《概率论与数理统计》

第一章 随机事件和概率

一、随机事件

1、样本点：随机试验中每一个可能结果

2、样本空间：所有基本事件（样本点）组成的集合，记为Ω

3、随机事件：样本空间的子集，用$A, B, C\cdots$表示

基本事件：由一个样本点组成的子集

二、事件间的关系与运算

1、包含：A发生则B必发生

$A\subset B$（A包含于B中）

相等：$A\supset B$且$A\subset B$

则$A=B$

2、事件的并：A，B至少有一个发生

$A\cup B$（并事件）

3、事件的交：A，B同时发生

$A\cap B$或AB（交事件）

4、事件的差：A发生而B不发生

$A-B$

5、互斥事件（互不相容）：A，B不能同时发生

$AB=\phi$

6、对立事件：A，B必有一个发生且仅有一个

（互逆事件）A的对立事件$\bar{A}$（$\bar{A}=B$）

$A\bar{A}=\phi$ 且 $A\cup\bar{A}=\Omega$

若A，B对立，则互斥，反之不成立

∧ 若 $P(A)=0$ 或 1

则 A与任何事件相互独立

三、事件运算

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3、分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

4、德摩根定律：$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

四、概率公理

1、对于任意事件 A，$P(A)\geq 0$

2、对于必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$

3、对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1, A_2 \cdots A_n \cdots$

$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$

五、概率的基本运算法则

1、加法公式

① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

② 若 A、B 互不相容：$P(A+B)=P(A)+P(B)$

③ $P(\bar{A})=1-P(A)$

2、~~减~~ ①若 $A\supset B$，$P(A-B)=P(A)-P(B)$

减法公式

② $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

3、条件概率

在 A 条件下 B 的概率：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A)>0)$$

结论：

1. $A-B=A\bar{B}$

   $\phi \neq 0$

   $\Omega \neq 1$

   $A\bar{A}=\phi$

2. 零概率 / 全概率 事件与任何事件独立

3. 证独立性关法

   $P(AB)=P(A)P(B)$

4. 讨论 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 独立性时
   可等价考虑 A,B,C 独立性

4、乘法公式

① $P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0)$

$=P(B)P(A|B) \quad (P(B)>0)$

② $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

③ 若 A、B 独立：

$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(B|A)=P(B) \quad P(A|B)=P(A)$

$\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

六、事件独立性

1、定义、 $P(AB)=P(A)P(B)$

则 A、B 相互独立

（可推广到 n 个事件）

2、 n 个事件相互独立，则一定两两独立

但两两独立，得不出 n 个事件相互独立.

七、条件概率

A、B 为两事件，且 $P(A)>0$

称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

A 发生条件下，B 的概率.

八、全概率公式

1、 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

完备事件组：A_1、$A_2\cdots A_n$ 两两不相容

$\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

九、贝叶斯公式

1、定义：设 A_1、$A_2\cdots A_n$ 为完备事件组，B 为任一事件.

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad (k=1,2\cdots n)$$

$\rightarrow P(A_kB)$

$\Downarrow P(B)$

十、古典概型

定义：试验结果为有限n个样本点，每个样本点的发生有相等可能性

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{所包含的样本点数}}{\text{样本总数}}$$

十一、几何概型

定义：试验的样本空间是某区域Ω

试验A的样本点为区域Ω_A

$$P(A)=\frac{\Omega_A\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

(无限个样本点，等可能性)

十二、伯努力概型

定义：每次试验中，A发生的概率为p，

则在n次重复试验中，A发生k次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

一、证是否为分布/密度函数问题

1、$F(x)$：$\begin{cases} \text{单调不降} \\ F(-\infty)=0 \quad F(+\infty)=1 \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1 ;\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0\right) \\ \text{右连续} \end{cases}$

2、$f(x)$：$\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \end{cases}$

<第二章 随机变量及其概率分布>

一、随机变量与分布函数

1、随机变量：

$$X = X(w), \quad w \in \Omega$$

Ω：样本空间　w：样本点　X：随机变量

2、分布函数：

① $F(x) = P(X \le x)$

x 为任意实数

② $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

3、分布函数性质：

①、$0 \le F(x) \le 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$

②、$F(x)$ 是单调非减函数，$F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 1$

③、$F(x)$ 在任何点 x 处右连续，即 $F(x+0) = F(x)$

二、离散型随机变量及其分布

1、分布律

① 设 X 所有可能取的值为 x_k $(k=1,2\cdots)$，而 X 取值 x_k 的概率为 p_k，则

$$P(X = x_k) = p_k$$

②、性质：$\begin{cases} (1)\ p_k \ge 0 \\ (2)\ \sum_k p_k = 1 \end{cases}$

2、几何分布

$$P(X = k) = pq^{k-1} \quad (k=1,2\cdots)$$

$(0<p<1 \quad q=1-p$，X 服从参数为 p 的几何分布

情况：直到第 k 次试验才首次成功的概率

1、分布函数性质问题：

① $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$　即 $P(X\le x)-P(X<x)=P(X=x)$

