一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1、已知 $\vec{a}=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\vec{b}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，则内积 $[\vec{a},\vec{b}]=$ ___6___.

2、矩阵 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$，其中 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是矩阵 A 的列向量，$B=(\vec{a}_3,2\vec{a}_2,\vec{a}_1+3\vec{a}_3)$，已知 $|A|=2$，则行列式 $|B|$ = ___-4___.

3、设 $\vec{b}_1=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{b}_3=\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{b}_4=\vec{a}_1+\vec{a}_4$，则向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4$ 是什么关系__线性相关__（填汉字“线性相关”或“线性无关”）.

4、已知方阵 A 满足 $A^2+3A+4E=O$，则 $(A+2E)^{-1}=$ ___$-\frac{1}{2}(A+E)$___.

5、已知将 3 阶可逆矩阵 A 的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得到矩阵 B，且 $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$，问矩阵

$A=$ ___$\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\-1&0&-5\end{pmatrix}$___.

6、已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $0,1,2$，则 A^2+3A+E 的所有特征值为__1，5，11__.

7、已知 $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，三直线 $\begin{cases}l_1:a_1x+b_1y+c_1=0\\l_2:a_2x+b_2y+c_2=0,(a_i+b_i\neq 0,i=1,2,3)\\l_3:a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$

相交于一点的充分必要条件为__a, b 线性无关，a, b, c 线性相关__.

8、设矩阵 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)$，其中 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 是矩阵 A 的列向量，已知 $\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性无关，且 $\vec{a}_1=3\vec{a}_2-2\vec{a}_3$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解= $c\left(1\ -3\ \ 2\ \ 0\right)^{\mathrm{T}}$,c任意常数.

9、已知矩阵 A 与矩阵 B 等价，且秩 $r(A)=2$，则秩 $r(A,B)=$ ___2___.

10、设二次型 $f=x^2+2xy+3y^2+4xz+z^2+6yz$，用矩阵记号表示该二次型为

___$\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$___

二、 计算题（每小题 9 分，共 54 分）

1、设 $A=(1\ 1\ 1)$，$B=(1\ 0\ 1)$，$C=A^{\mathrm{T}}B$，求 $2C+5E$.

解 $2C+5E==2\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7&0&2\\2&5&2\\2&0&7\end{pmatrix}.$

2、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&1&1\\1&0&3&1\\1&2&2&2\\1&0&1&3\end{vmatrix}$.

解 $D=-2\begin{vmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{vmatrix}$

$$D=-10\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=-40 .$$

3、解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解 设 $AXB=C$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

4、已知 $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量，并说明 A 矩阵可否相似对角化？

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$

对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征值向量 $p_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}, p_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征值向量 $p_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 A 矩阵有 3 个线性无关的特征向量，故 A 矩阵能对角化.

5、已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 5 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$.

(1) 求出相应的齐次线性方程组的基础解系；(2) 求出上述非齐次线性方程组的通解.

解 对增广矩阵进行初等行变换，有$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8 \\ x_2 = \ \ x_3 + 13 \\ x_4 = \qquad 2 \end{cases}$.令$x_3 = 0$，得方程组的一个特解$\eta = (-8, 13, 0, 2)^{\mathrm{T}}$

对应的齐次方程组为$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \ \ x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.,齐次方程组的基础解系$\xi = (-1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$

非齐次线性方程通解为：$c_1\zeta + \eta$，c_1任意常数.

6、设$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，问$k$为何值，可使$(1) r(A) = 1, (2) r(A) = 2, (3) r(A) = 3$.

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) \end{pmatrix}$.

(1)当$k = 1$ 时，$r(A) = 1$；

(2)当$k = -2$时，$r(A) = 2$；

(3)当$k \neq 1$且$k \neq -2$时，$r(A) = 2$.

三、 简答题（第 1 题 6 分，第 2，3 每小题 5 分，共 16 分）

1、设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$可相似对角化，求$x$.

解 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 6)$

当$\lambda = 1$ 时，可相似对角化则，$R(A - E) = 1$

$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 故 $x = 3$

2、设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\vec{a}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ ，$\vec{a}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，求矩阵 A 的特征值和特征向量**.**

解　因 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

故 A 有特征值 $\lambda_1=3$ ，对应的特征值为 $p_1=(1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$

因向量 $\vec{a}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ ，$\vec{a}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解

故 A 有特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ ，

$\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $p_2=(-1\quad 2\quad -1)^{\mathrm{T}},\ p_3=(0\quad -1\quad 1)^{\mathrm{T}}$

3、求一个齐次线性方程组 $Ax=0$，使得它的基础解系为 $\vec{\xi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$ ，$\vec{\xi}_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$**.**

解　方程组的任一解 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$

则 $\begin{cases}x_1=3c_2\\x_2=c_1+2c_2\\x_3=2c_1+c_2\\x_4=3c_1\end{cases}$　　故所求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0\\x_1-3x_3+2x_4=0\end{cases}$

四、　证明与计算（每小题 5 分，共 10 分）

1、设 n 阶矩阵 A 与 s 阶矩阵 B 都可逆，证明 $\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}$ 可逆，并求出 $\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}^{-1}$**.**

解　因 $\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\A^{-1} & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\A^{-1} & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}=E$

故 $\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}$ 可逆。$\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\A^{-1} & O\end{pmatrix}$

2、设$\vec{\eta}$是非齐次线性方程$Ax=b$的一个解，其中$b\neq 0$，$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明$\vec{\eta},\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$线性无关.

证明 设存在数$k_0,k_1,k_2\cdots k_{n-r}$使得$k_0\eta+k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}=0$成立；

则$A\cdot\left(k_0\eta+k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}\right)=0$

又因为$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组$Ax=0$ 的一个基础解系。

所以上式可化为$A\cdot k_0\eta=0$ ，即$k_0\cdot b=0$

因为$b\neq 0$ ，所以$k_0=0$

则 $k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}=0$

有因 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 线性无关，

则 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$

即证$\vec{\eta},\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 线性无关