<高数>(二)

<第五章 多元函数微分学>

(一)、多元函数的极限、连续、偏导数、全微分

一、多元函数(二元)

1、定义: $P(x,y)\in D$,变量 z 与之对应.

则称 $z=f(x,y)$

D 为定义域,x,y 为自变量,z 为因变量

2、几何意义

$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$

一般 $z=f(x,y)$ 为一张曲面

二、二元函数的极限与连续

1、重极限

①定义:若 $f(x,y)$ 在 D 有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点/边界点

任意 $\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$ 使

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$

②、重极限存在条件:

定义域 D 中的点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 都无限趋近 A

2、二元函数连续

①定义: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续

②、连续函数的性质

$|\Delta x|+|\Delta y| \geq |\Delta x-\Delta y|$

一、证极限不存在方法

① 取两种不同路径，极限不同

当 $\begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases}$ 可取 $\begin{cases} y=kx \quad y=x \\ y=Ax+Bx^2+Cx^3\cdots \\ y^2=x \quad \cdots \end{cases}$

② 取一种路径极限不存在

二、二重极限求法（先看是否存在）

1、夹逼原理 (0)

2、等价无穷小代换

3、无穷小×有界变量（如均值不等式）$x^2+y^2\geq 2xy$

4、设法消分母中极限为0的因子（有理化…）

5、通过换元法化为一元函数

三、定义法求一阶偏导

（常用于该点函数不连续）

e.g. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

注意 y_0 的取值

用 Δx 的形式

四、判断是否可微的方法

1、利用可微定义

① 1 先判 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 是否都存在，若至少一个不存在则不可微。否则 ②

② $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]-[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}=0$

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

判断该式是否成立

2、可微的充分条件：

有连续一阶偏导必可微

3、不可导则不可微：不存在一阶偏导，不可微

三、二元函数的偏导数

1、定义：

若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，

则 $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$f_y'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

2、几何意义：

$f_x'(x_0,y_0)$：$z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率

$f_y'(x_0,y_0)$：$z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率

四、全微分

1、定义：若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 表示为

$$\begin{cases}\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\end{cases}$$

则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微

在点 (x,y) 的微分：$dz=A\Delta x+B\Delta y$

2、可微的必要条件

若可微，则在 (x,y) 处 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，

且 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

3、可微的充要条件

若 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y) 处连续，则 (x,y) 处可微

五、多元函数连续，可导，可微的关系

1、可导：$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在

即 $f_x'(x_0,y_0)$ $f_y'(x_0,y_0)$ 存在

一、〈求已知点的偏导方法〉

如 $f'_x(x_0,y_0)$

$f'_y(x_0,y_0)$

1、

①求x偏导，可先将y_0代入$f(x,y)$

②化为一元导数求导

③代入x_0求解

2、求二阶偏导：

①、先求x的偏导，不代y_0

②、得到一阶偏导，代y_0

③对一元一阶求导即可

二、〈幂指函数求偏导方法〉

1、改写为指数函数：

$$e^{\ln z}=z$$

2、等式两端取对数

$$\ln z=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

3、利用多元复合函数求导法

$$z=u^v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

三、已知二阶、一阶偏导求原函数

用不定积分法

$$\begin{cases}\int \cdots dx=\cdots+\varphi(y)\\ \int \cdots dy=\cdots+\varphi(x)\end{cases}$$

四、全微分重要结论

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=df(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$$

（利用$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y\partial x}$）

2、对比：① 一元函数：可导 $\Leftrightarrow$ 可微，可导 $\Rightarrow$ 连续

② 二元函数：可导 $\nRightarrow$ 可微，可导 $\nRightarrow$ 连续

3、二元函数：

可微 $\Rightarrow$ 可导，可微 $\Rightarrow$ 连续（其它都不可）

4、可微：$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 连续

但可微 $\nRightarrow$ $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 连续

(二)、多元函数的微分法

一、复合函数的偏导数与全微分

1、多元函数与一元函数复合

$$\begin{cases} u=\varphi(t)\ ,\ v=\psi(t) & \cdots\cdots \text{可导 } t \\ z=f(u,v) & \cdots\cdots \text{有连续一阶偏导 } (u,v) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ …… 点 t 可导

即 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$

2、多元函数与多元函数复合

$$\begin{cases} u=\varphi(x,y)\quad v=\psi(x,y) & \cdots\cdots (x,y)\text{ 有 } x,y \text{ 偏导} \\ z=f(u,v) & \cdots\cdots \text{连续一阶偏导} \end{cases}$$

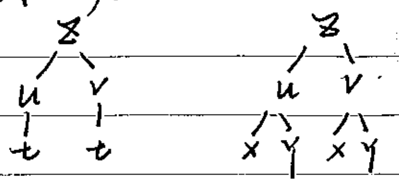
$\Downarrow$

$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 有对 x,y 偏导

即、$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

〈二元复合函数求偏导〉

1、树形图



2、 $z=f(u,v)$

$$\begin{cases} u=\varphi(x,y) \\ v=\psi(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{可求出}}+\frac{\partial f}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{可求出}}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 注意勿漏项、因为 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 仍是 u,v 的函数

3、另一种表示法

f_1' 表示 $\begin{cases} f(x,y,z) \text{ 或 } f(x,y) \text{ 中对第一项求导 } \frac{\partial f}{\partial x} \\ \text{若 } f(u,v)\text{，则 } \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{可求出}} \end{cases}$

$f_1'(u,v)$ 则 f_{11}'' f_{12}'' …

4. 注意选用何种表示法更符合题意

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

二、全微分形式不变性.

对于 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$

$$\begin{cases} dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv & —z=f(u,v) \\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy & —z=f\,g(x,y) \end{cases}$$

三、高阶偏导数(二阶)

1、概念

一阶：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$

二阶：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=f''_{xx}(x,y)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=f''_{xy}(x,y)\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=f''_{yx}(x,y)\end{aligned}\right\}\text{混合偏导数}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=f''_{yy}(x,y)$$

2、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

即与求导次序无关

四、隐函数的偏导数

1、一元函数求导法 $(F(x,y)=0)$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

2、二元函数求导法 $(F(x,y,z)=0)$

$z=z(x,y)$

二元复合函数、隐函数综合问题

1. 例为最简：

① 若给隐函数 $F(x,y,z)=0$ $\xrightarrow{}$ $z=z(x,y)$ 对x求偏导

$\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial F}{\partial z}$ 已为最简 → 可求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 公式法

(F'_x, F'_y, F'_z) / (F'_1, F'_2, F'_3) 已知

② 若给 $z=f(x,y)$

可认为：$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 已知

(f'_1, f'_2)

