<线性代数> OURSTORYBEGINS

第一章 行列式

一、

1、全排列

n个不同元素的所有排列的种数，用P_n表示.

$P_n = n!$

2、逆序数

① 如 32514

$t = 0+1+0+3+1=5$ （看每个数前方比它大的个数）

② 逆序数 = $\begin{cases} \text{奇} & \text{奇排列} \\ \text{偶} & \text{偶排列} \end{cases}$

3、对换

一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性

二、

1、三阶行列式定义（可扩展）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

t：$p_1p_2p_3$逆序数

三、行列式的性质

1、$|A| = |A^T|$

2、对换行列式的两行(列)，行列式变号.

（如果有两行(列)完全相同，此行列式为0）

3、某一行的所有元素 $\times k$，等于 k 乘此行列式

（某行公因子可提到行列式外）

4、如果有两行成比例，行列式为0

5、某一行(列)为两数之和，可拆成两行列式相加

6、某一行(列) $\times k$ 倍 + 到另一行(列)，行列式不变 ✓

（$r_j + kr_i$; $c_j + kc_i$）

一、求x的最高次数或x的各次幂系数方法：

1. ① 不同行不同列元素的乘积
   ② 逆序数

2. 行列式展开公式

3. 行列式性质

〈二、化简行列式的方法〉

1. 逐行相加法
（第一行加到第二行，后第二行加到第三行）
2. 某行的k倍加到其余各行
3. 每行都加到同一行
4. 递推法
5. 公式法 范 / 拉 / 分块

---

6. 数学归纳法（证明）：
① 验证 $n=1$ / $n=2$ 成立
② 设 $n<k$ 时成立
③ 当 $n=k$ 时，证明成立.

四、行列式按行(列)展开

1、代数余子式

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

2、$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad i=1,2,\cdots n.$

任一行(列)与其对应的代数余子式乘积之和

3、某一行(列)与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和为0.

五、n个常用公式(求行列式)

1、对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

2、上(下)三角形行列式

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3、副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

4、副上(下)三角形行列式

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

5、范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

如 $n=4$，$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

证行列式=0

① 直接算

② 构造齐次线性方程组 → 有非零解

（可从题设中找到）

〈三〉. 代数余子式求和方法

1. 用第 i 行 × 第 j 行代数余子式乘积之和为 0

2、构造新行列式 $|B|$，求 $|B|$ 的代数余子式

e.g. $|A|=\begin{vmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\1&5&9\end{vmatrix}$

$|B|=\begin{vmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}=-11$

$A_{31}+A_{32}+A_{33}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}=|B|$

（复杂时构造方程组）

3. 通过 $A^*=|A|A^{-1}$ 求出 A^* 后进行运算

〈四〉. $|A+B|$ 常用处理方法

$|A+B|=|EA+BE|=|BB^{-1}A+BA^{-1}A|$

$=|B(B^{-1}+A^{-1})A|$

$=|B|\,|B^{-1}+A^{-1}|\,|A|$

6、拉普拉斯展开式

A：m阶矩阵　　B：n阶矩阵

① $\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$

② $\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

六、n阶方阵构成的行列式（A为n阶矩阵）

1、$|A^T| = |A|$

2、$|kA| = k^n|A|$ ✓

3、$|AB| = |A||B|$　　$|A^2| = |A|^2$

4、$|A^*| = |A|^{n-1}$

5、$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

6、若$A \sim B$，$|A| = |B|$

7、$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

注：$|A+B|$、$|A-B|$ 不可拆开

$|kA| \neq k|A|$

第二章 矩阵及其运算

一、矩阵

1、$A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$，(a_{ij})

2、$A=B$（同型矩阵，且对应元素相等）

3、特殊矩阵：

①、单位阵

$$E=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

②、对角阵

$$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$$

~~为~~ $$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

③、数量阵

$$kE$$

④、上(下)三角阵

$i>j$（$i<j$）时，$a_{ij}=0$

⑤、对称阵

$A^T=A$　即 $a_{ij}=a_{ji}$

⑥、反对称阵

$A^T=-A$　即 $a_{ij}=-a_{ji}$　（当 $i=j$，$a=0$）

⑦、正交阵

$A^TA=AA^T=E$　即 $A^T=A^{-1}$

⑧、初等矩阵（一次初等变换）

⑨、伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

△ 伴随矩阵A^*与A的秩的关系 （A为方阵n阶）

$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \text{（满秩）} \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$$

