Семинар №1 по вычислительной математике
Завьялова Н.А.
6-й семестр

Рассмотрим несколько уравнений - это уравнение переноса(1) и волновое уравнение(2), которые относятся к уравнениям гиперболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{1}$$

где $c > 0$ - скорость распространения возмущений.

$$u(0,x) = \mu(x)$$
$$u(t,0) = \psi(t)$$

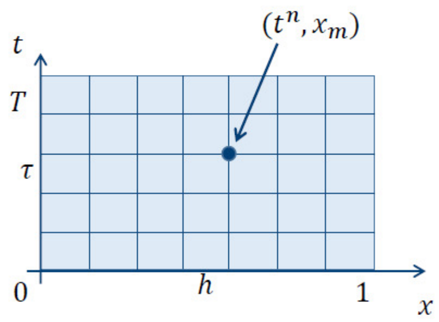
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \tag{2}$$

Далее - уравнение теплопроводности(3), которое является уравнением параболического типа, а также уравнение Гельмгольца(4) - уравнение эллиптического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{3}$$

где $D > 0$ - корректная постановка.

$$\Delta u + k^2 u = f \tag{4}$$



$$x_{m+1} - x_m = h$$
$$t^{n+1} - t^n = \tau$$
$$u(t^n, x_m) = u_m^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$$

Получаем разностное уравнение:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

Определение 1. *Решение разностной задачи сходится к решению дифференциального, если:*

$$||[u]_h - u_m^h|| \to 0 \text{ при } \tau, h \to 0,$$

$$||[u]_h - u_m^h|| \leqslant A\tau^p,\ \ A = const,$$

то сходимость порядка p по τ ($[u]_h$ - проекция точного решения на сетку).

Определение 2. *Решение разностной задачи аппроксимирует дифференциальную задачу, если невязка $|r| = ||L_h[u]_h - f_h|| \to 0,$ при $t, h \to 0$, причем L_h - разностный оператор, а f_n - проекция правой части.*

Стоит также упомянуть спектральный признак устойчивости:

$$\Delta^n = u^n - u^{*n},\ \text{где } u^{*n} - \text{возмущённое решение}$$
$$\Delta_m^n = \Sigma_k \lambda_k^m e^{ikmh},\ |\lambda_k| \leqslant 1 \to \text{устойчиво}$$

Теорема 1. *Сходимость = аппроксимация + устойчивость*

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+c\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}=f_m^n$$

Аппроксимация разложения в ряд Тейлора в окрестности точки u_m^n

$$u_m^{n+1}=u(t^n+\tau,x_m)=u_m^n+\tau u_t'+\frac{\tau^2}{2}u_t''+\frac{\tau^3}{6}u_t'''+o(\tau^4)$$

$$u_{m-1}^n=u(t^n,x_m-h)=u_m^n-hu_x'+\frac{h^2}{2}u_x''-\frac{h^3}{6}u_x'''+o(h^4)$$

Тогда:

$$r=u_t'+\frac{\tau}{2}u_t''+\frac{\tau^2}{6}u_t'''+o(\tau^3)+c(u_x'-\frac{h}{2}u_x''+\frac{h^2}{6}u_x'''+o(h^4))-f$$

$$u_t'+cu_x'=f$$

$$r=\frac{\tau}{2}u_t''+o(\tau^2)-c\frac{h}{2}u_x''+o(h^2)$$

$$||r||\leqslant o(\tau)+o(h)-\ \textit{аппроксимация 1-го порядка по } \tau \textit{ и по } h$$

Устойчивость
Для линейной задачи:

$$\frac{\Delta_m^{n+1}-\Delta_m^n}{\tau}+c\frac{\Delta_m^n-\Delta_{m-1}^n}{h}=0$$

$$\Delta_m^n=\Sigma_k\lambda_k^n e^{ikmh}$$

Исследование для одной гармоники:

$$\Delta_m^n\to\lambda_k^n e^{ikmh}$$

$$\lambda^n e^{ikmh}\frac{\lambda^{n+1}e^{ikmh}-\lambda^n e^{ikmh}}{\tau}+c\frac{\lambda^n e^{ikmh}-\lambda^n e^{ik(m-1)h}}{h}=0$$

