2018 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

（工科类）参考答案

一、计算题

1、

求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

解答: 设 $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\int \frac{1}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{1+t^2}{(3+t^2)t}\,\mathrm{d}t=\int\left[\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{1}{3}\ln(3+t^2)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{3}\ln\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C.$$

2、

求定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

证明：由奇函数在以原点为中心的对称区间上积分为零知

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2-2x\cos x+\cos^2 x)\cos x}{x^2+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+\cos^2 x)\cos x}{x^2+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\cos x\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\cos x\,\mathrm{d}x=2\sin 1.$$

3、

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数, 求 $z''_{xy}(0,0)$.

解答：设 $F(x,y,z)=z^5-xz^4+yz^3-1$, 则

$$F'_x+F'_z z'_x=0,\quad F'_y+F'_z z'_y=0,$$

$$(F''_{xy}+F''_{xz}z'_y)+(F''_{zy}+F''_{zz}z'_y)z'_x+F'_z z''_{xy}=0.$$

在 $x=0, y=0$ 处, 由 $F(0,0,z)=0$ 知 $z=1$,

$$z'_x(0,0)=-\frac{F'_x}{F'_z}(0,0,1)=-\frac{-1}{5}=\frac{1}{5}, \quad z'_y(0,0)=-\frac{F'_y}{F'_z}(0,0,1)=-\frac{1}{5},$$

$$z''_{xy}(0,0)=-\frac{1}{F'_z}[F''_{xy}+F''_{xz}z'_y+(F''_{zy}+F''_{zz}z'_y)z'_x](0,0,1)$$

$$=-\frac{1}{5}\left\{0+(-4)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left[3+20\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right]\frac{1}{5}\right\}=-\frac{3}{25}.$$

4、

计算 $\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式 $\sqrt{2x-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}$ 所确定的区域.

解答：

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{1-\cos4\theta}{8}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{4}.$$

5、

求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x[\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

解答: 由积分变换及 L'Hospital 法则知

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\mathrm{e}^{s^2}-1)(x-s)\,\mathrm{d}s}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\mathrm{e}^{s^2}-1)\cdot1\,\mathrm{d}s}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{12x^2}=\frac{1}{12}.$$

二、

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$ 的和.

解答: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-1)^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+1)^{2n}}{2n}x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}(3x)^{2n}.$$

故原级数的收敛半径为 $\frac{1}{3}$. 又当 $x=-\frac{1}{3}$ 时, 前一个级数发散,

当 $x=\frac{1}{3}$ 时, 后一个级数发散. 因此, 原级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{3x} t^{2n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^3\frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\ln\left(1-9x^2\right).$$

当 $x=\frac{1}{6}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\ln\frac{28}{15}$.

三、

分析函数 $f(x,y)=(x^2+y^2-6y+10)\mathrm{e}^y$ 的极值问题.

解答: 由 $f_x=2x\mathrm{e}^y=0$, $f_y=\mathrm{e}^y(4+x^2-4y+y^2)=0$

$x=0$, $y=2$ 是 f 的驻点.

$f_{xx}=2\mathrm{e}^2$, $f_{xy}=f_{yx}=0$, $f_{yy}=0\Rightarrow f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$.

不能利用 Hessian 矩阵来判定 $(0,2)$ 是否为极值点.

而 $f_y(0,y)=(y-2)^2\mathrm{e}^y>0,\quad y\neq 2$, 即当 $x=0$ 时, f 随 y 单调递增, 故没有极值.

四、

已知质线 $L:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 的线密度 $\rho=|x^2+x-y^2-y|$, 求 L 的质量.

解答: $L:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta, y=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta, \\ z=2-\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \int_L \rho \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \left|\frac{3}{2}\cos 2\theta\right| \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left|\frac{3}{2}\cos 2\theta\right| \sqrt{3-\frac{3}{2}\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \frac{3}{4}|\cos\theta| \sqrt{3-\frac{3}{2}\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 9\sqrt{2}-\sqrt{6} \end{aligned}$$

五、

已知 $a_n>0$, $a_1<1$, $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 由数学归纳法

$$a_n<1 \Rightarrow (n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n<n+1 \Rightarrow a_{n+1}^2<1 \Rightarrow a_{n+1}<1.$$

$$(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n>na_n^2+a_n^2 \Rightarrow a_{n+1}^2>a_n^2 \Rightarrow a_{n+1}>a_n$$

据单调有界定理即知 $\{a_n\}$ 收敛.