$\Downarrow$ 0

1、对角阵性质：

① $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$

2、α，β为n维列向量

$\alpha\beta^T$、$\beta\alpha^T$：矩阵

$\alpha^T\beta$，$\beta^T\alpha$：数 （称$\alpha\beta^T$的迹）

$\Downarrow$

等于矩阵对角元素之和

〈3、求方阵的幂〉

①、$A=\alpha\beta^T$ （$R(A)=1$）时

$A^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=l\alpha\beta^T=lA$

△ $A^n=l^{n-1}A$ （$l=\beta^T\alpha=\alpha^T\beta$）

②、规律：

$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3\cdots=0$

$B=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^4\cdots=0$

[李艳国]

二、矩阵运算

1、 $A \pm B$ (同型)

即每一项都相加减

2、 kA

即每一项都 $\times k$

3、乘法

① 前提 $A_{m\times s}$. $B_{s\times n}$

即A的行与B的列相同

②、 $A \times B = C_{m\times n}$

A第i行 × B第j列 = C第i行第j列元素

③、不满足 $AB \neq BA$ (交换律)

$EA = AE = A$

不满足消去律

$(AB)^k \neq A^k B^k$

若 $A\neq 0$, $B\neq 0$, 可以 $AB=0$.

4、转置

①、$(A^T)^T = A$

②、$(A+B)^T = A^T + B^T$

③、$(\lambda A)^T = \lambda A^T$

④、$(AB)^T = B^T A^T$

5、伴随矩阵

☆ $AA^* = A^*A = |A|E$

$(kA)^* = k^{n-1} A^*$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A$ $(|A| \neq 0)$

$(A^*)^T = (A^T)^*$

$|A^*| = |A|^{n-1}$

$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ $(n \geq 2)$ ✓

$r(A) + r(A^*) \leq n$. (若 $AA^* = 0$.)

1、二阶矩阵求逆： 交换

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2、~~对~~对角阵求逆：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \lambda_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

3、 $A=0$ 充要条件 $A^TA=0$

4、 线性方程组四种表示：

①. $x_1a_1+x_2a_2+\cdots x_na_n=b$

(a_1, $a_2\cdots a_n$ 为列向量)

②.

$$(a_1,a_2,\cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=b$$

③.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}x_2+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}x_n=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

三、逆矩阵

1、 $AB=BA=E$

即 $B=A^{-1}$ 且唯一

2、若 A 可逆，则 $|A|\neq 0$

若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆

3、 A 可逆的充要条件：

①、存在 B， $AB=E$

②、 $|A|\neq 0$ $\begin{cases} r(A)=n \\ A\text{的行(列)向量线性无关} \\ A\text{为非奇异矩阵} \end{cases}$

③、 $Ax=0$ 只有零解

④、 $Ax=b$ 有唯一解

⑤、 A 的特征值全不为 0

⑥、存在初等矩阵 $A=P_1P_2\cdots P_S$

$A\sim E$

4、运算规律

①、 $(A^{-1})^{-1}=A$

②、 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

③、 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

④、 $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

⑤、 $(A^{2})^{-1}=(A^{-1})^{2}$

⑥、 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

5、求 A^{-1} 方法

①、公式法： $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$

②、初等变换法.

$(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1})$

$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_S$ （P 初等矩阵）

AA^{-1} $\begin{cases} P_1P_2\cdots P_SA=E \\ P_1P_2\cdots P_SE=A^{-1} \end{cases}$

$A^{-1}E$

一.见后（用入）.

③. 处理方阵幂一般思路

(1) 若 $r(A)=1$, 用 $A^n=l^{n-1}A$

若能求出 l 的前提 （任意两行(列)成比例）

(2) 先算 A^2, A^3 观察是否可以为 0

(3) 把 A 拆为 $A=E+B$ （上、下三角形）

分别对 E、B 处理

(4) 将矩阵分块，利用 $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$

分别对 B、C 处理

(5). 如何算 $(E+B)^n$：

用二项式定理分别 $B^0, B^1, B^2 \cdots$

(原则：可先尝试低次幂)

<二. 计算伴随矩阵方法> $(A^*A=|A|E)$

1. 定义法

注意"+/-"，注意顺序

2. $A^*=|A|A^{-1}$

分别计算 $|A|, A^{-1}$

1. A、B 等价，A、B 同型 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

④. A^n 求法：

$P^{-1}AP=\Lambda$

$P^{-1}A^nP=\Lambda^n$

求 P, P^{-1}. $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

③、若已知 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$

④、若可分块，则

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$ 交换

四、克拉默法则

（用于求非齐次线性方程组）

1、若 $|A|\neq 0$，则有唯一解

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

2、逆矩阵法：

$$Ax=b \qquad A_{nn},\ x_{n\times 1},\ b_{n\times 1}$$

$$\Downarrow$$

$$x=\cancel{b}\,A^{-1}b \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

五、分块矩阵

1、$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} B^{n} & 0 \\ 0 & C^{n} \end{pmatrix}$$

