<高数>(一)

<第一章 函数 极限 连续>

(一) 函数

一、定义

1、邻域： $U(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$

称 x_0 的 δ 邻域

$\mathring{U}(x_0)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

称 x_0 的去心 δ 邻域

2、隐函数：对定义域内 x

$f(x,y)=0$ 有唯一确定 y

3、参数式表示的函数：

设 $x=x(t)$ $y=y(t)$

x 唯一确定 t，t 唯一确定 y

4、函数的有界性

当 $x\in X$ 时，$f(x)\le M$ （存在 M）

当 $x\in X$ 时，$f(x)\ge m$ （存在 m）

5、反函数

① Y 内的每一个 y，由 $y=f(x)$ 唯一确定 $x\in X$

记为 $x=f^{-1}(y)$ / $x=\varphi(y)$ $y\in Y$

$y=f^{-1}(x)$ 也可以

②、性质：

$y=f(f^{-1}(y))$ $x=f^{-1}(f(x))$

$$\begin{cases} y=f(x) \text{ 与 } x=f^{-1}(y) \text{ 图形一致} \\ y=f(x) \text{ 与 } y=f^{-1}(x) \text{ 关于 } y=x \text{ 对称} \end{cases}$$

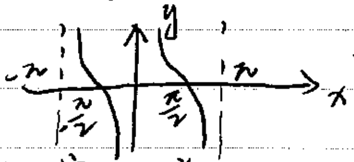
6、复合函数

$y=f(\varphi(x))$

一、函数

1、正切函数与余切函数

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

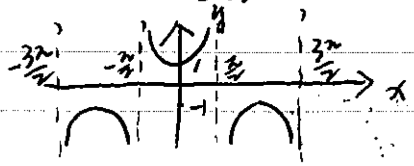


$x \neq k\pi$

$T = \pi$ 奇函数

2、正割函数

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

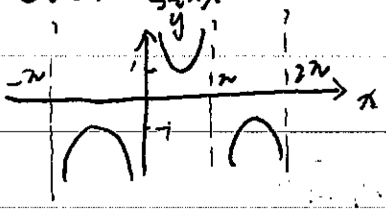


$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

值域 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

3、余割函数

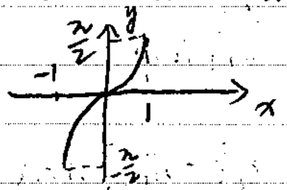
$\csc x = \frac{1}{\sin x}$



$x \neq k\pi$

4、反正弦函数

$y = \arcsin x$　$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (原)

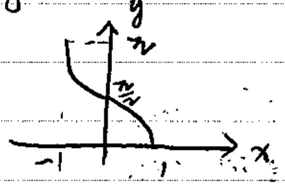


$x \in [-1, 1]$

$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$　单增，奇

5、反余弦函数　$x \in [0, \pi]$ (原)

$y = \arccos x$



小性质：$\arcsin x + \mathrm{arc}\cancel{\sin}\cos x = \frac{\pi}{2}$

其中 $y=f(u)$ $u=\varphi(x)$

7、基本初等函数

① 常值函数：$y=C$ $(x\in R)$

② 幂函数：$y=x^{a}$

③ 指数函数：$y=a^{x}$ $(x\in R)$

④ 对数函数：$\log_a x$ $x\in(0,+\infty)$

⑤ 三角函数：$y=\sin x$；$y=\cos x$

$$\begin{cases} y=\tan x & x\in(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}) \\ y=\cot x & x\in(k\pi,(k+1)\pi) \end{cases} \quad k\in Z$$

⑥、反三角函数：
$$\begin{cases} y=\arcsin x & x\in[-1,1] \\ y=\arccos x & x\in[-1,1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\arctan x \\ y=\operatorname{arccot} x \end{cases} (x\in R)$$

二、关于奇偶性

1、
- 奇×奇=偶
- 奇×偶=奇
- 偶×偶=偶

2、
- 奇奇复合为奇
- 偶偶复合为偶
- 偶奇复合为偶

3、若 $f(x)$ 定义域关于原点对称，可分解为一奇一偶之和

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

三、关于有界、无界的充分条件

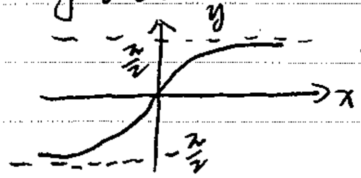
1、若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，则存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时 $f(x)$ 有界

$x\to x_0^+$ $0<x-x_0<\delta$ 时 同理

$x\to x_0$ $-\delta<x-x_0<\delta$ 时

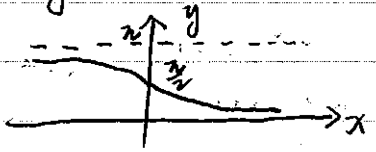
6、反正切函数 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$y=\arctan x$



7、反余切函数 $x\in(0,\pi)$

$y=\operatorname{arccot} x$



性质 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$

(求极限)

二、有关函数的处理

1、 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

2、 $x=e^{\ln x}$

$u^{v}=e^{v\ln u}$

3. 取整函数

$x-1<[x]\leq x$

4. 直线 $x=T$ 、$f(x)$ 关于对称

$f(x)=f(2T-x)$

$f(x+T)=f(T-x)$

2、若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界

同理 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$

3、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

4、若 $f(x)$ 在 U 上有最大值，则 $f(x)$ 在 U 上有上界

同理下界

5、有界 $\times$ 或 $+$ 有界 仍为有界

6、若 $\lim\limits_{x\to *} f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $*$ 的去心邻域内无界

(二) 极限

一、定义：1、数列的极限

① 给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$

当 $n>N$ 时，有 $|u_n-A|<\varepsilon$

称数列 $\{u_n\}$ 收敛

②、记 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$

2、函数的极限

① $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-A|<\varepsilon$

③ $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

二、无穷

1、无穷小

$\lim\limits_{x\to *} f(x)=0$ 称 $x\to *$ 时 $f(x)$ 为无穷小

三、数列基础

1、等差数列

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

2、等比数列

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} \quad (q \neq 1)$

常用：$1+q+q^2+\cdots q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

3、n个数列前n项和

①、$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots n = \frac{n(1+n)}{2}$

②、$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③、$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

④、$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5\cdots+(2n-1) = n^2$

⑤、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

⑥ $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2、无穷大

$\lim\limits_{x \to *} f(x) = \infty$

3、无穷小的比较

已知 $\lim\limits_{x \to *} a(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to *} B(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to *} \frac{a(x)}{b(x)} = A$
- $A \neq 0$ 时，$a(x)$ 与 $b(x)$ 为同阶无穷小
- ✓ $A = 1$ 时，$a(x)$ 与 $b(x)$ 为等价无穷小、 $a(x) \sim b(x)$
- ✓ $A = 0$ 时，$a(x)$ 为 $b(x)$ 的高阶无穷小 $a(x) = o(B(x))$
- $A = \infty$ 时，$a(x)$ 为 $b(x)$ 的低阶无穷小

~~三~~ 4、无穷小与无穷大的关系

① 若 $\lim\limits_{x \to *} f(x) = \infty$，则 $\lim\limits_{x \to *} \frac{1}{f(x)} = 0$

② 若 $\lim\limits_{x \to *} f(x) = 0$，且 $f(x) \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to *} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

三、极限性质

1、① 极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$; $f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$

② 数列极限存在的充要条件

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A$: $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} u_{2n-1} = A$

2、① 极限唯一性

若极限存在必唯一

② 极限保号性

若 $\lim\limits_{x \to *} f(x) = A$，$A \neq 0$

则存在 $*$ 的一个去心邻域，此邻域内 $f(x)$ 与 A 同号

③ 保号性推论

若在 $*$ 的一个去心邻域内，$f(x) \geq 0$.