③ 若给 $z=f(u,v)$ —— 本身抽象

$u=\varphi(x,y)$ $v=\psi(x,y)$ —— 一般给具体（须计算出 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$…）

可认为 $\frac{\partial f}{\partial u}$，$\frac{\partial f}{\partial v}$ 已知

(f'_1, f'_2)

2、两种方法

① 树形图法（求导公式）

若 $u=f(x,y,z)$ 三元 $du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$ 可求 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

已知 $z=z(x,y)$

$u=f(x,y,z(x,y))$ 二元 $du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

方法 { 故设法用 dx、dy 表示 dz（全微分法）
或直接写 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$

② 方程两端分别求导（x或y…）

③ 方程两端求微分

3. 审题重要关注

关注谁能被谁、谁…表示，并分辨抽象或具体

这样可降元，常注意化简 务必可求

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z} \qquad (F'_z\neq 0)$$

3、方程组所确定的隐函数 一元函数

1、每个方程，两边对 x/y 求导

2、每个方程，两边求微分

(三) 极值与最值

一、无条件极值

1、定义：若存在 $M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U_\delta(M_0)$

使 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$

$(\forall (x,y)\in U_\delta(M_0))$

则称 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 取极大值

$M_0(x_0,y_0)$ 称极值点

2、驻点

定义：$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$

同时成立的点 (x,y) 称 $f(x,y)$ 的驻点

3、取极值必要条件

$f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处 $\begin{cases} \text{一阶偏导存在} \\ (x_0,y_0)\text{取极值} \end{cases}$

则 $f'_x(x_0,y_0)=0 \quad f'_y(x_0,y_0)=0$

均值≥根值（正数和一定）

OURSTORYBEGINS

条件极值也可证不等式

一、给极限，判极值点：

一般用保号性（$\exists R>0$ $U_\delta(x_0)$ / $x>R$）

极限定义

二、〈无条件，求极值步骤〉

1. 令 $f'_x(x,y)=0$

$f'_y(x,y)=0$

得所有驻点

2. 对每个驻点求二阶偏导数

$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$

$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$

$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

3. $AC-B^2$ 进行判断

三、〈有条件 求极值（最值）〉

1. 若求最值，找 {边界点, 极值点} 比较大小

2. 用拉格朗日乘数法

得可能极值点

经比较After得最值点

3. 有条件 ⟶ 无条件

①. 条件 $\varphi(x,y)=0$ ⟶ $y=y(x)$ / $x=x(y)$

②. 圆：$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$ $(0\le\theta\le2\pi)$

4. 几何法（画圆）

四、海伦公式

三角形周长、边长、面积关系：

$$S=\sqrt{P(P-x)(P-y)(P-z)}$$

（周长：$2P$ 边长 x,y,z，面积 S.）

即极值点必为驻点，驻点不一定是极值点。

4. 取极值充分条件

已知 $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\right)$

令 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$

$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$

$f''_{yy}(x_0,y_0)=C$

则 ① $AC-B^2>0$ 时，

在 (x_0,y_0) 取极值 $\begin{cases} A>0 & \text{极小值} \\ A<0 & \text{极大值} \end{cases}$

② $AC-B^2<0$ 时，

在 (x_0,y_0) 无极值

③ $AC-B^2=0$ 时

无法确定是否有极值（用定义法进一步讨论）

二、条件极值

1. $f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 的条件下 极值必要条件

拉格朗日乘数法：

① 构造 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

② $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$

③ 可能极值点，

(x,y,λ)

$\Downarrow$

(x,y)

2. $f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 下 极值必要条件

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

注意：

1. 向量可化简
2. 随球面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$Axx_0+Byy_0+Czz_0=1$$

3. 柱面特性

任意一点，法向量 ⊥ 定直线

切平面 // 定直线

4. 求方向导数时：

注意 向量 $\vec{l}$ 单位化

5. 多令极限正负 → 考虑保号性
6. 善于利用两个定义 $\begin{cases}\text{方向导数}\\ \text{偏导数}\end{cases}$

(四)、方向导数与梯度

一、方向导数（数）

1. 定义：

$P_0(x_0, y_0) \xrightarrow{l} P(x, y)$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ 存在}$$

称 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数

记作 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)}$

2、存在性：

若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，反之不对

计算：

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为方向 l 的方向余弦

3、推广到空间：

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

若 $f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 处可微

则 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = (f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0)) \cdot \vec{e}$

其中 $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 l 的单位向量

二、梯度（向量）

1. 定义：$\begin{cases} \text{函数 } u = u(x, y) \\ \text{点 } P(x, y) \in D \end{cases}$

P 处各方向的方向导数取最大值的方向 $\vec{A}(x, y)$

最大值 $= |\vec{A}|$　最小值 $= -|\vec{A}|$

（二元函数用中值定理）

$$f(a,b)-f(c,d)$$
$$=[f(a,b)-f(a,d)]+[f(a,d)-f(c,d)]$$
$$=f_y(a,\xi)(b-d)+f_x(\eta,d)(a-c)$$
$$\xi\in(b,d)\quad \eta\in(a,c)$$

称 $\vec{A}(x,y)$ 为 P 处梯度.

记为 $\text{grad}\,u\big|_P = \vec{A}(x,y)$

2、计算公式

$$\text{grad}\,u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$$

3、梯度与方向导数关系

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_P = \text{grad}\,u\big|_P \cdot \vec{e_l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)(\cos\alpha, \cos\beta)$$

4、推广到空间

$$\text{grad}\,u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

(五) 多元微分 几何应用

一、曲面的切平面与法线

曲面方程：$F(x,y,z)=0$ / $z=f(x,y)$

1、已知 (x_0,y_0,z_0) 处法向量 ✓

$$\vec{n} = (F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0))$$

①. 切平面：

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

②、法线：（$\vec{n}$ 或为方向向量）

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

③ $z=f(x,y) \rightarrow F(x,y,z) = f(x,y)-z$

$$\vec{n} = (f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1)$$

二、曲线的切线和法平面

1、参数式
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

切向量在 (x_0, y_0, z_0) 处：

$$\vec{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

①、切线：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

②、法平面：$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$

2、一般式：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量在 (x_0, y_0, z_0) 处：

$\vec{\tau} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (A, B, C)$ ✓

$\begin{cases} \vec{n_1}, \vec{n_2} \text{ 为 } F, G \text{ 面的法向量} \\ \vec{n_1} = (F_x'(x_0, y_0, z_0), F_y'(x_0, y_0, z_0), F_z'(x_0, y_0, z_0)) \\ \vec{n_2} = (G_x'(x_0, y_0, z_0), G_y'(x_0, y_0, z_0), G_z'(x_0, y_0, z_0)) \end{cases}$

