

5. tétel

Furuglyás Kristóf

2020. június 1.

Kivonat

Fraktáldimenzió, önhasonló matematikai fraktálok, természetben előforduló fraktálok, sejtautomaták.

Tartalomjegyzék

1. Fraktáldimenzió

- 1.1. Műveletek
- 1.2. Típusok

2. Természetben előforduló fraktálok

- 2.1. Random mozgás
- 2.2. Aggregátumok, perkoláció
- 2.3. Diffúzió-limitált növekedés

3. Sejtautomaták

- 3.1. Egydimenziós eset
- 3.2. Conway életjátéka
- 3.3. Gáz szimulálása rácson

1. Fraktáldimenzió

Mindennapi objektumoknál megfigyelhető, hogy ha egyre kisebb skálán vizsgáljuk őket, az egyes tulajdonságaik konvergálnak egy adott értékhez. Fraktálok esetében azonban a kisebb felbontás nem eredményez konvergenciát; **a fraktálok határai** ugyanis végtelenül "gyűröttek" vagy "szakadásosak", azaz **nem-differenciálhatóak**. Továbbá, a fraktálok másik fontos tulajdonsága, hogy **önhasonlók** – azaz különböző nagyítás mellett nézve ugyanazt az alakzatot látjuk kibontakozni. A természetben előforduló fraktálok például a **szigetek partvonalai** vagy a **hegyek felszíne**. Előfordulhatnak még **növekedésből származó fraktálok** is, mint például az a **növények gyökérzete** vagy épp a **keringési rendszer**. Ilyenkor az elégazó struktúrák valamilyen **növekedési instabilitás** váltja ki.

Megmérve bármilyen d dimenziós test a térfogatát különböző l oldalhosszúságú szintén d dimenziós (tehát l^d térfogatú) kockákkal, és feltételezve, hogy ekkor a lefedéshez szükséges kockák száma $N(l)$, a test térfogata:

$$V(l) = N(l) \cdot l^d. \quad (1)$$

Hétköznapi objektumoknál ha $l \rightarrow 0$, akkor $V(l)$ gyorsan konvergál egy adott értékhez. Azonban **fraktálok** esetében ha $l \rightarrow 0$, akkor $V(l) \rightarrow 0$! Ugyanakkor ezzel egyidőben a $d - 1$ dimenziós $S(l)$ **felszíne pedig divergál: $S(l) \rightarrow \infty$** .

A geometriai (matematikai) fraktálok:

- olyan **önhasonló** geometriával rendelkező formák,
- ahol az önhasonlóság **tetszőleges iteráción keresztül** fennáll,
- és a lefedéshez szükséges l élhosszúságú dobozok $N(l)$ száma **nemtriviálisan skálázódik**:

$$N(l) \sim l^{-D}, \quad (2)$$

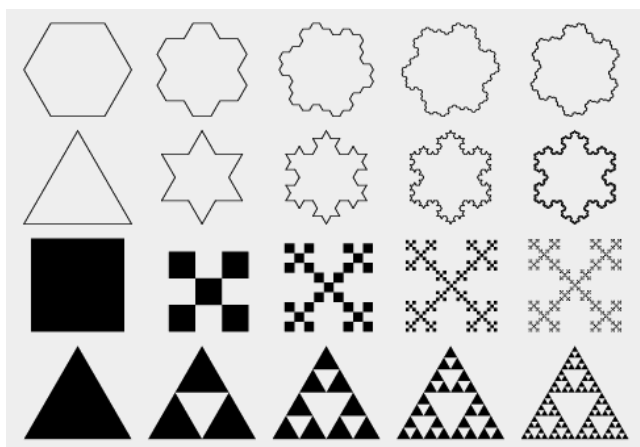
ahol D egy pozitív, nem egész szám, amely az objektum törtdimenziója, fraktáldimenziója.