四、三角函数基础

1、基本关系

$$1+\tan^2 a = \sec^2 a$$

$$1+\cot^2 a = \csc^2 a$$

2、

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-a) = \cos a \\ \sin(\frac{\pi}{2}+a) = \cos a \\ \sin(\pi-a) = \sin a \\ \sin(\pi+a) = -\sin a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-a) = \sin a \\ \cos(\frac{\pi}{2}+a) = -\sin a \\ \cos(\pi-a) = -\cos a \\ \cos(\pi+a) = -\cos a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\pi-a) = -\tan a \\ \tan(\pi+a) = \tan a \\ \tan(\frac{\pi}{2}-a) = \cot a \\ \tan(\frac{\pi}{2}+a) = -\cot a \end{cases}$$

3、公式

①. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1-2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$

②. $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a)$

③ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\tan(a+\beta) = \dfrac{\tan a + \tan\beta}{1-\tan a\tan\beta}$

④. 积化和差

$$\begin{cases} \sin a\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(a+\beta)+\sin(a-\beta)] \\ \sin a\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(a-\beta)-\cos(a+\beta)] \\ \cos a\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(a+\beta)-\sin(a-\beta)] \\ \cos a\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(a+\beta)+\cos(a-\beta)] \end{cases}$$

且 $\lim\limits_{x\to *} f(x)=A$，则 $A\geq 0$

四、判极限存在的两个重要法则

1、夹逼定理

若 $\begin{cases} ① & * \text{的去心邻域内 } g(x)\leq f(x)\leq h(x) \\ ② & \lim\limits_{x\to *} g(x)=\lim\limits_{x\to *} h(x)=A \end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to *} f(x)=A$

2、单调有界定理

①设数列 $\{u_n\}$ 单调增加，②且有上界 M

则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在且 $\leq M$

五、几个重要极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （推广：$\lim\limits_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$）

2、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （推广：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$）

3、$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \end{cases}$

4、$\lim\limits_{x\to 0^+} x^m(\ln x)^n=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^m e^{-nx}=0$ $(m>0, n>0)$

⑤、和差化积

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

⑥、万能公式

若 $u=\tan\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$

则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

五、其它基础

1、根公式：
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

韦达定理：
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

顶点：$\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$

2、$\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}$

3. 二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+C_n^2a^2b^{n-2}\cdots C_n^na^nb^0$$

4. 阶乘

①. $0!=1$

②. $(2n)!!=2\times4\times6\times\cdots\times2n=2^n\cdot n!$

③. $(2n-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$

六、几个重要的等价无穷小 （$x \to 0$时）

(1) 1、$\sin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

✓ 2、$e^x - 1 \sim x$ （$1-e^{-x} \sim x$）

3、$\ln(1+x) \sim x$

4、$(1+x)^a - 1 \sim ax$ （$(1+x)^2 - 1 \sim 2x$）

5、$a^x - 1 \sim x\ln a$ $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

6、$\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

7、$x^m + x^n \sim x^m$ （$n > m > 0$）

---

(2)、等价无穷小替换定理：

加减时不能用，部分式子的乘、除因子也不能

(3) $a(x) \sim b(x)$ 的充要条件：

$a(x) - b(x) = o(b(x))$

其中：$o(x^n) = x^{n+m}$ （$m>0$）

（$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+m}}{x^n} = 0$）

<极限与连续补充>

1、数列收敛的充要条件：

① 若数列$\{a_n\}$收敛，则其任何子列$\{a_{n_k}\}$也收敛

且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

② 数列$\{a_n\}$，$\begin{cases} \text{找到一个发散子列} \\ \text{两个收敛子列极限不同} \end{cases}$ → 发散

2、函数极限的另一表述形式

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

⇓

$f(x) = A + \alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

3. 函数极限的局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $\exists M, \delta > 0$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \le M$

4、无穷与个无穷小乘积 不一定为无穷小

5、海涅定理

如：令 $x_n = \frac{1}{n\pi}$　　$x_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$

$n\to\infty\ (x\to 0)$　　$n\to\infty$

可证函数极限不存在

6、函数连续的另一种定义

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$

则 x_0 为 $f(x)$ 连续点

七、极限运算法则

1、$\lim\limits_{x\to *}(u(x)\pm v(x)) = \lim\limits_{x\to *}u(x) \pm \lim\limits_{x\to *}v(x)$

2、$\lim\limits_{x\to *}(u(x)v(x)) = \lim\limits_{x\to *}u(x)\cdot \lim\limits_{x\to *}v(x)$

3、$\lim\limits_{x\to *}(Cu(x)) = C\lim\limits_{x\to *}u(x)$

4、$\lim\limits_{x\to *}\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to *}u(x)}{\lim\limits_{x\to *}v(x)}$

5、$\lim\limits_{x\to *}u(x)=0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to *}k(x)u(x)=0$

$\Downarrow$

$k(x)$在$*$的去心邻域内有界

注：1 拆开的前提是拆开后各项极限存在

八、洛必达法则

1、若
$$\begin{cases} ① \ \lim\limits_{x\to *}f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to *}g(x)=0 \\ ② \ f(x)\text{与}g(x)\text{在}*\text{的去心邻域内可导，} g'(x)\neq 0 \\ ③ \ \lim\limits_{x\to *}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (\infty) \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to *}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2、① 换成 $\lim\limits_{x\to *}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to *}g(x)=\infty$

同样成立

做题总结：

1、若用洛必达法则，得结果必为存在或∞，否则不可用

2、① $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 存在 $\longrightarrow$ $\lim f(x)\pm g(x)$ 必存在

拆开的前提为拆开后极限都存在

② $\lim f(x)$ 不存在，$\lim g(x)$ 存在 $\longrightarrow$ $\lim f(x)\pm g(x)$ 必不存在

③、$\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在 $\longrightarrow$ $\lim f(x)+g(x)$、$\lim f(x)-g(x)$ 都不存在 存在一个

3、时刻注意洛必达法则条件：

①、说明 $f(x)$ 可导（邻域内）

②、极限为∞或存在

4. $x\to 0$ 时，才可用泰勒定理

$\sin x$、$\cos x$ 常用，应记 $\ln(1+x)$、e^x

5、已知一极限，求另一极限：

引入 α，$\lim \alpha = 0$ 从而去掉"lim"

6、见根号，常分子有理化处理

√7、n项和、n项积的数列 常用积分和式

公式：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$ 或 $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(\frac{i}{n})$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$

（整理为 $\frac{i}{n}$ 的函数，后用 $x=\frac{i}{n}$ 替换）

8. $\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \\ |x| \end{cases}$ $\begin{matrix} x\to 0^+ \\ x\to 0^- \end{matrix}$ 不相等