①、切线

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

②、法平面

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

三、泰勒定理（二元函数）

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0) + R$$

1、拉格朗日余项　$P_1\ (\underset{x_0 \sim x}{x_0 + \theta(x-x_0)},\ \underset{y_0 \sim y}{y_0 + \theta(y-y_0)})$

$$R = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial^2 y}(y-y_0)^2\right]$$

2、佩亚诺余项

$$R = \cancel{\tfrac{1}{2!}}\ o(\rho^2)$$

$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$（到 (x_0, y_0) 距离）

一、计算二重积分步骤

1、画积分域D草图；

①判积分域是否有对称性

②判 $f(x,y)$ 是否有奇偶性

③判积分域是否关于 $y=x$ 对称

④是否可经平移后对称

2、选择化为累次积分坐标系

直角坐标

极坐标

3、选择累次积分的积分次序

4、确定累次积分的积分限

5、计算得结果

二、基本方法

1、何时用极坐标

①积分域：中心在原点的圆

中心在坐标轴上且边界过原点

/可经过平移后便运算

②、被积函数：

$f(\sqrt{x^2+y^2})$、$f(\frac{y}{x})$、$f(\frac{x}{y})$

可化为 ρ, $/\theta$ 的一元函数

2、利用平移后利用对称，奇偶性化简

① 圆心 (a,b)

令 $\begin{cases} x-a=\rho\cos\theta \\ y-b=\rho\sin\theta \end{cases}$

从而得到中心在原点的圆

〈第六章 多元函数积分学〉

(一) 重积分

一、二重积分

1、定义：

若 $z=f(x,y)$ 为 D 上有界函数

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \triangleq \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

区域直径最大值　　第k个小区域面积

若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 必存在。

2、几何意义：

$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 表示以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，侧面以 D 边界为准线，母线 // z 轴柱面的曲顶柱体的体积

3、性质

①、比较定理

若在 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \le \iint_D g(x,y)\,d\sigma$$

②、估值定理

若 S 为 D 面积，$M=f(x,y)_{max}$，$m=f(x,y)_{min}$

则 $$mS \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le MS$$

③、中值定理

若在 D 内连续，S 为 D 面积

则 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)S$$

$\int_0^{2\pi}\begin{cases}\sin\theta \\ \cos\theta\end{cases}d\theta=0$

②、若积分域关于 $x=a$，/ $y=b$ 对称

$\begin{cases} x-a & \text{关于}x\text{轴对称} \\ y-b & \text{关于}y\text{轴对称}\end{cases}$

观察是否可用奇偶性

3、利用形心公式：

$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\,d\sigma}{S}$　　$\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,d\sigma}{S}$

4、利用对积用分域变形从而化简

①、加补法

圆用极坐标，直线用直角坐标

②、分割法

分割后观察可否用奇偶性

5、先x后y还是先y后x

6、全平面D可根据被积函数确定有限D，

7、抽象函数问题：

出现一般函数 f

⇓

则被积函数以与积分域有某种特殊关系

（奇偶性。对称性）

8、若D为参数方程问题：

①. 设直角坐标方程 $y=y(x)$

② 确定x或y的具体范围 $\int_a^b$

③ 求 dx / dy 的 → 得 dt

④. 形式 $\int_a^b dx\int_c^{y(x)} dy$

⇓

dt

二、二重积分的计算

1. 在直角坐标下

①. 先 y 后 x 累次积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

②. 先 x 后 y 累次积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$

规律：先函数，后常数；且函数无度限积分

2. 在极坐标下计算 (ρ,θ)

①. 极点O在D外.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

②. 极点O在D边界

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

③. 极点O在D内部

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

④. 环形域，O在环形域内

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

一、累次积分交换次序计算

1、何时交换次序：

① 被积变量在分母中

② 只含有x 应积y

③ 其它不好积的情况（再合并）

2、步骤：

① 确定对应积分域并画出草图

② 换另一次序确定上下限

③ 计算得结果

二、换坐标系计算

若交换次序后仍不好算，观察是否交换坐标系

三、极坐标下交换次序

用过原点的圆分割

从哪条边进，哪条边出

必要是用反三角函数

四、遇拆点，应拆分计算

记宰 $\rho d\rho$

* 与二重积分有关综合题

1、关键：{ 二重 ⟶ 化一重 ；交换次序计算；交换坐标系

一重 ⟶ 化函数 ；积分中值定理 }

2、区分积分限：

从而分别正、负

3. 二重积分的积分中值定理：（灵活）

① $\int_a^b dx\int_c^d dy\, f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)\,d\sigma$

$\Downarrow$ （S为D面积）

$f(\xi,\eta)\cdot S$ $\xi\in(a,b)$ $\eta\in(c,d)$

3、利用对称性和奇偶性

(1) 利用积分域对称性 + 被积函数奇偶性

①、若 D 关于 y 轴对称，f(x,y) 关于 x 有奇偶性：

· f(x,y) 关于 x 为偶函数，$f(-x,y)=f(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

· f(x,y) 关于 x 为奇函数，$f(-x,y)=-f(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$

②、若 D 关于 x 轴对称，f(x,y) 关于 y 有奇偶性

· f(x,y) 关于 y 为偶函数，$f(x,-y)=f(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

· f(x,y) 关于 y 为奇函数，$f(x,-y)=-f(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$

(2). 利用变量对称性

若 D 关于 x=y 对称

(将 x,y 对调无影响)

则 f(x,y) 中 x、y 对调

即 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma$

②、$\int_a^b f(x,y)\,dx$

$\Downarrow$

$f(c,y)(b-a)$

其中 $c\in(a,b)$

有关二重积分的不等证(证明)

1、两定积分乘积：

可化为一个 dx，一个 dy 形式二重积分

2、时刻记：

含抽象函数，考虑 $y=x$ 对称 ✓

(x / y 对轴)

3、柯西积分不等式：

$$\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

4、$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$ (一重化两重)

$$= \iint_D f(x)g(y)dxdy$$

$D: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$

三、三重积分

1、定义

$f(x,y,z)$，定义域 Ω（空间）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\,\Delta V_k$$

λ ↓ n个小区域直径最大值.