2、$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \cdots$$

3、$AB=C$

A分块后列数＝B分块后行数

4、$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} A^{T} & \cancel{A^{T}}\, C^{T} \\ B^{T} & D^{T} \end{pmatrix}$$

即 先将元素转置，再进一步转置

第3章 矩阵初等变换

一、1、初等变换

①、对换两行 ($r_i \leftrightarrow r_j$)

②、以数k乘某一行 ($r_i \times k$)

③、把某一行k倍加到另一行 ($r_i + k r_j$)

2、

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} B$$

$$\Downarrow$$

$A \sim B$ (A、B等价)

3、等价性质：

①、$A \sim A$

②、若 $A \sim B$，则 $B \sim A$

③、若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$

二、阶梯形矩阵

1、定义：① 非零行在零行上面

②、非零行的首非零元所在列在上行的首非零元所在列的右面

2、行最简形矩阵

①首非零元为1

②、首非零元所在列其它元为0

3、等价标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

r：非零行行数

三、初等矩阵

E经一次初等变换得到

1 ① 倍乘

$$E_2(k)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

② 互换

$$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

③ 倍加

$$E_{31}(k)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}$$

2. $A\sim B$ 的充要条件：

存在可逆矩阵 $P、Q$ 、 $\begin{cases}PA=B\\AQ=B\\PAQ=B\end{cases}$

$P_1P_2\cdots P_s$

---

3. ① $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$ "初等矩阵的逆"

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

② $E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k})$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

③ $$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{pmatrix}$$

$E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$

4. ① P 初等矩阵

PA ：对A一次初等行变换

AP ：对A一次初等列变换

② 方阵A可逆充要条件：

存在有限个初等矩阵：$A=P_1P_2\cdots P_l$

（初等矩阵可逆）

即 $A\sim E$ $\left\{\begin{array}{l}\text{因为 } P_1P_2\cdots P_l A=E \\ A\text{经初等变换到}E\end{array}\right.$

四、矩阵的秩

（一）1. 定义：r阶子式$\neq 0$

$r+1$阶子式$=0$

则r阶子式为最高阶非零子式

则r为矩阵的秩

2. 经初等变换矩阵的秩不变 即$A\sim B$，则$r(A)=r(B)$

3. 若A可逆，则 $r(AB)=r(B)$

$r(BA)=r(B)$

4. A为n阶矩阵，$r(A)=n \Longleftrightarrow |A|\neq 0 \Longleftrightarrow A$可逆

$r(A)<n \Longleftrightarrow |A|=0 \Longleftrightarrow A$不可逆.

5. $r(A)=r(A^T)$

$r(A^TA)=r(A)$

6. $r(kA)=r(A)$

7. $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

8. 若A为$m\times n$，B为$n\times s$，$AB=0$

则 $r(A)+r(B)\leq n$

9. $r(AB)\leq \min(r(A), r(B))$ 10. $r(A)=0$，$A=0$

$r(A)\leq \min(m,n)$ "$A_{m\times n}$"

（二）A求秩方法

1. 按定义求：找不为0的最大的r阶子式

2、 A作初等变换 ⟶ 得阶梯形矩阵

找非零行 即为秩

(三) 1、若P、Q可逆

$R(PAQ)=R(A)$

2、$\max\{R(A), R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$

3、满秩矩阵：

方阵A的秩 = 阶数

即 $|A|\neq 0$

若 $AB=0$，A满秩，则 $B=0$ “$\underbrace{r(A)}_{n}+\underbrace{r(B)}_{0}\le n$”