Вводим число Куранта:

$$\sigma=\frac{c\tau}{h}>0$$

Рассмотрим пример:

$$\lambda-1+\sigma(1-e^{-ikh})=0$$

$$\lambda=(1-\sigma)-\sigma e^{-ikh}$$

$$|\lambda|\leqslant 1 \text{ при } \sigma\in[0;1]\ \to\ \sigma=\frac{c\tau}{h}\leqslant 1-\ \text{условие устойчивости}$$

$$C<0\to\sigma<0\to\lambda=(1+|\sigma|)+|\sigma|e^{-ikh}$$

Определение 3. *Условие Куранта-Фридрихса-Леви:*

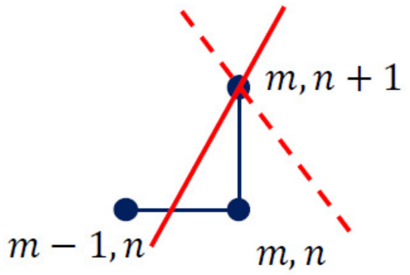
$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}=0;\ (c=\frac{\partial x}{\partial t})$$

$$x=ct+Const-\ \textit{характеристика}$$

Характеристика, выпущенная из верхней точки шаблона, должна проходить через шаблон:

$$c > 0 \to \frac{c\tau}{h} \leqslant 1, \text{ т.е. при } c < 0 - \text{ не устойчиво}$$



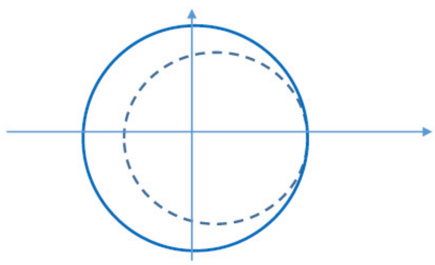
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n$$

$$\text{КФЛ: } \frac{|c|\tau}{h} \leqslant 1$$

Необходимо, но не достаточно ↑

Спектральный признак:

1. $u_m^n \to \Delta_m^n$
2. $f_m^n \to$
3. $\Delta_m^n \to \lambda^n e^{ikmh}$
4. $: \lambda^n e^{ikmh}$



$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + c\frac{e^{ikh} - 1}{h} = 0$$

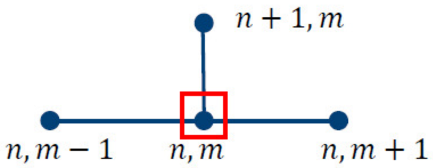
$$\lambda = 1 + \sigma - \sigma e^{ikh}$$

$$\sigma < 0\text{: } \lambda = 1 - |\sigma| + |\sigma| e^{ikh}$$

$$|\sigma| \leqslant 1 - \text{ устойчиво}$$

$$\frac{|c|\tau}{h} \leqslant 1$$

Метод неопределённых коэффициентов



$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f$$

$$Au_{m-1}^n + Bu_m^n + Cu_{m+1}^n + Du_m^{n+1} \approx \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm hu_x' + \frac{h^2}{2}u_x'' \pm \frac{h^3}{6}u_x''' + o(h^4)$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2}u_t'' + o(\tau^3)$$

$$u_m^n\text{: } A + B + C + D = 0$$

$$u_t'\text{: } D \cdot \tau = 1$$

$$u_x'\text{: } -hA + hC = c$$

$$u_t''\text{: } \frac{\tau^2}{2}D = 0 - \text{ не подходит(противоречие со 2-м)}$$

$$u_x''\text{: } \frac{h^2}{2}A + \frac{h^2}{2}C = 0$$

Отсюда получаем:

$$-A + C = \frac{c}{h} \text{ и } A + C = 0$$
$$\Rightarrow C = \frac{c}{2h};\ A = -\frac{c}{h}$$

Также:

$$B = -D = -\frac{1}{\tau}$$

$$r \sim o(\tau) + o(h^2)$$

$$u_x''':\ A + C = 0$$

$$-c\frac{u_m^{n+1}}{2h} - \frac{u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n}{2h} + \frac{u_m^{n+1}}{\tau} = f_m^n$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{2h} = f_m^n$$

$$\text{КФЛ: } \frac{|c|\tau}{h} \leqslant 1$$

Спектральный признак:

$$u_m^n \to \Delta_m^n$$
$$f_m^n \to$$
$$\Delta_m^n \to \lambda^n e^{ikmh}$$
$$:\lambda^n e^{ikmh}$$

В итоге получаем:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + c\frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2hi} = 0$$

$$\lambda = 1 + \sigma i sin(kh)$$
$$\lambda^2 = 1 + \sigma^2 sin^2(kh) \leqslant 1 \Rightarrow \sigma = 0 - \text{ схема неустойчива}$$