①、若 $f(x,y,z)=1$

$$\iiint\limits_{\Omega} dV = V_\Omega$$

②、若 $\mu=f(x,y,z)$ 为空间体 Ω 的体密度

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$ = 空间体 Ω 的质量

2、计算

①、在直角坐标下

(1) 先一后二

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{D} dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$(z_1(x,y) \le z_2(x,y))$

(2) 先二后一

已知 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,\ a\le z\le b\}$

D_z 为坐标为 z 的平面截 Ω 得到平面闭区域

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

一、柱坐标系

1、关于 $d\theta$, dr, dz 的顺序

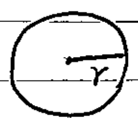
必要时，须用柱面分割

若不分割，尝试交换次序

2、关于 r

这里的 r 指某截面上的 r

如图：



← 某截面

设法联系 r 与 x, y, z 关系

二、球坐标系

1、切记先用对称性，对称化简

2、关于 r

这里的 r 指空间上原点到边界的距离

一般先 dr

3、关于 φ

① φ 指 r 与 z 轴夹角

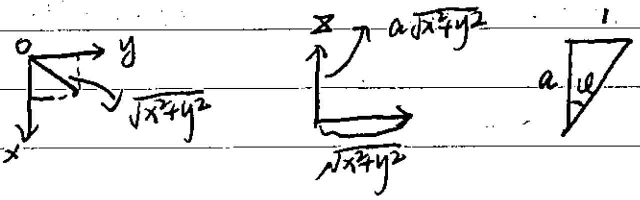
分清 $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$

②、锥面

如 $z = a\sqrt{x^2+y^2}$

图示：

求 φ



从而得 φ

③ $z=x^2+y^2$ 为旋转抛物面

②、在柱坐标下

(1) 柱坐标 (r, θ, z) 与直角坐标关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le +\infty \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$

(3) 何时用柱坐标

· 被积函数：

$f(x,y,z) = \varphi(z)\,g(x^2+y^2)$

· 积分域：

柱体、锥体、柱面锥面与其它曲面所围空间体

③、在球坐标下

(1) 球坐标 (r, φ, θ) 与直角坐标关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta & 0 \le r \le +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta & 0 \le \varphi \le \pi \quad \checkmark \\ z = r\cos\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

(3). 何时用球坐标

· 被积函数：

$f(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$

· 积分域：

球体，半球体，锥面与球面所围空间体

一、三重积分的累次积分交换次序

1、对于一定次序下不便于积分，应尽量往后放

2、若需交换两次

需分次交换，每次交换时，另一无关项视为常数

(4)、利用对称性、奇偶性计算

(1) 若 Ω 关于 xoy 坐标面对称，
且 $f(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性

则 当关于 z 为偶时，$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$

$$2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dV$$

当关于 z 为奇时，$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$

0

(2)、利用变量对称性

若 Ω 中对调 x,y 后方程不变

则被积函数中 x,y 对调积分值不变

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iiint_{\Omega} f(y,x,z)\,dV$$

(二) 曲线积分

一、对弧长的线积分（第一类）

1、定义：

L 为 xoy 上分段光滑曲线弧段
$f(x,y)$ 定义在 L 上的有界函数

$$\int_L f(x,y)\,ds \triangleq \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \downarrow \\ \max \Delta S_i}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i}_{}$$

ΔS_i：小弧段长度

若 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则 $\int_L f(x,y)\,ds$ 存在

2、性质

与路径方向无关

即 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)\,ds=\int_{L(\overset{\frown}{BA})} f(x,y)\,ds$

一、第一类积分

$f(x,y,z)$ 空间

$\downarrow$

化为 x,y,z 关于 t 的参数方程

二、1、$\oint_L 1\,ds =$ 周长 L

2、形心计算公式

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\,ds}{l}$$

l — L 长度

3、$f(x,y)=|y|$

$\downarrow$

可理解为既为 y 又为 x 的偶函数

三、时刻留意 L 的 x,y,z 对换方程是否变

四、若 L 为一般式方程

化为参数方程的方法：

$\begin{cases} \text{设法消去 } z \\ \text{尽可能为直线或圆} \end{cases}$

3、计算

①、直接法

(1) 若 L 用直角坐标

$$y=y(x),\quad a\le x\le b$$

则 $\int_L f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$

(2) 若 L 用参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta$$

则 $\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

（下限小，上限大）

(3) 若 L 用极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta)\qquad \alpha\le\theta\le\beta$$

则 $\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

②、利用奇偶性、对称性

(1) 若 L 关于 y 轴对称，且 $f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性

(1) 当 $f(x,y)$ 关于 x 为偶

$$\int_L f(x,y)\,ds=2\int_{L_1} f(x,y)\,ds$$

(2) 当 $f(x,y)$ 关于 x 为奇

$$0$$

③、利用变量对称性

若 L 关于 $y=x$ 对称

则 $\int_L f(x,y)\,ds=\int_L f(y,x)\,ds$

第二类

一、更换路径（一般不封闭）

换为与x、y轴平行的折线（考虑原点是否有定义，是否包含原点）

代 $dx=0$，$dy=0$　$y=a$　$x=b$

从而简化 $f(x,y)$

二、求原函数的方法 $F(x,y)$

1、偏积分法

① 知 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$

② $\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \cdots + \underline{\varphi(y)}$

↓

对结果关于y求导　得 $\varphi'(y)$

③ 经比较后由 $\varphi'(y)$ 得 $\varphi(y)$

从而得 $F(x,y)$

2、凑微分法

"$duv = udv + vdu$"

（观察）

求 $F(x,y)\Big|_{起点}^{终点}$ 即可

三、思路

1、先观察是否封闭

若封闭 — 格林公式

不封闭 — 考虑是否与路径有关

2、若与路径有关

后 3、直接法是否方便

4、补线用格林公式

二、对坐标的线积分（第二类）

1. 定义

$\begin{cases} L\text{为}xoy\text{上}A\text{到}B\text{的有向光滑曲线} \\ P(x,y), Q(x,y)\text{为}L\text{上的有界函数} \end{cases}$

则 P、Q 沿 L 对坐标的线积分

$$\int_{L(\widehat{AB})} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

有向弧段 ΔS_i 在坐标轴投影

若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 L 上连续，则积分存在

2. 性质

与积分路径 L 方向有关

$$\int_{L(\widehat{AB})} Pdx+Qdy = -\int_{L(\widehat{BA})} Pdx+Qdy$$

3. 两类线积分的联系

$$\int_L Pdx+Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

（$\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为 L 的切线的方向余弦）

4. 计算

① 直接法（参数方程）

$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ （α 为 L 起点，β 为 L 的终点）

$$\int_L Pdx+Qdy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

② 利用格林公式

闭区域 D 由 L 围成（闭曲线） （P、Q 在 D 上有连续一阶偏

L 为 D 取正向的边界曲线（左手边）

则 $\oint_L Pdx+Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

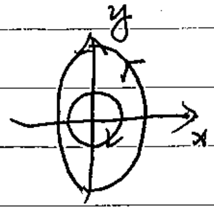
〈二、在原点处 P、Q不连续，求二类积分方法〉

小心 Ax^2+By^2 分母 $P(x,y)=\dfrac{Cx+Dy}{Ax^2+By^2}$ 类型 根据分母取圆/椭圆

1、作以(0,0)为中心的圆 $x^2+y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon>0$) / $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 椭圆

