一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1、确定 5 阶行列式的项 $a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}$ 前面所带的符号是（填汉字“正”或“负”）___负___.

2、已知 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=4$，则行列式 $|2A^{-1}|$ ＝___2___.

3、设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{13} & 4a_{11}-a_{12} & a_{11} \\ 2a_{23} & 4a_{21}-a_{22} & a_{21} \\ 2a_{33} & 4a_{31}-a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$， 则 $D_1=$___6___.

4、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$ ，则 $f(x)$ 中 x^2 的系数＝ ___-1___.

5、已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $0,2,3$，则行列式 $\left|A^3-3A^2+4A\right|=$___0___.

6、若线性方程组 $AX=b$ 有解，且系数矩阵 A 的秩为 r，则增广矩阵 $\tilde{A}=(A,b)$ 的秩为

___r___.

7、设 A 为 2 阶矩阵，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$A\vec{\alpha}_1=0$，$A\vec{\alpha}_2=3\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，则

A 的非零特征值为___1___.

8、设 $f(x)=x^2+3x+2$ ，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，则 $f(A)=$ ___$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$___.

9、设 4 阶矩阵 A 的特征值互不相同，若行列式 $|A|=0$，则 A 的秩为___3___.

10、设二次型 $f=x^2+8xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$，用矩阵记号表示该二次型为

___$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$___.

二、 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&2&3\\3&0&1&2\\2&1&3&4\\2&0&3&1\end{vmatrix}$.

解 $D=-\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-5&-7\\0&-1&-5\end{vmatrix}=-18.$$

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\0&1\end{pmatrix}$，求 $3A^{\mathrm{T}}B+4E$.

解 $3A^{\mathrm{T}}B+4E=3\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$,

$$=3\begin{pmatrix}1&3\\-1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9\\-3&-5\end{pmatrix}.$$

3、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&3&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，求方阵 A 的逆矩阵 A^{-1}.

解 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

4、已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1+4x_2-8x_3-7x_4=1 \end{cases}$.

(1) 求出相应的齐次线性方程组的基础解系；(2) 求出上述非齐次线性方程组的通解.

解 $(A, b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -8 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

对应齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ -x_2+5x_3+4x_4=0 \end{cases}$的基础解系为 $\zeta_1=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \zeta_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，.

非齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ -x_2+5x_3+4x_4=2 \end{cases}$的一个特解为$\eta=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

非齐次线性方程组的通解为：$c_1\zeta_1+c_2\zeta_2+\eta=c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

其中c_1, c_2为任意常数.

5、矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量，并说明$A$矩阵可否相似对角化？

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$，

A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_2=2$，

当$\lambda=1$时，$(E-A)X=0$，求得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

特征值$\lambda=1$对应的特征向量：$k_1\xi_1$，$k_1 \neq 0$，

当$\lambda=2$时，$(2E-A)X=0$，求得基础解系：$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

特征值$\lambda=2$对应的特征向量：$k_2\xi_2$，$k_2 \neq 0$，

因为A矩阵只有 2 个线性无关的特征向量，

故A矩阵不能对角化.

三、 简答题（每小题 5 分，共 15 分）

1、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组 $AX=b$ 的三个解，其中 A 为 5×4 矩阵，$r(A)=3$，若 $\alpha_1=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2+3\alpha_3=(2,1,5,0)^{\mathrm{T}}$，求出该方程组的通解.

解　因为 A 为 5×4 矩阵，$r(A)=3$，

故齐次方程基础解系所含向量个数为 1 ，

$$A(\alpha_2+3\alpha_3-4\alpha_1)=0,$$

可得 $AX=0$ 的基础解系：$\xi_1=\alpha_2+3\alpha_3-4\alpha_1=\begin{pmatrix}-2 & -7 & 5 & -4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

方程组的通解为：$c_1\xi_1+\alpha_1=c_1\begin{pmatrix}-2\\-7\\5\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$　　c_1 为任意常数.

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\-2 & x & -2\\-4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\0 & y & 0\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$ 相似，求 x 与 y .

解　因 A 与对角矩阵 B 相似，

故 $1+x+1=5+y-4$，即 $y=x+1$，

$|A|=|B|$ 即 $-15x-40=-20y$，

得 $x=4$ ，$y=5$.

3、已知将 3 阶可逆矩阵 A 的第 2 行的 2 倍加到第 3 行得到矩阵 B，把矩阵 B 的第 2 列的 3 倍加到第 1 列得到矩阵 C，其中 $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解　由题意得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\-7 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

四、 证明与计算（每小题 5 分，共 15 分）

1、 设方阵 A 满足 $A^2+5A+5E=0$，证明 $A+3E$ 是可逆矩阵，并求出 $(A+3E)^{-1}$.

证明 $A^2+5A+5E=(A+3E)(A+2E)-E=0,$

$(A+3E)(A+2E)=E$

故由定义可知， $A+3E$ 可逆，且 $(A+3E)^{-1}=A+2E$.

2、设 $\vec{b}_1=\vec{a}_1+2\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=2\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{b}_3=2\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{b}_4=2\vec{a}_1+\vec{a}_4$，证明向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4$ 线性相关.

证明 $$\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4\right)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&2\\2&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\2&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$r(A)=3<4$，故 $r(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4)\le r(A)<4$，

从而向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4$ 线性相关.

3、已知 n 阶方阵 A 为可逆矩阵，且矩阵 A 的每行元素的和为 5，证明可逆矩阵 A^{-1} 的每行元素的和为 $\frac{1}{5}$.

证明 因为矩阵的每行元素的和为 5，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\\vdots\\5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

又因 n 阶方阵 A 为可逆矩阵，故 $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,

所以可逆矩阵 A^{-1} 的每行元素的和为 $\frac{1}{5}$.