四五、等价（两组）

1、$|A|=0$ 方阵

奇异矩阵 方阵

A不可逆

A为系数矩阵时，$Ax=0$ 有非零解，$r(A)<n$

A的行（列）向量线性相关

2、$|A|\neq 0$ 方阵

非奇异矩阵 方阵

A可逆

A的行（列）向量线性无关

（若A为方阵） $r(A)=n$

$Ax=0$ 只有零解

一、方法求 $AX=B$（一般B不为b时）

①若求 x，可 $x=A^{-1}B$

$(A\,|\,E) \longrightarrow (E\,|\,A^{-1})$

②. $A^{-1}Ax=A^{-1}B$

$\begin{cases} A \to E \\ B \to A^{-1}B = x \end{cases}$

$(A\,|\,B) \longrightarrow (E\,|\,x)$

二、证线性相关/无关方法

1、定义法

$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3\cdots=0$

判 k_1,k_2,k_3 是否全为0

2、用秩

e.g. $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(a_1,a_2,a_3)\,C$

判C是否可逆 ∵ $|C|\neq 0$ 时，C可逆

则 $r(A)=r(B)$

判 r 是否小于向量个数

3. n维 n个向量 $a_1,a_2\cdots a_n$ 线性无关；

则 $|a_1,a_2\cdots a_n|\neq 0$

六、第四章 向量

一、向量组概念

1、n维向量：n个有次序的数 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 组成的数组。

一般默认为列向量，则a^T表示行向量

2、若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合叫做向量组。

$A=(a_1, a_2, a_3 \cdots a_m)$　$n \times m$

维数　个数

$B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$　$m \times n$

二、向量运算

1、加法　$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2 \cdots, a_n+b_n)^T$

2、数乘　$ka=(ka_1, ka_2 \cdots ka_n)^T$

3、内积　$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a^T\beta=\beta^T a$

若$(\alpha,\beta)=0$，则称α与β正交

4、$(a,a)=a^Ta=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$\sqrt{a_1^2+\cdots a_n^2}$ 为a的长度

三、线性组合

1、向量b能由向量组A：$a_1, a_2 \cdots a_m$线性表示的充要条件是：

矩阵$A=(a_1, a_2 \cdots a_m)$的秩等于矩阵$B=(a_1, a_2, \cdots a_m, b)$的秩。

2、若向量组A与向量组B相互线性表示，则称A与B等价

3、向量组B能由向量组A线性表示的充要条件：

矩阵$A=(a_1, a_2 \cdots a_m)$的秩等于矩阵$(A,B)=(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_l)$的秩，即　$r(A)=r(A,B)$

4、向量组A等价于B的充要条件为

$R(A)=R(B)=R(A,B)$ ☆

八、$AX=0$ 有非0解

A：线性相关 $X\neq0$ $|A|=0$

A：线性无关 $X=0$ $|A|\neq0$

只有0解

e.g. $AKX=0$

若A线性无关，则 $KX=0$

若 $|K|\neq0$，则K线性无关，$X=0$

九、判线性相关的简单方法

①、若只有一个向量，则必为0向量

②、若只有二个向量，则对应分量成比例

③、若含0、相等、相等向量必相关

5、若向量组B：$b_1, b_2 \cdots b_l$ 可由向量组A：$a_1, a_2 \cdots a_m$ 线性表示，则：

$$R(b_1, b_2 \cdots b_l) \leq R(a_1, a_2 \cdots a_m) \quad (R(B) \leq R(A))$$

推论：向组B由A表示：

$$B = AK \rightarrow AX = B \text{ 有解}$$

6、$A_{n\times m}X = E_n$ 有解的充要条件

$R(A) = n$

或 $AK_{m\times n} = E_n$ 的充分必要条件：

$R(A) = n$

二、线性相关性

1、定义：向量组A：$a_1, a_2 \cdots a_m$

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0$$

若 $k_1, k_2 \cdots k_m$ 不全为0，则 A为线性相关

2、向量组A：$a_1, a_2 \cdots a_m$ 线性相关的充要条件：

$A = (a_1, a_2 \cdots a_m)$ 的秩小于个数 m

线性无关：$R(A) = m$

3、若向量组 A：$a_1, \cdots a_m$ 线性相关，则向量组 B：$a_1, \cdots a_m, a_{m+1}$ 也线性相关

反之，若B线性无关，则A线性无关

4、m个n维向量组成向量组，当维数n小于个数m时一定线性相关（即 n+1个n维 线性相关）

如：4个3维必相关

5、若 A：$a_1, a_2 \cdots a_m$ 线性~~相关~~无关，B：$a_1, \cdots a_m, b$ 线性相关

则 向量b必由向组A线性表示，而且唯一

~~三、向量组的秩~~

6、向量组性相关：则至少有一个向量 a_i 可以由其余的向量线性表示

4. 如何证线性相关/线性无关

法①：定义法：

设 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots k_m a_m = 0$

判 $k_1, k_2 \cdots k_m$ 是否全为0

法② 用秩

判向量组的秩是否小于向量个数

(各种求秩的公式)

法③ $AX=0$

若 $X=0$，只有非零解 → 线性无关

注：善于运用 行列式是否为0：$|A|\neq 0$，则线性无关

拆为两个矩阵相乘

$(a_1, a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ 形式

⑤ 若 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (a_1, a_2, a_3)\underset{线性无关}{}C$

$\begin{cases} |C|\neq 0, & \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 线性无关} \\ |C| = 0, & \text{线性相关} \end{cases}$

或观察法

7. A: $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$　　B: $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_t$