②. 已知 $F(x)=F(x+0)$　右连续

③ 若 $x<1$ = $x\le 1$

（可知 x 左连续）

即 $F(1)=F(1-0)$

$\Downarrow$　　$\Downarrow$

$P(X\le 1)$　$P(X<1)$

2、① $F(x)$ 性质：

$\begin{cases} F(+\infty)=1 \quad F(-\infty)=0 \\ F(x)=F(x+0) \end{cases}$

从而求待定系数

$P(X=x)=F(x)-F(x-0)$

若 $F(x)$ 在 x 处连续

则 $F(x)-F(x-0)=0$　即 $P(X=x)=0$

② $f(x)$ 性质

$\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \end{cases}$

$F'(x)=f(x)$

3. 若 X 为连续型随机变量

① $P(x_1<X\le x_2)=P(x_1\le X<x_2)=P(x_1\le X\le x_2)=P(x_1<X<x_2)$

②. $P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

4、关于 $F(x)$ 右连续

$F(a)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$

e.g. 已知 $F(a)$　$x\le a$
又知 $F(x)$　$x>a$ } 必连续

3、超几何分布

① $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $(k=0,1,2\cdots L)$

② 情况：总共N件产品，中M件次品，
从中取n件（不放回），n件中所含次品数X

③ 称X服从参数为n，N，M的超几何分布 $B(n,\frac{M}{N})$

4、0-1分布

X	0	1
P	1-P	P

称X服从参数为P的0-1分布 $B(1,P)$

5、二项分布

①、$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,2\cdots n)$

②、情况：n次独立重复实验中成功次数X

③、称X服从参数为n，P的二项分布，
记作 $X\sim B(n,P)$

☆ ④、当 $k=(n+1)P$ 时
$P(X=k)$ 取最大值
此时k为最可能出现次数

☆ ⑤、泊松定理：
若X_n服从参数n，P_n的二项分布，则若 $\lim\limits_{n\to\infty} nP_n=\lambda$，则
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

当n较大（$n>10$），P较小（$P<0.1$）时，近似公式：
$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\lambda=np)$$

一、参数 p 的 0-1 分布的另一种形式（概率分布）

①

X	0	1
P	$1-p$	p

②

$$P(X)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & 当 x=0 或 x=1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

二、泊松分布性质

已知 $X \sim P(\lambda)$

即 $X \sim \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

则 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 为独立时

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$

即 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$

6、泊松分布

① $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(\lambda>0)$ $k=0,1,2\cdots$

② 称X服从参数为λ的泊松分布，
记作 $X\sim P(\lambda)$

三、连续型随机变量及分布

1、① 定义.
$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ $-\infty<x<+\infty$
称X为连续型随机变量
$f(x)$为X的概率密度函数

② $f(x)$ 反映概率在x点附近的密集程度
若$f(x)$连续 $F'(x)=f(x)$

③、性质：(1) $f(x)\geq 0$
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$
(3) $P(x_1<X\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt$
(4) 不必区分区间开闭

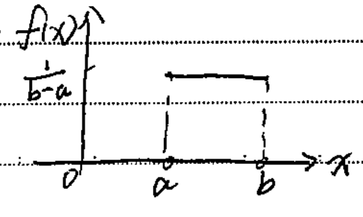
2、均匀分布

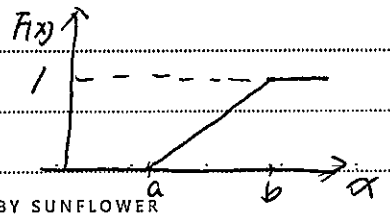
①、$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & 其它\end{cases}$

称X在区间$[a,b]$上服从均匀分布
$X\sim U[a,b]$

② $F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 1 & x>b\end{cases}$

③、





1、正态分布化为标准正态分布：

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

若已知 $x_1 < X < x_2$

则 $\frac{x_1-\mu}{\sigma^2} < \frac{X-\mu}{\sigma^2} < \frac{x_2-\mu}{\sigma^2}$

从而 $F(x_2) - F(x_1) = \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma^2}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma^2})$

2、理解 $F(x)$ 与 $f(x)$

① $F(x) \Rightarrow P(X < x)$（表示 X 小于 x 的概率）

$\Rightarrow$ 几何意义（$f(x)$ 图象 $x < x_1$ 时的积分（面积））

② $f(x) \Rightarrow$ 概率密度

由 $F'(x) = f(x)$ 可求得。

$f(x)$ 与 x 轴由所围面积为 1.