九、泰勒公式

1、定义：在 $x=x_0$ 处展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

其中佩亚诺余项 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$

2、几个常用函数在 $x=0$ 处展开（P12）

① e^x

② $\sin x$，$\cos x$

③ $\ln(1+x)$

④ $(1+x)^m$

(三) 函数的连续与间断

一、定义

1、函数在一点处连续：若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

2、一点处左连续：若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的左邻域 $x_0-\delta<x<x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续

3、区间连续：$f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处都连续

对于 $[a,b]$，$x=a$ 为右连续

$x=b$ 为左连续

求极限方法：

1、恒等变换进行化简、约分

2、若有因式极限存在且不为0，可先进行运算

3、等价无穷小替换、几个重要极限

4、洛必达法则

5、佩亚诺余项泰勒公式 $o(\ )$… $\begin{cases} e^x \\ \ln(1+x) \\ \sin x, \cos x \end{cases}$

6、夹逼定理 (数列)

7、积分和式 (求n项和、积)

二、第一类间断点

1、可去间断点

$f(x)$在$x=x_0$的某心邻域内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在

① $f(x_0)$无定义

②、$f(x_0)$有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不相等

2、跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$　　但存在

三、第二类间断点

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个不存在

无穷间断点，振荡间断点

四、闭区间上连续函数的性质

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

1、有界性定理

$f(x)$在$[a,b]$上有界

2、最值定理

$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值

3、介值定理

若m、M为$f(x)$在$[a,b]$上最小值、最大值，

且$m \le \mu \le M$

则至少存在$\xi \in [a,b]$，$f(\xi)=\mu$

4、零点定理

若$f(a)f(b)<0$，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$

使$f(\xi)=0$

注：$m<\mu<M$，则$\xi \in (a,b)$

〈第二章 一元函数微分学〉

(一) 导数与微分

一、定义

1、导数

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

2、左、右导数

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$$

3、微分

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微

(其中 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$)

称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微分

即 $dy=A\Delta x = A dx$

4、高阶导数

① 二阶 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$ $\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\right) = f''(x_0)$

②. n阶 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} = f^{(n)}(x_0)$

1、定义：$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$dy = f'(x_0)\Delta x$

$\Delta y > dy \quad (f''(x)>0)$

2、双中值问题

$\eta \neq \delta$ 学会设 $\begin{cases} \eta \in (0,\xi) \\ \delta \in (\xi,1) \end{cases}$

3、① $f'(x)$ (a,b) 有界

$\downarrow$

$f(x)$ (a,b) 有界

② $f(x)$ (a,b) 无界

$\downarrow$

$f'(x)$ (a,b) 无界

其它一般不成立

4、积分中值定理

$$\int_a^b f(x)\,dx = f'(\xi)(b-a)$$

$\xi \in (a,b)$

5、$x > \ln(1+x) \quad x \neq 0$

6、反函数存在充分条件：

$f(x)$ 在定义域内严格单调的连续（分段连续）函数

7、椭圆：

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(x_1,y_1) 处切线为：$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

8、$\frac{1}{x}f(\frac{1}{x}) - f(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} f(\frac{1}{u})\,du$

即 $af(x) - bf(x) = \int_b^a f(x)\,dt$

加"$\int$"的方法

二、可微的判别

1、写增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

2、写线性增量 $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$

3、作极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}$

若极限为0，则 $f(x)$ 在 x_0 处可微

三、关系

1、可导必连续，连续不一定可导

2、可导 $\longrightarrow$ 左、右都可导，$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$

3、可导 $\Leftrightarrow$ 可微

$dy = f'(x)dx$

4、$\Delta y = dy + o(\Delta x)$

✓ $\Delta y - dy = \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2$　$\xi \in (x_0, x_0+\Delta x)$

四、变限积分求导公式

$$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt \right)' = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

五、参数式所确定函数求导

$y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 所确定

① $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

② $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$

六、反函数求导

1、$y = f(x)$ 反函数 $x = \varphi(y)$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$　　$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

1、高阶导数利用幂级数求法：

$$\begin{cases} \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{cases}$$

则 $\varphi^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$

2、夹逼定理 放缩方法

①常用大的项进行放缩

3、重要证明：

若 $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\infty$，则 $f'(x_0)$ 不存在

反证法：设 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

则 $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\infty$ 条件下

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to x_0} f'(x)=\infty$$

矛盾，则 $f'(x_0)$ 不存在

4、和的导数存在

⇏

两项导数存在

5、$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在二阶导数，即 $f''(x_0)$

可知：在 $x=x_0$ 的某邻域内，$f'(x)$ 存在

无法得：$f''(x_0)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内存在

故 在 $x=x_0$ 的某邻域内 $\begin{cases} f(x) \text{ 可导得 } f'(x) \\ f'(x) \text{ 不可导得 } f''(x) \end{cases}$

2、$\varphi''(y) = -\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \cdots$$

七、隐函数求导

$F(x, y) = 0$

1、两边对x求导，得含$\frac{dy}{dx}$的式子（y'）

将$y=y(x)$看作中间变量

2、解出y'即可

八、高阶导数运算

1、$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} \underset{v}{\underset{\Downarrow}{v^{(0)}}} + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots C_n^n \underset{u}{\underset{\Downarrow}{u^{(0)}}} v^{(n)}$

2、n个常见n阶导数

①、$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$　　幂级数

②、$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(\frac{n\pi}{2} + ax)$

③、$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(\frac{n\pi}{2} + ax)$

④、$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$

⑤、$(\ln(x+1))^n = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

⑥、$((1+x)^n)^{(n)} = n!$　（n为正整数）

$((1+x)^n)^{(n+j)} = 0$

九、幂指函数求导　$u(x)^{v(x)}$

1、$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$

$\Downarrow$

2、$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left[\dfrac{v(x)}{u(x)} u'(x) + \ln u(x) \cdot v'(x)\right]$

1、凹凸定义：

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad 凹$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad 凸$$

2、间断点可能是极值点

十、n个求导公式

1、$a^x = a^x \ln a$

2、$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

3、$\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos x^2}$

4、$\cot x = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin x^2}$

5、$\begin{cases} \sec x = \sec x \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ \csc x = -\csc x \cot x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{cases}$

6、$\begin{cases} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

$\begin{cases} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \\ \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

7、$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(二) 导数的应用

一、定义

1、极值 ✓

2、最值（驻点，不可导点，端点）

3、凹凸性：$\begin{cases} f''(x) \geq 0 & 凹 \\ f''(x) \leq 0 & 凸 \end{cases}$

4、拐点：凹凸弧分界点

① 拐点 $\longrightarrow f''(x_0)=0$

② $\begin{cases} f''(x_0)=0 \\ f'''(x_0)\neq 0 \end{cases} \rightarrow$ 拐点

5、驻点：$f'(x)=0$ 的解

二、极值的充分条件

$f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)\neq 0$

$\begin{cases} 1、 f''(x_0)<0 & f(x_0) \text{ 极大值} \\ 2、 f''(x_0)>0 & f(x_0) \text{ 极小值} \end{cases}$

（若区间内只有一个极值点，则必为最值点）

三、渐近线的求法

1、水平渐近线

$\lim\limits_{\begin{cases} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases}} f(x)=b$ 则 $y=b$ 为一条水平渐近线