Az előbbiek alapján a két oldal logaritmusát véve definiálhatjuk a fraktál **box-counting dimenzióját**:

$$D_B = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (3)$$

Ugyanez érvényes akkor is, **ha a fraktál növekvő**, és annak lineáris hosszát L -vel jelöljük:

$$D_B = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}. \quad (4)$$



1. ábra. Példa fraktálokra különböző iterációk után. Lehet látni, hogy változik a térfogat és a felszín aránya.

1.1. Műveletek

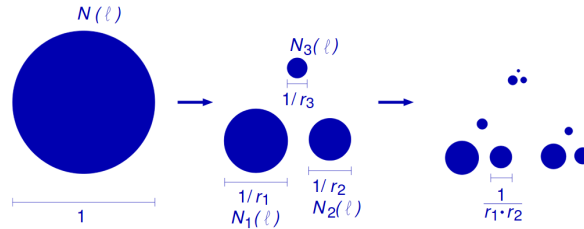
A fraktálokkal, mint matematikai objektumokkal műveleteket is végezhetünk:

- **Projekció:** d dimenziós euklidészi térbe ágyazott D dimenziós fraktált projektálunk egy d_s dimenziós szintér euklidészi altérre:
 - ha $d_s > D$, akkor a projekció dimenzió nem változik, $D_p = D$,
 - ha $d_s < D$, akkor a projekció kitölti a rendelkezésre álló teret, $D_p = d_s$. Tehát $\mathbf{D_p} = \max(\mathbf{D}, \mathbf{d_s})$.
- **Metszet I.** : ha vesszük egy d dimenziós euklidészi térbe ágyazott D dimenziós fraktál és egy $d - m$ dimenziós szintén euklidészi tér metszetét, akkor a metszet dimenziója $\mathbf{D_i} = \mathbf{D} - \mathbf{m}$ lesz.
- **Metszet II.** : két fraktál metszetének dimenzióját a részecskék sűrűségéből tudjuk kiszámolni:
 - egy L lineáris hosszúságú szakaszon az A fraktál részecskéinek sűrűsége $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d}$, B -nek hasonlóképp,
 - mivel a két fraktál részecskéinek eloszlása független egymástól, az együttes sűrűség $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$, az összes részecskét pedig a teljes térre nézzük – $N_{A \cap B}(L) \sim \frac{L^{D_A} L^{D_B}}{L^d}$,
 - tehát a dimenzió leolvasható: $\mathbf{D_{A \cap B}} = \mathbf{D_A} + \mathbf{D_B} - \mathbf{d}$.
- **Unió:** két fraktál uniójának dimenzióját a nagyobbik dimenziójú fraktál fogja megadni, azaz $\mathbf{D_{A \cup B}} = \max(\mathbf{D_A}, \mathbf{D_B})$.
- **Szorzat:** két fraktál szorzatának dimenziója a fraktálok dimenziójának összege, azaz $\mathbf{D_{AB}} = \mathbf{D_A} + \mathbf{D_B}$.

1.2. Típusok

Determinisztikus fraktál Egy fraktál determinisztikus, ha önhasznó rekurzióval generálódik – azaz vagy kicseréljük a részeit önmaga lekcinyított képével vagy önmaga felnagyított képével. Ezekre tökéletes példát mutat a 1. ábra. Például, ha harmadik sorban egységoldalúnak vesszük az első ábrát és a mellette lévőket felskálázzuk úgy, hogy az egyes négyzetek oldalai rendre egység-hosszúak legyenek, akkor egy növekvő fraktált kapunk. Ennek a fraktálnak a lineáris mérete a háromszorosára, kvázi "területe", azaz a lefedéshez szükséges négyzetek száma pedig az ötszörösére nő. Ezek alapján a fraktál dimenziója:

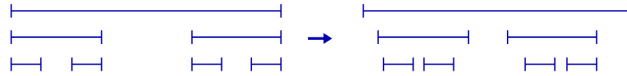
$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(5^k)}{\ln(3^k)} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465 \dots \quad (5)$$



