \mathcal{B})$ , onde:

- $T$  : espaço dos parâmetros (ou do tempo);
- $\Omega$  : espaço de resultados possíveis;
- $\mathcal{F}$  :  $\sigma$ -álgebra definida em  $\Omega$ ;
- $P$  : medida de probabilidade;
- $E$  : conjunto de espaço de estados (a definir posteriormente);
- $\mathcal{B}$  :  $\sigma$ -álgebra de Borel definida em  $E$ .

*Nota .*

- Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e um conjunto arbitrário  $T$ , um PE é uma função  $X(t, \omega)$  definida em  $T \times \Omega$ , tal que, para cada  $t \in T$ ,  $X_t(\omega)$  é uma v.a..
- O conceito de PE generaliza o de v.a. fazendo-a depender de um parâmetros  $t$  com domínio em  $T$ . Assim, podemos interpretar um PE como uma família ordenada de v.a.'s.

- Para cada  $\omega_0$  fixo,  $\omega_0 \in \Omega$ ,  $X(\omega_0, t)$  é uma função não aleatória de  $t$ . Deste modo, um PE pode identificar-se com um sistema que a cada ponto  $\omega \in \Omega$ , faz corresponder uma função de parâmetro  $t$ . Cada uma dessas funções diz-se uma trajetória ou realização do processo  $X$ .

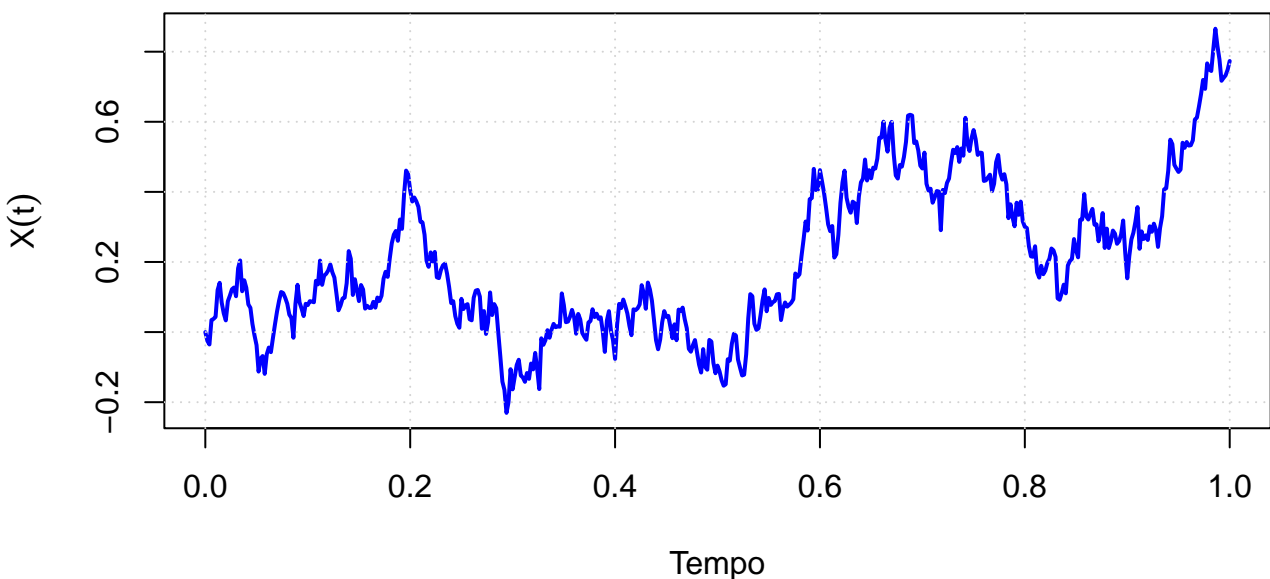
**Definição 1.11** (Trajetória de um processo estocástico). Chama-se **trajetória** ou **realização** de um processo estocástico  $X$  à coleção  $\{X_t(\omega), t \in T\}$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ .

*Nota* . Em geral  $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ , onde:

- $\mathbb{R}^n$  : conjunto dos possíveis valores do processo  $X_t$ ;
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  :  $\sigma$ -álgebra dos borelianos de  $\mathbb{R}^n$ ;
- Se  $n = 1$  o PE chama-se processo estocástico univariado;
- Se  $n > 1$  o PE chama-se processo estocástico multivariado;
- $t$  : instante onde é feita a observação ou o período relativo a essa observação;
- Se  $E$  for finito ou infinito numerável então  $X$  é um PE de espaço de estados discreto;
- Se  $E = \mathbb{R}$  então  $X$  é um PE de valores reais;
- Se  $T$  for finito ou infinito numerável então  $X$  é um PE de tempo discreto (tipicamente  $T = \mathbb{N}_0$  ou  $T = \mathbb{Z}$ );
- Se  $T$  for infinito não numerável então  $X$  é um PE de tempo contínuo (tipicamente  $T = \mathbb{R}_0^+$  ou  $T = \mathbb{R}$ ).

Segue-se um exemplo de uma trajetória de um PE:

### Exemplo de uma trajetória de um processo estocástico



**Exercício 1.1.** Para cada um dos seguintes processos estocásticos indique o espaço parâmetro e o espaço de estados:

- (a) Sejam  $X_i$  a quantidade de cerveja (em litros) pedida pelo  $i$ -ésimo cliente que entrou num bar e  $N(t)$  o

número de clientes que chegaram ao bar até ao instante  $t$ . O processo estocástico é

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0,$$

onde  $Z_t$  representa a quantidade de cerveja pedida até ao instante  $t$ .

- (b) Trinta e seis pontos são escolhidos aleatoriamente no Alaska de acordo com alguma distribuição de probabilidade. Centrado em cada um desses pontos é desenhado um círculo de raio aleatório originando assim uma região  $\Delta$  do Alaska. Seja  $X(A)$  o preço do petróleo extraído no solo da região  $A \cap \Delta$ . O processo é

$$(X(B) : B \subset \text{Alaska}).$$

- (c) Um bebé dorme numa de três posições: (i) de barriga para cima com feição radiante; (ii) enrolada na posição fetal; (iii) na posição fetal, chupando o dedo polegar. Seja  $X_t$  a posição de dormir do bebé no instante  $t$ . O processo é  $(X_t : t \geq 0)$ .
- (d) Seja  $X_n$  o estado (ligado ou desligado) de uma fotocopiadora de um escritório ao meio-dia do  $n$ -ésimo dia. O processo é  $(X_n : n = 1, 2, \dots)$ .

### Exercício 1.2.

Seja  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  com  $P(\omega_i) = 1/4$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Considere-se o processo estocástico  $\{X(t, \omega) : t \geq 0\}$  tal que

$$X(t, \omega_i) = t \times i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

- (a) Classifique o processo em causa;
- (b) Determine a função distribuição de  $X$  para  $t = 1$ ;
- (c) Indique as trajectórias do processo;
- (d) Determine a função distribuição conjunta de  $(X(1), X(2), X(3))$ .

### Exercício 1.3.

Considere uma sucessão infinita de provas de Bernoulli. Seja  $X_t$  o número de provas até obter um sucesso pela  $t$ -ésima vez,  $t = 1, 2, \dots$

- (a) Defina o exposto como um processo estocástico, indicando o espaço dos parâmetros e dos estados.
- (b) Determine, para cada  $t$ , a função de probabilidade de  $X_t$ .
- (c) Represente graficamente uma trajectória do processo.
- (d) Determine a distribuição conjunta de  $(X_2, X_3, X_4)$ .
- (e) Calcule  $P(X_4 = x \mid X_3 = x_3, X_2 = x_2)$  e  $P(X_4 = x \mid X_3 = x_3)$ . Comente o resultado.
- (f) Determine a distribuição da v.a. “tempo ou número de provas entre dois sucessos de Bernoulli”.
- (g) Determine a distribuição da v.a. “número de provas necessárias até à ocorrência de dois sucessos consecutivos de Bernoulli”.

## 1.2 Tipos clássicos de processos estocásticos

### 1.2.1 Processos de incrementos independentes e estacionários

**Definição 1.12** (Processo com incrementos independentes).  $\{X_t, t \in T\}$  é um PE com **incrementos independentes** sse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T : t_1 < t_2 < \dots < t_n \implies X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são v.a.'s mutuamente independentes.

**Definição 1.13** (Processo com incrementos estacionários).  $\{X_t, t \in T\}$  tem **incrementos estacionários** sse  $\forall s, t \in T, s < t$ , a distribuição de  $X_t - X_s$  depende apenas da amplitude  $t - s$ .

*Nota* . Num PE com incrementos estacionários, a distribuição de  $X_{t_1+h} - X_{t_1}$  é a mesma de  $X_{t_2+h} - X_{t_2}$ ,  $\forall t_1, t_2 \in T$  e  $\forall h \in \mathbb{R}_0^+$  tais que  $t_1 + h, t_2 + h \in T$ .

Do ponto de vista da modelação, a propriedade de independência de incrementos pode ser postulada para o modelo quando os resultados obtidos em intervalo de tempo disjuntos forem independentes. Adicionalmente, a propriedade de estacionariedade de incrementos pode ser postulada para o modelo quando for plausível que a distribuição de resultados em qualquer intervalo de tempo depende apenas da amplitude desse intervalo.

**Definição 1.14** (Processo de incrementos independentes e estacionários). Dado um PE  $X := \{X_t, t \in T\}$ , onde  $T$  está munido de uma relação de ordem,  $X$  é um PE de **incrementos independentes e estacionários** sse tiver incrementos independentes e incrementos estacionários.

### 1.2.2 Processo estocástico real de 2ª ordem

**Definição 1.15** (Processo Gaussiano). Diz-se que  $\{X_t, t \in T\}$  é um **Processo Gaussiano** se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T, (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma),$$

isto é, qualquer vetor finito de variáveis aleatórias do processo tem distribuição normal multivariada.

**Definição 1.16** (Processo estocástico real de 2ª ordem). Diz-se que  $\{X_t, t \in T\}$  é um **processo estocástico real de 2ª ordem** se, e só se,

$$\forall t \in T : E(X_t^2) < +\infty.$$

Nestes casos, a descrição do processo faz-se habitualmente em termos dos seus dois primeiros momentos:

- **função média:**  $m(t) = E(X_t), \quad \forall t \in T$ ;
- **função de covariância:**  $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t), \quad \forall s, t \in T$ .

Em geral, a informação fornecida por  $m(t)$  e  $\Gamma(s, t)$  não determina completamente a distribuição do processo. Contudo, no caso particular de um processo Gaussiano, a especificação destes dois primeiros momentos é suficiente para caracterizar completamente o processo.

**Exemplo 1.1** (Ruído Branco Gaussiano). Chama-se **Ruído Branco Gaussiano** a um PE  $\{\varepsilon_t, t \in T\}$  que satisfaz:

- $\forall t \in T, E(\varepsilon_t) = 0$ ;
- $\forall t \in T, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ ;
- $\forall s, t \in T, s \neq t, \text{Cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$ ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T : (\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2}, \dots, \varepsilon_{t_n})$  é um vetor aleatório Gaussiano.

### 1.2.3 Processos estacionários

**Definição 1.17** (Processo estacionário em sentido forte). Diz-se que um PE  $\{X_t, t \in T\}$  é **estacionário em sentido forte** (ou fortemente estacionário) se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall h \in \mathbb{R} \text{ tal que } t_1 + h, \dots, t_n + h \in T,$$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}),$$

ou seja, a distribuição conjunta de qualquer vetor finito de variáveis do processo é invariante por translação do tempo.

Como consequência da estacionariedade forte, temos o seguinte Teorema:

**Teorema 1.2.** Se  $\{X_t, t \in T\}$  é um PE de 2ª ordem e se é fortemente estacionário, então:

- $E(X_t) = m$ , isto é, a média do processo é independente de  $t$ ;
- $\forall h \in T, \Gamma(t, t+h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_0, X_h) = \gamma(h)$ , independente de  $t$ .

**Definição 1.18** (Processo estacionário em sentido fraco). Um PE  $\{X_t, t \in T\}$  é **estacionário em sentido fraco** (ou estacionário de 2ª ordem), sse:

- $\forall t \in T, E(X_t^2) < +\infty$ ;
- $\forall t \in T, E(X_t) = m$ , independente de  $t$ ;
- $\forall t \in T, \forall h \in T, Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ , isto é, a covariância apenas depende de  $h$ .

*Nota .* A função  $\gamma(h)$ ,  $\forall h \in T$ , chama-se **função de autocovariância**. Se  $h = 0$ , então  $Cov(X_t, X_{t+h}) = Var(X_t) = \gamma(0)$ ,  $\forall t \in T$ . A esta propriedade chama-se propriedade da homocedasticidade.

Vejamos agora que o Ruído Branco,  $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ , é um exemplo de um PE estacionário de 2ª ordem:

**Exemplo 1.2.**

- $E(\varepsilon_t) = 0$ ;
- $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 \implies E(\varepsilon_t^2) < +\infty$ ;
- $t \neq s, Cov(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0, \implies$  independência de  $t$  e de  $s$ .

Assim,

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Logo, estão satisfeitas as condições de estacionariedade fraca.

*Nota* (Observação importante).

$$\text{Estacionariedade forte} + E(X_t^2) < +\infty \implies \text{Estacionariedade fraca.}$$

$$\text{Estacionariedade fraca} \not\Rightarrow \text{Estacionariedade forte.}$$

**Exemplo 1.3.** Considere o PE  $(X_t, t \in \mathbb{N})$  onde  $X_t$  tem distribuição de Cauchy, isto é, com f.d.p.  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Uma vez que não existe  $E(X_t)$ , então  $E(X_t^2)$  não está definido. Assim, o processo é fortemente estacionário mas não é fracamente estacionário.

**Propriedade 1.1** (Propriedades da função de autocovariância em processos estacionários). *A função de autocovariância  $\gamma(h)$  goza das seguintes propriedades:*

- $\gamma(h) = \gamma(-h), \forall h \in \mathbb{Z}$ , isto é, a função de autocovariância é par;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall t_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n :$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(t_j - t_k) \geq 0,$$

isto é, a função de autocovariância define uma forma quadrática não-negativa.

**Definição 1.19** (Função de autocorrelação em processos estacionários). Seja  $\{X_t, t \in T\}$  um PE estacionário. Chama-se **função de autocorrelação** à função  $\rho$  definida por:

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{V(X_t)}\sqrt{V(X_{t+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

**Propriedade 1.2** (Propriedades da função de autocorrelação em processos estacionários). *A função de autocorrelação  $\rho(h)$  goza das seguintes propriedades:*

- $\rho(h) = \rho(-h), \forall h \in \mathbb{Z}$ , isto é, a função de autocorrelação é par;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall t_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n :$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \rho(t_j - t_k) \geq 0,$$

isto é, trata-se de uma função semi-definida positiva.

#### Exercício 1.4.

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias com média nula, não correlacionadas e com a mesma variância  $\sigma^2 > 0$ . Considere-se o PE  $(Z_t : t \in \mathbb{Z})$  definido por:

$$Z_t = f(t) \cdot X + g(t) \cdot Y, \quad t \in \mathbb{Z},$$

onde  $f$  e  $g$  são funções determinísticas.

- (a) Encontre expressões para  $f$  e  $g$  de modo a garantir que o processo  $(Z_t : t \in \mathbb{Z})$  admita variância constante mas não seja necessariamente estacionário em sentido fraco.
- (b) Concretize  $f$  e  $g$  de modo a que  $(Z_t : t \in \mathbb{Z})$  seja fracamente estacionário.

**Exercício 1.5.** Seja  $\varepsilon = (\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z})$  um ruído branco de variância  $\sigma^2 > 0$ . Considere os processos estocásticos  $X = (X_t : t \in \mathbb{Z})$  e  $Y = (Y_t : t \in \mathbb{Z})$  definidos do seguinte modo:

$$X_t = \varepsilon_t \quad \text{e} \quad Y_t = (-1)^t \varepsilon_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Prove que  $X$  e  $Y$  são fracamente estacionários.

(b) Mostre que o processo  $(Z_t = X_t + Y_t : t \in \mathbb{Z})$  é um processo não estacionário.

**Exercício 1.6.** Considere um processo estocástico  $Y = (Y_t : t \in \mathbb{Z})$  tal que  $Y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ ,  $\theta \in [-1, 1]$ , onde  $(\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z})$  é um ruído branco gaussiano de variância  $\sigma^2 > 0$ .

- (a) Mostre que  $Y$  é gaussiano.
- (b) Determine a distribuição da variável aleatória  $Y_t$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Determine a função de autocorrelação de  $Y$ .
- (d) O que pode concluir quanto à estacionariedade forte e fraca de  $Y$ ?

**Exercício 1.7.** Seja  $X = (X_t : t \geq 0)$  um processo estocástico, definido sobre o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tal que, para todo  $t \geq 0$ ,  $X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , e  $P(X_0 = 0) = 1$ .

- (a) Diga em que condições será  $X$  um processo de incrementos independentes e estacionários.
- (b) Supondo que  $X$  é um processo de incrementos independentes e estacionários, mostre que: (i)  $\forall t, s \in [0, +\infty[$ , com  $t > s$ , tem-se que  $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$ ; (ii)  $X$  é um processo gaussiano centrado.
- (c) Considere o processo estocástico  $Y = (Y_t : t \geq 0)$  tal que:

$$Y(t) = \begin{cases} t, & X_t \geq 0 \\ -t, & X_t < 0. \end{cases}$$

Mostre que  $Y$  é um processo estocástico de segunda ordem centrado. Será  $Y$  estacionário em algum sentido? Justifique.

**Exercício 1.8.** Sejam  $X = (X_t : t \in \mathbb{Z})$  e  $(\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z})$  dois processos estocásticos definidos sobre o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tais que:

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^j \varepsilon_{t-j}.$$

- (a) Explique em que condições será  $\varepsilon$  um ruído branco.
- (b) Suponha que  $\varepsilon$  é um ruído branco tal que  $E[\varepsilon_t^2] = 9/50$ . (i) Prove que  $X$  é fracamente estacionário e indique as respectivas função média e função de autocovariância; (ii) Suponha agora que  $X$  é um processo gaussiano. Indique a distribuição do vector aleatório  $(X_t, X_s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Considere o processo estocástico  $Y = (Y_t : t \in \mathbb{Z})$  tal que:

$$Y_t = \begin{cases} 1/2, & X_t \geq 0 \\ -1, & X_t < 0, \end{cases}$$

admitindo que  $X$  está nas condições da alínea b) ii). Calcule a função média de  $Y$  e mostre que  $Y$  é fracamente estacionário.

**Exercício 1.9.** Seja  $(\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z})$  um ruído branco gaussiano de variância  $\sigma^2 > 0$ . Considere um outro processo estocástico  $(Y_t : t \in \mathbb{Z})$  definido por:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - \frac{\theta}{2} \varepsilon_{t-2}, \quad \theta \in [-1, 1].$$

- (a) Defina processo gaussiano e mostre que  $Y$  é gaussiano.
- (b) Determine a função de autocorrelação do processo  $Y$ .



### 1.2.4 Martingalas

Do ponto de vista da modelação, as martingalas são apropriadas para modelar fenómenos aleatórios, tais como jogos de azar.

**Definição 1.20** (Martingala). Um PE  $\{X_t, t \in T\}$  é uma **Martingala** sse:

- $E(|X_t|) < +\infty$ ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1 < \dots < t_{n+1} \in T : E(X_{t_{n+1}} | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = X_{t_n}$ .

**Exemplo 1.4.** Considere-se  $E$  discreto e  $T = \mathbb{N}$ . Se interpretarmos  $X_n$  como a fortuna de um jogador após a realização do  $n$ —ésimo jogo, então a 2ª condição da definição anterior estabelece que a fortuna **esperada** após a  $(n+1)$ —ésima partida do jogo é igual à fortuna depois do  $n$ —ésimo jogo, independentemente do que ocorreu anteriormente.

*Nota .* Na definição de Martingala, podemos ainda considerar,

- Submartingalas, quando  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1 < \dots < t_{n+1} \in T : E(X_{t_{n+1}} | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \leq X_{t_n}$ .
- Supermartingalas, quando  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1 < \dots < t_{n+1} \in T : E(X_{t_{n+1}} | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \geq X_{t_n}$ .

#### Exercício 1.10.

Sejam  $X_0, X_1, \dots$  v.a.'s independentes com média finita e nula e  $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ . Mostre que o PE  $\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  é uma Martingala.