2、则 $\oint_{L+C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ (C为反方向)

$=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0$ (A)



3、则 $\oint_L \cdots=\oint_{-C}+A$

规律：$\begin{cases}\text{除(0,0)外，P、Q有连续一阶偏导}\\ \text{且 } \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$

则 ① 沿任一条不含原点在内的曲线积分为0

② 沿任一条包含原点在内的曲线积分均相等

理解：

在 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 前提下

$\begin{cases}\text{无论封闭曲线形状如何，若包含原点都一样的值}\\ \text{若不包原点，必为0}\end{cases}$

③、补线用格林公式

若 $L(\overset{\frown}{AB})$ 不封闭，且直接法不方便时，

补 $L_1(\overset{\frown}{BA})$，变为封闭曲线

则 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} Pdx+Qdy = \oint_{L(\overset{\frown}{AB})+L_1(\overset{\frown}{BA})} Pdx+Qdy - \int_{L_1(\overset{\frown}{BA})} Pdx+Qdy$

格林公式　　　直接法

④、利用线积分与路径无关

(1) 判定线积分与路径无关

若 P、Q 在 D 上有连续一阶偏导数，则下四等价

☆
- 线积分 $\int Pdx+Qdy$ 与路径无关
- $\oint_C Pdx+Qdy=0$　　C 为 D 中任一光滑闭曲线
- $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$　　$\forall (x,y)\in D$
- 存在可微函数 $F(x,y)$，使 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)$

(2) 与路径无关线积分计算

法1：改换路径

取平行于坐标轴的折线

法2：设 $F(x,y)$ 是 $Pdx+Qdy$ 的原函数　（偏积分、凑微分）

即 $Pdx+Qdy=dF(x,y)$

则 $\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy = F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)$

L 起点：$A(x_1,y_1)$　　终点：$B(x_2,y_2)$

三、对空间的线积分

斯托克斯公式：

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Γ：空间有向闭曲线　　Σ：以 Γ 为边界的有向曲面

（Γ 与 Σ 方向：右手法则）

〈解决空间线积分方法〉

$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

1、用参数方程

将 Γ 化为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 先写投影曲线

后写最后一个

$t \in [0, 2\pi)$ / $t \in (-\pi, \pi)$

2、斯托克斯公式

① $I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$

※ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 Σ 法向量的方向余弦
(单位向量)

②、直接写斯托克斯公式

得 $\iint_\Sigma \cdots dy\,dz + \cdots dz\,dx + \cdots dx\,dy$

$\downarrow \cos\alpha$　$\downarrow \cos\beta$　$\downarrow \cos\gamma$

得 dS

3. 化为平面线积分

如将 z 消去，只有 $dx + dy$ 形式

后考虑用格林公式

($z = (x, y)$ 的形式，$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$)

(三) 曲面积分

一、对面积的面积分(第一类)

1、定义

Σ：分片光滑曲面片

$f(x,y,z)$ 为定义在 Σ 上的有界函数

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

ΔS_i：第 i 个小曲面的面积

若 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$ 存在

2、性质

与曲面 Σ 的侧的选取无关

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{-\Sigma} f(x,y,z)\,dS$$

3、计算

①、直接法

若 Σ：$z=z(x,y)$

Σ 在 xOy 上投影域为 D

$z(x,y)$ 在 D 上有连续一阶偏导

$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续

√ 则 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$

②、利用奇偶性、对称性

若 Σ 关于 xOy 坐标面对称

且 $f(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性

则 当 $f(x,y,z)$ 关于 z 为偶：

$2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS$

当 $f(x,y,z)$ 关于 z 为奇：

0

〈第一类面积分〉

一、1、从Σ方程入手，化简 $f(x,y,z)$

2、若无法写出 $z(x,y)$，观察是否可写 $x(z,y)$，$y(z,x)$

3、dS 的理解为空间曲面面积变化

有时可转化为 S 直接算出。可从 $x,y,z \to z$，减少变量

4、可用平移后对称规律（如球心不在原点）

形心公式 $\bar{z} = \dfrac{\iint_{\Sigma} z\,dS}{A}$ $\to$ Σ面积

二、步骤：

1、先看Σ是否有对称性 + 函数奇偶性 化简

2、是否从Σ方程入手 化简被积函数

3、Σ交换 x,y,z 是否不变（球心在原点的球）

4、直接法：

①. 画出Σ的草图，确定 xoy 上投影

② 利用 $z(x,y)$，求 dS

③. 代入公式（$z=z(x,y)$）

③ 利用变量对称性

Σ 方程某两变量对调方程不变

则被积函数两变量对调积分值不变

如 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

二、对坐标的面积分（第二类面积分）

1、定义：

若 Σ：光滑有向曲面

$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界

则 $\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \triangleq$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\right]$$

有向曲面 ΔS_i 在 yoz 坐标面上投影

2、性质

积分与曲面的侧有关

3、两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 Σ 点 $P(x,y,z)$ 处指定侧的法向量的方向余弦

4、计算

①、直接法

e.g 设 $\Sigma: z=z(x,y)$ $\quad (x,y)\in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dx\,dy = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

Σ 的法向量与 z 轴的夹角为锐角，即上侧为"+"

★ $\Sigma \xrightarrow{} D_{xy}$

⇓

正负号

〈第二类面积分〉

一、步骤：

1、曲面Σ是否封闭，若封闭，考虑用高斯公式

（当Σ包含原点且被积函数在原点处不连续时不能用）

2、不封闭时，采用直接法

直接法：

① $P\,dxdy$：找 xoy 上的投影域

消去 z（注意 ±）分清哪一部分

与 z 轴同向为正，反向为负（有时两个投影）

线投影为 0

$dydz$，$dxdz$ 同理

~~注：必要时用Σ方程化简 P~~

3、采用补面高斯公式

注意所补的面的方向、Σ_1

善于用Σ，Σ_1 化简被积函数

二、小方法

1、用高斯公式后出现三重积分

常采用 先二后一解法

球坐标法

2、用直接法时，对于包围式（有口）曲面，

一般分一前一后，或一上一下或一右一左 对称

规律：① 面方向朝里时，

$$\iint_\Sigma P\,dydz = -2\times\iint_{D_{yz}} P'\,dydz$$

② 面方向朝外时，

$$\iint_\Sigma P\,dydz = 2\times\iint_{D_{yz}} P'\,dydz$$

Σ 在 xoy 上投影 D_{xy}

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} \left[P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R(x,y,z(x,y))\right] dxdy$$

(上正下负)