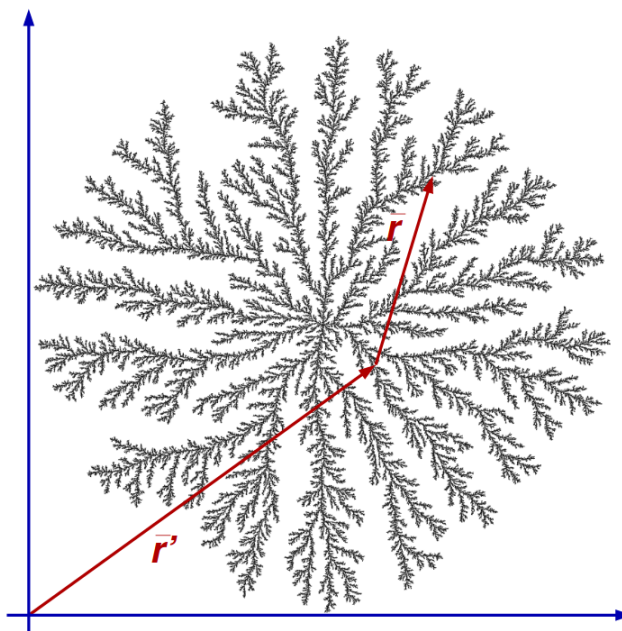
2. ábra. Példa non-uniform fraktálra.

Előfordulhat azonban, hogy nem egyenletes a másolatok nagysága – lásd 2. ábra. Ekkor ha q különböző másolatot készítünk (r_1, r_2, \dots, r_q) , akkor az összes lefedéshez szükséges négyzet az előbbi fraktálokból jön: $N(l) = \sum_{i=1}^q N_i(l)$. Az önhasznóság miatt $N(l) = N_i(l/r_i)$. A fraktál definíciójából jön, hogy $N_i(l) = N(lr_i) \sim (lr_i)^{-D_B}$. Visszahelyettesítve $N(l) = \sum_{i=1}^q N_i(l) = \sum_{i=1}^q (lr_i)^{-D_B} \sim l^{-D_B}$, tehát a dimenzióra egy implicit egyenletet kapunk: $\sum_{i=1}^q r_i^{-D_B} = 1$.

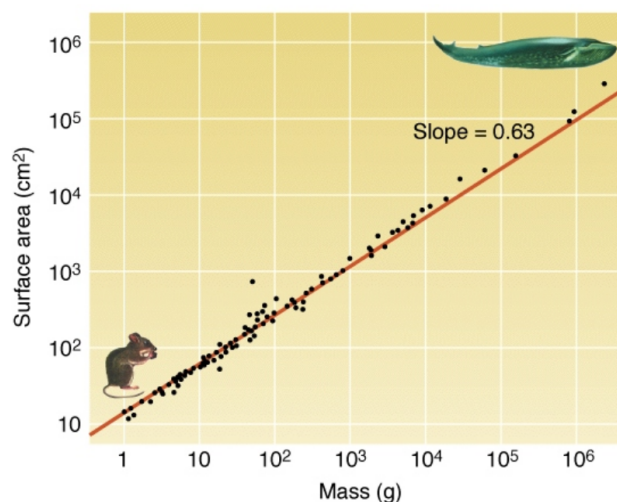
Sztochasztikus fraktálok Hasonlóképp, mint a determinisztikus fraktáloknál, itt is van egy önhasznó rekurzió, mellyel generálódik a fraktál, azonban ekkor bejön továbbá egy random tényező. Ha a random tényező nem befolyásolja a fraktál méretét, csak a struktúráját, akkor a fraktál box-counting dimenziója ugyanaz, mint a determinisztikus esetben – lásd 3. ábra.



3. ábra. Sztochasztikus Cantor halmaz. Bal oldalon determinisztikus, jobb oldalon sztochasztikus formában. Észrevehető, hogy a lefedéshez szükséges négyzetek száma $(N(l))$ nem változik.