#### Exercício 1.11.

Considere um jogo no qual, em cada jogada, o jogador pode ganhar ou perder um euro, com igual probabilidade. Após  $n$  jogadas o ganho desse jogador é dado por  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , onde  $X_1, X_2, \dots$  são v.a.'s independentes. Mostre que o PE  $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$  é uma Martingala.

#### Exercício 1.12.

Sejam  $X_1, X_2, \dots$  são v.a.'s independentes com média unitária. Mostre que o PE  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ , definido por

$$Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

é uma Martingala.

#### Exercício 1.13.

Seja  $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$  um PE com espaço de estados  $\mathbb{N}_0$ , com média unitária para  $n \geq 1$ , com incrementos independentes e tal que  $P(X_0 = 0) = 1$ .

- (a) O que significa dizer que o processo  $X$  tem incrementos independentes?
- (b) Prove que o processo  $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$  é uma Martingala.
- (c) Sabendo que  $Var(X_n) = 1$ , o que pode afirmar quanto à estacionariedade fraca do processo  $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ ?

### 1.2.5 Processos de Markov

Os processos de Markov são apropriados na modelação de fenómenos aleatórios cujo comportamento futuro não é alterado pelo conhecimento do seu passado, apenas interessa conhecer o estado presente, ou seja, a probabilidade de que o sistema físico esteja num determinado estado num dado instante  $t$  pode deduzir-se a partir do conhecimento desse estado num instante qualquer anterior e essa probabilidade não depende da “história” do sistema antes de  $t$ .

**Definição 1.21** (Processo de Markov). Um PE  $\{X_t, t \in T\}$  com espaço de estados  $E$  diz-se um **processo de Markov** (ou **Markoviano**) sse  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1 < \dots < t_{n+1} \in T, \forall x_1, \dots, x_{n+1} \in E, \forall B \in \mathcal{B}$  :

$$P(X_{t_{n+1}} \in B \mid X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_{n+1}} \in B \mid X_{t_n} = x_n).$$

**Teorema 1.3.** Se  $E$  for discreto e  $T = \mathbb{N}$ , a propriedade de Markov da definição anterior é equivalente à seguinte:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0, \dots, x_{n+1} \in E : P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0, \text{ tem-se que} \\ P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n). \end{aligned}$$

*Nota* . Os processos de Markov, como quaisquer processos, são classificados de acordo com a natureza do espaço de estados  $E$  e do espaço dos parâmetros  $T$ . Uma classe especial de processos de Markov são as **Cadeias de Markov** (C.M.): processos de Markov com espaço de estados  $E$  **discreto**.

Assim, uma cadeia de Markov pode interpretar-se com um PE cujo desenvolvimento se pode considerar como uma série de transições entre valores determinados que têm a propriedade de que a distribuição de probabilidade do estado futuro do processo, sabendo-se que ele está num dado estado, depende apenas deste estado e não do modo de como o processo lá chegou. As C.M. são classificadas em **discretas** ou **contínuas**. Nesta UC iremos abordar ambos os casos.

## Capítulo 2

# Cadeias de Markov em tempo discreto

### 2.1 Introdução

Uma cadeia de Markov em tempo discreto,  $\{X_t, t \in T\}$ , é um PE de Markov cujo espaço de estados é **finito** ou **infinito numerável**.

#### 2.1.1 Conceitos básicos

**Definição 2.1** (Cadeia de Markov em tempo discreto). Um PE em tempo discreto  $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$  com espaço de estados  $E$  discreto é uma **C.M. em tempo discreto** sse satisfaz a propriedade de Markov

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0, \dots, x_{n+1} \in E^{n+1} : P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$ , tem-se que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

**Exercício 2.1.** Seja  $(X_n, n = 1, 2, \dots)$  uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de probabilidade definida por:

$$P(X_n = x) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots; \quad p \in (0, 1).$$

Considere ainda o PE

$$Y = (Y_n = \sum_{i=1}^n X_i : n = 1, 2, \dots).$$

- (a) Identifique o espaço de estados de  $Y$ .
- (b) Mostre que  $P(Y_{n+1} = y \mid Y_n = x)$  é independente de  $n$ .
- (c) Verifique que  $Y$  é uma Cadeia de Markov.
- (d) Calcule  $P(Y_1 = y_1, Y_3 = y_3)$ .

**Exercício 2.2.** Seja  $(X_n, n = 1, 2, \dots)$  uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de probabilidade definida por:

$$P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = -1), \quad n = 1, 2, \dots; \quad p \in (0, 1).$$

Considere o PE  $S = (S_n : n \geq 0)$ , conhecido como passeio aleatório simples, definido por:

$$S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (a) Identifique o espaço de estados do processo  $S$ .

- (b) Prove que  $S$  é uma Cadeia de Markov para qualquer valor de  $p$ .
- (c) Determine para que valores de  $p$ , o passeio aleatório  $S$  é uma Martingala.
- (d) Calcule a função de autocovariância do processo  $S$  e verifique se o processo é estacionário em sentido fraco.

Associada a uma C.M. em tempo discreto tem-se a **função de probabilidade de transição a um passo**:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) := P_{ij}(n, n+1),$$

que representa a probabilidade de  $X_{n+1}$  estar no estado  $j$  no instante  $n+1$  sabendo que no instante  $n$  a cadeia estava no estado  $i$ .

Se as probabilidades  $P_{ij}(n, n+1)$  não dependerem de  $n$ , então a C.M. em tempo discreto diz-se **homogénea**. Assim, numa C.M. homogénea observa-se

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) := P_{ij}, \forall i, j \in E, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

*Nota* . A expressão  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) := P_{ij}$ :

- representa a probabilidade da cadeia ir do estado  $i$  para o estado  $j$  **num só passo**;
- é independente de  $n$ , ou seja, é homogénea no tempo.

Nesta UC apenas iremos estudar C.M. homogéneas. As probabilidades de transição,  $P_{ij}$ , são fundamentais para o estudo da estrutura probabilística das C.M.

**Definição 2.2** (Matriz de transição). Define-se **Matriz de transição** ou **Matriz de probabilidade de transição** de uma C.M. homogénea à matriz

$$\mathbb{P} = [P_{ij}]_{i,j \in E} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0j} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & \dots & P_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad E = \mathbb{N}_0$$

definida pelas probabilidades de transição  $P_{ij}$  do processo.

*Nota* . Na matriz de transição  $\mathbb{P}$ , observa-se:

- $0 \leq P_{ij} \leq 1$ ,  $i, j = 0, 1, \dots$ , uma vez que  $P_{ij}$  representa uma probabilidade;
- $\sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = 1$ , uma vez que  $\sum_{j \in E} P_{ij} = \sum_{j \in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ . Isto quer dizer que a soma dos elementos de cada linha é igual a 1.

**Exercício 2.3.** Quatro bolas, duas brancas e duas pretas, são distribuídas em duas caixas  $A$  e  $B$ , de tal forma que, em cada caixa, ficam duas bolas. Tira-se uma bola de cada caixa e coloca-se cada uma na caixa oposta. Seja  $X_0$  o número de bolas brancas que existiam inicialmente na caixa  $A$ . Para  $n \geq 1$ , seja  $X_n$  o número de bolas brancas que existirão na caixa  $A$  depois de se terem efetuado  $n$  trocas de bolas.

- (a) Identifique o espaço de estados.

(b) Determine a matriz das probabilidades de transição.

**Teorema 2.1.** *Um processo estocástico  $(X_t, t \in \mathbb{N}_0)$  com espaço de estados  $E$  é uma cadeia de Markov homogênea sse existe uma distribuição inicial de  $X_0$  e uma matriz estocástica  $\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in E}$  tais que, para todo  $n \geq 0$  e para todo  $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in E^{n+1}$ ,*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \prod_{k=0}^{n-1} P_{i_k i_{k+1}}.$$

*Assim, a probabilidade de observar uma sequência de estados (isto é, a probabilidade conjunta) resulta simplesmente da probabilidade inicial e do produto sucessivo das probabilidades de transição entre estados consecutivos.*

**Exemplo 2.1.** Considere uma CM com valores em  $\{0, 1\}$  e com distribuição inicial

$$\mu = (\mu(0), \mu(1)) = (0.6, 0.4),$$

isto é,

$$\mu(0) = P(X_0 = 0) = 0.6, \quad \mu(1) = P(X_0 = 1) = 0.4.$$

Assuma que a matriz de transição é:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix},$$

onde:

- $P_{00} = 0.7 = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0)$
- $P_{01} = 0.3 = P(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0)$
- $P_{10} = 0.2 = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1)$
- $P_{11} = 0.8 = P(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1)$

Por exemplo, a probabilidade conjunta, por aplicação do Teorema acima, é obtida por:

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0) = \mu(0) P_{01} P_{10} = P(X_0 = 0) P_{01} P_{10} = 0.6 \times 0.3 \times 0.2 = 0.036.$$

Outro exemplo:

$$P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = \mu(1) P_{11} P_{11} P_{10} = 0.4 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.2 = 0.0512.$$

**Exemplo 2.2** (Passeio aleatório como cadeia de Markov). Seja  $(Y_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com valores em  $\mathbb{Z}$  e distribuição  $p(k) = P(Y_n = k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Seja  $X_0$  a posição inicial, com distribuição  $\mu$ .

Definindo

$$X_n = X_0 + \sum_{m=1}^n Y_m, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

temos que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  é uma **cadeia de Markov homogênea**, com:

- Distribuição inicial:  $\mu(i) = P(X_0 = i)$ ,

- Matriz de transição  $\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  dada por

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(Y_{n+1} = j - i) = p(j - i).$$

Logo, pelo teorema acima, a probabilidade conjunta de qualquer trajetória  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$  é

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mu(i_0) P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} = \mu(i_0) p(i_1 - i_0) \cdots p(i_n - i_{n-1}).$$

Note-se que o passeio aleatório é um exemplo de uma CM homogénea, em que a matriz de transição é determinada pela distribuição dos incrementos.

#### Exercício 2.4.

Mostre que o processo aleatório definido no exemplo anterior é uma C.M. homogénea com matriz de transição com probabilidades

$$P_{xy} = p(y - x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 2.3** (Passeio aleatório unidimensional com passos -1,0,1). Trata-se de um caso particular do passeio aleatório unidimensional. Interpretação: uma partícula, no instante  $n$ , pode efetuar 3 movimentos:

- deslocar-se para a direita com probabilidade  $p$ ;
- deslocar-se para a esquerda com probabilidade  $q$ ;
- manter-se na mesma posição com probabilidade  $r$ .

Se  $X_n$  representar a posição da partícula ao fim de  $n$  movimentos, tem-se

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n Y_i,$$

onde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{deslocamento para a direita,} \\ -1, & \text{deslocamento para a esquerda,} \\ 0, & \text{sem deslocamento.} \end{cases}$$

- $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ : sucessão de variáveis aleatórias independentes (representa os incrementos).
- $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ : passeio aleatório, isto é, uma CM homogénea com espaço de estados  $\mathbb{Z}$  e matriz de transição  $\mathbb{P}$ :

$$P_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \begin{cases} p, & j = i + 1, \\ q, & j = i - 1, \\ r, & j = i. \end{cases}$$

Aqui,  $P_{ij} = p(j - i)$  representa a distribuição de probabilidade dos incrementos  $Y_n$ . Tipicamente considera-se  $p = q = 0.5$  e  $r = 0$ .

*Nota . Notação:*

$$P_{ij}^m = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

representa a probabilidade de, em  $m$  passos, a cadeia de Markov homogénea passar do estado  $i$  para o estado  $j$ .

**Teorema 2.2.** *Seja  $\mathbb{P} = [P_{ij}]$  a matriz de transição a um passo de uma C.M.  $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ . Então,*

$$P_{ij}^m = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik}^r P_{kj}^s,$$

onde  $(r, s) \in \mathbb{N}_0^2$  tal que  $r + s = m$  e  $P_{ij}^0 = 1$  se  $i = j$ , e  $P_{ij}^0 = 0$  se  $i \neq j$ .

Este teorema mostra-nos como calcular probabilidades de transição em vários passos de uma cadeia de Markov. Em vez de irmos diretamente de  $i$  para  $j$  em  $m$  passos, podemos “partir o caminho” num estado intermédio  $k$ : primeiro percorrem-se  $r$  passos até  $k$ , e depois mais  $s$  passos de  $k$  até  $j$ , com  $r + s = m$ . A soma sobre todos os possíveis estados intermédios  $k$  garante que estamos a considerar todos os caminhos possíveis, refletindo a ideia fundamental da multiplicação de probabilidades em cadeias de Markov.

### Exercício 2.5.

Considere  $m = 2$  e prove o Teorema anterior.

**Teorema 2.3** (Equações de Chapman-Kolmogorov). O Teorema anterior pode ser re-escrito como

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k \in E} P_{ik}^m P_{kj}^n, \quad \forall i, j \in E.$$

Assim,  $P_{i,j}^m$  representa o elemento  $(i, j)$  da matriz potência de ordem  $m$  de  $\mathbb{P}$ .

## 2.2 Classificação de estados de uma C.M.

Torna-se importante o estudo limite de  $P_{i,j}^n$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Espera-se que a influência do estado inicial  $i$  diminua com o tempo, e que o limite de  $P_{i,j}^n$  quando  $n \rightarrow +\infty$  seja independente de  $i$ .

Para se poder analisar o comportamento assintótico do processo, vamos introduzir alguns critérios de classificação de estados de uma C.M.. Consideremos, no que se segue, uma C.M.  $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$  com matriz de transição  $\mathbb{P} = [P_{i,j}]$ ,  $i, j \in E$ .

**Definição 2.3** (Estado acessível). Diz-se que o estado  $j \in E$  é **acessível** a partir do estado  $i \in E$ , se para algum  $n \in \mathbb{N}_0$  se observa  $P_{ij}^n > 0$ . Representação:

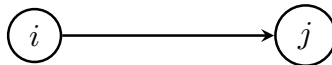


Figure 2.1: Estado acessível

**Definição 2.4** (Estados em comunicação). Se dois estados  $i, j \in E$  são acessíveis um relativamente ao outro, diz-se que intercomunicam ou que estão **em comunicação**. Representação:

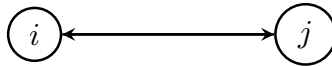


Figure 2.2: Estados em comunicação

*Nota* . Se dois estados  $i, j \in E$  não comunicam, então:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, P_{ij}^n = 0 \vee P_{ji}^n = 0.$$

**Teorema 2.4.** A intercomunicação dos estados define uma relação de equivalência.

**Exercício 2.6.**

Mostre o Teorema anterior. Sugestão: mostre que a intercomunicação entre estados é reflexiva, simétrica e transitiva.

*Nota .* A relação de equivalência do último Teorema induz uma partição do conjunto de todos os estados em classes de equivalência. Dentro de cada classe todos os estados comunicam entre si.

**Exemplo 2.4.** Considere a seguinte matriz de transição, com  $E = \{0, 1, 2, \dots, r\}$ , de um passeio aleatório:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

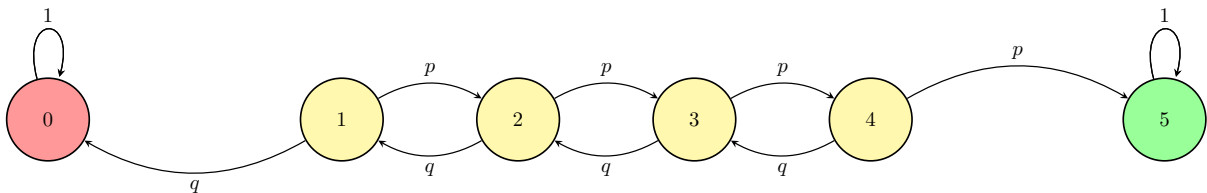
A relação de equivalência de comunicação induz as classes:

$$\{0\}, \{1, 2, \dots, r-1\}, \{r\},$$

donde se conclui que: do estado 0 só se pode ir para o estado 0; todos os estados  $1, 2, \dots, r-1$  comunicam entre si; do estado  $r$  só se pode ir para o estado  $r$ . Para  $r = 5$ , isto é, 6 estados, a matriz de transição é:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a representação gráfica é:



As classes de equivalência estão representadas por cores.

**Definição 2.5** (Período). Chama-se **período** do estado  $i$ , e representa-se por  $d(i)$ , ao máximo divisor comum de todos os inteiros  $n \geq 1$  tais que  $P_{ii}^n > 0$ , isto é,

$$d(i) = \text{m.d.c.}(n \geq 1 : P_{ii}^n > 0).$$

Convenção: se  $\forall n \geq 1, P_{ii}^n = 0$ , então  $d(i) = 0$ .

**Exemplo 2.5.**

1. Considere a matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Se começarmos no estado 1, no passo seguinte vamos sempre para 2.



- Só é possível regressar a 1 em 2, 4, 6, ... passos.

Portanto, o período de 1 (e também de 2) é  $d(1) = d(2) = 2$ .

2. Considere a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

- Se começarmos no estado 1, já no passo seguinte podemos ficar em 1 (probabilidade 0.5).
- Também conseguimos regressar em 2 passos, 3 passos, etc.

Portanto, o período de 1 (e também de 2) é  $d(1) = d(2) = 1$ .

*Nota* . Dois estados em comunicação têm o mesmo período, isto é,

$$i \longleftrightarrow j \iff d(i) = d(j).$$

**Exercício 2.7.** Determine o período dos estados do exemplo 2.4.

**Exercício 2.8.** Considere a C.M. de espaço de estados finito com matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Mostre que  $d(i) = n, \forall n \in E$ .

**Definição 2.6** (Estado aperiódico. Cadeia aperiódica.). Um estado diz-se **aperiódico** se tem período um. A cadeia é **aperiódica** se todos os estados acessíveis entre si (isto é, na mesma classe de comunicação) são aperiódicos.

**Definição 2.7** (Tempo mínimo de passagem). Seja  $T_{ij}$  a variável aleatória que representa o **tempo (mínimo) de primeira passagem** do estado  $i$  ao estado  $j$ ,

$$T_{ij} = \inf\{n \geq 1 : X_n = j \mid X_0 = i\}.$$

A função de probabilidade de  $T_{ij}$ , representa a **probabilidade da primeira vez que a cadeia atinge  $j$  exatamente no passo  $n$** , com início em  $i$ , isto é,

$$f_{ij}^n = P(T_{ij} = n), \quad n \geq 1.$$

Em particular,

$$f_{ij}^1 = P_{ij}, \quad \text{para } i \neq j.$$

Para  $n \geq 2$  e  $i \neq j$ ,  $f_{ij}^n$  satisfaz a **relação de recorrência**:

$$f_{ij}^n = \sum_{k \in E \setminus \{j\}} P_{ik} f_{kj}^{n-1}.$$

Isto significa que, para chegar a  $j$  pela primeira vez ao fim de  $n$  passos, a cadeia deve ir primeiro para um estado  $k \neq j$  e depois chegar a  $j$  a partir de  $k$  em  $n-1$  passos.

**Teorema 2.5.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , as probabilidades de transição  $P_{ij}^n$  podem ser expressas em função das probabilidades de primeira passagem  $f_{ij}^k$ , do seguinte modo:

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^n f_{ij}^k P_{jj}^{n-k},$$

onde:

- $f_{ij}^k$  representa a probabilidade de atingir  $j$  **pela primeira vez** exatamente no instante  $k$ ;
- $P_{jj}^{n-k}$  representa a probabilidade de estar em  $j$  nos  $n - k$  instantes restantes, após o primeiro encontro no instante  $k$ ;
- Somando sobre todos os possíveis instantes  $k = 1, 2, \dots, n$ , obtemos a probabilidade de estar em  $j$  ao fim de  $n$  instantes.

**Exemplo 2.6.** Considere uma cadeia com estados  $\{0, 1\}$  e matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Queremos calcular  $P_{01}^2$ , ou seja, a probabilidade de estar em 1 ao fim de 2 passos, partindo de 0. Pela aplicação do teorema anterior,

$$P_{01}^2 = f_{01}^1 \cdot P_{11}^1 + f_{01}^2 \cdot P_{11}^0 = f_{01} \cdot P_{11} + f_{01}^2 \cdot 1.$$

- Probabilidades de primeira passagem:

$$f_{01} = P_{01} = 0.5, \quad f_{01}^2 = P_{00} \times f_{01} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

- Probabilidades de permanência em 1:

$$P_{11} = 0.8, \quad P_{11}^0 = 1.$$

- Finalmente,

$$P_{01}^2 = f_{01} \cdot P_{11} + f_{01}^2 = 0.5 \cdot 0.8 + 0.25 = 0.65.$$

Este exemplo mostra como as **probabilidades de primeira passagem**  $f_{ij}^k$  determinam a evolução da cadeia ao longo de  $n$  passos.

