上 海 交 通 大 学 试 卷

（2020 至 2021 学年 第 2 学期期末考试）

班级：________ 学号：________ 姓名：________

课程名称：组合数学 成绩：________

一 (10 分)、求字符串 123456 排列的个数，使得其中没有出现序列 12、23、34、45、56。

二 (10 分)、一个盒子里有 30 个红球、40 个蓝球和 50 个白球，相同颜色的球是无法区分的。从盒子中取出 70 个球，有多少种不同的取法？

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										
批阅人(流水阅)										

三 (10 分) 、

(1) 求集合 $A_1, A_2, \cdots A_k$ 选取的方法数，使得 $\varnothing \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq [n]$。

(2) 求 $[n]$ 的子集 $A_1, A_2, \cdots A_k$ 选取的方法数，使得 $A_1 \cap \cdots \cap A_k = \varnothing$。

四 (10 分)、设 $|X| = n$ 且 $\mathcal{F}$ 是 $X^{(k)}$ 的子集。定义 $\nabla\mathcal{F} = \{T \in X^{(k+1)} \mid \exists S \in \mathcal{F}$ 使得 $S \subsetneq T\}$。证明如果 $k \le \frac{n-1}{2}$，则有 $|\nabla\mathcal{F}| \ge |\mathcal{F}|$。其中，$X^{(i)}$ 表示 X 的所有 i 元子集所组成的集系。

五 (10 分)、证明 $R^{(2)}(\underbrace{3,3,3,\ldots,3}_{k\text{ 个}}) \leq 3k!$，其中 k 为正整数，R 代表广义 Ramsey 数记号。

六 (10 分)、记 $2n(n \geq 4)$ 的最大分部至多是 4 且有 n 个分部的分拆的个数为 A，记 $2n$ 的最大分部至多是 n 且有 3 个分部的分拆的个数为 B。求证 $A - B = 1$。

七 (10 分)、令 m 和 n 为正整数，$m < n$。证明 $m \leq \frac{1}{2}n$ 是存在一个 n 阶拉丁阵包含一个 m 阶的子拉丁方阵的充分必要条件。

八 (10 分)、我们称一个 $(0,1)$ 方阵 k-完美，如果一个矩阵含 1 的数量与这个矩阵的线秩都等于 k。（如 n 阶置换阵为 n-完美矩阵。）如果两个同阶的 $(0,1)$ 方阵没有相同的位置都是 1，则称这两个矩阵不交。

(1) 求 n 阶 k-完美矩阵的个数。其中 $k \leq n$。

(2) $A_1, A_2, \cdots A_{n-2}$ 是 $n-2$ 个不交的 n 阶置换阵，求与 A_i 均不交的 n 阶 k-完美矩阵的个数的表达式 $f(n,k)$。其中 $k \leq n$。

九 (10 分)、设 $A=\{1,2,3,...,2020\}$。求最小的 n，满足 A 的任意 n 元子集都存在四个不同数 x,y,z,w 使得 $x+y+z=w$，并给出证明。

十 (10 分)、令 $g(n)$ 是将 $2\times n$ 矩形用任意的 $a\times b$ 矩形平铺的方法数，a,b 为正整数。（设 $g(0)=1$。）例如，$g(2)=8$。请你写出其生成函数的一个简单表达式。