3、指数分布

① $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

称X服从参数为λ的指数分布

记 $X\sim E(\lambda)$

②、分布函数

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

③ 寿命的分布，无记忆性

4. 正态分布

①、$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ✓ $(-\infty<x<+\infty)$

μ、σ为常数 且σ>0、称X服从 μ, σ 的正态分布

记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

②、当 $\mu=0$，$\sigma^2=1$ 时 $X\sim N(0,1)$

称X服从标准正态分布

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

③.

$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

④、μ：位置参数 $x=\mu$ 对称轴

σ：离散参数 σ小，曲线陡峭

六、四常用性质

1、泊松定理：

$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$

如何求随机变量函数的分布？

（即已知X分布，求Y分布）

①、$F_X(x)=P(X\le x)$ 已知

$F_Y(y)=P(Y\le y)$ 待求

② $Y=g(X)$

将 $Y\le y$ 转化 $g(X)\le y$

得 X 取值范围，代入 $F_X(x)$

③、找X取值范围（X有概率时）

$Y=g(x)$ 得 Y 的取值范围

从而得 y 不同取值下的情况

2、设 $X \sim U[a,b]$ ， $a \le c < d \le b$

$$P(c < X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$$

3、设 $X \sim E(\lambda)$

① $P(X>t) = \int_{t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}$ $(t>0)$

② $P(X>t+s \mid X>s) = P(X>t)$ $(t>0, s>0)$

"无记忆性"

4、设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

①、$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

则 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ ✓

②、$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$

五、随机变量函数的分布

1、离散型随机变量

$P(X=x_k) = p_k$

则 X 的函数 $Y=g(X)$ 分布律：

$P(Y=g(x_k)) = p_k$ 如果 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们的概率和作 Y 的概率

2、连续型随机变量

①、公式法

$$\begin{cases} f_X(x) \text{为 } X \text{ 概率密度} \\ y=g(x) \text{ 单调，导数不为0，可导} \\ h(y) = g^{-1}(x) \text{ 即 } g(x) \text{ 反函数} \end{cases}$$

则 $f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| \times f_X(h(y)) & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

(α, β) 为 $g(x)$ 在 x 可能取值区间对应的值域

1. 若 $X \sim N(u, \sigma^2)$

$Y = aX + b$

$\Downarrow$

$Y \sim N(au+b, a^2\sigma^2)$

一、已知 X 为 Y 的分段函数，求 $F_Y(y)$ 方法

①、确定 Y 的范围

从而得 $F_Y(y)=1$ 时 y 的取值

$F_Y(y)=0$

②. 剩下 y 的范围

$F_Y(y) = P(Y \le y)$

$\Downarrow$ 拆

☆ $P(Y<a) + P(Y=a) + P(a<Y\le y)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

对应为关于 X 的范围

③. 根据 $F_X(x)$，利用 $f(x)$ 积分得 $F_Y(y)$

e.g $P(X \le Y) = P(X<Y) + P(X=Y)$

四、定义法.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(x)\le y)=\int_{g(x)\le y} f_X(x)\,dx.$$

$f_Y(y)=F_Y'(y)$

六、求Y的概率分布步骤：（X为连续型随机变量）

1、根据X的取值范围，给出Y的取值范围

e.g. $P(0<X<4)=1$　　$(Y=X^2)$

$\Downarrow$

$P(0<Y<16)=1$　得Y的取值

则　$Y<0$ 即 $F_Y(y)=0$.　$\rightarrow y\le 0$

$Y\ge 16$　$F_Y(y)=1$　$\rightarrow y\ge 16$

得　$y\in(0,16)$

2、写Y的概率分布函数：

$F_Y(y)=P(Y\le y)$

找出 $\{Y\le y\}$ 的等价事件 $\{X\in D\}$

$\Downarrow$

得 $F_Y(y)=P(X\in D)$

3、求出Y的概率密度函数 $f_Y(y)$

〈第三章 多维随机变量及其分布〉

一、二维随机变量及其分布

1、二维随机变量：

设 $X=X(w)$，$Y=Y(w)$ 是定义在样本空间 Ω 上的两个随机变量，则 (X,Y) 为二维随机变量

2、分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

称二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数

①、$F(x,y)$ 是关于 x 或 y 的非减函数

②、$0\le F(x,y)\le 1$

③、关于 x，或 y 为右连续

$$F(x+0,y)=F(x,y) \qquad F(x,y+0)=F(x,y)$$

3、$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

（与图形结合）

二、二维离散型随机变量

1、定义：(X,Y) 取有限对或无可数无限对 (x_i,y_i)

2、分布率：

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P_{ij} \qquad i,j=1,2\cdots$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j
x_1	P_{11}	P_{12}	$\cdots$	P_{1j}
x_2	P_{21}	P_{22}	$\cdots$	P_{2j}
$\vdots$				

