

积分

2018 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题
(工科类)

一、计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求不定积分 $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$.

2. 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{(x - \cos x)^2 \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$.

3. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定的隐函数，求 $z''_{xy}(0, 0)$.

4. 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ，其中 D 为由不等式 $\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ 所确定的区域。

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [e^{(x-t)^2} - 1] t dt}{x^4}$.

二、（满分 20 分）求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛域及级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{n 6^n}$ 的和。

三、（满分 20 分）分析函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 6y + 10)e^y$ 的极值问题。

四、（满分 20 分）已知质线 $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 的线密度 $\rho = |x^2 + x - y^2 - y|$ ，求

L 的质量。

五、（满分 20 分）已知 $a_n > 0$, $a_1 < 1$, $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

证明： $\{a_n\}$ 收敛。