②、利用高斯公式

空间闭区域 Ω 由闭曲面 Σ 围成

闭曲面 Σ 取外侧　　　　(P、Q、R 在 Ω 有连续一阶偏导)

$$\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

③、补面用高斯公式

Σ 不封闭，且直投法不方便，补 Σ_1

$$\iint_{\Sigma} = \underbrace{\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}}_{\text{高斯公式}} - \underbrace{\iint_{\Sigma_1}}_{\text{直投法}}$$

(四) 场论初步

$u(x,y,z)$

一、梯度 (五章) ~、 (向量) $\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

(函数梯度 → 向量)

二、通量

1、定义

向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

Σ：场中有向某面

$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ 为向量场穿过曲面 Σ 这一侧的通量

2、计算

$$\begin{cases}\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\\ d\vec{S}=dydz\,\vec{i}+dxdz\,\vec{j}+dxdy\,\vec{k}\\ \Phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Q\,dzdx+R\,dxdy\end{cases}$$ ✓

三、散度

向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

向量场 $\vec{A}$ 在点 (x,y,z) 处的散度：

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$ ✓ (向量 → 数)

四、旋度

向量场 $\vec{A}$ 在点 (x,y,z) 处的旋度： ($\vec{A}:(P,Q,R)$)

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

(向量的旋度 → 向量)

〈总结〉

	二重积分 定义域：D（面）	三重积分 定义域：Ω（体）	曲线积分 定义域：L（线）	曲面积分 定义域：Σ（面）
形式：	$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$	$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$	$\int_L f(x,y)\,ds$ $\int_L P\,dx+Q\,dy$	$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$ $\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$
几何意义	曲顶柱体体积	空间体Ω的质量（$m=\rho V$）	S：L的长度（周长）	S：Σ的面积
计算	1、直角坐标系 先y后x 先x后y 2、极坐标系 $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ $\rho d\rho$	1、直角坐标系 先2后1 先1后2 2、柱坐标系 $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$ $z=z$ $r\,dr$ 3、球坐标系 $x=r\sin\varphi\cos\theta$ $y=r\sin\varphi\sin\theta$ $z=r\cos\varphi$ $r^2\sin\varphi\,dr$	①弧长 1、直接法： 2 直角坐标 / 参数方程 / 极坐标 公式 ②、坐标 1、直接法： 参数方程L 2、格林公式 3、补线格林公式 4、路径无关 （空间：参数方程 / 斯托克斯	①曲面 1、直接法 $\Sigma\to$ xoy投影 D_{xy} 公式 ②、坐标 1、直接法 $\Sigma\to$ D_{xy} / D_{yz} / D_{xz} "+ −" 公式：$\Sigma\to D_{xy}$ "+ −" 2、高斯公式 3、补面高斯公式

对称：
- 积分域的对称性
- 被积函数奇偶性
- 积分域变量交换不变性

轴　　面　　轴　　面

一、级数定义理解

1、级数是一个表达式

该表达式是数列前n项和式

2、数列前1项和，数列前2项和，……数列前n项和

⇓

S_1，S_2 ……，S_n

组成一个数列，叫部分和数列

有n个元素相加

〈第七章 无穷级数〉

(一) 常数项级数

一、级数的概念与性质

1、定义

数列 $\{u_n\}$：$u_1, u_2, u_3 \cdots u_n \cdots$

称构成的表达式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为无穷级数

u_n：级数的一般项

2、级数的部分和数列

① 定义：令 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad (n=1,2,\cdots)$

称 $\{S_n\}$：$S_1, S_2 \cdots S_n$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列

②、级数收敛：$\rightarrow$ 级数和

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，S 为级数的和

3、级数的余部

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \xrightarrow{\text{收敛于}} S$ 　　则 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

则 $r_n = S - S_n$

$= u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

称级数的余部

4、性质

①、设 $k\neq 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 同敛散

②、若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛于 σ

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛于 $S\pm\sigma$

③、若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

一个收敛，一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必发散

✓都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 可能收敛，可能发散

④、改变级数前有限项不影响敛散性

⑤、收敛级数加括号仍收敛，且和不变

✓ 若加括号后收敛，之前不一定收敛

若加括号后发散，之前一定发散

⑥、✓ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件：

$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

（即若 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则不收敛）

二、级数的判敛准则

1、正项级数

形式 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\geq 0$

定理：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 S_n 有界

正项级数敛散判定方法

一、思路

1、先考虑比值法、根值法

比值法：$n!$

根值法：a^n，n^n

2、后考虑比较法及其极限形式（等价无穷小）

比较法：①. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ （p级数）

（放缩）

$p>1$ 收敛；$p\leq 1$ 发散

②. 等比级数

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ （$a>0$，$q>0$）

$q\geq 1$ 发散 $0<q<1$ 收敛

3. 考虑定义、性质或基本定理

①. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则必发散

②、泰勒公式拆分

二、用级数求极限问题

一般 $\lim_{n\to\infty}(n!, n^n)$ 形式

① 猜想极限为0

②. 构造级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

③. 证级数收敛则得证猜想

三、其它方法

1、为了用比较判别法，可乘法化为除法

2、等价无穷小运用广泛

3、放缩进行比较判别法是难点

（常用放大后知收敛）

(1) 比较判别法

若 $0 \le u_n \le v_n$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(2) 比较判别法的极限形式

若 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \qquad (0 \le l \le +\infty)$

①. 若 $0 < l < +\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

②. 若 $l=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 （等价无穷小）

③. 若 $l=+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(3) 比值判别法

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

则

①. 若 $\rho < 1$，则 收敛

② 若 $\rho > 1$，则 发散

③. 若 $\rho = 1$，则不可确定 （判从什么方向趋近1）

(4) 根值判别法

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

则

①. 若 $\rho < 1$，则收敛

② 若 $\rho > 1$，则发散

③ 若 $\rho = 1$，则不可确定

〈一、放缩方法〉

1、积分中、

若不便于积分，可先放缩，后进行积分

2、$\begin{cases}\text{无穷小} \\ \text{放缩}\end{cases}$ 相结合

3、原则

① $\frac{f(x)}{1+x^2} \leq f(x)$

$(1+x^2 \geq 1)$ 处理分母，分母大于1

② $\frac{1}{n^p+1} < \frac{1}{n^p}$

↓ 放大后

P级数　　放缩为广为常用方法

③ $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

$x > \ln x + 1$

④、均值不等式

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

⑤ 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续

则 $f(x)$ 存在最大值 M

$f(x)$ 可放大到 M

〈二、其它判敛散方法〉

1、收敛 ± 发散 = 发散

2、绝对收敛 ± 条件收敛 = 条件收敛

条件收敛 ± 条件收敛 = 条件/绝对收敛

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\begin{cases}\text{可收敛} \\ \text{可发散}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{收敛} \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 & \text{(非充要条件)} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \text{发散} \checkmark\end{cases}$