3、性质：①、$P_{ij}\ge 0 \qquad i,j=1,2\cdots$

②、$\sum_i\sum_j P_{ij}=1$

1、正态分布化标准正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Downarrow$

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\left(\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$

2、① $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

$\Downarrow$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

② $\rho = 0$，则 X 与 Y 独立

3、均匀分布的性质

D 是 G 中部分区域

$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \frac{1}{S_G}\,dx\,dy$

$= \frac{S_D}{S_G}$

三、二维连续型随机变量

1、定义：存在非负二元函数 $f(x,y)$，对任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$$

$f(x,y)$ 称为密度函数

2、$f(x,y)$ 性质：

①. $f(x,y)\geq 0$

②. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$

③. $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)$

3、几何：$P((x,y)\in D)=\iint\limits_{D}f(x,y)\,dx\,dy$

以D为底，以曲面 $f(x,y)$ 为顶 曲顶柱体

4、均匀分布：

D的面积为A

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$$

5、二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$

$\sigma_1,\sigma_2>0 \quad |\rho|<1$

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

一、条件分布求法

公式 1、$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

2、公式的前提

分母不为0 —— 则 $f_Y(y)$、$f_X(x)>0$

故应分析 $f_X(x)>0$ 时 x 取值

$f_Y(y)>0$ 时 y 取值

3、若给条件分布求 $f(x,y)$

所给条件分布 —— 分母不为0时

故应分析分母为0时，$f(x,y)$ 的值

⇓

一般为0，通过分析分母不为0时积分为1

①：即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1$　且 $f(x,y)>=0$

②：得分母>0时取值范围，$f(x,y)>=0$

二、求 $F_Z(z)$ / $f_Z(z)$ 方法

1、一般求出 $F_Z(z)$，求导后得 $f_Z(z)$

2、$F_Z(z)=P(Z\le z)$

⇓ 代入 Z 关于 X、Y 的表达式

X、Y 的2种情况 ①、X、Y 相互独立 {连续+离散；连续+连续}

②、X、Y 不独立：知 $f(x,y)$　$(x,y)\in D$

3、2种情况解决方法

①、独立时：先从离散入手；利用全概率公式

$\sum_{i} P(Z\le z\mid X=i)\,P(X=i)$

Z 由二元到一元

②、不独立时：作图法 "D" 关键

$F_Z(z)=\iint_D f(x,y)\,dxdy$

四、边缘分布

定义：记 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$

X 的边缘分布函数 $F_X(x)$

Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)$

$$\begin{cases} F_X(x) = P(X\le x) \\ \quad = P(X\le x, Y<+\infty) \\ \quad = F(x,+\infty) \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) \end{cases}$$

(一) 离散型

1、$\begin{cases} p_{i\cdot} = P(X=x_i) = \sum\limits_j p_{ij} & i=1,2\cdots \\ p_{\cdot j} = P(Y=y_j) = \sum\limits_i p_{ij} & j=1,2\cdots \end{cases}$

2、由联合分布可唯一确定边缘分布，反之不然。

(二)、连续型

1、定义：$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \end{cases}$

称边缘密度函数

2、边缘分布为一维分布

五、条件分布

定义：当其中一个随机变量的取值确定后，另一个变量的分布问题

(一)、离散型

1、
$$P(Y=y_j \mid X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad j=1,2,\cdots$$

在 $X=x_i$ 条件下，Y 的条件分布律

一、小方法

必有 $F(x)=\begin{cases}0 & x<x_1 \\ ? & \\ 1 & x\geq x_2\end{cases}$

② 求 $F_Z(z)$ 时，

学会将不等式拆开

如：$\begin{cases}F_X(x) 为连续 \\ F_Y(y) 为离散\end{cases}$

一般将离散型随机变量各种可能取值用全概率公式展开

③. 学会画图：

如 $(x,y)\in D$ ，画出 D

④ $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$X-Y\sim ?\quad N(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

2. 性质： ①. $P(X=x_i|Y=y_j)\geq 0$

$P(Y=y_j|X=x_i)\geq 0$

②. $\begin{cases}\sum\limits_i P(X=x_i|Y=y_j)=1\\ \sum\limits_j P(Y=y_j|X=x_i)=1\end{cases}$

(二) 连续性.

1. $X=x$ 条件下

①. 条件分布：

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$$

②. 密度函数

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\qquad (f_X(x)>0)$$

五、随机变量独立性

1. 定义：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

称 X 与 Y 相互独立.

2. 等价于 $\begin{cases}P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)\\ f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\\ p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\end{cases}$

3. 此时 边缘分布 完全确定联合分布

六、函数的分布

(X,Y) （二维）

$\Downarrow$

$Z=g(X,Y)$ （一维）.