2、铅直渐近线

$\lim\limits_{\begin{cases} x\to x_0^- \\ x\to x_0^+ \end{cases}} f(x)=\infty$ 则 $x=x_0$ 是一条铅直渐近线

3、斜渐近线（一条或二条）

$\lim\limits_{\begin{cases} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases}} \frac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{\begin{cases} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases}} (f(x)-ax)=b$

则 $y=ax+b$ 为一条斜渐近线

四、曲率、曲率半径

1、$y=f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 处曲率

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

2、曲率半径

$$R=\frac{1}{k}$$

中值定理补充:

1、平均值定理: 当 $a<x_1<x_2<\cdots x_n<b$ 时

在 $[x_1, x_n]$ 内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$$

2、费马定理证明:

设 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值

由极大值定义: 任意 $x\in U(x_0)$

$f(x)\leq f(x_0)$

则 $\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \end{cases}$

又 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

故 $f'(x_0)=0$

3、推广罗尔定理 (对 $f(a)=f(b)$ 推广)

①. $\lim\limits_{x\to a^+}=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$ (a,b)

② $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\pm\infty$ (a,b)

③. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ $(a,+\infty)$

④、$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$ $(-\infty,+\infty)$

(三) 中值定理、不等式、零点

一、涉及导数(微分) $f'(x)$ 的中值定理

1、费马定理

设 $f(x)$ 满足 x_0 处 ①可导 ②取极值

则 $f'(x_0)=0$

2、罗尔定理

设 $f(x)$ 满足 ① $[a,b]$ 上连续 ② (a,b) 内可导 ③ $f(a)=f(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0$

3、拉格朗日中值定理

由 $f'(x)$ 某性质推 $f(x)$

设 $f(x)$ 满足 ① $[a,b]$ 上连续 ② (a,b) 内可导

则存在 $\xi\in(a,b)$ $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

或 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

4、柯西中值定理

设 $f(x)$, $g(x)$ 满足 ① $[a,b]$ 上连续 ② (a,b) 内可导 ③ $g(x)\neq 0$

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

5、泰勒定理

($f''(x)$ 存在，且 $f''(x)$ 知符号)

$f(x)$ 满足 ①. $[a,b]$ 内有 n 阶连续导数 ② (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数 ③ $x_0\in[a,b]$，$x\in[a,b]$

则至少存在 $\xi\in(x_0,x)$ 使

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

4、微分不等式补充：

1、 $a^2+b^2 \geq 2|ab|$

$|a|+|b| \geq |a \pm b|$

$|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$

$\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

2、 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ （$a_1=a_2=\cdots a_n$ 取等号）

常用：$\begin{cases} n=2\text{时} & \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \\ n=3\text{时} & \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \end{cases}$

3、 ① $e^x \geq x+1$

② $x-1 \geq \ln x$ （$x>0$）

③ $\frac{1}{x} > \ln(1+\frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$ （$x>0$）

④ $\arcsin x \geq x \geq \arctan x$ （$0 \leq x \leq 1$）

⑤、 $\tan x > x > \sin x$ （$0<x<\frac{\pi}{2}$）

$\sin x < x$ （$x>0$）

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

二、微分学证不等式

在 (a,b)，证 $f(x)\geq g(x)$ $(f(x)>g(x))$

令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

1、① $\left.\begin{array}{l}\varphi(a)\geq 0\\ \lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)\geq 0\end{array}\right\}$ $\varphi'(x)\geq 0$

单调性证的方法

② $\left.\begin{array}{l}\varphi(b)\geq 0\\ \lim\limits_{x\to b^-}\varphi(x)\geq 0\end{array}\right\}$ $\varphi'(x)\leq 0$

③ $\varphi(x)$ 最小值 ≥ 0

2、用拉格朗日中值公式证

如果证：

$f(b)-f(a)>A(b-a)$

由于 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，则只需证 $f'(\xi)>A$

3、用柯西中值公证证

如果证：$\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\leq A$ $\quad x\in(a,b)$

由于 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\leq A$ $\quad x\in(a,b)$ 即可证

4、用拉格朗日余项泰革力公式证

如果能推出 $f''(x)$ 存在且 $f''(x)>0$ (或 <0)

则将 $f(x)$ 在适当 $x=x_0$ 展开

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$

泰勒公式展开法

给出 $f''(x)$ 存在 且 $f''(x)$ 具有一定符号

①. 消 $f'(x_0)$ 为关键：

在 $f(x)$ 驻点处展开 $f'(x_0)=0$

②、将已知数据代入后，再适当取 x_0

补充考点问题：

1、费马定理证：为证 $f(x)=0$ 有根

可取 $f(x)$ 原函数 $F(x)$

证 $F(x)$ $\begin{cases} 连续 x_0 \\ x_0 处取极值 \end{cases}$ 证取极值：$\begin{cases} x \in U(x_0) \\ f(x_0) \geq f(x) \end{cases}$

2、多项式有重根 充要条件

x_0 为 $P(x)=0$ 的 r 重根 充要条件：

$$\begin{cases} P(x_0)=P'(x_0)=P''(x_0)=\cdots=P^{(r-1)}(x_0)=0 \\ P^{(r)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$$

三、零点问题

1、存在性

① 根据 函数介值定理 / 零点定理

②、根据罗尔定理：

若 $f(x)$ 有 k $(k\geq 2)$ 个零点

则 $f'(x)$ 至少有 $k-1$ 个，$f^{(k-1)}(x)$ 至少有 1 个

2、至多 n 个零点

① $f'(x)$ 无零点， $f(x)$ 至多 1 个

② $f'(x)$ 至多 1 个 $f(x)$ 至多 2 个

……

③ $f'(x)$ 至多 k 个 $f(x)$ 至多 $k+1$ 个

④、$f''(x)$ 无零点，$f'(x)$ 至多 1 个，$f(x)$ 至多 2 个

四、零点做题方法

1、化用罗尔定理

$f(a)=f(b)$ $[a,b]$ 内连续 (a,b) 内可导

$\Downarrow$

$f(\xi)=0$ $\xi\in[a,b]$

① 若证 $f(\xi)=0$， $\longrightarrow$ 构造 $F'(x)=f(x)$

积分法： $F(x)=\int f(x)$

找 $F(a)=F(b)$ 则 $f(\xi)=0$

② 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$\downarrow$

则 $F'(x)=f(x)$ 只需找到 $F(a)=F(b)$ 则证 $f(\xi)=0$

2、若证 $f'(\xi)=0$

当不方便罗尔定理时，可用极值法

极值法：已知 $[a,b]$ 内可导 $\rightarrow$ 则必连续 $\rightarrow$ 则必有最值

设法证 两端点不为最值 $\rightarrow$ 则最值在内部 $\rightarrow$ 最值为极值 $\rightarrow f'(\xi)=0$

3、若证等式零点，含 x，$f(x)$，$f'(x)$

①、微分方程法

{用罗尔定理 $f'(\xi)=0$
{故构造 $\varphi'(x)=$原式 或 原式 $\times g(x)$ $(g(x)\neq 0)$

如：$(1+x)f'(x)-f(x)=0$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{f(x)}{1+x} \longrightarrow \frac{df(x)}{f(x)}=\frac{dx}{1+x}$$