若 A可由B表示，且 $S>t$，
则 A必线性相关　　（多的被少的表示）

8、 n个n维向量构成相量组A（方阵）

$r(A)<n$，$|A|=0$ } 线性相关

$r(A)=n$，$|A|\neq 0$ } 线性无关

三、向量组的秩

1、最大无关组：
A中：存在 { r个向量线性无关 A_0；r+1个线性相关（A中任一向量可由 A_0 线性表示）
则r个相量组成相量组为最大无关组

（其中r为向量组A的秩）

2、秩的定理

①、A可由B线性表示
$r(A) \leq r(B)$

② $r(A)=$ A的行秩 $=$ A的列秩

③ A与A的极大无关组等价（因秩相等）X
（若秩相等，则A，B等价）X 不一定等价

④、

四、向量空间

1、定义：V为n维向量的集合，（且V非空），集合V对于向量的加法及数乘两种运算封闭。

{ 若 $a\in V$，$b\in V$，则 $a+b\in V$；若 $a\in V$，$\lambda\in R$，则 $\lambda a\in V$

2、子空间

若 $V_1 \subseteq V_2$，则 V_1 为 V_2 的子空间。

〈如何找最大无关组：〉

1、列摆行变换

化为行阶梯形矩阵

2、每个台阶最左边一列组成最大无关组

（注意对应列原向量）

3. 若用最大无关组表示其它向量时；

将向量组化为最简形矩阵

〈二、正交矩阵〉

1、A为n阶矩阵，$AA^T=A^TA=E$

则A为正交矩阵

2、A为正交矩阵：

$$\begin{cases} A^T=A^{-1} \\ A\text{的列(行)向量组是正交规范向量组} \\ |A|=1 \;/\; |A|=-1 \end{cases}$$

3. 定义① V为向量空间，如果r个向量 $a_1, a_2 \cdots a_r \in V$，
若满足：①. $a_1, a_2 \cdots a_r$ 线性无关
② V中任一向量都可由 $a_1, a_2 \cdots a_r$ 线性表示
则向量组 $a_1, a_2 \cdots a_r$ 为向量空间V的基
r为V的维数，V为r维向量空间.

4. 定义②. V中取一个基 $a_1, a_2 \cdots a_r$，那么V中任一向量x可唯一表示为

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r$ 为向量x在基 $a_1, a_2 \cdots a_r$ 中的坐标
（$e_1, e_2 \cdots e_n$ 为 R^n 的自然基）

5. 基变换公式

① $(a_1, a_2 \cdots a_n) \times \overset{X}{\square} = (b_1, b_2 \cdots, b_n)$

基Ⅰ $(a_1, a_2 \cdots a_n) \longrightarrow$ 基Ⅱ $(b_1, b_2 \cdots b_n)$

（即用基Ⅰ表示基Ⅱ）

② 其中 $A = (a_1, a_2 \cdots a_n)$
$B = (b_1, b_2 \cdots b_n)$

$$AX = B$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$\Downarrow$$
$$EX = A^{-1}B \quad (X = A^{-1}B)$$

X称为过渡矩阵

③、如何算X

$\begin{cases} A \to E \\ B \to A^{-1}B\,(X) \end{cases}$ 则 $(A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \mid X)$

6、坐标变换公式

已知向量在基I中的坐标，求该向量在基II中的坐标

e.g. $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{B^{-1}A}_{X^{-1}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = X^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

7、 X 必可逆（同一向量组不同基）

8、 向量、与 向量在~~某~~基下的坐标 不同

不同基下坐标不同

向量在 自然基下 与 向量 在数值上相同

第五章 线性方程组

一、三种形式

1、一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

2、向量形式

$$a_1x_1 + a_2x_2 \cdots + a_nx_n = 0$$

3、矩阵形式

$$A_{m\times n}x = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

二、齐次线性方程组 ($Ax=0$)

1、性质① 若$x=\xi_1$，$x=\xi_2$为向量组方程的解，
　　则$x=\xi_1+\xi_2$也是向量方程的解

2、性质② 若$x=\xi_1$为向量方程的解，k为实数.
　　则$x=k\xi_1$也是向量方程的解

3、定义：①基础解系：
　　齐次线性方程组的解集的最大无关组
　　$S_0: \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_t$

②、通解：
　　最大无关组S_0的任何线性组合
　　$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t$

$Ax=0$ 有非零解

$\Downarrow$

$r(A)<n \quad (|A|=0)$

4、若 $A_{m\times n}$ → 秩 $R(A)=r$

则 n元 $AX=0$ 的解集 S 的秩 $R(S)=n-r$

(即基础解系含 $n-r$ 个向量)

5、求基础解系，通解的步骤

①、系数矩阵A 初等行变换

↓

行最简形矩阵 得 $r(A)$

② $x_1, x_2 \cdots x_r$ 真未知量

$x_{r+1}, x_{r+2} \cdots x_n$ 自由未知量

用自由未知量表示真未知量 得新方程组.