**Definição 2.8** (Estado recorrente e transitório). Seja

$$T_{ii} = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

o **tempo de retorno** ao estado  $i$ , ou seja, o número de passos até regressar a  $i$  pela primeira vez.

- O estado  $i$  diz-se **recorrente** se

$$P(T_{ii} < +\infty) = 1,$$

isto é, regressa-se a  $i$  em tempo finito com probabilidade 1.

- O estado  $i$  diz-se **transitório** se

$$P(T_{ii} < +\infty) < 1,$$

isto é, existe uma probabilidade positiva de nunca mais regressar a  $i$ .

**Teorema 2.6** (Critérios de recorrência/transitoriedade). *Seja  $P_{ii}^n = P(X_n = i \mid X_0 = i)$  e  $f_{ii}^n = P(T_{ii} = n \mid X_0 = i)$ , onde  $T_{ii}$  é o tempo mínimo de retorno a  $i$ . Então:*

- O estado  $i$  é **recorrente** sse a probabilidade de regressar a  $i$  em algum instante é igual a 1, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^n = P(T_{ii} < \infty \mid X_0 = i) = 1.$$

- O estado  $i$  é **recorrente** sse o tempo de retorno a  $i$  é finito com probabilidade 1:

$$P(T_{ii} < +\infty \mid X_0 = i) = 1.$$

- O estado  $i$  é **recorrente** sse a soma das probabilidades de **estar em  $i$  ao longo de todos os instantes** é infinita:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^n = +\infty.$$

Caso contrário, o estado  $i$  é **transitório**.

Além disso, se  $i \longleftrightarrow j$  e  $i$  é recorrente, então  $j$  também é recorrente.

*Nota .* Consequências imediatas:

- numa classe de equivalência, todos os estados são recorrentes ou todos são transitórios;
- os estados recorrentes estão organizados em classes de comunicação que são fechadas.

**Definição 2.9** (Classificação de estados recorrentes). Defina-se o tempo médio de retorno

$$\mu_i = E[T_{ii}] = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^n.$$

Um estado recorrente  $i$  é:

- **recorrente positivo** se  $\mu_i < +\infty$ ;
- **recorrente nulo** se  $\mu_i = +\infty$ ;
- **recorrente ergódico** se for recorrente positivo e aperiódico.

**Definição 2.10** (Cadeia de Markov irredutível). Uma cadeia de Markov com espaço de estados  $E$  diz-se **irredutível** se, para quaisquer  $i, j \in E$ , existe  $n \geq 1$  tal que

$$P_{ij}^n > 0.$$

Ou seja, todos os estados comunicam entre si.

Segue-se um pequeno resumo das principais propriedades e critérios de classificação dos estados de uma C.M. homogênea:

Estado / Propriedade	Critério principal	Observações adicionais
<b>Recorrente</b>	$P(T_{ii} < +\infty) = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n = +\infty$	Regressa a $i$ com probabilidade 1 Soma das probabilidades de primeira passagem Soma das probabilidades de visita
<b>Transitório</b>	$P(T_{ii} < +\infty) < 1$	Existe probabilidade positiva de nunca regressar
<b>Recorrente positivo</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n < +\infty$ $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^n < +\infty$	Tempo médio de recorrência finito
<b>Recorrente nulo</b>	$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^n = +\infty$	Tempo médio de recorrência infinito
<b>Recorrente ergódico</b>	Recorrente positivo e aperiódico	Permite aplicação de resultados de ergodicidade
<b>Cadeia irredutível</b>	$\forall i, j \in E, \exists n \geq 1 : P_{ij}^n > 0$	Todos os estados comunicam entre si

**Exemplo 2.7.** Considere a cadeia com espaço de estados  $\{0, 1, 2\}$  e matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta cadeia é irredutível porque, partindo de qualquer estado, é possível atingir qualquer outro estado num número finito de passos, com probabilidade positiva. Por exemplo:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0,$$

o que permite circular por todos os estados.

Adicionalmente, todos os estados são recorrentes positivos (verifique!).

**Teorema 2.7.** Numa cadeia de Markov irredutível com espaço de estados finito ou infinito numerável, verifica-se que:

- ou todos os estados são transitórios;
- ou todos são recorrentes nulos;
- ou todos são recorrentes positivos.

**Exercício 2.9.** Seja  $X_0, X_1, X_2, \dots$  uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d.'s tal que:

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Prove que  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  é uma C.M. homogênea com matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(b) Determine a probabilidade de que o processo  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ , partindo do estado 1, volte a atingir este estado, pela primeira vez, num número par de passos.

(c) Considere o PE  $(Y_n : n \in \mathbb{N})$  definido por:

$$Y_n = \begin{cases} X_{n-1} \cdot X_{n+1}, & n \text{ par} \\ X_n, & n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Verifique se  $Y$  é um ruído branco e, em caso afirmativo, identifique a sua variância. Prove que  $Y$  não é uma C.M.

**Exercício 2.10.** Considere uma estação de táxis, onde de  $s$  em  $s$  segundos chega um táxi. Se não existem clientes a ser servidos, o táxi parte de imediato, chegando outro  $s$  segundos depois. Caso contrário, os clientes vão sendo atendidos por ordem de chegada, havendo sempre um período de tempo constante de  $s$  segundos entre cada serviço. Durante esse período de tempo podem, no entanto, chegar novos clientes. Suponhamos que o número de chegadas ao  $n$ —ésimo período de tempo é uma variável aleatória  $Z_n$  cuja distribuição é independente do período em que ocorrem as chegadas, e é dada por

$$P(k \text{ clientes chegarem num intervalo de tempo entre 2 chegadas consecutivas de táxi}) = a_k,$$

onde  $a_k \geq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_0$ , e  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 1$ .

O estado do sistema no início do  $(n+1)$ —ésimo período de tempo entre duas chegadas consecutivas de táxi é definido pelo número de clientes que esperam para serem atendidos, sendo esse número representado por  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(a) Prove que  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  é uma C.M. homogênea. Indique os respetivos espaço de estados e matriz de transição.

(b) Sabendo que no início de um determinado intervalo a fila tem zero clientes, qual a probabilidade de o sistema voltar a atingir este estado (pela primeira vez) ao fim de três chegadas de táxis?

**Exercício 2.11.** Seja  $\{Y_i^{(n)} : i, n \in \mathbb{N}\}$  uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição binomial  $B(2; 0.5)$ .

Considere um processo estocástico  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definido por:

$$X_0 = a, \text{ com } a \in \mathbb{N} \text{ fixo, e para todo } n \geq 1 : \quad X_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_i^{(n)}, & \text{se } X_{n-1} \geq a. \\ a, & \text{se } X_{n-1} < a \end{cases}$$

(a) Identifique o espaço de estados do processo  $X$ .

(b) Prove que  $X$  é uma C.M. homogênea e identifique a matriz de transição.

**Exercício 2.12.** Determinado ser vivo produz, durante a sua vida, um número de descendentes  $Y$  de acordo com uma distribuição dada por:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \quad P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \text{ constante.}$$

A cada indivíduo  $i$  da população associamos uma v.a.  $Y_i =$  número de descendentes do indivíduo  $i$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , define-se a v.a.  $X_n$  que representa o tamanho da população na geração de ordem  $n$ . Considere o PE  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ .

- Prove que  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  é uma C.M. homogênea.
- Calcule a probabilidade de existirem  $k \in \mathbb{N}_0$  indivíduos na geração de ordem  $n+2$ , sabendo que na geração de ordem  $n$  existiam  $j \in \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.13.** Considere lançamentos repetidos de um dado honesto. Seja  $X_n$  o máximo dos números que ocorreram nos  $n$  primeiros lançamentos.

- Indique o espaço de estados da C.M.  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  e a respetiva matriz de transição.
- Determine  $P(X_i = i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  e  $P(X_2 = 3)$ .
- Desenhe o grafo da cadeia, classifique os seus estados, e analise o tipo de recorrência.
- Verifique que a cadeia é aperiódica.

**Exercício 2.14.** Seja  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  uma C.M. com espaço de estados  $E = \mathbb{N}_0$  e probabilidades de transição  $P_{ij}$  tais que:

$$P_{k0} = \frac{1}{k+2} \quad \text{e} \quad P_{k,k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Mostre que a cadeia é irredutível.

**Exercício 2.15.** Seja  $(Z_n : n \in \mathbb{N}_0)$  uma C.M. homogênea com espaço de estados  $E = \mathbb{N}_0$  e probabilidades de transição:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-a_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-a_1 & 0 & a_1 & 0 & \dots \\ 1-a_2 & 0 & 0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad 0 < a_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- A cadeia dada é irredutível e aperiódica? Justifique.
- Determine a probabilidade  $f_{00}^n$  de que a cadeia, partindo do estado 0, volte novamente a esse estado, pela primeira vez, em  $n$  passos. De seguida, mostre que:

$$\sum_{n=1}^{M+1} f_{00}^n = 1 - \prod_{i=0}^M a_i.$$

- Atendendo aos resultados das alíneas anteriores, enuncie, em termos dos  $a_i$ 's, uma condição necessária e suficiente para que todos os estados sejam recorrentes. Justifique a sua resposta.

**Exercício 2.16.** Uma dada empresa identificou seis estados associados ao comportamento diário dos seus colaboradores: 0, 1, 2, 3, 4, 5. As transições de estado para estado podem ser modeladas por uma C.M. com matriz de transição:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Desenhe o grafo de  $\mathbb{P}$ .

(b) Identifique os estados transitórios e os estados recorrentes.

### 2.2.1 Decomposição do espaço de estados

Agora pretendemos decompor o espaço de estados de uma cadeia de Markov finita em subclasses. O objetivo é estudar propriedades da cadeia pela análise das propriedades de cada classe separadamente.

**Definição 2.11** (Classe fechada). Uma **classe fechada** é uma classe de comunicação  $C$  tal que, se  $i \in C$  e  $P_{ij} > 0$ , então  $j \in C$ , ou seja, a cadeia nunca pode sair de  $C$  depois de entrar.

Coloca-se agora a questão: como encontrar todos os estados que pertencem a uma mesma classe de comunicação (e, em particular, a uma classe fechada)? Seguem-se os passos:

- **Passo 1:** inclui-se em  $C$  todos os estados  $j$  para os quais  $P_{ij} > 0$ , isto é,  $i \rightarrow j$ ;
- **Passo 2:** inclui-se em  $C$  todos os estados  $k$  para os quais existe  $j \in C$  com  $P_{jk} > 0$ , isto é,  $j \rightarrow k$  para algum  $j \in C$  (propriedade da transitividade);
- **Passo 3:** repetir o Passo 2 até não se poder incluir mais estados em  $C$ ;
- **Passo 4:** verificar se algum estado de  $C$  tem transições para fora.
  - Se não tiver,  $C$  é uma **classe fechada**.
  - Caso contrário,  $C$  é apenas uma **classe de comunicação** (não fechada).

Nota: se começarmos num estado **transitório** e aplicarmos o algoritmo, o conjunto construído acabará por conduzir a uma **classe fechada**. Assim, as classes fechadas são precisamente os **menores subconjuntos** do espaço de estados obtidos pela aplicação do algoritmo a todos os estados.

O resultado seguinte permite uma decomposição do espaço de estados de uma cadeia de Markov, chamada **decomposição canónica**.

**Teorema 2.8** (Decomposição canónica). Seja  $\mathbb{P}$  a matriz de transição de uma C.M. com espaço de estados  $E$ . Então,  $E$  pode ser decomposto numa união (finita ou infinita enumerável) da forma:

$$E = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots,$$

onde:

- $T$  é o conjunto dos estados transitórios;
- $C_1, C_2, \dots$  são classes de comunicação disjuntas, fechadas e constituídas apenas por estados recorrentes.

Para cada  $j \in C_a$ , a probabilidade de atingir um estado  $k \in E$  num número finito de passos é dada por:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{jk}^n = \begin{cases} 1, & \text{se } k \in C_a, \\ 0, & \text{se } k \notin C_a, \end{cases}$$

onde  $f_{jk}^n = P(X_n = k, X_1 \neq k, \dots, X_{n-1} \neq k \mid X_0 = j)$  é a probabilidade de atingir  $k$  pela primeira vez no instante  $n$ , começando em  $j$ .

Adicionalmente, reordenando os estados de forma conveniente, a matriz de transição  $\mathbb{P}$  pode ser escrita na forma em blocos:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

onde:

- $R$  descreve as transições entre estados em  $T$ ;

- $S$  descreve as transições de  $T$  para as classes  $C_1, C_2, \dots$ ;
- $Q$  é uma matriz bloco-diagonal com submatrizes  $P_1, P_2, \dots$ , onde cada  $P_a = [P_{ij}]_{i,j \in C_a}$  representa as transições internas em cada classe recorrente.

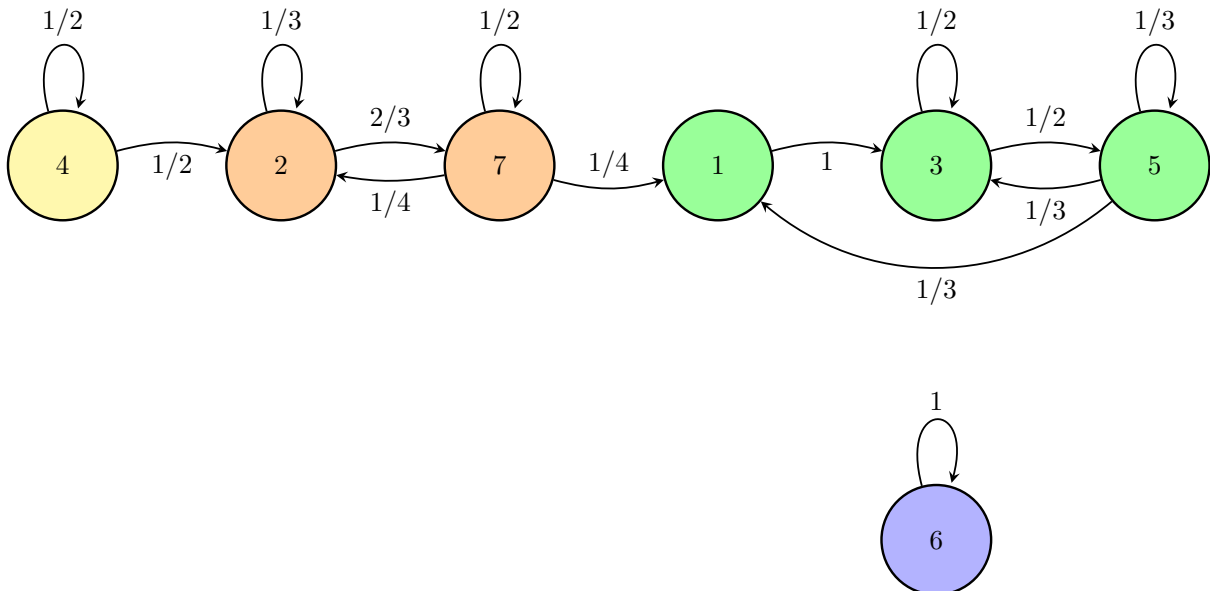
*Nota .* A decomposição canónica do espaço de estados de uma C.M. é muito útil para analisar as propriedades da cadeia, como a recorrência e a transitoriedade dos estados, bem como a classificação dos estados em classes de comunicação. Em particular, quando o espaço de estados  $E$  de uma C.M. é finito, a classificação dos estados pode fazer-se da seguinte forma:

- Passo 1: decompor  $E$  em classes de equivalência (classes de comunicação);
- Passo 2: identificar quais dessas classes são fechadas;
- Passo 3:
  - em cada classe fechada, todos os estados são recorrentes positivos (porque a classe é finita e fechada);
  - nas classes não fechadas, todos os estados são transitórios.

**Exemplo 2.8.** Considere-se uma C.M com espaço de estados  $E = \{1, 2, \dots, 7\}$  e com matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- O grafo associado à matriz  $\mathbb{P}$  é:



- Classes de equivalência (partição de  $E$  com base na relação de comunicação  $i \rightarrow j$ ):

$$\{1, 3, 5\}, \{2, 7\}, \{4\}, \{6\}.$$

- Classes fechadas (classes de equivalência sem saída):

$$\{1, 3, 5\}, \{6\}.$$



- Estados recorrentes positivos (estados em classes fechadas finitas):

$$1, 3, 5, 6.$$

- Estados transitórios (estados que podem sair da sua classe, ou que não são atingidos novamente):

$$2, 4, 7.$$

- Decomposição (separação entre transitórios e classes recorrentes):

$$E = T \cup C_1 \cup C_2 = \{2, 4, 7\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{6\}.$$

- A matriz de transição pode ser reescrita como:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{blue}{0} & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{blue}{0} & \color{blue}{1/2} & \color{blue}{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{blue}{1/3} & \color{blue}{1/3} & \color{blue}{1/3} & 0 & 0 & 0 \\ \color{green}{0} & \color{orange}{0} & \color{orange}{0} & \color{orange}{0} & \color{red}{1/3} & \color{red}{0} & \color{red}{2/3} \\ \color{green}{0} & \color{orange}{0} & \color{orange}{0} & \color{orange}{0} & \color{red}{1/2} & \color{red}{1/2} & 0 \\ \color{green}{0} & \color{orange}{1/4} & \color{orange}{0} & \color{orange}{0} & \color{red}{1/4} & \color{red}{0} & \color{red}{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{P_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \color{blue}{P_2} & \mathbf{0} \\ \color{green}{Q_1} & \color{orange}{Q_2} & \color{red}{Q_3} \end{bmatrix},$$

onde  $P_i$  representa a matriz de probabilidades de transição da classe  $C_i$  e  $Q_i$  é a matriz associada a estados de transição. Nota: para re-escrever a matriz usou-se a permutação  $(6, 1, 3, 5, 2, 4, 7)$ .

## 2.3 Probabilidades de absorção em estados recorrentes

Um dos cálculos de interesse na teoria das cadeias de Markov está relacionado com o tempo (ou número de transições) necessário, para que, a cadeia partindo de algum estado inicial, **atinja algum estado terminal de interesse**.

Este assunto está muitas vezes associado ao problema da determinação de **probabilidades de absorção**, com a seguinte formulação:

- Seja  $E = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$  a decomposição canónica do espaço de estados  $E$ , onde  $T$  é definido pelos estados transitórios da cadeia, e  $C_a$ ,  $a = 1, 2, \dots$ , são classes fechadas e recorrentes.
- Se a cadeia parte de um estado recorrente em  $C_a$ , nunca mais deixará  $C_a$  ( $C_a$  é fechada).
- Se a cadeia parte de um estado transitório em  $T$ , a cadeia poderá ser absorvida por uma das classes  $C_a$ .

Nestas circunstâncias estamos interessados nas probabilidades de absorção.

**Definição 2.12.** Seja  $C := \bigcup_a C_a$  a união das classes fechadas de estados recorrentes, e seja  $T$  o conjunto de estados transitórios. Seja  $S$  a variável aleatória definida por

$$S := \min\{n \geq 1 : X_n \in C\},$$

isto é, o instante da primeira entrada numa classe recorrente, partindo de um estado transitório.

Dado  $X_0 = i$ , com  $i \in T$ , o valor

$$a_{ij} := P(X_S = j \mid X_0 = i), \quad j \in C,$$

representa a probabilidade de a cadeia, partindo de  $i$ , ser absorvida no estado recorrente  $j$ .

Esta quantidade é chamada **probabilidade de absorção** do estado transitório  $i$  no estado recorrente  $j$ .