(一). 离散型

$$P(Z=z_k)=P(g(X,Y)=z_k)=\sum_{g(x_i,y_j)=z_k}p_{ij}$$

(二) 连续型、

定义：$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z)$

$$= \iint_{g(x,y) \le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

1、 $Z = X+Y$ 的分布

① $\begin{cases} f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy \end{cases}$ ✓ ✓

② X、Y 独立时：

$$\begin{cases} f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy \end{cases}$$

卷积公式

③. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

2、 $Z = \frac{X}{Y}$ 分布

①. $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(yz, y)\,\underline{|y|}\,dy$

②. X、Y 独立时：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz) f_Y(y)\,|y|\,dy$$

3. $M = \max(X,Y)$ 及 $N = \min(X,Y)$ 分布

①. $\begin{cases} F_M(z) = F_X(z) F_Y(z) \\ F_N(z) = 1 - [1-F_X(z)][1-F_Y(z)] \end{cases}$

②. 推广： $\begin{cases} F_{max}(z) = [F(z)]^n \\ F_{min}(z) = 1 - [1-F(z)]^n. \end{cases}$

<第四章 随机变量的数字特征>

一、数学期望

1. 定义：①离散型

已知：$P(X=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots)$

若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，

则 $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$

②、连续型

已知密度函数 $f(x)$

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛，

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

2、常用数学期望

①、$X \sim B(1,p)$

$E(X)=p$

②、$X \sim B(n,p)$

$E(X)=np$ ✓

③、$X \sim P(\lambda)$

$E(X)=\lambda$

④、$X \sim U[a,b]$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$

⑤、$X \sim E(\lambda)$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$

⑥ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu$

① 求成功/失败总次数类题型：$E(X)$

1、利用

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i) \quad (X=\sum_{i=1}^{n}X_i)$$

2、令 $X_i=\begin{cases}1 & 第i次成功/失败\\0 & 第i次失败/成功\end{cases}$

②. 若服从 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布

常化为标准正态分布处理

1、可令 $\xi=\frac{X-\mu}{\sigma}$，$\xi\sim N(0,1)$

2、若 $\Phi(\frac{X-\mu}{\sigma})$

则 $E(X)=\mu$

3. 函数的数学期望 $Y=g(X)$

① 离散型

已知 $P(X=x_k)=p_k$

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_k g(x_k)p_k$$

② 连续型

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

4. 函数的数学期望 $Z=g(X,Y)$

① 离散型

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_i)p_{ij}$$

② 连续型

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

5、性质

① 常量 C，$E(C)=C$

② $E(CX)=CE(X)$

③ $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$ 可推广

④ 若 X、Y 独立，$E(XY)=E(X)E(Y)$ 可推广 ✓

⑤ $[E(XY)]^2\le E(X^2)\cdot E(Y^2)$

二、方差

1、定义：

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

① 离散型：

$$D(X)=\sum_k [x_k-E(X)]^2 p_k$$

②、连续型

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[X-E(X)]^2 f(x)dx$$

2、方差计算公式

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

3、方差常用公式

①、$X\sim B(1,p)$

$D(X)=p(1-p)$

② $X\sim B(n,p)$

$D(X)=np(1-p)$ √

③ $X\sim P(\lambda)$

$D(X)=\lambda$

④ $X\sim U(a,b)$

$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

⑤ $X\sim E(\lambda)$

$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

⑥ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$D(X)=\sigma^2$

⑦、几何分布：$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$

$E(X)=\frac{1}{p}$　　$D(X)=\frac{1-p}{p^2}$

4、性质

①、$D(C)=0$

② $D(CX)=C^2D(X)$

③、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$　（X，Y独立）√

$D(cX+b)=c^2D(X)$

〈二、等价：〉

$$\begin{cases} Cov(X,Y)=0 \longrightarrow \rho_{XY}=0 \\ X,Y\text{不相关} \\ E(XY)=E(X)E(Y) \\ D(X+Y)=D(X)+D(Y) \end{cases}$$

独立必不相关 ⇏ 不相关

〈二、Cov(X,Y) 算法：〉

1、$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

2、$Cov(X,Y)=E(X-E(X))(Y-EY)$

3、利用 X,Y 独立/不相关

则 $Cov(X,Y)=0$

4、若知 ρ_{XY}，则 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

5、若 X=Y，则 $Cov(X,X)=D(X)$

6、利用 Cov 性质

〈三、D(X) 算法〉

1、$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

2、$D(X)=E\{(X-EX)^2\}$

3、$D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

4、D(X) 性质：

$$\begin{cases} D(C)=0 \\ D(CX+b)=C^2D(X) \end{cases}$$

三、协方差

1、设二维随机变量 (X,Y)

定义：$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ ✓

称 X 与 Y 的协方差，记作 $Cov(X,Y)$ / σ_{XY}

2、$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

↓

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

$$\begin{cases} Cov(X,Y)>0 & X\text{与}Y\text{正相关} \\ <0 & \text{负相关} \\ =0 & \text{不相关} \end{cases}$$