③、得自由未知量 $x_{r+1}, \cdots x_n$ 分别赋 $n-r$ 组值

$(1, 0 \cdots)^T$, $(0, 1, 0 \cdots)^T$ $\cdots$ $(0, 0 \cdots 1)^T$

代入方程，得对应真未知量

得 $n-r$ 个解 → 得通解

6、推论① n元齐次线性方程组

$r(A)=n$ 唯一零解

系数矩阵的秩 元数 (列向量线性无关)

$r(A)=r<n$ 无数多解

推论② n元 有非零解的充要条件 (A为方阵时).

系数行列式为0

三、非齐次线性方程组

$AX=b$

1、性质① 设 $x=\eta_1$ 及 $x=\eta_2$ 为方程组的解

则 $x=\eta_1-\eta_2$ 为对应齐次线性方程组

$AX=0$ 的解

性质② $x=\eta$ 是方程组的解 $AX=b$

$x=\xi$ 是 $AX=0$ 的解

一、知 $AX=0$ 基础解系 反求 A

① 取 A 行向量 $a_1, a_2 \cdots a_m$

② 已知基础解系 $\beta=(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r})$

③ 则 $a_i \xi_j^T=0$

$\downarrow$

$A\beta=0 \quad (AX=0)$

$\downarrow$ 转置

④ $\beta^T A^T=0$ 即 β^T 作系数矩阵

A^T 作未知量

$\downarrow$

可通过系数矩阵求得未知量

$A(\xi_1, \xi_2 \cdots)=0$

即 基础解系(列向量) $\xrightarrow{T}$ 行向量组成新系数矩阵

二、$AX=b$ (x 求法)

1、由克拉默法则求解

(A 为 3 阶方阵时) ★

2、① $|A| \neq 0$

$r(A)=3$

有唯一解

② $|A|=0$

判 $r(A|b) \overset{?}{=} r(A)$

则 $x=\xi+\eta$ 仍是方程 $Ax=b$ 的解

2、

非齐次方程的通解 =

对应齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解 η^*

即：

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*=\eta$$

3、 $Ax=b$ 通解的求法

① 增广矩阵 (A,b) 作初等行变换

$\downarrow$

阶梯形矩阵

② 求齐次线性方程组的基础解系

③ 求特解 η^*：

取自由未知量为0，代入得真未知量

④ 则得通解

4、 $Ax=b$ 的有解条件

① $Ax=b$ 无解 （b 不能由 A 的列向量线性表示）

$r(A)\neq r(A,b)$

② $Ax=b$ 有解

$r(A)=r(A,b)$

③ 若 $r(A)=r(A,b)=n$ 唯一解

$r(A)=\cancel{r(A,b)<n}$ ~~无穷多解~~

一、证 $|A|=0$

① 直接证

②、$Ax=0$

方程有非零解

二、① $Ax=0$　$A^n x=0$　$A^TAx=0$

同解方程组

②. $a=(a_1, a_2 \cdots a_n)^T$

$a^Ta = a_1^2+a_2^2 \cdots a_n^2$

则：若 $a^Ta=0$

$\Updownarrow$ 充要条件

$a=0$

〈第五章 特征值、特征向量、相似矩阵〉

一、特征值与特征向量

1、定义：

A为n阶矩阵，x为n维非零列向量

$$Ax=\lambda x$$

则 λ为A的特征值，
x为A的对应于特征值λ的特征向量。

2、可写为：

$$(A-\lambda E)x=0$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

称为A的特征方程（λ为未知数）

$|A-\lambda E|$ 称为A的特征多项式

性质3、

① $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ → （λ全不为0，A可逆）

② $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}$

4. ①、若λ为A的特征值

λ^k为A^k的特征值
$\varphi(\lambda)$为$\varphi(A)$的特征值

其中：$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$

$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$

5、 A的两个不同特征值 λ_1,λ_2

λ_1 特征向量：$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_s$
λ_2 特征向量：$\eta_1,\eta_2\cdots\eta_t$

则 $\xi_1,\xi_2\cdots\xi_s,\eta_1,\eta_2\cdots\eta_t$ 线性无关

<求3阶矩阵(行列式)=0的λ
即求3阶特征方程(λ)方法.>

e.g. ① 整理为 $-\lambda^3-3\lambda^2+24\lambda-28=0$

② 进行试根:

求28的公因子: ±1, ±2, ±4, ±7, ±28……

分别代入, 试哪个λ成立

③. 得 $\lambda=2$ 是一个根.