两边积分 $\ln|f(x)|=\ln|1+x|+C_1$

$|f(x)|=C|1+x|$

则 $\frac{f(x)}{1+x}=C$ 令 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{1+x}$

②、观察法

原式 $=\left(\frac{f(x)}{1+x}\right)'(1+x)^2$

取 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{1+x}$

4、证 $f''(\xi)$，$f'''(\xi)$

考虑三个零点，泰勒公式

一般方法
- ①、拉格朗日中值定理 （注意"$f(x)=0$"的条件）
- ②、罗尔定理 （找原函数相等）
- ③、柯西中值定理 （挖掘隐藏条件）
- ④、泰勒公式 （一般高阶，知 $f''(\xi)$ 正负）
- ⑤ 介值定理
- ⑥、零点定理

{等式可化为零点问题
{不等式作差构造函数

《第三章 一元函数积分学》

(一)、不定积分、定积分的概念、性质

一、不定积分

1、定义：$f(x)$ 的原函数 $F(x)+C$

$$F'(x)=f(x)$$

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

2、性质：

①、$\begin{cases}\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)\\ d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx\end{cases}$

②、$\begin{cases}\int f'(x)\,dx=f(x)+C\\ \int df(x)=f(x)+C\end{cases}$

③、$\int(f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

④ $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

二、定积分

1、定义：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx$$

其中：$\begin{cases}\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i|\ )\\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}\\ x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\end{cases}$

2、定积分存在定理：$\int_a^b f(x)\,dx$

①、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 /

②、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点

3、原函数存在定理

① 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $[a,b]$ 上必存在原函数

② 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有跳跃间断点 $x_0\in(a,b)$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必不存在原函数

积分学补充：

1、估值定理：

M，m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，

L 为区间 $[a,b]$ 的长度，则

$mL \le \int_a^b f(x)dx \le ML$

2、变限积分性质

①、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续

②、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导

3、可积函数必有界

若 $\int_a^b f(x)dx$ 存在

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界

原函数与被积函数奇偶性

原 $F(x)$ $\begin{cases} 奇 \to f(x)偶 \\ 偶 \to f(x)奇 \end{cases}$

被积 $f(x)$ $\begin{cases} 奇 \to F(x)偶 \\ 偶 \times F(x)奇 \end{cases}$ ✓

（用 $\int f(x)dx = \underbrace{\int_0^x f(t)dt}$）

只是 $f(x)$ 原函数之一

4、牛顿-莱布尼茨定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

5、性质

①、$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

②、$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

③、若 $a\le b$，$f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ （保号性）

④、若$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f(x)\le g(x)$

且至少存在点x_1，$a\le x_1\le b$，使$f(x_1)<g(x_1)$，则

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

⑤ 积分中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点、

$\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

三、不定积分与定积分关系（原函数的两种形式）

1、若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \qquad x\in[a,b]$$

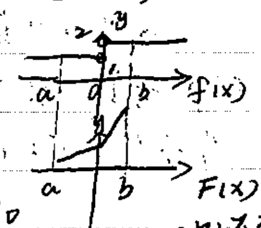
则 $\int_a^x f(t)dt$ 为$f(x)$的一个原函数

即 $\overset{①}{\int} f(x)dx = \overset{②}{\int_a^x} f(t)dt + C$

2、$f(x)$在$[a,b]$上除点$x=x_0\in(a,b)$外均连续，且

$f(x_0^-)\ne f(x_0^+)$

记 $F(x)=\int_c^x f(t)dt$



$x=0$处不可导，但连续

则：①、$F(x)$在$[a,b]$上连续

②、$F'(x)=f(x)$ $x\in[a,b]$且$x\ne x_0$

③、$F'_-(x_0)=f(x_0^-)$ $F'_+(x_0)=f(x_0^+)$

$$\begin{cases}\sin\arcsin x = x\\ \cos\arcsin x=\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

积分计算训练：

1、$\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=-\frac{1}{x-1}$　　$\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{1+x^2}$　（凑微分）

2、分式分母无法分解时：

分式：① 观察分母求导与分子的关系

拆为第二项分子中只含常数

②、分子为常数：

用基本公式 $\frac{1}{a^2\pm x^2}$

3、因式分解方法（见分式优先分解）

①、$\frac{1}{x(x-1)^2}\longrightarrow\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$

通分求 A、B、C

② $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$

通分求 A、B、C

4、三角函数有理分式

①、利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$

$(\sin^2x+\cos^2x)^2=1$

②、尽量设法约分

③、会化为同角

④ 分母去掉或化为单项式

☆ $\int\frac{C\sin x+D\cos x}{A\sin x+B\cos x}$ 拆项方法：

$=\frac{h(A\cos x-B\sin x)}{A\sin x+B\cos x}+\frac{k(A\sin x+B\cos x)}{A\sin x+B\cos x}$

$\begin{cases}C=-Bh+Ak\\ Ah+Bk=D\end{cases}$

从而 $=h\ln|A\sin x+B\cos x|+kx+C$

5、带根号处理方法

①、直接将整体换元

若 $\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt[m]{ax+b}$，常令 $t=\sqrt[k]{ax+b}$

（k为 n, m 最小公倍数）

② 三角函数换元

若不是 $x^2\pm a^2$，a^2-x^2 的形式，看配方是否可以得到

(二) 不定积分与定积分计算

一、基本积分公式

1、 $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$

2、 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3、 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0)$

4、 $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

5、 $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

6、 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

√ 7、 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

√ 8、 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

二、3个有用的定积分公式

1、 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$$

2、 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为连续奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$$

3、 若 $f(x)$ 在 R 上为以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

6. 对称限的定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$

① 若被积函数 $\begin{cases} 奇 & 则 = 0 \\ 偶 & 2\int_0^a \\ 非奇非偶: & 用换元法,将 \int_{-a}^{a} \to \int_0^a 拆开后,拆分 \end{cases}$

7. n种换元

①. a^2+x^2 时, 令 $x = a\tan t$

则 $\begin{cases} a^2+x^2 = a^2\sec^2 t \\ dx = a\sec^2 t \end{cases}$

②、积分限 $\int_0^{\pi}$ 且 $\sin x$, 可令 $x=\pi-t$

即 $x+t=$ 上积分限

③ 若 $|\sin t|$ 带绝对值:

用 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 去绝对值

即分 $(0,\pi)$ $(\pi,2\pi)$ ……

4、华里士公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为偶正} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1 & n\text{为大于1的正奇} \end{cases}$$

三、凑微分求积分法

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$\begin{cases} e^x \\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{(x-1)^2},\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \sin x,\ \cos x \\ x,\ x^2\cdots \end{cases}$$

令 $\varphi(x)=u$

则 $\int f(u)\,du \to F(u)+C = F(\varphi(x))+C$

四、换元积分法（不定积分）

1、$$\int f(x)\,dx \xrightarrow{\text{令 } x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

后代回成x的函数

2、n种典型类型换元

①、$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$，$\int R(x,\sqrt{x^2\pm a^2})\,dx$ 型

$$\begin{cases} \text{含 } \sqrt{a^2-x^2}，\text{令 } x=a\sin t \ ✓ \\ \text{含 } \sqrt{x^2+a^2}，\text{令 } x=a\tan t \\ \text{含 } \sqrt{x^2-a^2}，\text{令 } x=a\sec t \end{cases}$$