4. $S_n = u_1 + u_2 \cdots u_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \longleftrightarrow$ 收敛（充要条件）

2、交错级数

形式：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，$u_n>0$

①、莱布尼茨判别准则

若 $\cdot \begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛．（反之不成立）

3、任意项级数

形式 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，u_n为任意实数

①、绝对收敛：

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛

条件收敛：

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散

②、若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

· 条件收敛级数所有 $\begin{cases}\text{正项}\\\text{负项}\end{cases}$ 构成级数必发散

即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

$\downarrow$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2}$ 必发散

〈一、交错级数方法〉

1、说明 $u_n > u_{n+1}$ 方法

①、利用 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$

②、利用 $u_{n+1} - u_n \le 0$

③ 找 $f(x)$，使 $f(n) = u_n$

用 $f'(x) < 0$ 说明 u_n 单减

（证 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，可用 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$）

2、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(f(n))$ 是交错级数

变形 $\sin(f(n)) = (-1)^n \sin(f(n) - n\pi)$

$= \sin(n\pi + f(n) - n\pi)$

3. 若不满足莱布尼茨条件时：

① $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$ 是否相等

②、考察绝对值级数

③、考察原级数加括号后的级数

〈二、任意项级数方法〉

1、若 sin、$(-1)^n$，未规定 u_n 正负时，考虑绝对值级数（正项级数方法）

2、规律：

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>0 & 收敛 \\ p\le 0 & 发散 \end{cases}$

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p\le 1 & 发散 \end{cases}$

3、排除法常用例子

$\frac{1}{n}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\frac{1}{2n}$，$\frac{1}{n(n+1)}$（发散），$\frac{1}{n^2}$

〈有关常数项级数的证明〉

一、常用方法

1、抽象数列证收敛问题

①、$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

↓

把 S_n 整理表示出来

②、比较判别法

- 找递推式 —— 一次递推到 a_1
- 与 $\frac{1}{n^2}$ 一比较

③、比较法的极限形式

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \to$ 找一个收敛的级数

二、常用结论

1、数列收敛：$\{a_n\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

数列有界

↑

数列收敛

↑

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 即极限存在

由 ↑

单调有界准则

级数收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \end{cases}$$

2、若数列收敛，则必有界

即存在 $M>0$，使 $|a_n| \le M$

（a_n 可放大到 M）

3、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ 收敛充要条件 $\{a_n\}$ 收敛

（$S_n = a_{n+1} - a_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）

中值定理费马多数题

4、若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = a$

(二) 幂级数

一、函数项级数

1、定义：

设 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…$u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的函数序列，则称

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

为定义在区间 I 上的函数项级数。

2、收敛点，收敛域

① 若 $x_0\in I$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 为收敛点，否则称发散点。

②、所有收敛点构成的集合称为收敛域

3、和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

其值与收敛点有关

二、幂级数

1、定义：

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为 $(x-x_0)$ 的幂级数

当 $x_0=0$ 时，称 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数

2、阿贝尔定理

① 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x^*$ $(x^*\neq0)$ 时收敛，则当 $|x|<|x^*|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛。

若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x^*$ 时发散，则 $|x|>|x^*|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散

②、推论

只有3种收敛情况

(1) 仅在 $x=0$ 处收敛，$x\neq0$ 时发散

(2) $x\in(-\infty,+\infty)$，收敛且绝对收敛

一、如何求收敛半径，收敛域

1、求收敛半径两种方法：(若1不行，用2)

2、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

中心 x_0，R 半径：R

收敛区间 (x_0-R, x_0+R)

收敛域：确定 $x=x_0 \pm R$ 的敛散性

3、端点有关问题：

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $x=m$ 处条件收敛

则 $x=m$ 为收敛区间的一个端点

②、当求出 R 后，令 $x-x_0=\pm R$

判断常数项级数敛散性

③、常用到 一个收敛、一个发散 则发散

4、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^{2n}$ 形式：

令 $(x-x_0)^2=t$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$

则 $R=\sqrt{t}$

$(x_0-\sqrt{t}, x_0+\sqrt{t})$

小结论：

1、$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ \infty & |a|>1 \quad \begin{cases} a>1 & +\infty \\ a<-1 & ? \end{cases} \\ 1 & a=1 \end{cases}$

2、收敛域 $(a,b]$：

内部：绝对收敛

端点：条件收敛

(3). 存在 $R>0$，在 $\begin{cases} x\in(-R,R) & \text{收敛且绝对收敛} \\ |x|>R & \text{发散} \end{cases}$

3、收敛半径，收敛区间定义

① R —— 收敛半径（总存在）

$(0,+\infty,R)$

②. 当 $R>0$.

$(-R,+R)$ —— 收敛区间

√4、求收敛半径

若 $n\to\infty$ 时，$a_n\neq0$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$

则 $\begin{cases} ①.\ \rho=+\infty\text{时},\ R=0 \\ ②.\ \rho=0\text{时},\ R=+\infty \\ ③\ 0<\rho<+\infty\text{时},\ R=\frac{1}{\rho} \end{cases}$

三、性质

1、四则运算性质

① $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n$

②. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$

③. $\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=c_0+c_1x+\cdots c_nx^n+\cdots$

2、分析性质

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径 $R>0$. $S(x)$ 为和函数

①. $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续

②、$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上可导，且可逐项求导，

即 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

〈二、函数展为幂级数〉

1、方法：

1、间接法

利用几个常用的麦克劳林展开式展开

①、变量代换；

②、四则运算；

③、逐项求导 + 逐项积分

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx+f(0)$$

△ 先导后积的步骤：

①、将 $f(x)$ 求导得 $f'(x)$

②、将 $f'(x)$ 展开为幂级数

③、$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,dx$

幂级数替换

④、求出定积分。注意 $\int$，Σ 的关系

2、在指定点展开为幂函数（0以外）：

在 x_0 处展开

则设法表示成 $x-x_0$，后代入公式替换公式中 x

△ 先积后导步骤：

①、求 $\int f(x)\,dx = F(x)$

②、将 $F(x)$ 展开为幂级数

③、然后求导得结果

〈3、利用幂级数展开求高阶导数〉

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n \qquad f^{(n)}(0)$$

则 $f^{(n)}(0)=n!\,a_n$

4、常数的幂级数为本身

③、$S(x)$在$(-R,R)$内可积，且可逐项积分

即 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ $x\in(-R,R)$

注：括号问题：

若$\int_0^x S(x)dx$在$x=R$左连续，且$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$收敛

则x可取$+R$，$-R$同理

四、函数的幂级数展开

1、泰勒级数

$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\cdots$$

2、麦克劳林级数

当$x_0=0$时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

3、泰勒级数收敛定理、

在$|x-x_0|<R$内收敛于$f(x)$的充要条件：

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad (|x-x_0|<R)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

