一、 填空题（每小题 2 分，共 12 分）

1．已知向量 $\vec{a}=(2,5,1)^{\mathrm{T}},\vec{b}=(-1,0,k)^{\mathrm{T}}$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正交，则参数 $k=$ ____2____.

2．确定 5 阶行列式的项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ 前面所带的符号是（填汉字“正”或“负”）__负__.

3．设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，$D_1=\begin{vmatrix} 3a_{13} & 2a_{11}-4a_{12} & 5a_{11} \\ 3a_{23} & 2a_{21}-4a_{22} & 5a_{21} \\ 3a_{33} & 2a_{31}-4a_{32} & 5a_{31} \end{vmatrix}$，则 D_1 ＝__120__.

4．已知向量组 $\vec{a}=(2\ ,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{b}=(3\ ,2k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则参数 $k=$ ____3/4____.

5．若线性方程组 $Ax=b$ 有解，且系数矩阵 A 的秩为 r，则增广矩阵 $\tilde{A}=(A,b)$ 的秩为 r____________.

6．已知 3 阶矩阵 A 有一个特征值为 2，则矩阵 A^3+2E 必有一个特征值为 ____10____.

二、 单项选择题（每小题 2 分，共 12 分）

1．设 A,B,C 都是 n 阶矩阵． 如果 $ABC=E$（单位矩阵）， 那么 【 C 】

(A) $ACB=E$； (B) $BAC=E$； (C) $CAB=E$； (D) $CBA=E$.

2．下面关于矩阵秩的说法，不正确的是 【 C 】

(A) $r(A)=r(A^{\mathrm{T}})$； (B) 若 A□ B 则 $r(A)=r(B)$；

(C) $r(A,B)\geq r(A)+r(B)$； (D) $r(A,B)\leq r(A)+r(B)$.

3．若二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定的，则其对应矩阵 A 的特征值 【 A 】

(A) 都大于 0； (B) 都大于等于 0； (C) 可能正也可能负； (D) 都小于 0.

4．设 A 是一个 n 阶矩阵，如果秩 $r(A)=r<n$，那么 【 D 】

(A) A 的所有 $r-1$ 阶子式都不等于零； (B) A 的所有 r 阶子式都不等于零；
(C) A 的所有 $r+1$ 阶子式都不等于零； (D) A 的所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

5．对于 n 阶实对称矩阵 A，以下结论正确的是 【 B 】

(A) 一定有 n 个不同的特征根；(B) 存在正交矩阵 U，使 $U^{\mathrm{T}}AU$ 成对角形；

(C) 它的特征根一定是正数； (D)属于不同特征根的特征向量必线性无关，但不一定正交.

6． n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 【 B 】

(A) 充分必要条件； (B) 充分而非必要条件；
(C) 必要而非充分条件； (D) 既非充分也非必要条件.

三、 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1．行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的代数余子式记 A_{ij}，计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}$ 的值.

解： $A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$

$=6+3+2-9-4-1=-3$

2．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&-1&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩 $r(A)$，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解： $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&-1&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故矩阵 A 的秩 $r(A)=2$

A 的一个最高阶非零子式 $\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}$.

3．设 $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，求 $2AB^{\mathrm{T}}+4E$.

解： $2AB^{\mathrm{T}}+4E=2\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$2AB^{\mathrm{T}}+4E=\begin{pmatrix}6&4\\2&8\end{pmatrix}$

4．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$，求方阵 A 的逆矩阵 A^{-1}.

解：$(A,E)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

5．矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量，并说明 A 矩阵可否相似对角化？

解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$，

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$

对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征值向量 $p_1=(\frac{1}{4},1,0)^{\mathrm{T}},p_2=(\frac{1}{4},0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于特征值 $\lambda_3=-1$ 的特征值向量 $p_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 A 矩阵有 3 个线性无关的特征向量，故 A 矩阵能对角化.

四、 简答题（每小题 5 分，共 15 分）

1．已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=2\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_3+2x_4=5\end{cases}$. 求出上述非齐次线性方程组的通解.

解：对增广矩阵进行初等行变换，有 $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&1&1&1\\1&0&2&2&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&2&5\\0&1&-1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1=-2x_3-2x_4+5\\x_2=\ \ x_3+x_4-3\end{cases}$. 令 $x_3=0,x_4=0$，得方程一个特解 $\eta=(5,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$.

对应齐次方程组为$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = \ \ x_3 + x_4 \end{cases}$，齐次方程组基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

非齐次线性方程通解为：$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta$，$c_1, c_2$任意常数.

2．已知向量组$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性无关，向量$\vec{b}_1 = \lambda\vec{a}_1 + \vec{a}_2$，$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_3$，$\vec{b}_3 = \lambda\vec{a}_3 + \vec{a}_1$，

且向量组$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 线性相关，求参数λ .

解：$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

故$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$ 即$\lambda = \pm 1$

3. 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$与$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$相似，求$a, b$的值.

解： $1 - 2 + b = 2 + 1$ 即$b = 4$

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2b$ 即$a = -2$

五、 证明与计算（第 1 小题 5 分，第 2 小题 6 分，共 11 分）

1．设方阵A满足$A^2 + 3A + 3E = 0$，证明$A + E$是可逆矩阵，并求出$(A + E)^{-1}$.

证明： $A^2 + 3A + 3E = (A + E)(A + 2E) + E = 0,$

$(A + E)(-A - 2E) = E,$

故由定义可知，$A - E$ 可逆. $(A + E)^{-1} = -A - 2E$

2．设 A 与 B 是 n 阶对称矩阵，且 $AB+E$ 及 A 都可逆，证明 $(AB+E)^{-1}A$ 为可逆的对称矩阵.

证明: 由于 $AB+E$ 及 A 都可逆，故 $|AB+E|$ 及 $|A|$ 都不等于零，故 $\left|(AB+E)^{-1}A\right|\neq 0$ ，

从而 $(AB+E)^{-1}A$ 可逆.

$$
\begin{aligned}
\left((AB+E)^{-1}A\right)^T &= A^T\left((AB+E)^{-1}\right)^T = A\left((AB+E)^T\right)^{-1} \\
&= A(BA+E)^{-1} = \left((BA+E)A^{-1}\right)^{-1} = (B+A^{-1})^{-1} \\
&= (B+A^{-1})^{-1}A^{-1}A = \left(A(B+A^{-1})\right)^{-1}A = (AB+E)^{-1}A
\end{aligned}
$$

故 $(AB+E)^{-1}A$ 为可逆对称矩阵 .