3、计算公式：

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ ✓ （可用 X 替 Y）

4、性质：

①、$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

②、$Cov(X,X)=D(X)$

③、$Cov(a_1X,b_1Y)=a_1b_1Cov(X,Y)$ ； $Cov(a_1X+b_1,a_2Y+b_2)=a_1a_2Cov(X,Y)$ ✓

④、$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

⑤、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

X、Y 独立时，$Cov(X,Y)=0$

5、①、离散型

$$Cov(X,Y)=\sum_i\sum_j[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]p_{ij}$$

②、连续型

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)\,dx\,dy$$

1、证独立|方法：

给定 $0<a<+\infty$

$P(X\le a, Y\le a)$ 是否等于 $P(X\le a)P(Y\le a)$

不相等 → 则 X、Y 不独立

四、相关系数

1、定义：

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

称 X 与 Y 的相关系数，无量纲

结论 2、$\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) = \rho_{XY}$

$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ $Y^* = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ $\begin{cases} E(X^*) = E(Y^*) = 0 \\ D(X^*) = D(Y^*) = 1 \end{cases}$

3、性质

①. $|\rho_{XY}| \leq 1$

②. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件：$P(Y = aX + b) = 1$ $(a \neq 0)$

$\begin{cases} b > 0 \text{ 时 } \rho_{XY} = 1 \\ b < 0 \text{ 时 } \rho_{XY} = -1 \end{cases}$

③. $|\rho_{XY}|$ 越大，则 X、Y 线性程度越好

$\rho_{XY} = 0$ 时，X、Y 不相关

五、不相关与独立

1、说明：X、Y 不相关 —— 线性关系

X、Y 独立 —— 一般关系

则 X、Y 独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ X、Y 不相关

2、① X、Y 独立：

$(E(XY) = E(X)E(Y))$

✓ $P(X,Y) = P(X)P(Y)$ $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

②. X、Y 不相关

✓ $\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

3✓ 对于二元正态变量 (X,Y) 独立 $\Leftrightarrow$ 不相关 ✓

六、矩和协方差矩阵

1、定义：

①、X的k阶原点矩：

$E(X^k)$　　$k=1,2\cdots$

②、X的k阶中心矩

~~$E(X^kY^l)$~~ $E\{[X-E(X)]^k\}$

③ X的和Y的k+l阶混合矩

$E(X^kY^l)$

④ X和Y的k+l阶中心混合矩

$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

2、

《第五章 大数定律和中心极限定理》

一、切比雪夫不等式

X 存在 $E(X)$、$D(X)$，任意 $\varepsilon>0$

有 $P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ （对立）

二、依概率收敛

$X_1, X_2\cdots X_n\cdots$ 随机变量序列，A 为常数，（任意 $\varepsilon>0$）

$$\lim_{n\to+\infty}P(|X_n-A|<\varepsilon)=1$$

记作 $X_n\xrightarrow{P}A$

称 $X_1, X_2\cdots X_n\cdots$ 依概率收敛于 A

三、大数定律（稳定性）

1、切比雪夫大数定律

$X_1, X_2\cdots X_n\cdots$ 两两不相关、$D(X_i)\leq C$，（任意 $\varepsilon>0$）

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1$$

2、伯努利大数定律

$X_n\sim B(n,p)$ （$\varepsilon>0$）

则 $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$

3、辛钦大数定律

$X_1, X_2\cdots X_n\cdots$ 独立同分布 $E(X_i)=\mu$ （任意 $\varepsilon>0$）

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$

四、中心极限定理

（阐述随机变量和的极限分布为正态分布）

1、列维-林德伯格中心极限定理

$X_1, X_2 \cdots X_n \cdots$ 独立同分布，且

$E(X_k)=\mu \quad D(X_k)=\sigma^2$

则对任意x：

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

另：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

$$\bar{X} \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2、棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设 Y_n $(n=1,2\cdots)$ 服从 $Y_n \sim B(n,p)$ 二项分布

对任意x有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

另：

$$Y_n \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$$

正态分布是二项分布的极限分布

注：2是1的特例、都是近似服从正态分布，后标准化、

$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$

《第六章 数理统计的基本知识》

一、总体与样本

1、总体：所研究对象的全体（某项数量指标）

个体：构成总体的每一个成员

2、样本：

① 若 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 相互独立且都与总体 X 同分布，

称其为来自总体的简单随机样本

②、n 为样本容量

具体观测值 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 为样本值

3、性质：（$X_1, X_2 \cdots X_n$ 为 X 的样本）

①、X 分布函数为 $F(x)$，

则样本 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} F(x_k)$$

②、X 的密度函数 $f(x)$，

则 $$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)$$

③、X 的均值和方差为 μ, σ^2

则 $E(X_k) = \mu \quad D(X_k) = \sigma^2$

二、统计量

1、定义：

$T(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 为实值函数，且不含未知参数

称 $T = T(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 为统计量

$T(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 为观测值

2. 常用统计量

①、样本均值

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

②、样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$ √“此形式”