**Teorema 2.9** (Probabilidades de absorção). *Sejam  $E = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$  a decomposição canónica do espaço de estados  $E$  e  $C = \bigcup_a C_a$  a união das classes fechadas de estados recorrentes.*

*Para cada par  $(i, j) \in T \times C$ , a **probabilidade de absorção** no estado  $j$ , partindo de  $i$ , é dada por*

$$a_{ij} = P_{ij} + \sum_{k \in T} P_{ik} a_{kj},$$

*onde  $P_{ik}$  são as probabilidades de transição de 1 passo da matriz  $\mathbb{P}$ .*

**Interpretação:** *a cadeia pode ser absorvida no estado  $j \in C$  de forma imediata (via  $P_{ij}$ ) ou, caso isso não ocorra, pode passar para um estado intermédio  $k \in T$ , a partir do qual será absorvida em  $j$ .*

### Exemplo 2.9.

- Em jogos de azar: a probabilidade de eventualmente ganhar ou perder tudo.
- Em processos sociais: a probabilidade de uma família atingir e permanecer num certo nível social.
- Em biologia: a probabilidade de uma espécie ou gene acabar por se fixar ou extinguir.

**Exemplo 2.10.** Num estudo no Reino Unido, após a Segunda Guerra Mundial, sobre a mobilidade social entre gerações foram identificados 3 níveis: 1 - superior, 2 - médio e 3 - inferior. Foram estimadas as probabilidades condicionais de um filho pertencer a uma classe social (nível superior, médio, ou inferior) mediante o nível social dos pais ser superior, médio ou inferior. Os resultados são apresentados na tabela seguinte:

Pai	Filho		
	Superior	Médio	Inferior
Superior	1.00	0.0	0.00
Médio	0.20	0.6	0.20
Inferior	0.05	0.5	0.45

Admitamos que as transições entre classes de gerações sucessivas é uma família que pode ser considerada como transições de uma cadeia de Markov.

1. Qual a probabilidade de um neto de uma família com nível médio (estado 2) seja o primeiro descendente a ser considerado com um nível social superior (estado 1), isto é, qual o valor de  $f_{21}^2$ ?
2. Qual a probabilidade de que, em alguma geração, de uma família com nível social inferior (estado 3), seja atingida pela primeira vez o nível superior (estado 1)?

### Solução

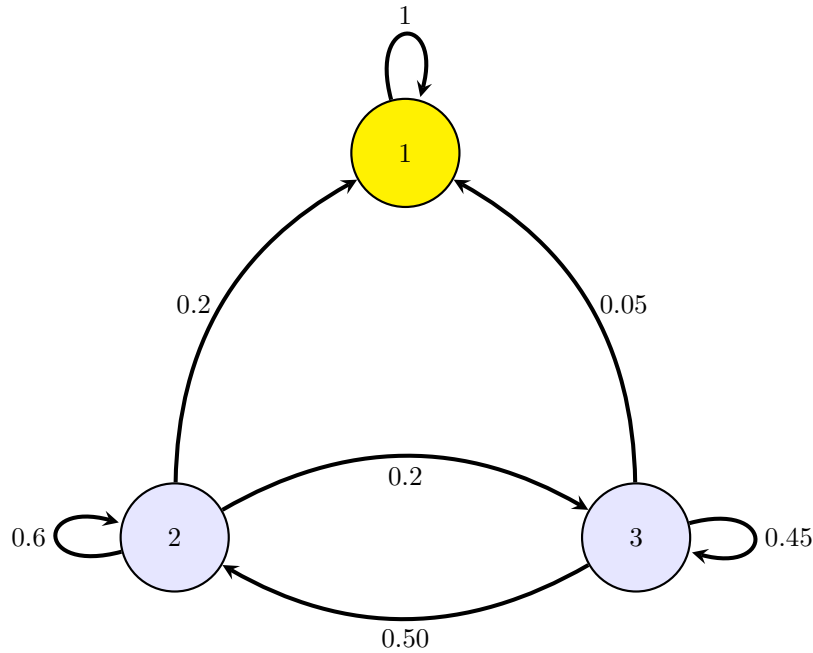
A matriz de transição é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 \end{bmatrix}, \quad E = \{1, 2, 3\} = T \cup C,$$

onde:

- $C = \{1\}$  (classe fechada).
- $T = \{2, 3\}$  (estados transitórios).

O grafo é



1. Pretende-se determinar a probabilidade de, começando no estado 2, o primeiro momento em que a cadeia entra no estado 1 seja no instante 2. Para tal, iremos usar a probabilidade de primeira passagem do estado 2 para o estado 1 em 2 passos, isto é,

$$\begin{aligned}
 f_{21}^2 &= P(X_2 = 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 2) \\
 &= P(X_2 = 1, X_1 = 2 \mid X_0 = 2) + P(X_2 = 1, X_1 = 3 \mid X_0 = 2) \\
 &= \sum_{k \neq 1} P_{2k} P_{k1} \\
 &= P_{22} P_{21} + P_{23} P_{31} \\
 &= 0.6 \times 0.2 + 0.2 \times 0.05 \\
 &= 0.13.
 \end{aligned}$$

2. Nesta questão, estamos interessados no cálculo do tempo necessário para que a cadeia, partindo de um estado inicial ("nível social inferior"), atinja um estado recorrente ("nível superior"). Podemos, portanto, utilizar as probabilidades de absorção e aplicar o Teorema anterior. Assim,

$$a_{31} = P_{31} + \sum_{k \in T} P_{3k} a_{k1} = P_{31} + P_{32} a_{21} + P_{33} a_{31}.$$

Uma vez que não sabemos o valor de  $a_{21}$ , podemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_{31} = P_{31} + P_{32} a_{21} + P_{33} a_{31} \\ a_{21} = P_{21} + P_{22} a_{21} + P_{23} a_{31} \end{cases},$$

donde se obtém  $a_{31} = 1$  (e  $a_{21} = 1$ ), ou seja, com probabilidade 1, a cadeia partindo do estado 3 (nível social inferior) atingirá o estado 1 (nível superior) em alguma geração futura.

De modo a não existir confusão entre estado recorrente e estado absorvente, atente-se à seguinte tabela:

Estado	Definição formal	Exemplo simples
<b>Absorvente</b>	$P_{ii} = 1$ . Uma vez atingido, não se pode sair do estado.	Um estado que leva sempre a si próprio e nunca a outros.
<b>Recorrente</b>	$P(\text{regressar a } i \text{ em algum momento} \mid X_0 = i) = 1$ .	Um estado que pertence a um ciclo fechado (ex.: $i \rightarrow j \rightarrow i$ ).

**Relação:**

- Um estado absorvente é recorrente (uma vez atingido, permanece-se nele para sempre, pelo que o regresso ocorre com probabilidade 1).
- Nem todo o estado recorrente é absorvente (um estado pode ser recorrente por pertencer a um ciclo de vários estados, sem ser obrigatoriamente absorvente).

**Exemplo**

Consideremos uma cadeia de Markov com três estados:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Estado 1:** é **absorvente**, pois  $P_{11} = 1$  e não há saídas para outros estados.
- **Estados 2 e 3:** não são absorventes (têm transições entre si), mas são **recorrentes**, porque formam um ciclo fechado ( $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$ ).

Assim, vemos que:

- O **estado 1** é absorvente e, logo, recorrente.
- Os **estados 2 e 3** são recorrentes, mas não absorventes.

**Exercício 2.17.** Os negócios do José flutuam em anos sucessivos entre 3 estados: 0 (bancarrota), 1 (perto da bancarrota) e 2 (solvência). A matriz de transição que indica a probabilidade de passagem de um estado para outro é:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

- Qual a probabilidade dos negócios do José conduzirem a uma bancarrota sabendo que ele começou no estado de solvência?
- A mãe do José considera ser mau para o nome da família permitir que os negócios do seu filho vão à bancarrota. Assim, quando o estado 0 é atingido, a mãe do José dá-lhe dinheiro efetivo de modo a que os negócios do José passem ao estado de solvência com probabilidade 1. A matriz de transição desta nova cadeia de Markov é dada por:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

A nova cadeia de Markov é irredutível e aperiódica? Sabendo que os negócios do José estão a correr bem (estado 2), qual a probabilidade da mãe do José ter necessidade de dar novamente dinheiro ao filho apenas daqui a 3 anos?

## 2.4 Teoremas limite

Seja  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  uma C. M. definida num espaço de estados  $E$ , com matriz de transição  $\mathbb{P}$  e distribuição inicial  $P(X_0 = i)$ ,  $i \in E$ . Existem duas questões pertinentes:

- Qual o comportamento de  $X_n$  após um “longo” número de transições?
- Poderá a cadeia atingir um “comportamento estável” após um “longo” número de transições à medida que  $n \rightarrow +\infty$ ?

Em geral, a sucessão de v.a.'s  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  não converge para um estado específico, uma vez que o processo mantém flutuações aleatórias devido às transições. No entanto, pode acontecer que a distribuição de  $X_n$  estabilize de algum modo após um elevado número de transições.

**Definição 2.13** (Distribuição limite). Se existirem os limites

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) \quad \text{para cada } j \in E,$$

e o vetor  $\pi = (\pi_j)_{j \in E}$  for uma distribuição de probabilidade (ou seja,  $\pi_j \geq 0$  e  $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$ ), então  $\pi$  designa-se por **distribuição limite** da cadeia.

**Definição 2.14** (Distribuição estacionária). Um vetor  $\pi = (\pi_j)_{j \in E}$  chama-se **distribuição estacionária** da cadeia se

$$\pi P = \pi \iff \forall j \in E : \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}.$$

Por outras palavras, se a distribuição inicial for  $\pi$ , então  $X_n$  tem distribuição  $\pi$  para todo  $n \geq 0$ .

Em que condições a C.M. tem distribuição estacionária? Atente-se ao seguinte teorema:

**Teorema 2.10.** *Uma C.M. irredutível (todos os estados comunicam entre si) tem uma distribuição estacionária  $\pi = (\pi_j)_{j \in E}$  sse todos os estados forem recorrentes positivos. Adicionalmente,  $\pi$  é a única distribuição estacionária e é dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}, \quad j \in E,$$

onde  $\mu_j$  é o tempo médio de recorrência do estado  $j$ .

Qual a relação entre a existência de uma distribuição estacionária e o comportamento limite das probabilidades de transição a  $n$  passos, quando  $n \rightarrow +\infty$ ?

**Teorema 2.11.** *Se existir uma distribuição de probabilidade  $\pi = (\pi_j)_{j \in E}$ , tal que*

$$\forall i, j \in E : \pi_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^n,$$

então,

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = \pi_j, \forall j \in E$ , ou seja,  $\pi$  é a distribuição limite da cadeia, independente da distribuição inicial;
- (ii)  $\pi$  é estacionária:  $\pi = \pi P$ .

**Teorema 2.12.** *Em cadeias de Markov irredutíveis e aperiódicas, todos os seus estados são recorrentes positivos, isto é, a cadeia é **ergódica**:*

- (i) *sse a distribuição estacionária  $\pi$  existe e é solução do sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}, & j \in E, \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1 \end{cases},$$

tiver solução

$$\pi = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \dots], \text{ com } E = \mathbb{N}_0.$$

(ii) se tiver solução, será única, estritamente positiva e,

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^n, \quad \forall i, j \in E.$$

**Exercício 2.18.** Num dado centro comercial existem 4 restaurantes  $A, B, C$  e  $D$ . Desde que a Ana trabalha numa das lojas do centro, ela almoça regularmente num dos 4 restaurantes. Sabe-se ainda que a escolha diária do restaurante está de acordo uma C.M. homogénea com matriz de transição:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que no primeiro dia de trabalho qualquer um dos 4 restaurantes tinha igual probabilidade de ser selecionado pela Ana.

- Indique a distribuição inicial da cadeia dada.
- Calcule a probabilidade de no segundo dia de trabalho a Ana selecione o restaurante  $B$  para almoçar.
- Classifique quanto à recorrência todos os estados da cadeia.
- Qual o número médio de dias entre dois almoços no restaurante  $B$ ?

**Exercício 2.19.** Considere uma C.M. sobre o espaço um espaço de estados  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e com matriz de transição:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

- Classifique os estados da cadeia identificando as classes fechadas e a periodicidade de todos os estados da cadeia.
- Determine a probabilidade de que a cadeia, partindo do estado 1, regresse novamente a 1, pela primeira vez, em  $n$  passos.
- Determine o número médio de transições necessárias para que a cadeia, partindo de 1 volte a 1, isto é, o tempo médio de recorrência do estado 1.
- Encontre a distribuição estacionária relativa à C.M. restrita ao sub-espaço  $\{1, 2\} \subset E$ . A partir desta, determine o tempo médio de recorrência para o estado 1.

**Exercício 2.20.** Relativamente ao funcionamento de uma máquina analisa-se a durabilidade, em número de dias completos, de um certo tipo de peça. Para tal, considere-se que sempre que a peça falha a máquina pára, procedendo-se à substituição da peça por outra idêntica, de modo que no dia seguinte a máquina retoma o seu funcionamento com a nova peça.

Seja  $Z_{n+1}$  o tempo de vida (contado em dias completos) da peça instalada no  $n$ -ésimo dia, e denote por  $p_k$  a probabilidade de que uma peça nova dure  $k$  dias completos, com  $k = 0, 1, 2, \dots$

Represente por  $X_n$  o tempo de vida (contado em dias completos) que resta à peça que está em uso no  $n$ -ésimo dia de observação do processo.

- (a) Prove que o processo  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  é uma C.M. homogênea sobre o espaço  $\mathbb{N}_0$  e com matriz de transição:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

- (b) A cadeia  $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  é irredutível e aperiódica? Justifique.
- (c) Defina distribuição estacionária de uma C.M. e mostre que a cadeia dada possui distribuição estacionária sse o tempo médio de vida das peças novas é finito, isto é,

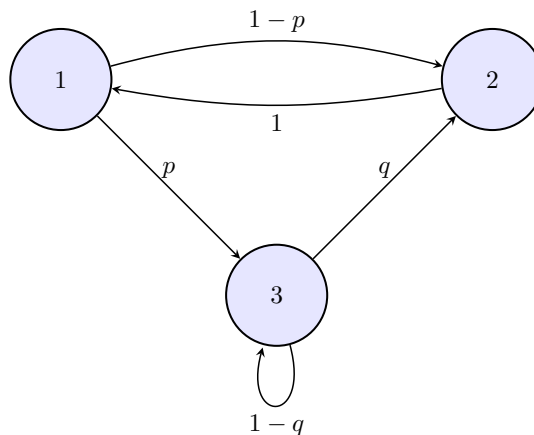
$$\sum_{k=0}^{+\infty} k p_k < +\infty.$$

Note que  $p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

- (d) Sob que condição a cadeia dada é ergódica? Justifique.

### Exercício 2.21.

Considere uma cadeia de Markov homogênea definida pelo seguinte grafo:



- (a) Determine a matriz das probabilidades de transição.
- (b) Em que condições esta cadeia é irredutível e aperiódica?
- (c) Determine a distribuição estacionária  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ .
- (d) Calcule os valores de  $p$  e  $q$  tais que  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ .

### Exercício 2.22.

Considere uma C.M. com espaço de estados  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  e matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Classifique os estados.

**Exercício 2.23.**

Considere uma C.M. homogênea  $\{X_n, n \geq 0\}$ , com espaço de estados  $E = \{1, 2, 3\}$  e matriz de probabilidades de transição a um passo:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-q & q \end{bmatrix}, \quad 0 < p < 1 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1.$$

- (a) Classifique, justificando, cada um dos estados da cadeia.  
 (b) Calcule o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 3).$$

**Exercício 2.24.**

Uma urna contém 6 bolas, das quais 3 são encarnadas e 3 são verdes. São selecionadas ao acaso da urna 2 bolas simultaneamente. Se uma for verde e a outra for encarnada, então são postas de lado e são colocadas duas bolas azuis na urna. Se não for o caso, colocam-se de volta as bolas retiradas na urna. O processo repete-se até só haver bolas azuis na urna.

Seja  $X_n$  o número de bolas encarnadas na urna depois da tiragem  $n$ .

- (a) Justifique que  $\{X_n\}$  é uma C.M. homogênea. Defina o espaço de estados e construa a respetiva matriz das probabilidades de transição.  
 (b) Classifique, justificando, os estados da cadeia.  
 (c) Calcule a probabilidade de, a determinada altura, a urna apenas conter bolas azuis partindo de  $X_0 = 3$ .

**Exercício 2.25.**

Considere uma C.M. com estados 0 e 1, e matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{bmatrix}, \quad 0 < a, b < 1.$$

- (a) Calcule a probabilidade do primeiro retorno ao estado 1 em  $n$  passos,  $f_{11}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , e verifique que o estado 1 é recorrente positivo.  
 (b) Calcule a distribuição limite  $(\pi_0, \pi_1)$  e discuta a sua existência. Relacione  $\pi_1$  com a média do tempo de primeiro retorno ao estado 1.

**Exercício 2.26.**

Considere a C.M.  $(X_n, n = 0, 1, \dots)$  com espaço de estados  $E = \{0, 1\}$  e tal que,

$$0 < p_{00} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < p_{11} < 1.$$

- (a) Prove que a cadeia é recorrente positiva.  
 (b) Determine a distribuição estacionária da cadeia.

**Exercício 2.27.**

Considere uma C.M. com espaço de estados  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  e matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- (a) Classifique, justificando, os estados da cadeia.
- (b) Calcule  $f_{34}(n)$ , a probabilidade de a primeira visita ao estado 4 ter lugar no  $n$ -ésimo passo, partindo de 3, e calcule a probabilidade de absorção no estado 4, partindo de 3.

**Exercício 2.28.**

Considere uma C.M. definida pela matriz das probabilidades de transição:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Verifique que a cadeia é irredutível e aperiódica.
- (b) Verifique a existência de distribuição limite e determine-a.

**Exercício 2.29.**

Considere uma C.M.  $(X_n, n = 0, 1, \dots)$  com espaço de estados  $E = \{1, 2\}$ , em que  $P_{12} = P_{21} = 1$  e  $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$ .

- (a) O que pode concluir quanto à convergência de  $P_{ii}^n$ ,  $i = 1, 2$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ ? Justifique.
- (b) Mostre que

$$P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = 1/2, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

isto é, a distribuição de  $X_n$  é estacionária. Comente e relacione justificadamente com a conclusão obtida na alínea anterior.



## Capítulo 3

# Cadeias de Markov em tempo contínuo

Neste capítulo iremos considerar  $(X_t, t \in \mathbb{R}_0^+)$  uma C.M. com valores em  $\mathbb{N}_0$  e espaço de parâmetro  $\mathbb{R}_0^+$ .

Vamos admitir que  $(X_t, t \in \mathbb{R}_0^+)$  é homogênea, isto é, tem probabilidade de transição estacionárias. Nestas condições, a função de probabilidade de transição

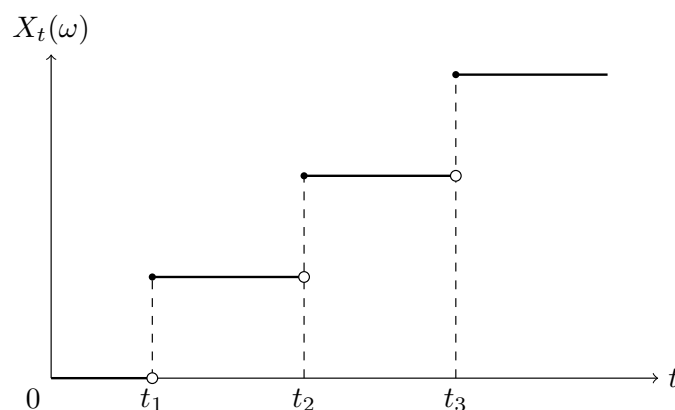
$$\forall t > 0, P_{ij}(t) = P(X_{t+n} = j \mid X_n = i), \quad i, j \in \mathbb{N}_0$$

é independente de  $n \geq 0$ .

### 3.1 Processo de Poisson homogêneo

O processo de Poisson homogêneo é um processo estocástico que modela a ocorrência de eventos aleatórios ao longo do tempo, onde os eventos ocorrem de forma independente e com uma taxa constante. É frequentemente utilizado para modelar fenômenos como chamadas telefônicas recebidas num call center, chegadas de clientes a um serviço, ou falhas em sistemas, entre outros.

Seja  $X_t$  uma função que conta o número de vezes que um determinado acontecimento ocorre durante o período de tempo de 0 a  $t$ . Assim, a aplicação  $t \rightarrow X_t$  é uma função em escada, não decrescente, em que os saltos correspondem às ocorrências dos acontecimentos:



**Hipótese 3.1** (Postulados do processo de Poisson homogêneo).

- P0.  $X_0 = 0$ .
- P1. O número de acontecimentos que ocorrem em intervalos de tempo disjuntos são v.a.'s independentes (incrementos independentes).
- P2. A v.a.  $X_{t_0+t} - X_{t_0}$  (isto é, o acréscimo no intervalo  $[t_0, t_0 + t]$ ) depende apenas de  $t$ , e não de  $t_0$  ou de  $X_{t_0}$  (incrementos estacionários).