4. ábra. Diffúzió-limitált növekedés következtében kialakult random fraktálszerkezet. Ilyen lehet például egy baktériumtelep, vagy elektromos áram elvezetése fában.



5. ábra. Az állatok tömegének és felületének összefüggése log-log skálán.

Random fraktálok A legtöbb, természetben előforduló fraktál ilyen. Ekkor nincsen iterációs szabály, és emiatt a dimenzió kiszámítása is bonyolulttá válhat, ezért célszerűbb a sűrűség-korrelációs függvényt vizsgálni:

$$C(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}'), \quad (6)$$

ahol V a térfogat, a szumma a tér minden pontjára vonatkozik, a $\rho(\vec{r})$ pedig a sűrűségfüggvény, mely $= 1$ ha a \vec{r} pontban van fraktál és $= 0$ egyébként – 4. ábra. A sűrűség-korrelációs függvény

izotróp testek esetében csak a sugártól függ, és amíg hétköznapi objektumokra a lépcsőfüggvény, kristályrácsra pedig diszkrét vonalak, addig fraktáloknál skálázódik:

$$C(r) \sim r^{-\alpha}. \quad (7)$$

A skálázódásra példa lehet **Zipf törvénye**, illetve a biológiában az allometria (élőlények tulajdonságai közötti arány). A skálázódásból fakadóan kiszámítható a fraktálhoz szükséges négyzetek száma:

$$N(L) \sim \int_0^L C(r) d^d r \sim L^{d-\alpha}, \quad (8)$$

melyből leolvasható, hogy $D = d - \alpha$.

2. Természetben előforduló fraktálok

A természetben előforduló fraktálok többsége növekvő fraktál. Ebben a fejezetben erre fogunk példákat nézni.

2.1. Random mozgás

Négyzetrácson történő mozgást nézünk, ahol az egyen irányokba történő elmozdulás valószínűsége ugyanakkora. Ekkor egy dimenzióban az elmozdulásnak i lépés után (x_i) a várható értéke nulla, $\langle x_i \rangle = 0.$, szórása egy, $\sigma(x_i) = 1$. Az pozíció (x) a centrális határeloszlás-tétel következtében egy $\mu = 0$ várhatóértékű és $\sigma = \sqrt{t}$ szórású normális eloszlást fog követni:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi t}} \exp^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9)$$

Amelyből kifolyólag az átlagos elmozdulás az origótól az időnek a gyökével egyenlő:

$$R = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{t}. \quad (10)$$

$d = 2, 3$ dimenzióban feltételezzük, hogy az irányok egymástól függetlenek, így több normális eloszlás összege χ eloszlást fog követni, melyből megkapható, hogy az átlagos távolság arányos:

$$\langle R \rangle = \sqrt{t} \sqrt{\frac{2\Gamma(\frac{d+1}{2})}{d\Gamma(d/2)}} \implies \langle R \rangle \sim \sqrt{t} \quad (11)$$

Hogyan lesz ebből fraktál? Ha minden pontot, ahol a részecskénk járt, kitöltünk, a teljes objektum fraktál-struktúrát fog mutatni, feltéve, hogy $d \geq 3$.

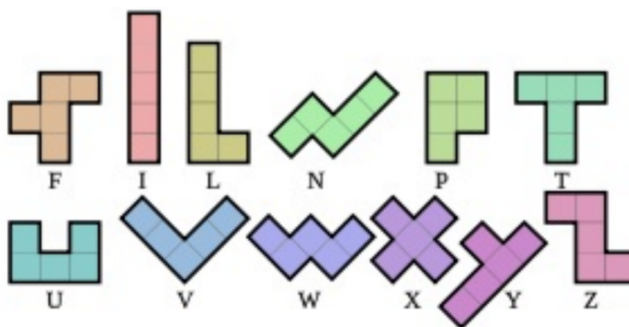
2.2. Aggregátumok, perkoláció

Az aggregátumok olyan objektumok, melyben elemi blokkok kapcsolódnak egymáshoz. A perkoláció pedig az anyagnak akadályokkal teli, porózus közegben történő mozgását jelenti. Jelen esetben mindvégig csak olyan objektumokról beszélünk, melyben az elemi blokkok megkülönböztethetetlenek, teljesen ugyanazok. Négyzetrácson (diszkrét térben) a szomszéd jelentheti az egy egységen belüli lépéseket (azaz 2 dimenzióban 4 szomszéd például) vagy tekinthetjük az átlós helyeket is (2 dimenzióban 9 szomszéd). Valós (folytonos) térben a szomszédoknak az

