学号:

姓名:

班级:

宁波工程学院 2017---2018 学年第 1 学期

《线性代数 A》课程期末考试卷 A 卷

题　号	一	二	三	四	总分	复核人
应得分	20 分	54 分	16 分	10 分	100 分	
实得分						
评卷人						

本试卷适用班级：工科各专业和物流专业 16 级各班级（不含汽车 16-3,4 网络 16-3 的三个班级）

考试时间：2 个小时

一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1、已知 $\vec{a}=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\vec{b}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，则内积 $[\vec{a},\vec{b}]=$ 6 .

2、矩阵 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$，其中 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是矩阵 A 的列向量，$B=(\vec{a}_3,2\vec{a}_2,\vec{a}_1+3\vec{a}_3)$，已知 $|A|=2$，则行列式 $|B|$ = -4 .

3、设 $\vec{b}_1=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{b}_3=\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{b}_4=\vec{a}_1+\vec{a}_4$，则向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4$ 是什么关系 线性相关 （填汉字“线性相关”或“线性无关”）.

4、已知方阵 A 满足 $A^2+3A+4E=O$，则 $(A+2E)^{-1}=$ $-\frac{1}{2}(A+E)$.

5、已知将 3 阶可逆矩阵 A 的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得到矩阵 B，且 $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$，问矩阵

$A=$ $\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\-1&0&-5\end{pmatrix}$.

6、已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $0,1,2$，则 A^2+3A+E 的所有特征值为 1，5，11 .

7、已知 $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，三直线 $\begin{cases}l_1:a_1x+b_1y+c_1=0\\l_2:a_2x+b_2y+c_2=0,(a_i+b_i\neq 0,i=1,2,3)\\l_3:a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$

相交于一点的充分必要条件为 a, b 线性无关，a, b, c 线性相关 .

8、设矩阵 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)$，其中 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 是矩阵 A 的列向量，已知 $\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性无关，且 $\vec{a}_1=3\vec{a}_2-2\vec{a}_3$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解= $c\left(1\ -3\ 2\ 0\right)^{\mathrm{T}},c$任意常数 .

9、已知矩阵 A 与矩阵 B 等价，且秩 $r(A)=2$，则秩 $r(A,B)=$ 2 .

10、设二次型 $f=x^2+2xy+3y^2+4xz+z^2+6yz$，用矩阵记号表示该二次型为

$\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

二、 计算题（每小题 9 分，共 54 分）

1、设 $A=(1\ 1\ 1)$，$B=(1\ 0\ 1)$，$C=A^{\mathrm{T}}B$，求 $2C+5E$.

解 $2C+5E==2\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ …………….(5 分)

$=\begin{pmatrix}7&0&2\\2&5&2\\2&0&7\end{pmatrix}$. …………….(9 分)

2、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&1&1\\1&0&3&1\\1&2&2&2\\1&0&1&3\end{vmatrix}$.

解 $D=-2\begin{vmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{vmatrix}$ …………….(5 分)

$D=-10\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=-40$. …………….(9 分)

3、解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$ ，求矩阵 X.

解 设 $AXB=C$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ …………….(3 分)

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ …………….(6 分)

$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ …………….(9 分)

4、已知 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量，并说明 A 矩阵可否相似对角化？

解　$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$ …………….(3 分)

对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征值向量 $p_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}, p_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征值向量 $p_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. ……….(7 分)

因为 A 矩阵有 3 个线性无关的特征向量，故 A 矩阵能对角化. …………….(9 分)

5、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+\ \ x_2=5 \\ 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$.

(1) 求出相应的齐次线性方程组的基础解系；(2) 求出上述非齐次线性方程组的通解.

解　对增广矩阵进行初等行变换，有 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1=-x_3-8 \\ x_2=\ \ x_3+13 \\ x_4=\qquad 2 \end{cases}$. 令 $x_3=0$，得方程组的一个特解 $\eta=(-8,13,0,2)^{\mathrm{T}}$. ………….(3 分)

对应的齐次方程组为 $\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=\ \ x_3 \\ x_4=0 \end{cases}$.,齐次方程组的基础解系 $\xi=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$. ………(6 分)

非齐次线性方程通解为：$c_1\zeta+\eta$，c_1 任意常数. ……….(9 分)

6、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，问 k 为何值，可使 $(1)r(A)=1, (2)r(A)=2, (3)r(A)=3$.

解　$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) \end{pmatrix}$.

(1)当 $k=1$ 时，$r(A)=1$； ………….(3 分)

(2)当 $k=-2$ 时，$r(A)=2$； ………….(6 分)

(3)当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时，$r(A)=2$. ………….(9 分)

三、 简答题（第 1 题 6 分，第 2，3 每小题 5 分，共 16 分）

1、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 x .

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&x\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-6)$

当 $\lambda=1$ 时，可相似对角化则，$R(A-E)=1$ ………….(3 分)

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $x=3$ ………….(6 分)

2、设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\vec{a}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ ，$\vec{a}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，求矩阵 A 的特征值和特征向量.

解 因 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

故 A 有特征值 $\lambda_1=3$ ，对应的特征值为 $p_1=(1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$ ………….(3 分)

因向量 $\vec{a}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ ，$\vec{a}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解

故 A 有特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ ，

$\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $p_2=(-1\quad 2\quad -1)^{\mathrm{T}}, p_3=(0\quad -1\quad 1)^{\mathrm{T}}$ …….(5 分)

3、求一个齐次线性方程组 $Ax=0$，使得它的基础解系为 $\vec{\xi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$ ，$\vec{\xi}_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

解 方程组的任一解 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ ………….(3 分)

则 $\begin{cases}x_1=3c_2\\x_2=c_1+2c_2\\x_3=2c_1+c_2\\x_4=3c_1\end{cases}$ 故所求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0\\x_1-3x_3+2x_4=0\end{cases}$ ………….(5 分)

四、 证明与计算（每小题 5 分，共 10 分）

1、设n 阶矩阵A 与s阶矩阵B 都可逆，证明$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$可逆，并求出$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$.

解 因$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}=E$ ………….(3 分)

故$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$可逆。$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ ………….(5 分)

2、设$\vec{\eta}$是非齐次线性方程$Ax=b$的一个解，其中$b\neq 0$，$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明$\vec{\eta},\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

证明 设存在数$k_0,k_1,k_2\cdots k_{n-r}$使得$k_0\eta+k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}=0$成立；

则$A\cdot\left(k_0\eta+k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}\right)=0$ ………….(3 分)

又因为$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组$Ax=0$ 的一个基础解系。

所以上式可化为$A\cdot k_0\eta=0$，即$k_0\cdot b=0$

因为$b\neq 0$，所以$k_0=0$

则 $k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}=0$

有因 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 线性无关，

则 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$ ………….(5 分)

即证$\vec{\eta},\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 线性无关