- P3. A probabilidade de ocorrer **exatamente** um acontecimento num intervalo de tempo pequeno de amplitude  $h$  é proporcional a  $h$ . Assim,

$$P(h) = P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0, \quad \lambda > 0,$$

onde  $g(h) = o(h)$ ,  $h \rightarrow 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$ .

- P4. A probabilidade de ocorrerem **dois ou mais** acontecimentos num intervalo de tempo pequeno de amplitude  $h$  é negligível quando  $h \rightarrow 0$ . Assim,

$$P(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Representemos por  $P_n(t) = P(X_t = n)$  a probabilidade de ocorrerem  $n$  acontecimentos num intervalo de tempo  $[0, t]$ . Assim, num intervalo de amplitude  $t + h$  temos:

- Para  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P_0(t) \cdot P_0(h), & (\text{por P1}) \\ &= P_0(t) \cdot [1 - P(X_{t+h} - X_t \geq 1)] \\ &= P_0(t) \cdot [1 - (P(X_{t+h} - X_t = 1) + P(X_{t+h} - X_t \geq 2))] & (\text{por P3 e P4}) \\ &= P_0(t) \cdot [1 - (\lambda h + o(h) + o(h))] \\ &= P_0(t) \cdot (1 - \lambda h + o(h)) \end{aligned}$$

Temos então que:

$$P_0(t+h) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda h + o(h)) \iff \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -P_0(t) \cdot \frac{\lambda h + o(h)}{h}.$$

Aplicando limites, obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -P_0(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda h + o(h)}{h},$$

o que resulta em

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t),$$

isto é, a probabilidade do acontecimento não se realizar no intervalo de tempo  $[0, t]$ ,  $P_0(t)$ , satisfaz a equação diferencial

$$\boxed{P'_0(t) = -\lambda P_0(t).}$$

Multiplicando pelo fator integrante  $e^{\lambda t}$ , a solução desta equação diferencial é,

$$P_0(t) = K \cdot e^{-\lambda t},$$

onde  $K$  é uma constante de integração. Como  $P_0(0) = 1$ , temos que  $K = 1$ . Assim, a solução da equação diferencial é

$$\boxed{P_0(t) = e^{-\lambda t}.}$$

- Para  $n \geq 1$ :

- se no intervalo  $[0, t]$  ocorrem  $n$  eventos, no intervalo  $[t, t+h]$  ocorrem zero;
- se no intervalo  $[0, t]$  ocorrem  $n-1$  eventos, no intervalo  $[t, t+h]$  ocorre 1;

- se no intervalo  $[0, t]$  ocorrem  $n - 2$  eventos, no intervalo  $[t, t + h]$  ocorrem 2;
- e assim sucessivamente.

Logo,

$$\begin{aligned}
 P_n(t + h) &= P_n(t) \cdot P_0(h) + P_{n-1}(t) \cdot P_1(h) + P_{n-2}(t) \cdot P_2(h) + \dots \\
 &= P_n(t) \cdot P_0(h) + P_{n-1}(t) \cdot P_1(h) + \sum_{i \geq 2} P_{n-i}(t) \cdot P_i(h) \\
 &= P_n(t) \cdot (1 - \lambda h + o(h)) + P_{n-1}(t) \cdot (\lambda h + o(h)) + \sum_{i \geq 2} P_{n-i}(t) \cdot P_i(h),
 \end{aligned}$$

donde se obtém:

$$P_n(t + h) - P_n(t) = P_n(t) \cdot (-\lambda h + o(h)) + P_{n-1}(t) \cdot (\lambda h + o(h)) + \sum_{i \geq 2} P_{n-i}(t) \cdot P_i(h).$$

Dividindo por  $h$  e aplicando o limite quando  $h \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n(t + h) - P_n(t)}{h} &= P_n(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\lambda h + o(h)}{h} + P_{n-1}(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda h + o(h)}{h} \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i \geq 2} P_{n-i}(t) \cdot P_i(h)}{h},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -P_n(t) \cdot \lambda + P_{n-1}(t) \cdot \lambda,$$

o que equivale a escrever que a probabilidade do acontecimento se realizar pelo menos uma vez no intervalo  $[0, t]$  satisfaz a equação diferencial

$$\boxed{P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \quad n \in \mathbb{N}.}$$

A solução desta equação diferencial, tendo em conta que  $P_n(0) = 0$ , é dada por

$$\boxed{P_n(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}.}$$

Assim, podemos concluir que a probabilidade de ocorrerem  $n$  acontecimentos no intervalo de tempo  $[0, t]$  segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda t$ , ou seja,

$$X_t \sim Po(\lambda t),$$

donde

$$P(X_t = n) = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Das propriedades da distribuição de Poisson, sabemos que  $E(X_t) = \lambda t$ , o que significa que o **número esperado** de acontecimentos num intervalo de amplitude  $t$  é proporcional à amplitude do intervalo.

No caso  $t = 1$ , temos que  $E(X_1) = \lambda$ , pelo que:

- $\lambda$  representa o número médio de acontecimentos que ocorrem por unidade de tempo;
- $\lambda$  designa a taxa de ocorrência, razão ou intensidade do processo de Poisson homogêneo.

Com base no exposto, podemos definir processo de Poisson homogêneo do seguinte modo:

**Definição 3.1** (Processo de Poisson homogêneo). Um processo estocástico  $(X_t, t \in \mathbb{R}_0^+)$  é um **processo de Poisson homogêneo** com taxa  $\lambda > 0$  sse:

- (i)  $X_0 = 0$  quase certamente;
- (ii) tem incrementos independentes e estacionários;
- (iii)  $X_t$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda t$ , i.e.

$$X_t \sim Po(\lambda t), \quad t \geq 0.$$

*Nota* (Observações sobre o processo de Poisson homogêneo).

1. Dos postulados segue que, para quaisquer  $0 \leq s \leq t$ ,

$$X_t - X_s \sim Po(\lambda(t-s)),$$

isto é, o número de acontecimentos num intervalo depende só da amplitude. Além disso, para  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$  e inteiros  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ ,

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} = n_1, \dots, X_{t_k} = n_k) \\ &= P(X_{t_1} = n_1) \prod_{j=2}^k P(X_{t_j} - X_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}) \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}, \end{aligned}$$

com a convenção  $t_0 = 0$  e  $n_0 = 0$ .

2. O tempo de espera até ao primeiro acontecimento  $L = \inf\{t > 0 : X_t > 0\}$  tem função de distribuição

$$F_L(t) = P(L \leq t) = 1 - P(L > t).$$

Note-se que o acontecimento  $\{L > t\}$  significa “a primeira ocorrência ainda não aconteceu até ao tempo  $t$ ”. Isto é equivalente a “não houve nenhum acontecimento no intervalo  $[0, t]$ ”, o que corresponde a  $\{X_t = 0\}$ . Assim,

$$P(L > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Logo,

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

e a f.d.p. é

$$f_L(t) = F'_L(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Consequentemente,  $L \sim Exp(\lambda)$ , com

$$E(L) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(L) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad M_L(u) = E[e^{uL}] = \frac{\lambda}{\lambda - u}, \quad u < \lambda.$$

3. Se  $T_1, T_2, \dots$  são os tempos entre acontecimentos consecutivos, então  $T_i \stackrel{iid}{\sim} Exp(\lambda)$ .

Definindo  $S_r = T_1 + \dots + T_r$  (tempo do  $r$ -ésimo acontecimento), temos  $S_r \sim \Gamma(r, \lambda)$ , com f.g.m.

$$M_{S_r}(u) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - u} \right)^r, \quad u < \lambda,$$

e  $E(S_r) = r/\lambda$ ,  $\text{Var}(S_r) = r/\lambda^2$ .

4. O processo de Poisson homogêneo é uma C. M. com valores em  $\mathbb{N}_0$  e em tempo contínuo. As probabilidades de transição são dadas por

- $P(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = x) = \lambda h + o(h);$
- $P(X_{t+h} - X_t = 0 \mid X_t = x) = 1 - \lambda h + o(h);$
- $P(X_{t+h} - X_t \geq 2 \mid X_t = x) = o(h),$  com  $o(h)/h \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ .

Pelo exposto, podemos dar uma outra definição de processo de Poisson:

**Definição 3.2** (Processo de Poisson — formulação alternativa). Um processo de Poisson homogéneo com taxa  $\lambda > 0$  é uma C. M. em tempo contínuo com estados em  $\mathbb{N}_0$ , tal que, para todo  $x \in \mathbb{N}_0$ :

- $P(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = x) = \lambda h + o(h),$
- $P(X_{t+h} - X_t = 0 \mid X_t = x) = 1 - \lambda h + o(h),$
- $P(X_{t+h} - X_t \geq 2 \mid X_t = x) = o(h),$

com  $X_0 = 0$  q.c.

Existem cadeias de Markov mais gerais e que nos permitem descrever fenómenos análogos aos descritos pelos processos de Poisson. É o que veremos nas secções seguintes.

### Exercício 3.1.

Seja  $X = (X_t : t \geq 0)$  um processo estocástico real tal que  $X_0 = 0$  q.c. e  $X_t \sim Po(\cdot)$ .

- (a) Em que condições será  $X$  um **processo de Poisson**?
- (b) Supondo que  $X$  é um processo de Poisson, prove que, para todos  $t, s, h \in \mathbb{R}_0^+$  com  $t > s > h$  e todos  $x, y \in \mathbb{N}_0$ :

$$P(X_t - X_s = x, X_s - X_h = y) = \frac{e^{-\lambda(t-h)} \lambda^{x+y} (t-s)^x (s-h)^y}{x! y!}.$$

### Exercício 3.2.

Considere uma estação de serviço de lavagem de automóveis, na qual apenas um carro é atendido de cada vez, segundo a ordem de chegada. Um estudo realizado pela empresa concluiu que as chegadas ocorrem segundo um **processo de Poisson** com intensidade média de 15 carros por hora. Denote por  $N_t$ ,  $t \geq 0$  o número de automóveis que chegam num intervalo de tempo de amplitude  $t$  minutos.

- (a) Identifique a distribuição de  $N_t$ ,  $\forall t \geq 0$ . Justifique a sua resposta.
- (b) Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N_h \geq 2)}{P(N_h = 1)} = 0.$$

- (c) Prove que a condição anterior é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(N_h > 1 \mid N_h \geq 1) = 0.$$

O que pode concluir sobre o processo em causa?

- (d) Qual é o tempo médio de espera entre duas chegadas consecutivas?

### Exercício 3.3.

Seja  $(N_t, t \geq 0)$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda > 0$ .

- (a) Supondo que  $s < t$ , calcule:

- i.  $E(N_t - N_s)$
  - ii.  $Var(N_t - N_s)$
  - iii.  $Cov(N_t, N_s)$
- (b) Os clientes de um vendedor de jornais chegam segundo um processo de Poisson com taxa média de 2 clientes por minuto.
- i. Determine a probabilidade de **não chegarem clientes nos próximos três minutos**, sabendo que chegaram um ou mais clientes nos últimos cinco minutos.
  - ii. O vendedor faz a seguinte aposta: paga ao seu assistente 1€ se o próximo cliente não chegar dentro de um minuto; caso contrário, o assistente paga-lhe 1€. Qual é o valor esperado do ganho do vendedor?

**Exercício 3.4.**

O volume de vendas de um determinado produto constitui um **processo de Poisson**, com volume médio de 4 unidades por dia.

- (a) Qual é a probabilidade de que, em dois dias, se vendam exatamente 6 unidades?
- (b) Qual é a probabilidade de que, em dois dias, se vendam mais de 6 unidades?
- (c) Determine o volume médio de vendas semanal.
- (d) Qual é a probabilidade de que um stock de 4 unidades dure menos de um dia?

**Exercício 3.5.**

Numa loja, os clientes chegam de acordo com um **processo de Poisson** com média de 30 por hora. Qual é a probabilidade de que o **intervalo de tempo entre chegadas sucessivas** seja:

- (a) Superior a 2 minutos?
- (b) Inferior a 4 minutos?
- (c) Entre 1 e 3 minutos?

**Exercício 3.6.**

Uma v.a.  $T$  diz-se *sem memória* se, e só se:

$$P(T > x + y \mid T > x) = P(T > y), \quad \forall x, y > 0.$$

- (a) Mostre que, se  $T$  for contínua,  $T$  é sem memória **se e só se**  $T \sim Exp(\lambda)$  para algum  $\lambda > 0$ .
- (b) Se  $T$  assumir apenas valores inteiros positivos,  $T$  é sem memória para  $x$  e  $y$  não negativos **se e só se** existe uma constante  $p$  tal que

$$P(T = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

**Exercício 3.7.**

A chegada de passageiros a uma paragem de autocarro segue um **processo de Poisson** com intensidade  $\lambda$ . Suponha que um autocarro partiu no instante  $t = 0$ , não tendo deixado nenhum passageiro em espera. Seja  $T$  o tempo de chegada do autocarro seguinte. Então, o número de pessoas na paragem aquando da sua chegada é  $N(T)$ . Suponha que  $T$  é independente do processo de Poisson e tem distribuição uniforme no intervalo  $(1, 2)$ .

Calcule a **média** e a **variância** de  $N(T)$ .



**Exercício 3.8.**

Sejam  $(N_t, t \geq 0)$  um processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  e

$$P_k(t) = P(N_t = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Deduza as equações diferenciais de  $P_k(t)$ :

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\lambda P_0(t), \\ P'_k(t) &= -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(b) A partir destas equações, encontre a função de probabilidade:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**3.2 Processo de nascimento puro**

Um processo de nascimento puro é uma generalização do processo de Poisson homogêneo, onde a probabilidade de um acontecimento ocorrer num certo instante depende do número de acontecimentos que já ocorreram. Assim, o processo de Poisson é um processo de nascimento puro com razão de nascimentos constante e igual a  $\lambda$ .

No que se segue, considere-se uma sequência de números positivos  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  e defina-se  $X_t$  como o **número de nascimentos** no intervalo  $[0, t]$ .

**Definição 3.3** (Processo de nascimento puro). Um processo estocástico  $(X_t, t \in \mathbb{R}_0^+)$ , com valores em  $\mathbb{N}_0$ , é um **processo de nascimento puro** com taxa (ou razão de nascimento)  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  se for um processo de Markov homogêneo em tempo contínuo, que satisfaz os axiomas:

- (i)  $P(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = k) = \lambda_k h + o_{1,k}(h) = P_{k,k+1}(h)$ .
- (ii)  $P(X_{t+h} - X_t = 0 \mid X_t = k) = 1 - \lambda_k h + o_{2,k}(h) = P_{k,k}(h)$ .
- (iii)  $P(X_{t+h} - X_t < 0 \mid X_t = k) = 0, k \in \mathbb{N}_0, \forall h > 0$ .
- (iv)  $X_0 = 0$  q.c.

*Nota .*

1. A condição (iv) pode ser relaxada conforme o estudo em causa. Ao considerar  $X_0 \neq 0$ , define-se  $X_t$  como o número de indivíduos no instante  $t$ , uma vez que o número de nascimentos em  $[0, t]$  é  $X_t - X_0$ .
2. Uma vez que as probabilidades de transição dadas por (i) e (ii) são estacionárias, então  $o_{1,k}(h)$  e  $o_{2,k}(h)$  não dependem de  $t$  (são funções de  $h$  quando  $h \rightarrow 0$ ).

**Exemplo 3.1** (Processo de Yule). O processo de Yule é um processo de nascimento puro usado para modelar o crescimento populacional. Seja  $\lambda_n = \lambda n$  (com  $\lambda > 0$ ) e  $X(0) = 1$ . Cada indivíduo origina novos indivíduos a uma taxa  $\lambda$ , logo a taxa total de nascimentos aumenta proporcionalmente ao tamanho da população.

A distribuição de  $X_t$  é:

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

e o valor médio é:

$$E(X_t) = e^{\lambda t}.$$

Comparação com o processo de Poisson:

Característica	Poisson homogêneo	Nascimento puro (Yule)
Taxa de transição	$\lambda_n = \lambda$	$\lambda_n = \lambda n$
Média	$E(X_t) = \lambda t$	$E(X_t) = e^{\lambda t}$
Distribuição	Poisson( $\lambda t$ )	Geométrica deslocada
Incrementos	Independentes e estacionários	Dependentes do estado

Interpretação intuitiva

- No **processo de Poisson**, os eventos ocorrem a um ritmo constante e **independente** do número de eventos anteriores.
- No **processo de nascimento puro**, o ritmo de ocorrência depende do número atual de indivíduos: **quanto mais indivíduos houver**, mais rapidamente ocorrem novos nascimentos.
- O processo de Poisson é um caso particular do processo de nascimento puro com taxas constantes:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \forall n.$$

### Exercício 3.9.

Considere um processo de nascimento puro  $\{X_t, t \geq 0\}$  com taxas  $\lambda_n = 0.5n$  e condição inicial  $X_0 = 1$ . Seja  $t = 2$ .

1. Calcule a probabilidade de que o número de indivíduos em  $t = 2$  seja no máximo 3.
2. Calcule  $E(X_2)$  e interprete o resultado.
3. Discuta se o processo poderia diminuir num intervalo de tempo  $[t, t + h]$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $P_n(t) = P(X_t = n)$ . Para  $t \geq 0$ ,  $P_n(t)$  satisfaz o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P'_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \lambda_n P_n(t), \quad n \geq 1 \end{cases},$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} P_0(0) = P(X_0 = 0) = 1, \\ P_n(0) = P(X_0 = n) = 0, \quad n > 0. \end{cases}$$

**Definição 3.4** (Tempos de espera num processo de nascimento puro). Considere-se a variável aleatória

$$T_k = \text{o tempo entre o } k\text{-ésimo e o } (k+1)\text{-ésimo nascimento,}$$

isto é, o **tempo de espera entre dois nascimentos consecutivos**.

Definindo

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} T_i,$$

temos que  $S_k$  é o **instante em que ocorre o  $k$ -ésimo nascimento**, isto é, o tempo total até ao  $k$ -ésimo nascimento.

Como visto anteriormente (ver (3.1)), o tempo até ocorrer o primeiro evento tem função de distribuição

$$F_{T_0}(t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \quad t > 0,$$

logo  $T_0 \sim \text{Exp}(\lambda_0)$ .

Pode demonstrar-se (ver Karlin & Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*) que a sequência  $(T_k)_{k \geq 0}$  é composta por variáveis aleatórias independentes (**mas não i.i.d**) e

$$T_k \sim \text{Exp}(\lambda_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Adicionalmente, se  $(X_t)_{t \geq 0}$  for um processo de Poisson homogéneo com taxa  $\lambda$ , então

$$S_n \sim \Gamma(n, \lambda),$$

isto é, o instante do  $n$ -ésimo evento tem distribuição Gamma com forma  $n$  e parâmetro de taxa  $\lambda$ . (Nota: aqui usamos a parametrização por **taxa**; noutras fontes a segunda componente da  $\Gamma$  pode ser a escala  $\theta = 1/\lambda$ .)

Terminamos esta secção com um teorema, fundamental para caracterizar a evolução temporal do processo de nascimento puro, permitindo derivar explicitamente as distribuições de probabilidade dos estados ao longo do tempo:

**Teorema 3.2.**  $P_k(t)$  verifica a equação de recorrência

$$P_k(t) = \lambda_{k-1} e^{-\lambda_k t} \int_0^t e^{\lambda_k x} P_{k-1}(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

### Exercício 3.10.

Para assegurar o bom funcionamento de um consultório médico, a direção determinou que, em qualquer instante durante o período de funcionamento, não poderia haver mais de  $N$  doentes no consultório. Apenas um doente é atendido de cada vez, segundo a respetiva ordem de chegada. Os doentes chegam ao consultório segundo um processo de Poisson de intensidade  $1/2$ , ficando a aguardar a sua vez de atendimento apenas se, nesse momento, o número de utentes no consultório for inferior a  $N$ .

(a) Designe por  $N_t$ ,  $t \geq 0$ , o número de doentes que chegam num intervalo de amplitude  $t$ .