故提出 $(\lambda-2)$, 用长除法得 $\lambda^2+5\lambda-14$

即 $-(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14)=-(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2)$

④ 得结果

$\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-7$

<计算 $|A-\lambda E|=0$ 方法>

一般为3阶行列式

1. 应设法凑 $k(\lambda-a)$ 的形式
2. 同时 $\lambda-a$ 的行(列)应有0元素
3. 后 消 $k(\lambda-a)=0$
4. 用代数余子式求

6、A的m个特征值：$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$
$p_1, p_2 \cdots p_m$ 依次是与之对应的特征向量
若 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ 各不相等，则 $p_1, p_2 \cdots p_m$ 线性无关

二、相似矩阵

1. 定义：设A、B为n阶矩阵，若有可逆矩阵P

$$P^{-1}AP=B$$

① 称B是A的相似矩阵 / A与B相似
② $P^{-1}AP$：称对A进行相似变换
③ P：称把A变成B的相似变换矩阵
④ 记作 $A \sim B$

2、定理① 若n阶矩阵A与B相似，则A与B的特征多项式相同，从而A与B特征值也相同（$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$）

② 若n阶矩阵A与对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似（$A \sim \Lambda$），则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 为A的n个特征值

3、矩阵A对角化

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

①、$A \sim \Lambda$ 充要条件是：A有n个线性无关的特征向量
（A能对角化）

②、若n阶矩阵A的n个特征值互不相等，则A与对角矩阵相似
（$A \sim \Lambda$）

三、求特征值、特征向量的方法

1. $|A-\lambda E|=0$
求得λ的值（n维则n个λ）

2、$(A-\lambda E)x=0$
分别代入λ得系数矩阵，求出x（除去0向量）
（基础解系）

1、 求 A^k：

利用 $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

$\Downarrow$ (求 P)

$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$

2、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = 0 \quad (n \geq 2)$

3、 矩阵满足什么条件

$\Downarrow$

特征值满足什么条件

$\Downarrow$

特征值范围

4、 $A \sim B \rightarrow A、B$ 特征值相同

反之不成立

5、 A：n 阶矩阵

$r(A)=1$ ；则 $\lambda=0$ 为 $n-1$ 重特征值

$\because (A-\lambda E)x=0 \rightarrow \lambda=0 \Rightarrow Ax=0 \rightarrow$ 有 $n-r$ = 重数

$\Downarrow$

有 $n-1$ 个线无解向量

6、 若 $P^{-1}AP = \Lambda$

则 $A = P\Lambda P^{-1}$

算 $|A-2E| = |P\Lambda P^{-1} - 2PP^{-1}| = |P|\,|\Lambda-2E|\,|P^{-1}|$

$= |\Lambda - 2E|$

① (Λ)对角阵、上下三角阵的特征值为主对角元素
② $|A|=0$ 时，有特征值 $\lambda=0$

四、若 λ_i 是 n 阶矩阵 A 的 r 重特征值，则其对应的线性无关特征向量个数 (≤) 小于等于 r 个

判是否可对角化、若 A 的 r 重特征值 λ_i 对应的线性无关特征向量个数少于特征值的重数时，A 不能相似于对角阵　检查秩(基解个数)

(e.g) 二重 λ 对应特征向量为 2 个，即 2 个线性无关特征向量，则 $A\sim\Lambda$

五、特征值求法公式：设 λ 为 A 的特征值

1. $kA: k\lambda$
2. $A^m: \lambda^m$
3. $f(A): f(\lambda)$
4. $A^{-1}: \lambda^{-1}$
5. $A^*: \frac{|A|}{\lambda}$　　$(A^*=|A|A^{-1})$

6. $A^T: \lambda$

六、两个矩阵相似的必要条件

1. $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
2. A, B 有相同特征值
3. $|A|=|B|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$
4. $r(A)=r(B)$　(相似必等价)
5. $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

七、相似对角化步骤：

1. 求出 A 的 λ
2. 据 λ 得到相应特征向量 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$
3. 令 $P=(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)$

则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$　(注意 λ_i 对应 ξ_i)

1. 零矩阵特征值为0
2. 若A,B有相同且单根的特征值 ∴ $A \sim B$

若A,B有相同的多重特征值 ∴ 虽特征值相同，但不一定相似。
(若k重特征值对应k个特征向量 → 可化为对角阵则相似)

3. 常用反例　　　常用反证法

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 证特征值相同：

① $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$
② $A \sim B$

5. 行向量成比例 → $r(A)=1$ → $n-1$个特征向量 → 至少$n-1$重特征根

$|A|=0$ → $\lambda=0$为特征根，且至少$n-1$重

6. 正交阵 $Q^T=Q^{-1}$
化简计算

7. 上(下)三角矩阵：
主对角线元素为特征值

八、实对称矩阵的相似对角化

1、实对称阵

$A^T=A$，$\bar{A}=A$

2、性质 ①. 对称矩阵的特征值为实数

② 设λ_1、λ_2为对称矩阵A的两个特征值，P_1、P_2是对应的特征向量。若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则P_1、P_2正交

（不同特征值对应向量正交）

③、实对称矩阵必相似于对角阵

即存在可逆阵P、$P^{-1}AP=\Lambda$，且存在正交阵Q，使得

$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

④、实对称矩阵A的k重特征值所对应的线性无关特征向量有k个.