adott távolságon belüli pontokat értjük, ugyanakkor itt figyelembe vesszük, hogy azok között kölcsönhatás lehet.

Aggregációnál általában egy maghoz kapcsolódnak a blokkok egy sztochasztikus folyamat révén. Ez kétféleképpen valósulhat meg: 1) elindítunk random pozícióból egy részecskét és az csatlakozik valahol a klaszterhez, avagy 2) kiválasztunk egy a klaszternek szomszédos véletlenszerű pozíciót és azt szintén random paraméterek alapján vagy kitöltjük, vagy nem. Pszeudo-random paraméter például a hőmérséklet-szerű paraméterek vagy több más paraméter összessége.

Lokális modell A lokális modellben a helyszín kitöltése csakis önmagától (betöltött-e vagy sem) és a többi szomszédától függhet (diagonális megengedett) – ilyenek például a sejtautomaták és a diffúzió-limitált növekedés alapú baktériumtelepek is. A lokális modellben előfordulhatnak egymástól független klaszterek is, másnéven rács-állatkák (lattice animals) – lásd 6. ábra. A rács-állatkák típusa (szimmetriák megléte (forgatás és/vagy tükrözés)), illetve gyakorisága jellemző az iterációs módszerre – erről bővebben később a 3. fejezetben.



6. ábra. Rács-állatkák két dimenzióban.

Nemlokális modell A nemlokális modellben azonban megengedhetjük a távolhatást, azaz a távoli részecskék közötti kölcsönhatást – erre tökéletes példa az **ábeli homokdomb modell**. Ebben – értelemszerűen – a lokális randomítás helyett a globális lesz jelen.

A perkolációs modell esetében egy véges rács minden pontjához rendelünk valami random számot (0 és 1 között), majd egy p határérték (*valószínűség*) alatt feltöltjük azokat. Ekkor lehet vizsgálni a legnagyobb klaszter méretét, melynek keletkezése egy bizonyos p_c kritikus valószínűségnél következik be. Perkolációra példa a természetben a szivacsban, falban vagy kőben történő folyadékterjedés.

2.3. Diffúzió-limitált növekedés

A diffúzió-limitált növekedés (DLA – diffusion limited aggregation) esetében nem egy random walker van, hanem kontinuum sok. A cél megmutatni, hogy a növekedés nemlokális tér következtében történik. Ekkor a Laplace egyenletet kell megoldanunk időben változó határfeltételek mellett:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C. \quad (12)$$

Ennek modellezésére egy példa: indítunk egy részecskét a távolból, ami random walkkal hozzácsatlakozik a nagy klaszterhez, amennyiben hozzáér, majd a következő részecske. Optimalizálási lehetőségek: egy az adott aggregátumot körülvevő körről indítjuk a részecskét (seed circle), távoli részecskéket elfelejtjük, és újraindítjuk őket a seed circle-ről. 2 dimenzióban kísérletek alapján a fraktáldimenziója ≈ 1.71 . Magasabb dimenziókban átlagtér közelítéssel megadható a fraktáldimenzió: $D = (d^2 + 1) / (d + 1)$.

Ilyen alapon az aggregátumoknak izotrópnak és rácsfüggetlennek kéne lenniük, ezzel szemben anizotrópia és rácsfüggőség a megfigyelhető. Ezen ellentmondás feloldását az $N \rightarrow \infty$ határesetben lehet megtalálni, ugyanis a kísérletekben csak véges méretben és dimenzióban tudunk mérni.