1. Prove que:

- i.  $(N_t, t \geq 0)$  é uma C.M. homogénea em tempo contínuo e indique a respetiva probabilidade de transição.
- ii.  $(N_t, t \geq 0)$  é um processo de nascimento puro.

2. Sendo  $T$  uma v.a. que representa o tempo de espera entre duas chegadas consecutivas, prove que

$$P(T > t) = e^{-t/2}, \quad t > 0.$$

3. Qual é o tempo médio de espera entre chegadas?

(b) Seja agora  $X_t$ ,  $t \geq 0$ , o número total de doentes no consultório no instante  $t$ . Supondo que:

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, N\} : P(X_t = k) = \left(\frac{3}{2}\right)^k P(X_t = 0),$$

determine:

1. A probabilidade de que existam  $k$  doentes à espera de serem atendidos, num qualquer instante  $t$ .
2. O número médio de doentes no consultório, num qualquer instante  $t$ .

### Exercício 3.11.

Considere um quiosque onde os clientes chegam segundo um processo de Poisson à razão de 32 clientes por dia, durante o horário diário de abertura do quiosque, correspondente a 8 horas. Designe por  $N_t$ ,  $t \geq 0$ , o número de clientes que chegam ao quiosque num intervalo de tempo de amplitude  $t$  horas.

- (a) Identifique, justificando, a distribuição de  $N_t$ .
- (b) Sendo  $T_2$  a v.a. que representa o instante de chegada (em horas) do segundo cliente ao quiosque, em cada dia, mostre que:

$$P(T_2 > t) = e^{-4t}(1 + 4t), \quad t > 0.$$

### Exercício 3.12.

Uma população de organismos evolui da seguinte forma: cada organismo existe independentemente dos outros e vive durante um tempo aleatório, distribuído exponencialmente com parâmetro  $\theta$ , dividindo-se então em dois novos organismos. Por sua vez, a existência de cada organismo é também independente da dos outros e tem tempo de vida exponencialmente distribuído de parâmetro  $\theta$ , e assim sucessivamente.

Seja  $X(t)$  o número de organismos existentes no instante  $t$ . Suponha que  $X(0) = 1$  e defina  $P_n(t) = P(X(t) = n)$ . Justifique que  $X(t)$  é um processo de nascimento puro, ou seja,

$$P'_n(t) = -\theta(n P_n(t) - (n-1) P_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \dots$$

### Exercício 3.13.

Considere uma população de dimensão  $N(t)$  no instante  $t$  tal que  $N(0) = 1$ . Admita que qualquer dos membros desta população se divide em dois novos membros no intervalo  $[t, t+h]$ , com probabilidade  $\lambda h + o(h)$ , ou mantém-se inalterado neste intervalo, com probabilidade  $1 - \lambda h + o(h)$ .

- (a) Prove que  $(N(t), t \geq 0)$  é um processo de nascimento puro com taxa de natalidade  $\lambda_n = n\lambda$ , para todo  $n = 1, 2, \dots$ .
- (b) Designe por  $p_k(t) = P(N(t) = k)$ , com  $k = 1, 2, \dots$ , e prove que:

$$p'_k(t) = (k-1)\lambda p_{k-1}(t) - k\lambda p_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

- (c) Tendo em conta a equação diferencial anterior, conclua por indução que:

$$p_k(t) = e^{-k\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- (d) Seja  $P(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k(t)$  a função geradora das probabilidades  $p_k(t)$ . Prove que:

$$P(z, t) = \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - z + ze^{-\lambda t}}.$$

- (e) Calcule  $E(N(t))$ .

### Exercício 3.14.

Seja  $(N(t), t \geq 0)$  um processo de nascimento puro com  $N(0) = I$ , um inteiro positivo, e taxa de natalidade  $\lambda_n = n\lambda$ . Designe por  $P_n(t) = P(N(t) = n)$ .

- (a) Prove que:

$$\begin{aligned} P'_I(t) &= -I\lambda P_I(t) \\ P'_n(t) &= -n\lambda P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t), \quad n = I+1, I+2, \dots \end{aligned}$$

- (b) Prove que:

$$P_k(t) = \binom{k-1}{I-1} e^{-I\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-I}, \quad k \geq I.$$

### 3.3 Processo de nascimento e morte

#### 3.3.1 Definição e equações de Chapman–Kolmogorov

**Definição 3.5** (Processo de nascimento e morte). Um processo estocástico  $(X_t, t \in \mathbb{R}_0^+)$ , com valores em  $\mathbb{N}_0$ , é um **processo de nascimento e morte** com taxas  $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}_0\}$  e  $\{\mu_k : k \in \mathbb{N}_0\}$  se for uma C.M. homogénea em tempo contínuo e satisfizer os axiomas:

1.  $P_{i,i+1}(h) = P(X_{t+h} = i+1 \mid X_t = i) = \lambda_i h + o(h), \quad i \geq 0.$
2.  $P_{i,i-1}(h) = P(X_{t+h} = i-1 \mid X_t = i) = \mu_i h + o(h), \quad i \geq 1.$
3.  $P_{i,i}(h) = P(X_{t+h} = i \mid X_t = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geq 0.$
4.  $P_{i,j}(0) = \delta_{ij}.$
5.  $\mu_0 = 0, \quad \lambda_0 > 0, \quad \mu_i, \lambda_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{N}_0.$

Nota: (i)  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker, i.e.,  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ; (ii) os termos  $o(h)$  podem depender de  $i$  e satisfazem  $o(h) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ .

Quando ocorre um nascimento, o processo passa do estado  $i$  para  $i+1$ ; quando ocorre uma morte, passa de  $i$  para  $i-1$ . Em suma, é um processo de nascimento puro com a inclusão de mortes.

*Nota .* Uma generalização óbvia dos processos de nascimento puro consiste em permitir que  $X_t$  decresça (por exemplo, através de mortes). Se  $X_0 = n$ , o processo pode mover-se para os estados vizinhos  $n+1$  ou  $n-1$  após um tempo de espera aleatório.

Num processo de nascimento e morte (com espaço de estados  $\mathbb{N}_0$ ) verifica-se,  $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$  e  $\forall i, j \in \mathbb{N}_0$ :

1.  $P_{ij}(t) \geq 0.$
2.  $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1.$
3. Para quaisquer  $s, t \in \mathbb{R}_0^+$ ,

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(t+s) &= P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) P(X_t = k \mid X_0 = i) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) P(X_t = k \mid X_0 = i) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).
 \end{aligned}$$

Temos então as **Equações de Chapman–Kolmogorov**:

$$\boxed{P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).} \quad (3.2)$$

Nesta dedução, as igualdades usam, por ordem: definição das probabilidades de transição, a regra da probabilidade total, a regra do produto para condicionais, a propriedade de Markov (elimina a dependência de  $X_0$  na condição) e a identificação das probabilidades de transição homogéneas no tempo.

As probabilidades de transição e as leis marginais caracterizam a distribuição do processo. Se

$$q_i := P(X_0 = i), \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

então, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_t = n, X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_0 = i) P(X_t = n \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q_i P_{in}(t). \end{aligned}$$

Logo, as distribuições marginais do processo de nascimento e morte são

$$P(X_t = n) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{in}(t) q_i, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

### 3.3.2 Tempo de espera

Considere-se agora a variável aleatória

$T_i$  = tempo de espera de  $X_t$  no estado  $i$ .

É possível mostrar (ver, por exemplo, Karlin & Taylor) que, quando  $h \rightarrow 0$ ,

$$P(T_i \geq t + h) = P(T_i \geq t) \cdot P(T_i \geq h).$$

Podemos ainda escrever esta igualdade do seguinte modo:

$$\begin{aligned} P(T_i \geq t + h) &= P(T_i \geq t) \cdot P(T_i \geq h) \\ &= P(T_i \geq t) \cdot P(X_{t+h} = i \mid X_t = i) \\ &= P(T_i \geq t) \cdot (P_{ii}(h) + o(h)) \\ &= P(T_i \geq t) \cdot (1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)). \end{aligned}$$

Designando  $G_i(t) = P(T_i \geq t)$ , obtemos

$$G_i(t + h) = G_i(t) [1 - (\lambda_i + \mu_i)h] + o(h),$$

donde, dividindo por  $h$  e tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d}{dt} G_i(t) = -(\lambda_i + \mu_i) G_i(t).$$

A solução é

$$G_i(t) = \exp\{-(\lambda_i + \mu_i)t\},$$

isto é, a **função de sobrevivência** do tempo de espera em  $i$ .

Logo, a **função de distribuição** é

$$P(T_i \leq t) = 1 - \exp\{-(\lambda_i + \mu_i)t\}, \quad t \geq 0,$$

e, portanto,

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i + \mu_i).$$

O tempo médio de espera é

$$E[T_i] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}.$$

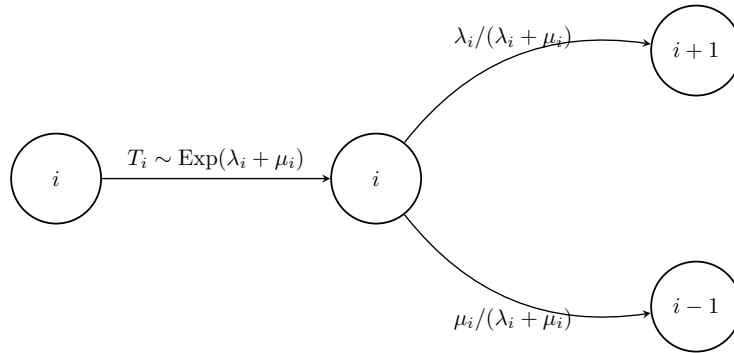
*Nota* . O movimento de  $X_t$  pode ser descrito do seguinte modo.

O processo permanece num certo estado  $i$  por um tempo aleatório  $T_i$ , com distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda_i + \mu_i$ .

Quando abandona o estado  $i$ , o processo transita para um dos estados vizinhos:

- com probabilidade  $\lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$ , passa para  $i + 1$ ;
- com probabilidade  $\mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$ , passa para  $i - 1$ .

Esquemáticamente:



Uma possível realização de  $X_t$  é:

$$i \longrightarrow i + 1 \longrightarrow i \longrightarrow i - 1 \longrightarrow \dots$$

O movimento é análogo ao de um caminho aleatório (*random walk*), com a diferença de que o tempo de permanência em cada estado é uma v.a. exponencial.

### 3.3.3 Equações diferenciais de processos de nascimento e morte

As equações de Chapman–Kolmogorov descrevem a evolução das probabilidades de transição ao longo do tempo. A partir destas equações, podemos deduzir as **equações diferenciais de Kolmogorov**, que descrevem a evolução de  $P_{ij}(t)$  em função do tempo.

Pela relação (3.2), temos:

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \\ &= P_{ii}(h) P_{ij}(t) + P_{i,i+1}(h) P_{i+1,j}(t) + P_{i,i-1}(h) P_{i-1,j}(t) + \sum_{k \notin \{i-1, i, i+1\}} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \\ &= (1 - (\lambda_i + \mu_i)h) P_{ij}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + \mu_i h P_{i-1,j}(t) + o(h), \end{aligned}$$

assumindo que o processo é de saltos de primeiro vizinho, ou seja,  $P_{ik}(h) = o(h)$  para  $|k - i| \geq 2$ .

Dividindo por  $h$  e aplicando o limite  $h \rightarrow 0$ , obtemos as **equações de Kolmogorov de atraso**:

$$\boxed{P'_{ij}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t), \quad i \geq 1.}$$

Para  $i = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} P_{0j}(t+h) &= P_{00}(h) P_{0j}(t) + P_{0,1}(h) P_{1j}(t) + \sum_{k \geq 2} P_{0k}(h) P_{kj}(t) \\ &= (1 - \lambda_0 h) P_{0j}(t) + \lambda_0 h P_{1j}(t) + o(h), \end{aligned}$$

donde se obtém:

$$P'_{0j}(t) = \lambda_0 P_{1j}(t) - \lambda_0 P_{0j}(t).$$

As condições iniciais são:

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Por outro lado, a equação de Chapman–Kolmogorov também pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \\ &= P_{ij}(t) P_{jj}(h) + P_{i,j+1}(t) P_{j+1,j}(h) + P_{i,j-1}(t) P_{j-1,j}(h) + \sum_{k \notin \{j-1,j,j+1\}} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \\ &= (1 - (\lambda_j + \mu_j)h) P_{ij}(t) + \lambda_{j-1}h P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}h P_{i,j+1}(t) + o(h), \end{aligned}$$

assumindo saltos apenas entre estados vizinhos.

Dividindo por  $h$  e aplicando o limite  $h \rightarrow 0$ , obtemos as **equações de Kolmogorov de avanço**:

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t), \quad j \geq 1,$$

com o caso  $j = 0$ :

$$P'_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t).$$

Se o comportamento do processo estabiliza quando  $t \rightarrow +\infty$ , sob condições adequadas (recorrência positiva e aperiocidade), as probabilidades de transição convergem para um **regime estacionário**:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{ij}(t) = \pi_j,$$

onde  $\pi_j$  é a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $j$ , independentemente do estado inicial  $i$ .

Neste caso, as equações de Kolmogorov de atraso ou avanço convergem para as **equações de Kolmogorov estacionárias**:

$$\begin{cases} \lambda_0 \pi_1 - \lambda_0 \pi_0 = 0, & j = 0, \\ \lambda_{j-1} \pi_{j-1} + \mu_{j+1} \pi_{j+1} - (\lambda_j + \mu_j) \pi_j = 0, & j \geq 1, \end{cases}$$

com a condição de normalização

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1.$$

Estas equações permitem determinar a **distribuição estacionária**  $(\pi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  do processo de nascimento e morte.



**Exercício 3.15.**

Considere um sistema de self-service em que a probabilidade de haver uma chegada em  $(t, t+h)$ , dado que existem  $j$  clientes a servirem-se no instante  $t$ , é igual a  $ajh + o(h)$ ,  $j \geq 0$ , quando  $h \rightarrow 0$ , onde  $a > 0$  é uma constante. Suponha que os clientes acabam o serviço segundo um processo de Poisson de intensidade  $2a$ , e que estão reunidas todas as condições para modelar o sistema por um processo de nascimento e morte  $N_t$ .

- Identifique um conjunto de axiomas que caracterize o processo  $(M_t : t \geq 0)$ , onde  $M_t$  representa o número de clientes que acabam de se servir num intervalo de tempo de amplitude  $t$ .
- Identifique, justificando, as taxas de nascimento e morte do processo  $N_t$ .
- Faça um diagrama de velocidades de transição de probabilidade para o processo  $N_t$  e escreva o correspondente sistema de equações de avanço de Kolmogorov.

**Exercício 3.16.**

Considere que os autocarros chegam a uma certa rua segundo um processo de Poisson de intensidade 10 por hora, e percorrem um intervalo de tempo constante igual a 10 minutos. Suponha que a rua não tem limitação para o número de veículos que nela podem transitar.

- Após associar ao problema um processo de nascimento e morte, determine a distribuição de equilíbrio e interprete o significado de  $\pi_0$ .
- Determine o número médio de autocarros na rua depois de algumas horas desde o início da carreira.
- O número de autocarros tende a aumentar ou diminuir com a passagem do tempo? Justifique.

**Exercício 3.17.**

Seja  $(X(t), t \geq 0)$  um processo de nascimento e morte tal que:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda q^n & 0 < q < 1, \lambda > 0 & \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mu_n &= \mu & \mu > 0 & \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_0 &= 0\end{aligned}$$

Designe por  $P_n(t) = P(X(t) = n)$ . Prove que:

$$\begin{aligned}P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P'_n(t) &= \lambda q^{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda q^n + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

**Exercício 3.18.**

Considere o processo estocástico  $N(t)$ , que representa o número de linhas ocupadas numa central telefónica com um número elevado de linhas. Este processo é modelado por chegadas espontâneas de chamadas e término aleatório de chamadas, com os seguintes pressupostos:

- As chamadas chegam à central a uma taxa constante  $\lambda$ , independentemente do número de linhas ocupadas.
- Cada chamada em curso termina a uma taxa  $\mu$ , independentemente das restantes. Assim, quando há  $k$  chamadas em curso (ou  $k$  linhas ocupadas), a taxa total de término é  $k\mu$ .

- Mostre que as Equações de Kolmogorov de avanço associadas às probabilidades  $P_i(t) = P(N(t) = i)$  são:

$$P'_i(t) = -(\lambda + i\mu)P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Suponha que, para cada  $i \in \mathbb{N}_0$ , a função  $P_i(t)$  é:

$$P_i(t) = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} (1 - e^{-\mu t})^i \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Determine a probabilidade de todas as linhas estarem desocupadas no regime estacionário ( $t \rightarrow +\infty$ ) e deduza a forma da distribuição estacionária do número de linhas ocupadas.

**Exercício 3.19.**

Seja  $Y_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , uma cadeia de Markov com espaço de estados  $E = \{0, 1\}$  e matriz de transição  $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

Considere ainda um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda$ ,  $(N(t), t \geq 0)$ . Mostre que o processo definido por  $X(t) = Y_{N(t)}$ ,  $t \geq 0$ , é um processo de nascimento e morte com dois estados, e determine os parâmetros  $\lambda_0$  e  $\mu_1$  em função de  $\alpha$  e  $\lambda$ .

## Capítulo 4

# Complementos de processos estocásticos

### 4.1 Processo de Wiener

**Definição 4.1** (Filtração). Seja  $X = (X(t), t \in T)$  um processo estocástico definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com conjunto de índices  $T = [0, +\infty[$ . Uma família de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ , tal que para  $s \leq t$  se tenha  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , designa-se por **filtração**.

Denomina-se **filtração natural** do processo  $X$  a família

$$(\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t), t \in T),$$

formada pelas álgebras- $\sigma$  geradas pelo processo  $X$  até ao instante  $t$ .

Um processo estocástico  $X = (X(t), t \in T)$  está **adaptado** à filtração  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  se, para todo  $t \in T$ , a variável aleatória  $X(t)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável, isto é, as imagens inversas dos conjuntos  $B \in \mathcal{B}$  estão contidas em  $\mathcal{F}_t$ .

Em 1828, o botânico inglês Robert Brown observou pequenas partículas de pólen imersas num líquido a movimentarem-se de forma completamente aleatória. Mais tarde, em 1905, Albert Einstein justificou este movimento com a constante colisão entre as partículas e as moléculas do líquido envolvente e caracterizou-o por um processo estocástico que viria a ser chamado processo de Wiener. Finalmente, em 1918, apareceu a primeira definição matemática do termo através do matemático Norbert Wiener.

**Definição 4.2** (Processo de Wiener padrão (ou movimento Browniano)). Um **processo de Wiener padrão** (ou **movimento Browniano**) é um processo estocástico  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  definido num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Condição inicial:**  $W_0 = 0$  quase certamente, isto é,

$$P(W_0 = 0) = 1;$$

2. **Incrementos gaussianos:** Para quaisquer instantes  $0 \leq s < t < \infty$ , a variável aleatória  $W_t - W_s$  é normalmente distribuída com média zero e variância  $t - s$ , ou seja,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s);$$

3. **Incrementos independentes:** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e qualquer sequência crescente de instantes  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , os incrementos

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

são variáveis aleatórias independentes;

4. **Trajetoárias contínuas:** Com probabilidade 1, a aplicação  $t \mapsto W_t(\omega)$  é contínua para todo  $\omega \in \Omega$ , ou seja,

$$P(W \in C([0, \infty[)) = 1,$$

onde  $C([0, \infty[)$  denota o espaço das funções contínuas em  $[0, \infty[$ .

Nos processos estocásticos e, em particular, nas equações diferenciais estocásticas, o processo de Wiener representa o efeito acumulado das perturbações aleatórias na evolução de determinado fenómeno em estudo. Dada a importância deste processo, iremos apresentar algumas das suas propriedades.