②、$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})\,dx$ 型

令 $\sqrt[mn]{ax+b}=t$ ✓

$x=\frac{t^{mn}-b}{a}$

$dx=\frac{mn}{a}t^{mn-1}\,dt$

⑤ $\begin{cases} e^x=t \\ \text{则 } x=\ln t \end{cases}$

$\begin{cases} \arcsin x=t \\ \text{则 } x=\sin t \end{cases}$

③、$\int R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 型

令 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ $\quad x=\frac{dt^2-b}{a-ct^2}$ $\quad dx=\frac{2(ad-bc)t}{(a-ct^2)^2}\,dt$

④、$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ 型

令 $\tan\frac{x}{2}=t$ $\quad \begin{cases} \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ $\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$

五、换元积分法（定积分）

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

其中 $a=\varphi(\alpha)$ ，$b=\varphi(\beta)$

六、分部积分法

1、$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$

选取 $v(x)$ 应能积分

也可写成 $\int u(x)\,d\,v(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,d\,u(x)$

定积分同理、

2、几种用分部积分的情况

①、e^x，$\sin x$，$\cos x$ 与 x^n 的乘积

②、x^n 与 $\ln x$、$\arctan x$、$\arcsin x$ 的乘积

$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 　只能求导，无法积

---

③、$\int e^x \sin x\,dx$ $\int e^x \cos x\,dx$ 型，应连用两次

④ 被积函数中含导数

（三）、反常积分及计算

一、无穷区间上的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad 或 \int_{-\infty}^{b}、\int_{-\infty}^{+\infty}$$

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 存在，称收敛

二、无界函数的反常积分

1、$\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\x\to b^-}} f(x)=\infty$ 　（a，b 称奇点）

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

2、若 c 在 (a, b) 内为奇点，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

有一个发散，则反常积分发散

三、对称区间上奇、偶函数反常积分

对于反常积分，若用奇偶性质，则需要 一半知收敛
若存在奇点，若对称奇点，也可用奇偶性． 连续

四、识别反常积分

1、积分限有 ∞，必为反常积分

2、被积函数有使其分母为 0 的点，或 lnx 之类．

五、重要反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \quad (换元)$$

五、判反常积分收敛

①、若不是反常积分，则收敛

②、将原函数求出，代入积分限观察

③ 若原函数中任意项发散，则发散

(四)、涉及定积分的证明题

一、积分不等式证明

1、若积分限相同：

① 若证 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

证 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)\geq g(x)$ 即可

②、

若证 $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

证 $x\in[a,b]$ 时，
$\begin{cases} f(x), g(x) \text{ 连续} \\ f(x)\geq g(x) \\ \text{至少存在一点 } x_1\in[a,b],\ f(x_1)>g(x_1) \end{cases}$

（换元法大集）

2、若积分限不同

可通过变量代换将积分限变成一样

3、若一个有积分限，另一个没有积分限

①、用积分中值定理 去积分

②、套上积分号

4、用微积分学方法处理

①、变限法

{将积分限的参数看作未知数 ⇒ "变限函数"
未知数看作参数

进而求导，通过单调性，最值判断

②、见 $f(a)=f(b)$ 形式 ⊕ $f'(x)$

可考虑拉格朗日中值定理

③ $f''(x)$ ，$f(x)$ 关系 （二阶导数的估证证函数估值）

可考虑用泰勒公式

5、若 $\int_a^b$ 与 $\sum_{i=1}^{n}$ 进行运算

$\int_a^b$ 可经过拆后求和得 $\sum_{i=1}^{n}$

如 $\int_a^b \rightarrow \sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\cdot\frac{b-a}{n}}$

$a \rightarrow \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{拆为n份}} \rightarrow b$

从第一份到第n份相加a

6、若积分限类似 $\int_0^{\pi}$ $\int_0^{2\pi}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

① 可将积分限折叠为一半 （区间刻小）

②、另一半通过换元整理得到 （$x=\frac{\pi}{2}-t$ $x-\pi=t$ $x-\frac{\pi}{2}=t$）

7、分部积分法

8、积分中值定理

9、积分变量代换

二、由积分定义的函数求极限

一般含有 n、x

$\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx$ 形式

1、对于 n、$f_n(x)$

常用放缩法进行放缩后用夹逼定理 { 去分母放缩 / 0 / 倍乘 …

2、可用积分中值定理，去掉积分号

三、零点问题

1、方法：①、化成变限积分，从而构建函数，(微分学)

②、积分中值定理 (泰勒公式) 罗尔定理

③、零点定理 + 介值定理

2、善于构造 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 这类函数

3、牢记 $f(x)-f'(x)$ 这类函数求原函数方法

$$f(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{df(x)}{f(x)}=dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{df(x)}{f(x)}=\int dx \Rightarrow \ln f(x)=x+C$$

从而 $f(x)=Ce^{x}$

$c=e^{-x}f(x)$ 即为构造函数

4. 零点证唯一性

一般为证单调，即 $f'(x)>0$ 或 <0

(五) 定积分的应用

一、基本方法

关键在于微元法

设所求的量F依赖于区间$[a,b]$以及该区间上定义的函数$f(x)$，且满足

(1) $f(x)$为常数f时，

$$F=f\cdot(b-a)$$

(2) 将区间$[a,b]$分为Δx之和，F也被分为ΔF之和

$f(x)$在$[x,x+\Delta x]$视为常量，则

$$\Delta F\approx f(x)\Delta x \qquad \text{取微元}$$

$$\Delta F=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

即 $$dF=f(x)dx \qquad \text{取微元}$$

$$F=\int_a^b f(x)dx$$

二、平面图形面积

1、曲线 $y_2(x)$，$y_1(x)$ $(y_2(x)\geq y_1(x))$ 及$x=a$，$x=b$围成面积

$$A=\int_a^b(y_2(x)-y_1(x))dx$$

2、曲线 $x_2(y)$，$x_1(y)$ $(x_2(y)\geq x_1(y))$ 及$y=c$，$y=d$围成面积

$$A=\int_c^d(x_2(y)-x_1(y))dy$$

3、极坐标曲线 $r=r(\theta)$ 介于两射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 之间的曲边扇形面积

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta \qquad (S=\frac{1}{2}\theta R^2、\frac{1}{2}R^2)$$

三、平面曲线的弧长

1、参数方程曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $\alpha<t<\beta$

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

2、直角坐标 $y=y(x) \quad (a\le x\le b)$

$$S=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

3、极坐标曲线 $r=r(\theta) \quad (\alpha\le\theta\le\beta)$

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

四、旋转体体积

1、$y=y(x)$，$x=a$，$x=b$，x轴　绕x轴旋转一周

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx \quad (a<b)$$

2、$y=y_2(x)$，$y=y_1(x)$，$x=a$，$x=b$　$(y_2(x)\ge y_1(x)\ge 0)$
绕x轴旋转一周

$$V=\pi\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,dx \quad (a<b)$$ "圆面"

3、$y=y_2(x)$，$y=y_1(x)$，$x=a$，$x=b$　$(y_2(x)\ge y_1(x)$　$b>a\ge 0)$

绕y轴旋转一周　("圆柱壳"法)

$$V=2\pi\int_a^b x(y_2(x)-y_1(x))\,dx$$ "柱面"