A DLA különböző variációi lehetnek:

- folytonos térben történe random walk,
- be lehet vezetni egy valószínűséget, mellyel a hozzákapszolódás rátáját befolyásolhatjuk,
- véges méretben számíthat a rácsfüggőség \rightarrow háromszögrács, hatszögrács, stb.

3. Sejtautomaták

Az első sejtautomatát Neumann János készítette, mellyel modellezni tudta a biológiai reprodukció folyamatát, amely többek között teljes Turing machine-ként is funkcionált. A leghíresebb sejtautomata minden bizonnyal **Conway életjátéka**. A sejtautomaták általános jellemzői:

- az x, y, z folytonos tér felosztódik cellákra, melyek általában valamilyen rácson helyezkednek el,
- egy sejt állapotát jelző funkciók diszkrétizálódnak,
- a t idő is diszkrétizálódik,
- egy sejt dinamikáját leíró függvényt a szomszédos cellák határozzák meg (lokális szabályok),
- a frissítések történhetnek szimultán vagy szinkronizálva.

A sejtautomatákat könnyen lehet párhuzamosítani, ugyanis a cellák változóinak a számai végesek, így könnyen lehet integereket használni, illetve a cellák lokális szabályai miatt az egész teret fel lehet osztani kisebb részekre.

3.1. Egydimenziós eset

Egydimenziós esetben egy sorba rendezett cellákról beszélhetünk, melyek 0 vagy 1 értéket tudnak felvenni (*boolean cellular automaton*). Ekkor egy cella szomszédainak tekintjük az ahhoz egy-egy oldalról kapcsolódó cellákat. Mivel a cella következő állapota függ a sajátjától, illetve a szomszédjaitól, $2 \times 2 \times 2 = 8$, azaz nyolcféle helyzet alakulhat ki. Ekkor minden egyes helyzetre meg tudjuk szabni, hogy a következő időlépésben milyen állapotban legyen a központi sejtünk. Erre példát a 7. ábra szolgáltat.

t:	111	110	101	100	011	010	001	000
t + 1:	0	1	0	1	1	0	1	0

7. ábra. Egydimenziós sejtautomata egyik féle szabálya. A felső sor megdja a lehetséges kialakuló helyzeteket, az alsó sorban pedig megszabhatjuk, milyen állapotban legyen a központi cellánk a következő lépésben.

Összességében tehát $2^8 = 256$ féle klünböző szabályt tudunk megalkotni. A 7. ábrán látott szabályt a 90-esnek nevezik (rule 90), ugyanis a kialakuló állapotokat binárisnak tekintve (01011010), ha átírjuk azt decimálissá, 90-et kapunk ($Bin01011010 = Hex90$).

Wolfram tanulmányozta ezt a fajta sejtautomatát, és a hosszútávú viselkedésüket tekintve az alábbi négy csoportra tudta osztani a szabályokat:

- **Határponi viselkedés (limit point behaviour):** sejtek értékei egy meghatározott értékhez tartanak, mely a kezdeti állapottól független,
- **Határciklus (limit cycle behaviour):** stabil (időben) periodikus mintázat jön létre,
- **Kaotikus viselkedés:** a sejt állapotának változása nem követ semmi struktúrát, kaotikus viselkedés jön létre,
- **Komplex viselkedés:** komplex és lokális mozgó mintázatok jönnek létre.

