宁波工程学院 2017---2018 学年第 1 学期

《线性代数 A》课程期末考试卷 B 卷参考评分标准

题　号	一	二	三	四	总分	复核人
应得分	20 分	48 分	17 分	15 分	100 分	
实得分						
评卷人						

本试卷适用班级：工科各专业和物流专业 16 级各班级（不含汽车 16-3,4 网络 16-3 的三个班级）

考试时间：2 个小时

学号：

姓名：

班级：

一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1、确定 4 阶行列式的项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ 前面所带的符号是(填汉字“正”或负”) 正 .

2、已知 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，则行列式 $|2A|=$ 24 .

3、已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$ ，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{13} & 3a_{11}-4a_{12} & 5a_{11} \\ 2a_{23} & 3a_{21}-4a_{22} & 5a_{21} \\ 2a_{33} & 3a_{31}-4a_{32} & 5a_{31} \end{vmatrix}$ ，则 $D_1=$ 120 .

4、已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，则行列式 $\left|A^3-5A^2+12E\right|=$ 0 .

5、已知 $\vec{a}=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\vec{b}=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\vec{c}=(1,t,2)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$ 3/2 .

6、若线性方程组 $AX=b$ 无解，且系数矩阵 A 的秩为 r，则增广矩阵 (A,b) 的秩为 $r+1$.

7、设 A 为 2 阶矩阵，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$A\vec{\alpha}_1=0$，$A\vec{\alpha}_2=2\vec{\alpha}_1+5\vec{\alpha}_2$，则 A 的非零特征值为 5 .

8、设 $f(x)=x^2+4x+3$ ，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $f(A)=$ $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9、设向量 $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，三直线 $\begin{cases} l_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ l_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \\ l_3: a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ $,(a_i+b_i\neq 0, i=1,2,3)$

相交于一点的充分必要条件为 a, b 线性无关，a, b, c 线性相关 .

10、设二次型 $f=2x^2+6xy+4y^2+4xz+6z^2+2yz$，用矩阵记号表示该二次型为

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

二、 计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D=-2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ …………….(4 分)

$D=-10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-40$. …………….(8 分)

2、设 $A=(1\ \ 0\ \ 1)$，$B=(1\ \ 2\ \ 0)$，$C=A^{\mathrm{T}}B$，求 $3C^5+4E$.

解 $3C^5+4E=3C+4E$， …………….(4 分)

$$=3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$ …………….(8 分)

3、解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解 设 $AXB=C$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ …………….(3 分)

$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ …………….(6 分)

$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ …………….(8 分)

4、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

(1) 求出相应的齐次线性方程组的基础解系；(2) 求出上述非齐次线性方程组的通解.

解： $(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$.令 $x_2 = x_4 = 0$，得方程组的特解 $\eta = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^{\mathrm{T}}$. ………….(3 分)

对应的齐次方程为 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

齐次方程组的基础解系 $\xi_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ ………(6 分)

非齐次线性方程通解为：$c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + \eta$，$c_1, c_2$ 任意常数. ……….(8 分)

5、矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量，并说明 A 矩阵可否相似对角化？

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$，

A 的特征值为：$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_2 = 2$， …………….(3 分)

当 $\lambda = 1$ 时，$(E-A)X = 0$，求得基础解系：$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

特征值 $\lambda = 1$ 对应的特征向量：$k_1\xi_1$ ，$k_1 \neq 0$，

当 $\lambda = 2$ 时，$(2E-A)X = 0$，求得基础解系：$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

特征值 $\lambda = 2$ 对应的特征向量：$k_2\xi_2$，$k_2 \neq 0$， …………….(6 分)

因为 A 矩阵只有 2 个线性无关的特征向量，

故 A 矩阵不能对角化. …………….(8 分)

6、设 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$，问 k 为何值，可使（1）秩 $r(A) = 3$；（2）秩 $r(A) = 2$.

解 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k+1 & -1-k \\ 0 & 0 & -(k+1)(k-2) \end{pmatrix}$ ………….(3 分)

(1) 当 $k \neq -1, k \neq 2$ 时， $r(A) = 3$； ………….(6 分)

(2) 当 $k = 2$ 时， $r(A) = 2$. ………….(8 分)

三、 简答题（第 1,2 题每题 6 分，第 3 小题 5 分，共 17 分）

1、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性方程组$AX=b$的三个解，其中$A$为$5\times4$矩阵，秩$r(A)=3$，若$\alpha_1=(2,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2+2\alpha_3=(1,2,3,0)^{\mathrm{T}}$，求出该方程组的通解.

解　因为A为5×4矩阵，$r(A)=3$，

$$A(\alpha_2+2\alpha_3-3\alpha_1)=0,$$

可得$AX=0$的基础解系：$\xi_1=\alpha_2+2\alpha_3-3\alpha_1=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 3 & -6\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，…………(3 分)

方程组的通解为：$c_1\xi_1+\alpha_1=c_1\begin{pmatrix}-5\\-1\\3\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}$　c_1为任意常数.　…………….(6 分)

2、设矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & x\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$可相似对角化，求$x$.

解　由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\1 & 1-\lambda & x\\1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，

得 A 的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

因为 A 可相似对角化，故$\lambda_2=\lambda_3=1$, $r(A-E)=1$　…………….(3 分)

$$(A-E)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & 0 & x\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & x+1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由知当$x=-1$时$r(A-E)=1$, 即$x=-1$为所求.　…………….(6 分)

3、已知将 3 阶可逆矩阵A的第 2 行的 3 倍加到第 3 行得到矩阵B，把矩阵B的第 1 列的 5 倍加到第 2 列得到矩阵C，其中$C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵$A$.

解　由题意得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$　…………….(3 分)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -13 & 1\\2 & -9 & 2\\-5 & 25 & -4\end{pmatrix}.$$　…………….(5 分)

四、 证明与计算（每小题 5 分，共 15 分）

1、设方阵 A 满足 $A^2+5A+7E=0$，证明 $A+3E$ 是可逆矩阵，并求出 $(A+3E)^{-1}$.

证明 $A^2+5A+7E=(A+3E)(A+2E)+E=0$

$\therefore\ A+3E$ 可逆 …………….(3 分)

故 $(A+3E)^{-1}=-(A+2E)$ …………….(5 分)

2、设 $\vec{b}_1=\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3+2\vec{a}_4$，$\vec{b}_2=\vec{a}_1+2\vec{a}_2+\vec{a}_3+3\vec{a}_4$，$\vec{b}_3=\vec{a}_1-\vec{a}_2+4\vec{a}_3$，

$\vec{b}_4=\vec{a}_1+3\vec{a}_3+\vec{a}_4$，证明向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4$ 线性相关 .

证明 $\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4\right)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}$, …………….(3 分)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$r(A)=2<4$，故 $r(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4)\le r(A)<4$，

从而向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4$ 线性相关. …………….(5 分)

3、设 n 阶方阵 A，证明秩的关系式 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$ 成立 .

证明 设 $AX=0$ 的任意非零解 x_1，则 $Ax_1=0$，故 $A^{\mathrm{T}}Ax_1=0$，

x_1 也是方程组 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 的解

设 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 的任意非零解 x_2，则 $A^{\mathrm{T}}Ax_2=0$，

故 $x_2^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax_2=(Ax_2)^{\mathrm{T}}Ax_2=0$，则 $Ax_2=0$，x_2 也是方程组 $AX=0$ 的解

从而 $AX=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 同解 …………….(3 分)

由方程组解的性质可知，$n-r(A)=n-r(A^{\mathrm{T}}A)$

所以秩的关系式 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$ 成立 . …………….(5 分)