五、旋转曲面面积

1、$[a,b]$　$y=f(x)$ 绕x轴旋转一周 形成旋转曲面

记　$$S=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \quad a<b$$

2、$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$　$\alpha\le t\le\beta$　$\begin{cases}\text{绕}x\text{轴} \to |y(t)|\\ \text{绕}y\text{轴} \to |x(t)|\end{cases}$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

六、区间$[a,b]$平行截面面积$A(x)$已知的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,dx \quad (a<b)$$

七、函数的平均值

$x\in[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上的平均值

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

八、质心公式

$$\bar{r}=\frac{\int_D r\mu\, d\sigma}{\int_D \mu\, d\sigma}$$

e.g. 分母：$\int_a^b y\,dx$ 面积

分子：$\int_a^b xy\,dx$

$\bar{x}$

〈第四章 向量代数与空间解析几何〉

(一) 向量代数

一、概念

1、向量 $\vec{a}$ 的坐标：

$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

2、方向余弦：

① $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称 $\vec{a}$ 的方向余弦

② $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 称 $\vec{a}$ 的单位向量

③ 方向角：$\vec{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角 α,β,γ

④ 任意向量 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(r\cos\alpha,r\cos\beta,r\cos\gamma)$

二、向量的运算

1、加减、数乘运算

2、数量积

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ $\quad\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

③ $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影量：

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

3、向量积

① 几何表示：$\vec{a}\times\vec{b}$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ $\quad\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

$\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向：同时垂直于 $\vec{a},\vec{b}$，右手法则

② 代数表示：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

③ $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

④、$\vec{a}\parallel\vec{b}$：

$\theta=0$或π $\rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$

即 $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = \left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\right| = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

⑤、以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积：

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

4、混合积

①、定义：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

记为 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

②、

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

③、运算：

$$\begin{cases}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) \\ (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})\end{cases}$$

④、判三向量共面：

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$

只要有任意两向量平行，则$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$

5、其它

①、$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

②、$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$取其单位向量

一、平面方程：

求 1. 点 + 法向量
2. 点 + 间接所确定法向量（与平面平行且不共线两向量）
3. 据共面三向量，从而 $(a\,b\,c)=0$
4. 平面束方程：
如过 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

$\Downarrow$

$\left(\frac{x-x_0}{l}-\frac{y-y_0}{m}\right)+\lambda\left(\frac{y-y_0}{m}-\frac{z-z_0}{n}\right)=0$

求出待定系数λ即可

二、直线方程：

求 1. 点 + 方向向量
2. 两不平行平面相交于一直线
3. 考虑设对称式或参数式

一般涉及交点设参数式

4. 两点确定一直线
5. 两线相交 $\rightarrow$ 共面

加以第三条向量 $\rightarrow (a\,b\,c)=0$

6. 两线距离的第三种求法：
① 用参数式得两线任意两点距离的二元方程
② $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，$\frac{\partial L}{\partial s}=0$ 求 L 何时为最小值
③ 求出 L 最值，开方为 d.
7. L_1, L_2 公垂线求法：
① 求公垂线方向向量 $\vec{s}$
② 平行于 $\vec{s}$ 且分别过 L_1, L_2 两平面方程
③ 两平面交线

(二) 平面与直线

一、平面方程

1、一般式方程：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

2、点法式方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$\begin{cases} \text{法向量 } \vec{n}=(A,B,C) \\ (x_0,y_0,z_0) \text{为平面上任意一点} \end{cases}$

3、截距式方程：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

a,b,c 为平面在坐标轴上截距

二、直线方程

1、一般式方程（两平面交线）

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

2、对称式方程：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$\begin{cases} \text{方向向量 } \vec{s}=(l,m,n) \\ (x_0,y_0,z_0) \text{为直线上任取一点} \end{cases}$

3、参数式方程：

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{方向向量 } \vec{s}=(l,m,n) \\ (x_0,y_0,z_0) \text{为直线上任取一点} \end{cases}$

三、平面与直线的位置关系

1、平面与平面

Π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

Π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

①、$\Pi_1 // \Pi_2$；

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$ （法向量平行）

②、$\Pi_1 \perp \Pi_2$；

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$ （法向量垂直）

③、Π_1、Π_2夹角：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$ $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ （法向量夹角）

2、直线与直线

L_1: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$

L_2: $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

①、$L_1 // L_2$；

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$ （方向向量平行）

②、$L_1 \perp L_2$；

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$ （方向向量垂直）

③、L_1、L_2夹角；

$$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$ （方向向量夹角） $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

3、平面与直线

Π: $Ax+By+Cz+D=0$

L: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

①、$\Pi // L$；

$$Al+Bm+Cn=0$$ （法向量与方向向量垂直）

②、$\Pi \perp L$：$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ （法向量与方向向量平行）

③、L与Π的夹角：

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$ （法向量与方向向量的余角）

4、距离公式

①、点到面

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

②、点到线

(x_0,y_0,z_0) 到 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$

$$d=\frac{|(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

③、线到线（不相交）

L_1方向向量：$\vec{s_1}=(l_1,m_1,n_1)$

L_2方向向量：$\vec{s_2}=(l_2,m_2,n_2)$

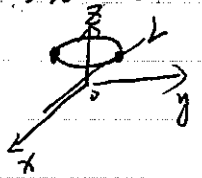
$A\in L_1$，$B\in L_2$

则 $$d=\frac{|(\vec{s_1}\,\vec{s_2}\,\vec{AB})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$$

1、空间曲线绕轴旋转的旋转面方程另一方法

如 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

绕z轴旋转



取L上点 (x_0,y_0,z_0)

取旋转面点 (x,y,z)

① $\begin{cases} z_0=z \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \end{cases}$

②. 利 (x_0,y_0,z_0) 在L上的条件

③. 消去 (x_0,y_0,z_0) 即可

2、线在面上投影思路

①作平面 $\begin{cases} \text{线在该平面} \\ \text{该平面与面垂直} \end{cases}$

②.则两面交线为投影

二、形如 $L=\begin{cases} \text{面} \\ \text{面} \end{cases}$ 在三个坐标面投影

若在xoy，消去z

则 $L=\begin{cases} \varphi(x,y) \\ z=0 \end{cases}$ 即是

（注意x的范围）

(三) 空间曲面与空间曲线

一、旋转面及其方程

1、一条平面曲线绕定直线旋转一周所成的曲面

$\Downarrow$ 母线　　$\Downarrow$ 轴

2、方程：设 xoy 面上曲线 L: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

①、L 绕 x 轴：

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

②、L 绕 y 轴：

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$$

二、柱面及其方程

1、定义：

平行于定直线并沿定曲线移动的直线所形成的轨迹

$\Downarrow$ 准线　　$\Downarrow$ 母线

2、方程求法

①

已知 $\begin{cases} 准线 L \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \\ 母线方向向量 (l,m,n) \end{cases}$

则 L 上取 (x_0, y_0, z_0)

得过点 (x_0, y_0, z_0) 的母线方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0)=0 \\ G(x_0, y_0, z_0)=0 \\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \end{cases}$$ 消去 x_0, y_0, z_0

② 特例

已知 准线在 xoy 平面上 L 线: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$　母线平行于 z 轴