3.2. Conway életjátéka

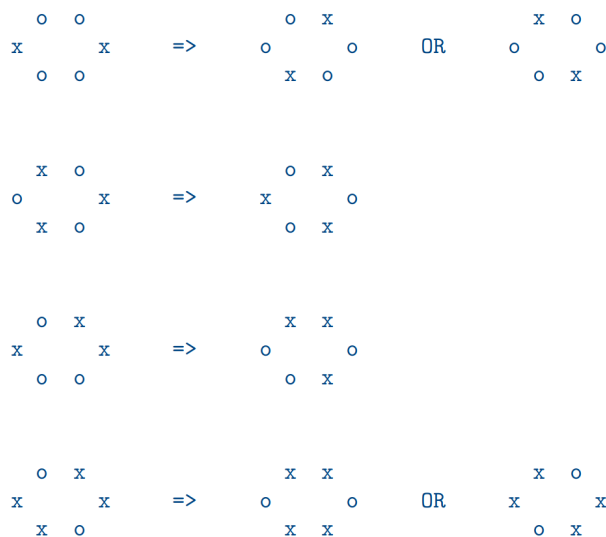
1970-ben John Conway matematikus alkotta meg a sejtautomaták azon csoportját, melyben egy 2 dimenziós négyzetrács van, a sejt bináris (élő - 0, halott - 1), és a sejt következő állapotát csak az életben lévő szomszédok száma határozza meg. Továbbá, *Moore szomszédokat* veszünk, azaz megengedjük a diagonális átmenetet is, tehát egy sejtnek 8 szomszédja lesz – az eredeti Neumann-féle sejtautomaták *Neumann szomszédokat* használtak, ahol a diagonál nem volt megengedett, tehát 2 dimenzióban is csak 2 szomszédja volt egy sejtnek.

Ekkor szintén lehet definiálni szabályokat, és értelmezni egy bináris kódot: például a 000011100 kódot úgy kell értelmezni, hogy alárajuk az életben lévő szomszádok számát (012345678). A kód alapján, élő lesz (marad) a sejt, ha az életben lévő szomszédjainak a száma 4, 5 vagy 6, minden más esetben halott. Értelemszerűen, a sejt saját állapotától is függhet a jövője, amellyel a szabályokat Ezzel az élet klünöző modelljeit tudjuk rekonstruálni.

3.3. Gáz szimulálása rácson

Egy nagyon effektív modellt publikált U. Frisch et al. 1986-ban a kétdimenziós Navier-Stokes egyenletek alapján. Ennek a modellnek a főbb jellemzői:

- **Hatszögrács:** A hexagonális szimmetria elengedhetetlen ahhoz, hogy elég szabadsági fok legyen a forgásszimmetriának, így biztosítva a perdületmegmaradást.
- **Sűrűség:** Minden cellának maximum 6 db $m = 1$ tömegű részecskéje lehet, így a sűrűség 7 különböző értéket vehet fel.
- **Szabad áramlás (Euler):** a szabad áramlás létrejöttét az alábbi szabályok segítik elő:
 - Sebesség: minden részecskének 6 lehetséges irányú sebessége lehet, azonban egy időlépés alatt csak egy cellát mozdulhat el.
 - Sebesség egy cellán belül: az egy cellán belül lévő részecskéknek csakis különböző irányú sebességei lehetnek – két részecske nem akarhat ugyanoda menni.
- **Viszkozitás (Navier-Stokes):** A viszkozitás létrejöttét az ütközési szabályok biztosítják: ha egy sejtre 2, 3 vagy 4 részecske pályázik, azok úgy változtatják majd a sebességüket, hogy az összimpulzus megmaradjon. Ilyen ütközésekre példa a 8. ábra.



8. ábra. Kétdimenziós hatszögrácson történő ütközések lehetséges kimenetelei. Mindenhol az X jelöli a részecskét, és a közepe felé haladnának. Az első és negyedik esetben a két választás egyenértékű. Ha az irányt véletlenszerűen választjuk ki, a rendszer sztochasztikussá válhat. Akkor tudjuk megtartani a rendszert determinisztikusnak, ha nem választunk kitüntetett irányt, mert így nem törik meg a királis szimmetria sem.

Források

Fraktálokat Palla Gergely előadásjegyzete alapján: <http://pallag.web.elte.hu/fractals/>, a sejtautomatákat pedig Csabai István jegyzete alapján: csabai.web.elte.hu/http/szamszim/lecture7/topic6-lec1.pdf készítettem.