（即 $R(A-\lambda E)=n-k$）

3、用正交阵将实对称矩阵A化为对角阵的步骤

① 求A的特征值λ_1，$\lambda_2\cdots\lambda_m$

②、求对应λ的特征向量

③、对每一个k重特征根，求得k个线性无关的特征向量，将它们先正交化再单位化.

④、将所求得的正交单位向量，排成n阶正交方阵Q

$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

写出Λ，对角线依次为对应特征值

1、合同充要条件：

即 x^TAx，x^TBx 有相同正负惯性指数

2、若A、B为n阶实对称阵，

合同充要条件：特征值正负性一致

二次型化标准形实质：

找可逆阵C，使 $C^TAC=\Lambda$

<第六章 二次型>

一、二次型

1、定义：含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称二次型

其中：当 $j>i$ 时，取 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$

2、二次型的标准形

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

3、规范形

标准形的系数 $k_1, k_2 \cdots k_n$ 只在 $1, -1, 0$ 三个数中取值

4、表示：

① $f = x^TAx$

A：对称矩阵，称为二次型f的矩阵

② 一个二次型唯一确定一个对称矩阵A

③、f：对称矩阵A的二次型

④、A的秩叫做二次型f的秩

二、合同

1、定义：A、B为n阶矩阵，若有可逆矩阵C

$$B = C^TAC$$

称矩阵A与B合同

（合同 → 必等价） $r(A)=r(B)$

三、二次型化为标准型

1、任给二次型，总有正交变换 $x=Py$，使f化为标准型

$$f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 是A的特征值

2、任给n元二次型 $f(x) = x^TAx$ $(A^T=A)$，总有可逆变换

〈正交化方法〉

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

1. 令 $\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

2. 后单位化即可

3. $\begin{cases} A^T = A^{-1} \\ |A| = \pm 1 \end{cases}$

$x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范型

四、正交变化法化二次型为标准型

1、写出二次型矩阵 A

2、求出 A 的特征值 λ

3、求出所有相应的特征向量 ξ

4、进行正交化，单位化

5、将得到的正交单位向量作列向量，排成 n 阶方阵 Q

Q 为所求正交方阵，即 $Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda$

✓6、作正交变换 $x=Qy$

$$f=x^TAx=(Qy)^TAQy=y^T(Q^TAQ)y=y^T\Lambda y$$

注：该方法具有保持几何形状不变的优点

五、配方法化二次型为标准型

1、将二次型整理为一般式

2、因含 x_1 的平方项，把含 x_1 的项归并起来，进行配方

3、依次类推，得 $f=(x_1+2x_2)^2+(x_2+3x_2)^2\cdots$（形式）

4、现令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2+2x_3\\y_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\x_2=y_2-2y_3\\x_3=y_3\end{cases}\Rightarrow C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

即 $f=y_1^2+y_2^2\cdots$

注：二次型中不含平方项，只含有 x_ix_j 项时，先作可逆线性变换

e.g. $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，代入原式　$x_1x_2=y_1^2-y_2^2$

规范形 P136

1、证明正定阵前，先证是对称阵

2、若得 $\lambda=0$，$\lambda=n$　$r(A)=r$

　　则 0 为 $n-r$ 重特征值。

3、判二次型是否合同于标准形；→ $A \simeq B$ 充要条件

　　秩、正惯性指数一致

4、n 阶实对称矩阵、必合同 Λ

六、正定二次型

1、惯性定理

设二次型 $f=x^TAx$ 的秩为 r，且有两个可逆变换

$x=Cy$ 及 $x=Pz$

使 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2$ $(k_i\neq0)$

及 $f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2$ $(\lambda_i\neq0)$

则 $k_1,\cdots k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots\lambda_r$ 中正数的个数相等

2、二次型的标准型中 正系数个数称 正惯性指数

负系数个数称 负惯性指数

3、对 $x\neq0$ $f(x)=x^TAx>0$ —— 正定二次型

A为正定的

反之负定。

4、n元二次型 $f=x^TAx$ 为正定的充分必要条件为：

① 标准形的 n 个系数全为正

② 规范形的 n 个系数全为 1

③ 正惯性指数为 n

对称矩阵 A 为正定的充要条件：

A 的特征值全为正 ✓

A 的各阶主子式为正

负定：奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正

七、二次型正定的判别法

1、用定义、即 $X^TAX>0$

2、用标准形：

n 个系数全为正

①、可逆线性变换不改变正定性

② A 的特征值为正 ✓

③ $|A|>0$

④ $C^TAC=E$ ✓

$a_{ii}>0$

3. 用特征值.

4. 用顺序主子式： $\Delta_i > 0$
（一类题做法）

5、 $A = D^T D$，D为可逆阵 → f正定