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

③、样本标准差

$$S=\sqrt{S^2}$$

④、样本k阶原点矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

⑤、样本k阶中心矩

$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$$

三、抽样分布

1、χ^2分布

① $X_1,X_2\cdots X_n$独立，并且$X_i\sim N(0,1)$

则 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$

为服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2(n)$

称$\chi^2(n)$的典型模式

②、性质

(1) $\chi^2\sim\chi^2(n)$ 对于给定α $(0<\alpha<1)$

$$P(\chi^2>\chi_\alpha^2(n))=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$

点$\chi_\alpha^2(n)$为上α分位点

(2). 记 $\begin{cases} E[\chi^2(n)] = n \ \checkmark \\ D[\chi^2(n)] = 2n \ \checkmark \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \chi_1^2 \sim \chi^2(n_1) \\ \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2) \end{cases}$ 且 χ_1^2、χ_2^2 相互独立

则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

2、t分布

① X、Y 独立. $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$

则 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$

为服从自由度为n的t分布，记为t(n) $T \sim t(n)$

②. 性质

(1) $E(t(n)) = 0$ $n>1$

$D(t(n)) = \frac{n}{n-2}$ $n>2$

(2). t分布的密度函数 f(x) 为偶函数

$f(x) = f(-x)$

$n \to$ 无穷大小，t分布越近于 $N(0,1)$

(3). $T \sim T(n)$ $0<\alpha<1$

$P(T > t_\alpha(n)) = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha$

$t_\alpha(n)$ 为 t 分布的上 α 分位点

3、F分布

① X、Y 相互独立，$X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$

则 $F = \frac{X/m}{Y/n}$

服从自由度为 (m, n) 的F分布，记为 F(m, n)

m：第一自由度 n：第二自由度

③、性质

(1) $E[F(m,n)] = \frac{n}{n-2}$ $n>2$

$D[F(m,n)] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ $n>4$

(2) $F \sim F(m,n)$

则 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

(3) $F \sim F(n_1,n_2)$ $0<\alpha<1$

则 $P(F > F_\alpha(n_1,n_2)) = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha$

点 ~~$F\sim$~~ $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的上 α 分位点

4、分位数

① 定义：$P(X>x_\alpha) = 1-F(x_\alpha) = \alpha$ $0<\alpha<1$

x_α 为 X 的上 α 分位数

②、性质1： n 充分大 $(n>40)$

$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$

性质2：

$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

$n>30$， $t_\alpha(n) \approx u_\alpha$

性质3

$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

四、正态总体的有关抽样分布

(一) $\begin{cases} X_1, X_2 \cdots X_n \text{ 为 } X\sim N(\mu,\sigma^2) \text{ 的一组样本.} \\ \bar{X}, S^2 \text{ 为样本均值和样本方差} \end{cases}$

1、$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ / $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

2、$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ✓ S^2 的处理方式

3、$\bar{X}$ 与 S^2 独立 ✓

22、

$$\begin{cases} D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \checkmark \\ E(\bar{X}) = E(X) = \mu \\ E(S^2) = D(X) = \sigma^2 \checkmark \\ \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \checkmark \text{ 有点惑} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

做题常用

① $\begin{cases} E(aX+b) = aE(X) + b \\ D(aX+b) = a^2 D(X) \end{cases}$

② $\begin{cases} D(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) - 2Cov(X,Y) \\ D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$

$\begin{cases} E(X^2) = D(X) + E(X)^2 \\ E(\bar{X}) = \mu \\ E(X+Y) = E(X) + E(Y) \\ E(XY) = E(X)E(Y) \text{ 独立时} \end{cases}$

③ $\begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\ E(S^2) = D(X) = \sigma^2 \\ \bar{X}, S^2 \text{ 独立} \end{cases}$

④ $\begin{cases} E[\chi^2(n)] = n \\ D[\chi^2(n)] = 2n \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \\ X^2 \sim \chi^2(1) \quad (X \sim N(0,1)) \end{cases}$