〈级数求和方法〉

一、常数项级数求和

①、求出部分和 S_n（③特殊数列：等比、等差、常数；可约去）

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

②、借助幂级数的和函数 $S(x)$

$\begin{cases} 将 a^n, \frac{1}{a^n} 换化为 x^n \quad x\in(-1,1) ✓ 勿忘收敛区间 \\ 加入 x^n, 令 x=1 \end{cases}$

常利用 (1)、逐项求导、逐项积分 ① ✓

(2) 幂级数的逆推（由"Σ"到 f(x)"）② ✓

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ ✓

$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots$

$$\begin{cases} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\ln(1-x) \end{cases}$$

二、求和具体方法

1、何时求导，何时积分？

①、n在分子，积分后导（有时可能及两次求导）

e.g. $nq^{n-1} = (q^n)'$

$nx^n = x(x^n)'$

②、n在分母，求导把分母约掉

e.g $\frac{x^{3n+1}}{3n+1} \xrightarrow{求导} x^{3n}$

2、学会设法凑 $\frac{x^n}{n}$ $\begin{cases} 根分母情况 n+1/n-1 \\ 凑出分子相应形式 \end{cases}$

3、求和：幂级数 → 原函数过程

4、拆是关键

记必要的逆：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ ✓

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\sin x / \cos x$ 另记

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ✓

→

4. n个常用的麦克劳林展开式

① $\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad x \in (-1,1)$

② $\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad x \in (-1,1)$

③ $\underbrace{e^x}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad x \in (-\infty,+\infty)$

④ $\underbrace{\sin x}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad x \in (-\infty,+\infty)$

⑤ $\underbrace{\cos x}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad x \in (-\infty,+\infty)$

⑥ $\underbrace{\ln(1+x)}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \;/\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}} = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \qquad x \in (-1,1]$ ✓

4. 求幂级数的和函数（无n只有x）
- ① 先求收敛半径，确定收敛域
- ② 先拆 → 逆推 / 求导积分
- ③ 注意收敛域是否分段

注意 $\sum_{n=1}^{\infty}$ / $\sum_{n=0}^{\infty}$ 区分

(三) 傅里叶级数

一、三角函数及其正交性

三角函数系

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx \cdots\}$

在 $[-\pi, \pi]$ 上正交.

即任何两个不同函数积 在 $[-\pi, \pi]$ 上积分为 0

e.g. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$ $\left(\begin{matrix} m, n = 1, 2 \cdots \\ m \neq n \end{matrix} \right)$

二、傅里叶级数

1. 傅里叶系数　　　扩展: $T = 2l$　$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n x \pi}{l} dx = a_n$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$　　$n = 0, 1, 2 \cdots$ ✓

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$　　$n = 0, 1, 2 \cdots$ ✓

2. 傅里叶级数

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$ ✓

$(-\pi, \pi)$　　($\pm\pi$, 间断点另讨论)

三、收敛性定理

(狄里克雷定理)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足

① 除有限个第一类间断点外都连续

② 只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上处处收敛, 且收敛于

① 当 x 为 $f(x)$ 的连续点,　$f(x)$

② 当 x 为 $f(x)$ 的间断点,　$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ ✓

③ 当 $x = \pm\pi$,　$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$ ✓

⇑

$f(x)$ 与 $S(x)$ 的关系

一、如何化傅里叶级数

1、先判断 $f(x)$ 的奇、偶性

若为奇，$a_n=0$

若为偶，$b_n=0$

2、求 a_n, b_n, a_0，代入公式

往往存在化简问题：

e.g. $\cos n\pi - 1 \quad n=1,2\cdots$

$n=1 \quad -2$

$n=2 \quad 0$ $\Rightarrow$ 令 $n=2k+1$ $(k=0,1,2\cdots)$

3、当积分区间为 $\int_a^{a+T}$

若 $f(x)$ 在 $(a, a+T)$ 内~~对称~~为奇/偶也可

四、周期为 2π 的函数的傅里叶展开

1、步骤：

①. 计算 a_n, b_n，写出傅里叶级数

②. 利用收敛性定理确定其傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的收敛性

2、傅里叶系数计算方法

①. $[-\pi,\pi]$ 上展开

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & n=0,1,2\cdots \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & n=1,2\cdots \end{cases}$$

②. $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数展开

· $f(x)$ 为奇

$$\begin{cases} a_n=0 & n=0,1,\cdots \\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & n=1,2\cdots \end{cases}$$

· $f(x)$ 为偶

$$\begin{cases} a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & n=0,1,2\cdots \\ b_n=0 & n=1,2\cdots \end{cases}$$

③. 在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或余弦级数

· 展为正弦

$$\begin{cases} a_n=0 & n=0,1,2\cdots \\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & n=1,2\cdots \end{cases}$$

· 展为余弦

$$\begin{cases} a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & n=0,1,2\cdots \\ b_n=0 & n=1,2\cdots \end{cases}$$

五、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶展开

1、$[-l, l]$ 上展开

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx & n=0,1,2\cdots \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx & n=1,2\cdots \end{cases}$$

2、其它同理：

$\begin{cases} \text{奇一正} \\ \text{偶一余} \end{cases}$

补充结论：

1、若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

（对于一般项级数不成立）

2、若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

则 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 必发散　　（条件发散 → 绝对发散）

3. 方法：

用比较法的极限形式判敛散性：

e.g.① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$　　去找 $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad (\text{同敛散})$$

②、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^a}$　　去找 $\frac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$

从而 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$

4、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ 也收敛 （去掉了前k项）

1、椭圆：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

① 焦点 $(\pm c, 0)$

半长轴：a $(a^2=b^2+c^2)$

短半轴：b

② 椭圆上任一点到两焦点距离和为 $2a$

③ $S=\pi ab$ 半轴 ✓

$S=\frac{\pi AB}{4}$ $A=2a$ $B=2b$

2、a^5-b^5

$=(a-b)(a^4b^0+a^3b^1+a^2b^2+a^1b^3+a^0b^4)$

规律：$(4+0=4, 3+1=4, 2+2=4, 1+3=4, 0+4=4)$

3、质心公式

若求 x 的质心 $\bar{x}$

①

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\cdot 密度\, dv}{\iiint_\Omega 密度\, dv}$$

即 $\bar{x}=\frac{乘x后的质量}{体积质量}$ $(m=\rho v)$

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\, dv}{V}$$ —体积

若密度均匀，~~分母=m=~~

②

$$\bar{x}=\frac{\iint_\Sigma x\, ds}{A}$$ (密度均匀)

A—面积