则 柱面方程为 而 $f(x,y)=0$
即消去z即可

《第八章 微分方程》

(一) 一阶与可降阶的二阶方程

一、变量可分离的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dy}{g(y)}=h(x)dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int h(x)dx+C$$

二、齐次微分方程

1、 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 　　　3、$\frac{dx}{dy}$ 运算

$f(x,y)\rightarrow$ 令 $y=ux$ $(x\neq0)$

$f(x,y)=f(x,ux)=\varphi(u)$ (与x无关)

2、解法：

令 $y=ux$，则 u 代替 y 成为未知函数

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$$
$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$$
$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C=\ln|x|+C$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$$

三、一阶线性微分方程：

$$y'+p(x)y=q(x)$$

通解：$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

求导前牢记是否可导！ OURSTORYBEGINS 变限积分必可导

一、按类型求解微分方程：

(一) y', y, x 即为一阶微分方程

1、是否可分离 x、y，用 $\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$ 或 ~~$\frac{dx}{dy}$~~

2、若 x、y 不可分离，是否可用 $y=ux$ 或 $x=uy$

即 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{dx}{dy}$ 都可

3、若1、2都不行，则套公式

① 找 $p(x)$、$q(x)$

②、观察是否有 y^n

③ 有时为方便计算 可用 $\frac{dx}{dy}$ （即 x 是 y 的函数）

(二) y'', y', y, x 即为二阶微分方程

1、判断是否可降阶

2、① 缺 y, y' ~~x~~ y'

两次积分即可

②、缺 y

令 $y'=p$ 则 $y''=\frac{dp}{dx}$

③、缺 x

令 $y'=p$ $y''=p\frac{dp}{dy}$

二、积分方程化微分方程方法

1、未知函数含于变限积分中

求导去积分号

2、未知函数含于定限积分中

设该定限积分为 a

3、注意：

积分方程的初始条件蕴含于方程之中

（如 $x=0$）

则 C 的值可求出

四、伯努利方程

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0,\ n\neq 1)$$

化为 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$

令 $z=y^{1-n}$

$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$ ✓

五、全微分方程

1、若 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为全微分方程

2、通解 $u(x,y)=C$

3、全微分方程的充要条件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x,y)\in D$$

六、$y''=f(x)$ 型可降阶二阶方程

$$y=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2$$

七、$y''=f(x,y')$ 型（缺 y）的可降阶二阶方程

1、令 $p=y'$ $y''=\frac{dp}{dx}$

则 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

2、解得：$p=\varphi(x,C_1)$

通解：$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

八、$y''=f(y,y')$ 型（缺 x）的可降阶二阶方程

1、令 $p=y'$ $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

"走投无路用 $f'(x)$、$f''(x)$ 的定义式"

一、初值问题：

1、若给 $y(x=a)=b$

则 c 可以求出

2、善用 $F(x)=\int f(x)dx$

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

二、n 阶阶常系数齐次方程 通解结构

1、n 个线性无关的解求和

2、① 若 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

知 y_1, y_2, y_3 3 个解 ✓

$y=ay_1+by_2+cy_3$

y 为解的充要条件：$a+b+c=1$

y 为通解的充要条件：$\begin{cases} y_1, y_2, y_3 \text{ 线性无关} \\ a+b+c=1 \end{cases}$

② 若 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

y 为解的充要条件：$a+b+c=0$

y 为通解的充要条件 $\begin{cases} y_1, y_2, y_3 \text{ 线性无关} \\ a+b+c=0 \end{cases}$

则 $p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

2、解得 $p=\psi(y,C_1)$

代入 $p=\frac{dy}{dx}$，

通解 $\int\frac{dy}{\psi(y,C_1)}=\int dx+C_2=x+C_2$

(二)、二阶、高阶线性微分方程

一、n阶齐次，非齐次微分概念

$$\begin{cases}\text{非齐次：} & y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \to \text{自由项} \\ \text{齐次：} & y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0\end{cases}$$

二、性质

1、$\begin{cases}\text{齐次解：} Y(x) \\ \text{非齐次解：} y^*(x)\end{cases}$

则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 仍为非齐次解

2、齐次解的叠加性

$y=\sum_{i=1}^{m}C_iy_i$ （$y_1(x)\cdots y_m(x)$ 为齐次的m个解）

仍为齐次的解

3、齐次的通解

$y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)$

$y_i(x)$：n个线性无关解

4、非齐次的通解

$y=\underbrace{Y(x)}_{\text{齐次}}+\underbrace{y^*(x)}_{\text{非齐次}}$

5、自由项为 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ （非齐次解的叠加性）

$f_1(x)\to y_1^*(x)$，$f_2(x)\to y_2^*(x)$

即 $y=y_1^*(x)+y_2^*(x)$

二阶常系数线性方程解决思路

一、1、识别为常系数、二阶、

2、分辨齐次或非齐次

3、若为非齐次：

①、先求齐次解

② 对自由项进行分析

是否需拆成分项分别解决

是 $P_m(x)e^{ax}\cos bx$ 还是 $P_m(x)e^{ax}$ 型

勿忘 x^k ↓ $a+ib$ ↓ a

二、关于待定常数 C_1、C_2

若自由项分段，仍只有两个 C_1、C_2

则消C方法 { ①、分界点处函数连续

②、分界点处一阶导数连续

三、对于某些二阶非常系数方程解决办法

变量代换解决 如 反函数

$y=f(x)u$

化为常系数从而求解

三、二阶常系数线性齐次方程通解

$$y''+py'+q(x)y(x)=0$$

1、特征方程：

$$r^2+pr+q=0$$

r 为特征根

2、三种情况下的通解

①、$r_1 \neq r_2$（两个不等实根）

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

②、$r_1=r_2$（两个相等实根）

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$$

③、$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ $(\beta>0)$（两个共轭复根）

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

四、二阶常系数线性非齐次方程（特殊自由项）解法

1、$y''+py'+qy=P_m(x)e^{ax}$

（$P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式）

①、求齐次微分方程通解 $Y(x)$

②、求非齐次方程特解 $y^*(x)$

$$y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{ax}$$

$$k=\begin{cases}0 & a\text{不是特征根}\\ 1 & a\text{为单重特征根}\\ 2 & a\text{为二重特征根}\end{cases}$$

2、$y''+py'+qy=\begin{cases}P_m(x)e^{ax}\cos bx \quad 或\\ Q_m(x)e^{ax}\sin bx\\ P_m(x)e^{ax}\cos bx+Q_m(x)e^{ax}\sin bx\end{cases}$

①、求齐次方程通解 $Y(x)$

②、求非齐次方程特解 $y^*(x)$

$$y^*(x)=x^k\left(\overset{B}{R_m(x)}e^{ax}\cos bx+\overset{C}{S_m(x)}e^{ax}\sin bx\right)$$

$$k=\begin{cases}0 & a+ib \text{ 不是特征根}\\ 1 & a+ib \text{ 是单重特征根}\end{cases}$$

五、欧拉方程的解法

（二阶非常系数、非齐次的特殊方程）

$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$; $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

解法：1、当 $x>0$ 时，

令 $\underline{x=e^t}$ 则 $t=\ln x$ $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

则 $\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$ ✓ 记

2、当 $x<0$ 时

令 $x=-e^t$