4、$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ✓

5、$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

(二) 两个正态总体的抽样分布（不考）

五、总结

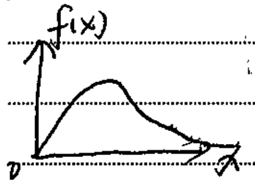
记

$\chi^2(n)$

① $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots X_n^2$（形式）

② X_i 独立 且 $X_i\sim N(0,1)$

③ 平方和



$E(\chi^2)=n$

$D(\chi^2)=2n$

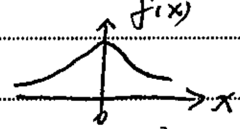
$t(n)$

① $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$（形式）

② X、Y 独立

③ $X\sim N(0,1)$

$Y\sim\chi^2(n)$



偶函数

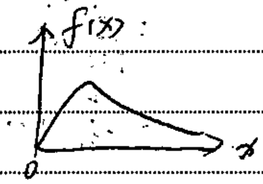
$F(n_1,n_2)$

① $X\sim$ $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$（形式）

② $X\sim\chi^2(n_1)$

$Y\sim\chi^2(n_2)$

③ X、Y 独立



$F\sim F(n_1,n_2)$

↓

$\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

八、

"掐头猜脚" 处理 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

①、$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2\underbrace{-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2})$

$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2$ ✓

关键处：$X_i\bar{X}$ 处理方法

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ "掐" $\frac{1}{n}X_i$

"剩" $\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}X_j$

则 $X_i\bar{X}=\frac{1}{n}X_i^2+\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}X_iX_j$

②、$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)]^2$

$=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu)+(\bar{X}-\mu)^2]$

$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2$ ✓

2、若 $X\sim P(\lambda)$

↓

则 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$

$(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1)$

3. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

则 $X_1,X_2\cdots X_n$ 的线性组合仍服从同分布

〈第七章 参数估计〉

一、点估计

1、定义：样本构造统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$ ——估计量
来估计未知参数 θ 称点估计

2、无偏估计算

$E(\hat{\theta})=\theta$ ✓

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量

3、$\left.\begin{matrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{matrix}\right\}$ 均为 θ 的无偏估计量

若 $D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$

称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

4、一致估计量

$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量

未考

二、矩估计法

1、定义：

用样本矩估计相应的总体矩，用样本矩的函数估计总体矩相应的函数，然后求出要估计的参数

2、总体 X 的 k 阶原点矩 EX^k $(k \le m)$

步骤：样本 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 的 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ $A_1 = \bar{X}$

即 $EX^k = A_k$ ✓

3、$\hat{\mu} = \bar{X}$ 均值的矩估计就是样本均值

$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 方差的矩估计量就与样本方差差因子 $\frac{n-1}{n}$

有 n 个参数则 n 个方程

一、核心公式

1、矩估计

$E(X^k)=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k}$ —样本k阶矩

(n个参数，n个矩)

一阶矩 $\bar{x}$ （若 $E(X^k)=0$ 不可用）

2、最大似然估计

①、离散公式

$L(\theta)=P(X_1=x_1, X_2=x_2 \cdots X_n=x_n)$

即 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i)$ 关于θ

②、连续公式

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ — 密度函数n个乘积

$=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ —— n个样本的密度函数

3、分清是用何种估计方法

三、最大似然估计

设$X_1, X_2 \cdots X_n$为来自总体X的样本

$x_1, x_2, \cdots x_n$是样本值，θ为待估参数

1. 似然函数 $L(\theta)$：

① 离散型

$$L(\theta) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots X_n=x_n)$$

$$= L(x_1, x_2 \cdots x_n; \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta)$$ ✓

② 连续型

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$ ✓

2、使 $L(\theta)$ 达到最大值的参数 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计

似然方程：$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0$ 或 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$

四、区间估计

1. 置信区间

θ为总体X的未知参数 $0<\alpha<1$

若两个统计量满足

$$P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha$$

称 (θ_1, θ_2) 为参数θ的置信度为$\underline{1-\alpha}$的置信区间

简称θ的$1-\alpha$置信区间

2. μ的置信区间关于$\bar{x}$对称

S · M · T · W · T · F · S

[巧记] 一、大数定理

1、切大

X_i不相关，方差有界

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E$ （平均值 $\xrightarrow{P}$ 其均值）

2、辛大

X_i为独立同分布，期望存在

则同上 有相同到的二μ

3、伯大

$X_n \sim B(n,p)$ $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} p$

$E(\frac{X_n}{n})$

二、中心极限定理

1、林中：

$\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$\downarrow$

$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right\} = \Phi(x)$

条件：X_i为独立同分布，方差存在

2、拉中

条件：$X_n \sim B(n,p)$

则 $X_n \sim N(np, np(1-p))$

八、
$$\begin{cases} U = \max(X, Y) \\ V = \min(X, Y) \end{cases}$$

则 $UV = XY$

推导：
① $U = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}$, $V = \frac{X+Y-|X-Y|}{2}$ $\Big\}$ $UV = \frac{(X+Y)^2-(X-Y)^2}{4} = XY$

② 总共就 X、Y 两个，必有一大一小，则 $UV = XY$

推论：
$U+V = X+Y$
$U-V = |X-Y|$

2、对称性是解题之本

3. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \cdots = n!$