**Definição 4.3.** Considere-se uma função  $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  e uma sequência de partições  $\mathcal{P}_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_n^n\}$  do intervalo  $[0, t]$ , com  $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tais que

$$\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

- A **variação** da função  $f$  no intervalo  $[0, t]$  é definida por

$$V_f([0, t]) = V_f(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|.$$

- Diz-se que  $f$  tem **variação finita** no intervalo  $[0, t]$  se  $V_f(t) < +\infty$ .
- Diz-se que  $f$  tem **variação limitada** no intervalo  $[0, t]$  se

$$\sup_{u \in [0, t]} V_f(u) < k, \quad \text{para algum } k > 0.$$

- Diz-se que  $f$  tem **variação quadrática** no intervalo  $[0, t]$  se existir e for finito o limite

$$V_f^2(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|^2.$$

**Propriedade 4.1** (Propriedades do processo de Wiener). *O processo de Wiener,  $W_t$ , possui as seguintes propriedades:*

1. *Existe uma versão separável e contínua do processo, isto é, com trajectórias quase certamente contínuas;*
2. *Para todo  $t \geq 0$ ,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ;*
3. *A função de covariância é dada por  $\text{Cov}[W_s, W_t] = E[W_s W_t] = s \wedge t$ ;*
4.  *$W_t$  é um processo de Markov homogéneo;*
5. *A distribuição condicional de  $W_{s+\tau}$  dado  $W_s = x$  é Normal com média  $x$  e variância  $\tau$ ;*
6.  *$W_t$  é uma martingala em relação à sua filtração natural;*
7. *As trajectórias do processo de Wiener são, quase certamente, não diferenciáveis;*
8. *As trajectórias do processo de Wiener são, quase certamente, de variação ilimitada em qualquer intervalo;*
9. *Possui variação quadrática finita no intervalo  $[a, b]$ , igual a  $b - a$ .*

*Nota* (Ruído branco como derivada generalizada do processo de Wiener). Embora as trajectórias do processo de Wiener sejam, quase certamente, contínuas mas não diferenciáveis (propriedade 7), e tenham variação total infinita (propriedade 8), é possível interpretar a sua derivada no **sentido das distribuições generalizadas** (ou distribuições de Schwartz).

Neste contexto, define-se a **derivada generalizada** do processo de Wiener como

$$\frac{dW_t}{dt} = \xi_t,$$

onde  $\xi_t$  representa um **processo estocástico generalizado**, designado por **ruído branco** (ou *white noise*). Este processo não é uma função no sentido clássico, mas sim uma distribuição (ou funcional) que actua sobre funções teste suaves.

O ruído branco  $\xi_t$  caracteriza-se pelas seguintes propriedades formais:

- É um processo com média nula:  $E(\xi_t) = 0$ ;
- A sua função de autocovariância é dada por:

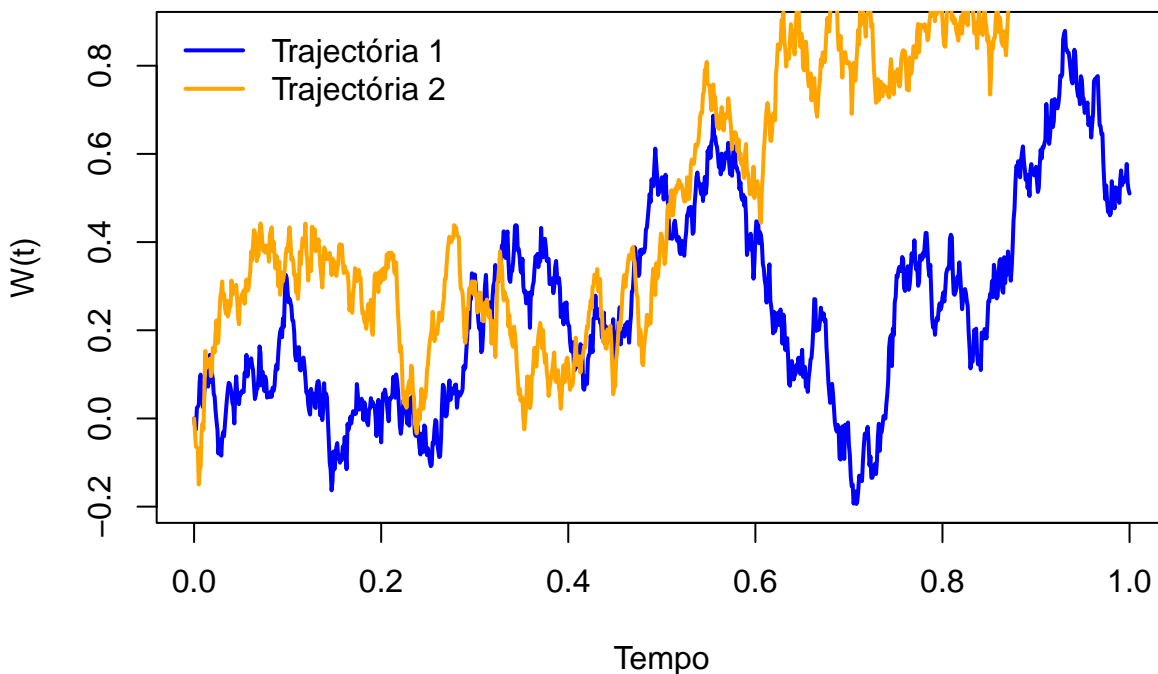
$$E(\xi_s \xi_t) = \delta(t - s),$$

onde  $\delta$  é a função delta de Dirac, interpretada como distribuição.

Este formalismo é essencial na formulação de equações diferenciais estocásticas (EDEs), nas quais o ruído branco representa uma força aleatória infinitesimalmente perturbadora que actua continuamente ao longo do tempo.

Na imagem seguinte apresentam-se duas trajectórias de um processo de Wiener. As trajectórias foram obtidas por simulação numérica, considerando incrementos independentes e normalmente distribuídos com média zero e variância proporcional ao incremento temporal.

### Exemplo de duas trajectórias do processo de Wiener



**Exercício 4.1** (Braumann (2005)). Tirando partido das propriedades do processo de Wiener, calcule ou determine:

1.  $P(W(2.7) > 1.5)$ .
2.  $P(-1.5 < W(2.7) < 1.5)$ .

3.  $P(W(2.7) < 1.5 \mid W(1.8) = 1)$ .
4.  $P(-1.5 < W(2.7) < 1.5 \mid W(1.8) = 1)$ .
5.  $E(W(t) \mid W(s), W(u))$  com  $0 < u < s < t$ .
6.  $Var(W(t) \mid W(s), W(u))$  com  $0 < u < s < t$ .
7.  $P(W(2.7) > 1.5 \mid W(1.8) = 1, W(0.5) = -2)$ .
8.  $E(W(2.7) \mid W(1.8) = 1, W(0.5) = -2)$ .
9.  $P(W(1.8) < 1 \mid W(2.7) = 1.5)$ .
10.  $P(W(1.8) = 1 \mid W(2.7) < 1.5)$ .
11.  $P(W(2.7) = 1.5, W(1.8) > 1)$ .
12.  $P(W(2.7) < 1.5, W(1.8) = 1)$ .
13.  $P(-1 < W(2.7) - W(1.8) < 1.4 \wedge 0.5 < W(1.6) - W(0.9) < 1.5)$ .
14.  $P(-1 < W(2.7) - W(1.8) < 1.4 \mid W(1.6) - W(0.9) = 1.5)$ .

**Exercício 4.2.**

Considere um movimento Browniano standard  $(B(t), t \geq 0)$  nos instantes  $0 < u < u + v < u + v + w$ , em que  $u, v, w > 0$ . Calcule

$$E(B(u)B(u+v)B(u+v+w)).$$

**Exercício 4.3.**

Seja  $(B(t), t \geq 0)$  com  $B(0) \equiv 3$ , um movimento Browniano com variância  $\sigma^2$ . Determine

$$Cov(B(t), B(s)), \quad t, s \geq 0.$$

**Exercício 4.4.**

Considere um movimento Browniano standard  $(B(t), t \geq 0)$ . Determine as funções de covariância para os processos estocásticos seguintes:

- (a)  $U(t) = e^{-t}B(e^{2t}), \quad t \geq 0$ .
- (b)  $V(t) = (1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right)$ , para  $0 < t < 1$ .
- (c)  $W(t) = tB\left(\frac{1}{t}\right)$ , com  $W(0) = 0$ .

**Exercício 4.5.**

Considere um movimento Browniano standard  $(B(t), t \geq 0)$ . Para  $t$  fixo e  $M(t) = \max_{0 \leq u \leq t} B(u)$ , mostre que:

- (a)  $M(t)$  e  $|B(t)|$  têm a mesma distribuição com f.d.p.

$$f_{M(t)}(x) = \frac{2}{\sqrt{t}}\phi(x/\sqrt{t}), \quad x > 0.$$

- (b)  $E(M(t)) = \sqrt{2t/\pi}$ .

**Exercício 4.6.**

Sejam  $B_1(t)$  e  $B_2(t)$  dois movimentos Brownianos independentes e  $R(t) = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}$ ,  $t \geq 0$ . Calcule  $E(R(t))$ .

**Exercício 4.7.**

As flutuações de preço das acções de determinada companhia são modeladas por um movimento Browniano  $(A(t), t \geq 0)$ . Suponha que a companhia entra em falência se o preço de mercado das acções atingir o nível zero.

Se o valor inicial das acções for  $A(0) = 5$  u.m., determine a probabilidade de ...

- (a) ... a companhia entrar em falência no instante  $t = 25$ .
- (b) ... as acções estarem acima de 10 unidades monetárias no instante  $t = 25$ .

**Exercício 4.8.**

Considere um movimento Browniano com parâmetros  $\mu = 0.1$  e  $\sigma = 2$ . Calcule a probabilidade do processo sair fora do intervalo  $(a, b]$  no ponto  $b$ , partindo de  $X(0) = 0$ , para  $b = 1, 10, 100$  e  $a = -b$ .

**Exercício 4.9.**

A flutuação do preço de determinado tipo de acções pode ser descrita por um movimento browniano geométrico com desvio-padrão  $\alpha = 0$ . Supondo que adquire estas acções, quais são as hipóteses de ver o seu capital investido duplicar?

**4.2 O integral de Itô**

*Nota .* No que se segue, adoptámos a seguinte notação para esperança matemática e probabilidade condicionadas:

$$E(\cdot | X_s = x) = E_{s,x}(\cdot)$$

e

$$P(\cdot | X_s = x) = P_{s,x}(\cdot).$$

**Definição 4.4** (Processo de difusão). Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $(X_t, t \geq 0)$  um processo estocástico definido nesse espaço. Diz-se que  $X_t$  é um **processo de difusão** se satisfizer as seguintes propriedades:

- i)  $X_t$  é um processo de Markov;
- ii) As trajectórias de  $X_t$  são quase certamente contínuas;
- iii)  $X_t \in L^2$ , isto é,  $E[X_t^2] < +\infty$ ;
- iv) Para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{P_{s,x}(|X_{s+\Delta} - X_s| > \varepsilon)}{\Delta} = 0;$$

- v) Existe, e é finito, o limite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E_{s,x} \left[ \frac{X_{s+\Delta} - X_s}{\Delta} \right] = a(s, x);$$

- vi) Existe, e é finito, o limite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E_{s,x} \left[ \frac{(X_{s+\Delta} - X_s)^2}{\Delta} \right] = b(s, x).$$

Se as funções  $a(s, x)$  e  $b(s, x)$  forem independentes da variável temporal  $s$ , o processo diz-se **homogêneo**.

As funções  $a(s, x)$  e  $b(s, x)$  designam-se, respectivamente, por **coeficiente de tendência** (ou **momento infinitesimal de primeira ordem**) e **coeficiente de difusão** (ou **momento infinitesimal de segunda ordem**).

O coeficiente de tendência,  $a(s, x)$ , mede a velocidade da média do processo no instante  $s$ , enquanto que o coeficiente de difusão,  $b(s, x)$ , mede a intensidade das flutuações do processo, ou seja, mede a velocidade da variância do processo no instante  $s$ .

*Nota:* Existem na literatura definições alternativas para processo de difusão, algumas das quais assumem hipóteses adicionais ou diferentes.

**Exercício 4.10** (Fonte: Braumann (2005)).

- (i) Mostre que o processo de Wiener  $W_t$  é um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência nulo e coeficiente de difusão unitário.
- (ii) Mostre que  $X_t = x_0 + \sigma W_t$ , com  $x_0$  e  $\sigma$  constantes, sendo um processo de Wiener (não-padrão), é um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência nulo e coeficiente de difusão  $\sigma^2$ .
- (iii) Mostre que  $Z_t = x_0 + \mu t + \sigma W_t$ , com  $x_0$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  constantes, conhecido como movimento browniano com tendência, é um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência  $\mu$  e coeficiente de difusão  $\sigma^2$ .

**Definição 4.5** (Função delta de Dirac). Chama-se **função delta de Dirac** à função generalizada  $\delta(x)$  com as seguintes propriedades:

1.  $\delta(x) = 0$ , para todo o  $x \neq 0$ ;
2.  $\delta(0) = +\infty$ ;
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ .

A caracterização, do ponto de vista probabilístico, de um processo de difusão recorre apenas aos seus momentos infinitesimais e às equações de Kolmogorov.

**Teorema 4.1.** *Seja  $X_t$  um processo de difusão, como definido anteriormente, com função densidade de transição  $p(t, y | s, x)$ , contínua em  $s$ , com derivadas parciais de primeira e segunda ordem em relação a  $x$  finitas e contínuas em  $s$ . Nessas condições, verificam-se:*

1. **Equação de Kolmogorov progressiva (ou equação de Fokker-Planck):**

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(a(s, x)p)}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b(s, x)p)}{\partial y^2} = 0,$$

com condição inicial

$$\lim_{t \downarrow s} p(t, y | s, x) = \delta(x - y),$$

onde  $\delta$  representa a função delta de Dirac, e  $(s, x)$  está fixo;

2. **Equação de Kolmogorov regressiva:**

$$\frac{\partial p}{\partial s} + a(s, x) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

com condição inicial

$$\lim_{t \uparrow s} p(t, y | s, x) = \delta(x - y),$$

onde  $\delta$  representa a função delta de Dirac, e  $(t, y)$  está fixo.



Considere-se o ponto  $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$  e o seguinte problema de Cauchy, induzido por uma equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t)) dt, & \text{para } t > 0, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, e  $X : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é a solução do problema (4.2).

Se interpretarmos  $X(t)$  como a trajectória de uma partícula, então  $dX(t)/dt$  representa a sua velocidade. É natural admitir que essa velocidade apresente pequenas oscilações que não são explicadas pela função  $f$ , ou seja, o sistema descrito na equação (4.2) não incorpora o efeito aleatório que as flutuações ambientais induzem na trajectória de  $X$ . Assim, torna-se necessário adicionar um *ruído* ao problema (4.2), de modo a reflectir a influência dessas flutuações sobre a dinâmica do sistema:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) \xi(t) dt, & \text{para } t > 0, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

onde  $g(\cdot)$ , que mede a intensidade das flutuações ambientais, é uma função dependente de  $X(t)$ .

Considerando que  $dW(t) = \xi(t) dt$ , o sistema (4.2) pode reescrever-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dW(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

o qual representa uma **Equação Diferencial Estocástica (EDE)**. A solução deste sistema é dada por:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds + \int_0^t g(X(s)) dW(s), \quad t > 0,$$

em que o primeiro integral é um integral de Riemann-Stieltjes. Contudo, o segundo integral **não existe** neste sentido, dado que as trajectórias do processo de Wiener são, quase certamente, de variação ilimitada no intervalo  $[0, t]$ .

No entanto, como o processo de Wiener possui variação quadrática finita, é possível definir o segundo integral recorrendo à **definição de integral estocástico**.

Note-se que, como já referido, se omitiu a dependência explícita em  $\omega$  na notação de  $X(t)$ .

Mostraremos de seguida como obter a solução (4.2), bem como a definição do integral estocástico

$$\int_0^t g(X(s)) dW(s).$$

Suponhamos que desejamos calcular o seguinte integral:

$$\int_0^t W(t) dW(t).$$

Se aplicarmos as regras de cálculo habituais, obtemos como solução:

$$\frac{1}{2} W^2(t).$$

Vamos verificar se esta solução está correta.

Seja  $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com  $f(u) = W(u)$ , uma função, e sejam  $\mathcal{P}_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_n^n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , partições do intervalo  $[0, t]$  com

$$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t \geq 0,$$

tais que os diâmetros

$$\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n|$$

satisfazem  $\delta_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Consideremos as somas de Riemann-Stieltjes aproximadoras do integral  $\int_0^t f(u) dW(u)$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} W(\xi_i^n)(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)),$$

com  $\xi_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ , e usemos limites em média quadrática quando  $n \rightarrow +\infty$  como possível definição do integral.

Consideremos o caso particular  $\xi_i^n = (1 - \lambda)t_i^n + \lambda t_{i+1}^n$ , e definamos as somas de Riemann-Stieltjes:

$$S_\lambda(W(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} W(\xi_i^n)(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)).$$

Facilmente verificamos que, para  $\lambda$  fixo, o limite em média quadrática destas somas, quando  $n \rightarrow +\infty$ , é

$$\frac{W^2(t)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)t.$$

Com efeito:

$$E \left[ \left( S_\lambda(W(t)) - \frac{W^2(t)}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)t \right)^2 \right] \rightarrow 0.$$

Este limite depende da escolha do valor de  $\lambda$  e, consequentemente, do ponto intermédio  $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . Assim, **não existe** o integral no sentido de Riemann-Stieltjes, pois falha a existência de um limite comum para todas as escolhas de pontos intermédios.

Ao fixarmos  $\lambda = 0$ , obtemos como ponto intermédio o ponto inicial do intervalo, isto é,  $\xi_i = t_i$ , e verificamos que

$$\int_0^t W(t) dW(t) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t,$$

o que é um resultado **diferente** do indicado em (4.2). De facto, para diferentes valores de  $\lambda$ , obtemos diferentes integrais. Por exemplo, se considerarmos  $\lambda = \frac{1}{2}$ , o resultado do integral é:

$$\int_0^t W(t) dW(t) = \frac{1}{2}W^2(t).$$

O facto de diferentes valores de  $\lambda$  implicarem diferentes integrais levanta uma questão pertinente: **qual o valor de  $\lambda$  que devemos escolher?**

A escolha de  $\xi_i = t_i$ , ou seja, o ponto inicial, permite-nos definir integrais de funções mais gerais do que apenas o processo de Wiener. Isto conduz a integrais do tipo:

$$\int_0^t G(s) dW(s),$$

onde  $G$  pertence a uma vasta classe de funções com a propriedade de serem **não-antecipativas**. Veremos mais à frente como definir rigorosamente estas funções.

Como se referiu, a escolha de  $\lambda$  permite obter diferentes integrais. Assim:

- (i) Se  $\lambda = 0$ , escolhemos o ponto inicial do intervalo e obtemos o **integral de Itô**;
- (ii) Se  $\lambda = \frac{1}{2}$ , escolhemos o ponto intermédio do intervalo e obtemos o **integral de Stratonovich**.

Vamos agora dedicar-nos ao estudo do integral de Itô. Começamos com a introdução de algumas definições e resultados importantes.

**Definição 4.6.** Seja  $W(t)$ ,  $t \geq 0$ , um processo de Wiener padrão definido num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

1. Chama-se **filtração natural do processo de Wiener até ao instante  $s > 0$**  à  $\sigma$ -álgebra

$$\mathcal{M}_s = \sigma(W(u), 0 \leq u \leq s);$$

2. Chama-se  **$\sigma$ -álgebra dos incrementos futuros do processo de Wiener** à  $\sigma$ -álgebra

$$\mathcal{M}_s^+ = \sigma(W(u) - W(s), u \geq s);$$

3. Uma família  $\{\mathcal{A}_s : 0 \leq s \leq t\}$  de  $\sigma$ -álgebras é chamada **filtração não-antecipativa**, relativamente a  $W(s)$ , se:

- $\mathcal{A}_s \supset \mathcal{M}_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ ;
- $\mathcal{A}_s$  é independente de  $\mathcal{M}_s^+$ ,  $\forall s \geq 0$ .

Informalmente, podemos dizer que a filtração  $\mathcal{A}_s$  contém toda a informação disponível do processo até ao instante  $s$ .

A escolha da filtração não-antecipativa  $\mathcal{A}_s$  costuma coincidir com a própria filtração natural do processo de Wiener,  $\mathcal{M}_s$ , desde que não seja necessário incluir informação adicional sobre o processo. Caso contrário, considera-se uma filtração **maior** (por exemplo, de modo a incluir a condição inicial de um problema de Cauchy), desde que a mesma seja não-antecipativa.

**Definição 4.7** (Processo não-antecipativo). Um processo estocástico  $G(t)$  é chamado de **não-antecipativo**, relativamente à filtração  $\mathcal{A}_t$ , se  $G(t)$  é  $\mathcal{A}_t$ -mensurável, para todo  $t \geq 0$  (ou seja,  $G(t)$  depende apenas da informação disponível até ao instante  $t$ ).

Tendo em conta estas definições, podemos definir o integral de Itô para uma classe especial de funções não-antecipativas, as **funções em escada**. Nota: na realidade, para definir o integral de Itô, não basta que  $G$  seja não-antecipativa. É necessário que  $G = G(t, \omega)$  seja **conjuntamente mensurável**.

**Definição 4.8** (Espaço de Hilbert). Chama-se **espaço de Hilbert**, no intervalo  $[0, t]$ , e representa-se por  $H^2[0, t]$ , ao espaço das funções

$$G : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que verificam as seguintes condições:

- $G$  é conjuntamente mensurável relativamente à medida de Lebesgue  $l$  em  $[0, t]$  e à medida de probabilidade  $P$ ;
- $G$  é **não-antecipativa**;
- $\int_0^t E[G^2(u, \omega)] du < +\infty$ .

*Nota* . Nesta última definição considerámos, de modo abusivo, uma qualquer função  $G$  com a propriedade de ser conjuntamente mensurável relativamente às medidas  $l$  e  $P$ .

Formalmente, deveríamos referir-nos ao conjunto das funções conjuntamente mensuráveis que sejam **quase iguais**, no seguinte sentido: duas funções  $G_1$  e  $G_2$  dizem-se quase iguais quando o conjunto de pontos  $(t, \omega)$  onde diferem tem medida nula relativamente à medida produto  $l \times P$ .

Assim, a função  $G$  é, na realidade, um **representante da classe de equivalência** das funções conjuntamente mensuráveis relativamente à relação de equivalência de quase-igualdade.

Deste modo, para simplificar a linguagem, referimo-nos à função  $G$  como um representante da classe de equivalência, em vez de referir explicitamente a própria classe de equivalência.

**Definição 4.9** (Função em escada). Uma função  $G$ , no espaço  $H^2[0, t]$ , é chamada de **função em escada** se existir uma partição  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$  do intervalo  $[0, t]$  tal que:

$$G(t) = G(t_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Note-se que  $G(t_i)$  é  $\mathcal{A}_{t_i}$ -mensurável, pois  $G$  é não-antecipativa.

Ao espaço de funções em escada de  $H^2[0, t]$ , chamamos  $H_E^2[0, t]$ .

**Definição 4.10** (Integral de Itô para funções em escada). Seja  $G$  uma função em  $H_E^2[0, t]$ . O integral de Itô da função  $G$  no intervalo  $[0, t]$  é dado por:

$$\int_0^t G(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} G(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

**Teorema 4.2** (Propriedades do integral de Itô). *Sejam  $F$  e  $G$  duas funções em  $H_E^2[0, t]$ , e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  duas constantes. Verificam-se as seguintes propriedades:*

1. *Linearidade:*

$$\int_0^t (\alpha F(s) + \beta G(s)) dW(s) = \alpha \int_0^t F(s) dW(s) + \beta \int_0^t G(s) dW(s);$$

2. *Esperança nula:*

$$E \left[ \int_0^t F(s) dW(s) \right] = 0;$$

3. *Isometria de Itô:*

$$E \left[ \left( \int_0^t F(s) dW(s) \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^t (F(s))^2 ds \right] = \int_0^t E [(F(s))^2] ds.$$

Definimos, assim, o integral de Itô para funções em escada, ou seja, funções no espaço  $H_E^2[0, t]$ . Vamos agora generalizar este integral para funções genéricas em  $H^2[0, t]$ , através da existência de sucessões aproximadoras de funções em escada.

**Teorema 4.3** (Aproximação em média quadrática). *Seja  $G \in H^2[0, t]$  uma função. Então, existe uma sucessão de funções limitadas em escada,  $G_n \in H_E^2[0, t]$ , tal que:*

$$E \left[ \int_0^t |G(s) - G_n(s)|^2 ds \right] \xrightarrow{m.q.} 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

**Definição 4.11.** Sejam  $G$  e  $G_n$  como no teorema anterior. O **integral de Itô** da função  $G$  no intervalo  $[0, t]$  é definido como:

$$\int_0^t G(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t G_n(s) dW(s),$$

onde o limite é tomado em **média quadrática**.

**Teorema 4.4** (Propriedades do integral de Itô). *Sejam  $F$  e  $G$  duas funções em  $H^2[0, t]$ , e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  duas constantes. Verificam-se as seguintes propriedades:*

1. **Linearidade:**

$$\int_0^t (\alpha F(s) + \beta G(s)) dW(s) = \alpha \int_0^t F(s) dW(s) + \beta \int_0^t G(s) dW(s).$$

2. **Esperança nula:**

$$E \left[ \int_0^t F(s) dW(s) \right] = 0.$$

3. **Isometria de Itô:**

$$E \left[ \left( \int_0^t F(s) dW(s) \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^t F(s)^2 ds \right] = \int_0^t E [F(s)^2] ds.$$

4. **Covariância:**

$$E \left[ \int_0^t F(s) dW(s) \int_0^t G(s) dW(s) \right] = E \left[ \int_0^t F(s) G(s) ds \right].$$

5. **Distribuição normal no caso determinístico (se  $G(s)$  for determinística):**

$$\int_0^t G(s) dW(s) \sim \mathcal{N} \left( 0, \int_0^t G^2(s) ds \right).$$

O integral de Itô para funções no espaço  $H^2[0, t]$  pode ser estudado como função do seu limite superior, ou seja, como um **integral indefinido**.

A prova destas propriedades encontra-se fora do âmbito desta unidade curricular.

**Definição 4.12** (Integral indefinido de Itô). Seja  $G \in H^2[0, d]$  uma função, e  $[0, d]$  um intervalo. O integral de Itô da função  $G$ , considerando  $t$  como limite superior de integração, é dado por:

$$Z(t) = \int_0^t G(s) dW(s) = \int_0^d G(s) I_{[0,t]}(s) dW(s).$$

**Teorema 4.5.** *Seja  $Z(t)$  o processo estocástico definido acima. São válidas as seguintes propriedades:*

1.  $Z(t)$  é uma martingala relativamente à filtração  $\mathcal{A}_t$ ;
2.  $Z(t)$  possui uma versão contínua (com trajectórias quase certamente contínuas);
3.  $Z(t)$  tem incrementos não correlacionados.

As classes de funções até aqui apresentadas são bastante simples. Na prática, interessa-nos estudar integrais de Itô em que a função  $G$  não pertence apenas ao espaço  $H^2[0, t]$ , mas sim a uma classe mais ampla: o espaço  $M^2[0, t]$ .

**Definição 4.13.** Dizemos que  $G(s, \omega)$  é uma função no espaço  $M^2[0, t]$  se:

1. É **conjuntamente mensurável**;
2. É **não-antecipativa** em relação à filtração  $\mathcal{A}_s$ ;
3. O integral

$$\int_0^t G^2(s) ds$$

existe e é **finito quase certamente**.

Note-se que a exigência

$$\int_0^t G^2(s) ds < +\infty$$

é mais fraca do que a condição exigida para o espaço  $H^2$ . Assim, temos a inclusão:

$$H^2[0, t] \subset M^2[0, t]$$

A extensão do integral de Itô a funções do espaço  $M^2[0, t]$  é feita de forma semelhante à aproximação por funções em escada em  $H_E^2[0, t]$ , com a diferença de que a **convergência requerida é mais fraca**.

**Teorema 4.6.** *Seja  $G \in M^2[0, t]$ . Então, existe uma sucessão de funções limitadas em escada  $G_n \in H_E^2[0, t]$  tal que:*

$$\int_0^t (G(s) - G_n(s))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{quase certamente, } n \rightarrow +\infty$$

**Definição 4.14.** Sejam  $G$  e  $G_n$  como no teorema anterior. O **integral de Itô** da função  $G$  no intervalo  $[0, t]$  é definido por:

$$\int_0^t G(s) dW(s) = P - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t G_n(s) dW(s),$$

onde o limite é tomado **em probabilidade**.

*Nota* (Nota sobre propriedades do integral). Dada a natureza das funções no espaço  $M^2[0, t]$ , não existe garantia de que as propriedades clássicas do integral de Itô — tais como esperança nula, isometria, e covariância — se verifiquem, pois os respetivos momentos podem não existir.

Finda a apresentação do integral de Itô, é agora necessário introduzir as **regras de cálculo** destes integrais: o chamado **cálculo de Itô**.

O cálculo de Itô difere do cálculo clássico devido à introdução de uma nova regra de diferenciação — a **regra da cadeia de Itô**. Apresentamos de seguida a definição de **processo de Itô** e o respetivo **teorema de Itô**, base fundamental do cálculo de integrais estocásticos.

**Definição 4.15** (Processo de Itô). Sejam:

- $(W(t), t \geq 0)$  o processo de Wiener;
- $X_0$  uma variável aleatória  $\mathcal{A}_0$ -mensurável;
- $F$  uma função conjuntamente mensurável, adaptada à filtração  $\mathcal{A}_s$  e tal que

$$\int_0^d |F(s)| ds < +\infty \quad \text{quase certamente;}$$

- $G \in M^2[0, d]$ .

Define-se o **processo de Itô** no intervalo  $t \in [0, d]$  como:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s) ds + \int_0^t G(s) dW(s).$$

Este processo pode também ser representado na forma diferencial:

$$dX(t) = F(t) dt + G(t) dW(t).$$

**Teorema 4.7** (Teorema de Itô). *Seja  $X(t, \omega)$  um processo de Itô como definido anteriormente, e seja  $Y(t) = h(t, X(t))$ , onde  $h$ ,  $h_t(t, x)$  e  $h_{xx}(t, x)$  são funções contínuas. Então:*

- (i)  $Y(t) = Y(t, \omega)$  é um processo de Itô com condição inicial  $Y_0 = h(0, X_0)$ ;

(ii) a forma diferencial de  $Y(t)$  é dada pela **regra da cadeia de Itô**:

$$dY_t = \left( \frac{\partial h(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial h(t, X_t)}{\partial x} F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, X_t)}{\partial x^2} G^2(t) \right) dt + \frac{\partial h(t, X_t)}{\partial x} G(t) dW_t;$$

(iii) a forma integral de  $Y(t)$  é dada por:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left( \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial s} + \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial x} F(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(s, X_s)}{\partial x^2} G^2(s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial x} G(s) dW_s.$$

Finda a apresentação de definições, propriedades e teoremas relativos ao cálculo de Itô, podemos agora abordar a resolução de equações diferenciais estocásticas, ou seja, o cálculo das suas soluções. Começamos pela definição de solução de uma equação diferencial estocástica de Itô.

No que se segue, consideramos:

- $W = (W_t, t \geq 0)$  é um processo de Wiener;
- $X_0$  é uma variável aleatória independente do processo de Wiener;
- $\mathcal{A}_t = \mathcal{F}(X_0, W_s), 0 \leq s \leq t$ ;
- $F, G$  duas funções definidas em  $[0, T]$ , conjuntamente mensuráveis, com  $T > 0$ .

**Definição 4.16** (Solução de uma EDE de Itô). Um processo estocástico  $X_t$  é solução da equação diferencial estocástica de Itô

$$\begin{cases} dX_t = F(X_t, t) dt + G(X_t, t) dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

se satisfizer as seguintes condições:

- (i)  $X$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável;
- (ii)  $F$  é não-antecipativa e

$$\int_0^T F(X_s, s) ds < +\infty;$$

- (iii)  $G$  é não-antecipativa e

$$\int_0^T G^2(X_s, s) ds < +\infty;$$

- (iv)

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s, s) ds + \int_0^t G(X_s, s) dW_s \quad q.c., \quad \forall t \in [0, T].$$

**Teorema 4.8** (Teorema de existência e unicidade de soluções de EDE de Itô). *Sejam  $F : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas que satisfazem as seguintes condições:*

- (i)  $|F(x, t) - F(y, t)| \leq L|x - y|$  e  $|G(x, t) - G(y, t)| \leq L|x - y|$ , para todo o  $t \in [0, T]$  e  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $|F(x, t)| \leq L(1 + |x|)$  e  $|G(x, t)| \leq L(1 + |x|)$ , para todo o  $t \in [0, T]$  e  $x \in \mathbb{R}$ ,



onde  $L > 0$  é uma constante.

Seja  $X_0$  uma variável aleatória, independente dos incrementos futuros do processo de Wiener, tal que

$$E(|X_0|^2) < +\infty.$$

Nestas condições, existe uma única solução  $X_t$  da equação diferencial estocástica de Itô:

$$\begin{cases} dX_t = F(X_t, t) dt + G(X_t, t) dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Esta solução é um processo de Markov e, se  $F$  e  $G$  forem contínuas em  $t$ , trata-se também de um processo de difusão.

A unicidade enunciada significa o seguinte: se  $X_t$  e  $Y_t$  forem soluções da equação (4.8), então

$$P(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

As condições impostas às funções  $F$  e  $G$  correspondem, respetivamente, a uma condição de Lipschitz (continuidade uniforme) e a uma restrição de crescimento linear.

A demonstração deste teorema recorre ao *Lema de Gronwall* e pode ser encontrada em qualquer bom livro sobre equações diferenciais estocásticas.

**Exercício 4.11** (Fonte: Braumann (2005)). Determine  $d(tW(t))$  e utilize o resultado para mostrar que

$$\int_0^t s dW(s) = tW(t) - \int_0^t W(s) ds.$$

**Exercício 4.12** (Fonte: Braumann (2005)). Mostre que a equação  $dY(t) = Y(t) dW(t)$ , com  $Y(0) = 1$ , tem como solução

$$Y(t) = \exp\left(W(t) - \frac{t}{2}\right), \quad \text{para } t \geq 0.$$

**Exercício 4.13.** Considere a seguinte EDE:

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Mostre que a sua solução é dada por:

$$Y(t) = y_0 + \mu t + \sigma W(t).$$

**Sugestão:** esta EDE é linear com coeficientes constantes. Resolva-a diretamente por integração.

**Exercício 4.14.** Considere a seguinte EDE, conhecida como modelo de **Ornstein-Uhlenbeck**:

$$dX(t) = -\theta X(t) dt + \sigma dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Mostre que a solução deste modelo é dada por:

$$X(t) = x_0 e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW(s).$$

**Sugestão:** aplique a mudança de variável  $Z(t) = e^{\theta t} X(t)$  e resolva a EDE resultante.

**Exercício 4.15.** Considere a seguinte EDE, conhecida como modelo de **Vasicek**:

$$dY(t) = b(A - Y(t)) dt + \sigma dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Mostre que a solução deste modelo é dada por:

$$Y(t) = A + (y_0 - A)e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW(s).$$

**Sugestão:** aplique a mudança de variável  $Z(t) = Y(t) - A$  e resolva a EDE resultante.

**Exercício 4.16.** Considere a seguinte EDE, conhecida como modelo de **Gompertz** (ou de **Fox**):

$$dX(t) = rX(t)(\ln K - \ln X(t)) dt + \sigma X(t) dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Mostre que a solução deste modelo é dada por:

$$X(t) = \exp\left(\ln K + e^{-rt}(\ln x_0 - \ln K) - \frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-rt}) + \sigma \int_0^t e^{-r(t-s)} dW_s\right).$$

**Sugestão:** aplique a mudança de variável  $Z(t) = \ln X(t)$  e resolva a EDE resultante.

**Exercício 4.17.** Considere a seguinte EDE, conhecida como modelo de **Black-Scholes**:

$$dY(t) = rY(t) dt + \sigma Y(t) dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Mostre que a solução deste modelo é dada por:

$$Y(t) = y_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}.$$

**Sugestão:** aplique a mudança de variável  $Z(t) = \ln Y(t)$  e resolva a EDE resultante.

**Exercício 4.18.** Seja  $X(t)$  o valor de uma ação no instante  $t \geq 0$ , assumindo que satisfaz o modelo de Black-Scholes, com  $X(0) = \$52.800$ ,  $r = 0.312/\text{trimestre}$  e  $\sigma^2 = 0.087/\text{trimestre}$ . Determine:

- (a)  $P(X(2 \text{ trimestres}) > \$70.000 \mid X(1 \text{ trimestre}) = \$60.500)$
- (b)  $E(X(1 \text{ trimestre}))$
- (c)  $P(\$55.000 \leq X(1 \text{ trimestre}) \leq \$65.000)$
- (d)  $Var(X(1 \text{ trimestre}))$
- (e)  $E(X(2 \text{ trimestres}) \mid X(0.5 \text{ trimestre}) = \$54.200 \text{ e } X(1 \text{ trimestre}) = \$60.500)$
- (f)  $P(X(2 \text{ trimestres}) > \$70.000 \mid X(0.5 \text{ trimestre}) = \$54.200 \text{ e } X(1 \text{ trimestre}) = \$60.500)$
- (g)  $Var(X(2 \text{ trimestres}) \mid X(1 \text{ trimestre}) = \$60.500)$
- (h)  $E(X(2 \text{ trimestres}) \mid X(1 \text{ trimestre}) = \$60.500)$

**Sugestão:** Use o facto de que  $X(t) = X(0) \cdot e^{Z(t)}$ , com  $Z(t)$  gaussiano. Logo,

$$X^2(t) = X(0)^2 \cdot e^{2Z(t)}$$

e então,

$$E(X^2(t)) = X(0)^2 \cdot E(e^{2Z(t)}) = X(0)^2 \cdot \exp\left(E(2Z(t)) + \frac{1}{2}Var(2Z(t))\right).$$

**Exercício 4.19.** Considere a seguinte EDE, conhecida como modelo de **log-normal inverso**:

$$dY(t) = -\frac{\sigma^2}{2}Y(t) dt + \sigma Y(t) dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Mostre que a solução deste modelo é dada por:

$$Y(t) = y_0 e^{\sigma W(t)}.$$

**Sugestão:** aplique a mudança de variável  $Z(t) = \ln Y(t)$  e resolva a EDE resultante.

**Exercício 4.20.** Considere a seguinte EDE, conhecida como modelo de **Gompertz com parâmetro limite**:

$$dX(t) = (X(t) - \gamma)(\alpha - \beta \ln(X(t) - \gamma))dt + \sigma(X(t) - \gamma)dW(t), \quad X(0) = x_0$$

Mostre que a solução deste modelo é dada por:

$$X_t = \gamma + \exp \left\{ e^{-\beta t} \left( \ln(x_0 - \gamma) + \frac{1}{\beta} \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (e^{\beta t} - 1) \right) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s \right\}.$$

**Sugestão:** aplique a mudança de variável  $Y(t) = \ln(X(t) - \gamma)$  e resolva a EDE resultante.

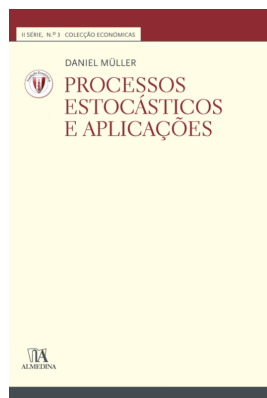


## Capítulo 5

# Bibliografia

### Principal

- Muller, D. (2007) Processos Estocásticos e Aplicações. II Série, nº3, Coleção Económicas. Almedina.

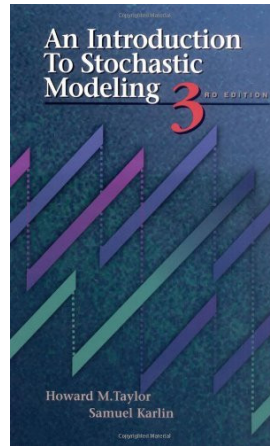


### Secundária

- Muller, D. (2011) Probabilidades e Processos Estocásticos. II Série, nº17, Coleção Económicas. Almedina.



- Taylor, H. M., Karlin, S. (1998) An Introduction to Stochastic Modeling (3rd Edition), Academic Press, New York.



Todos os direitos reservados. É expressamente proibida a reprodução, cópia, distribuição, comunicação pública, transformação ou qualquer outra forma de utilização, total ou parcial, dos conteúdos deste sítio, incluindo textos, código e imagens, sem autorização prévia e por escrito do autor. Qualquer utilização não autorizada constitui violação dos direitos de autor e poderá dar lugar à responsabilidade civil e criminal nos termos da lei em vigor.