Лекция 6

Гиперболические уравнения
(решение задач)

Темы контрольной

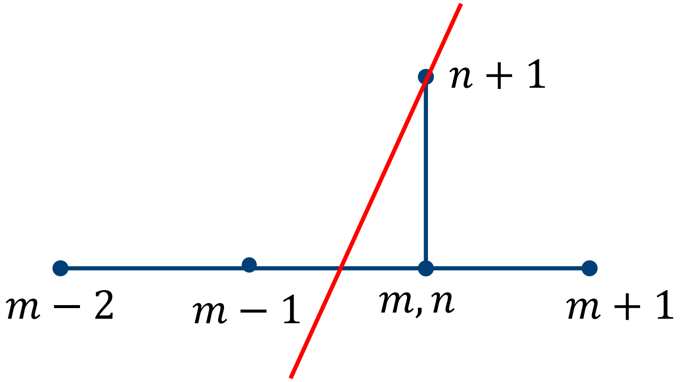
1. Методы построения разностных схем.
1.1. Метод неопределенных коэффициентов.
1.2. Сеточно-характеристический метод
1.3. Повышение порядка точности

2. Одно уравнение гиперболического типа.
2.1. Аппроксимация
2.2. Устойчивость (спектральный признак, КФЛ),
2.3. Устойчивость 2D-случай
2.4. Монотонность для явной схемы
2.5. порядок точности граничных условий

3. Системы уравнений
3.1. Показать, что гиперболическая
3.2. Найти уравнение характеристик
3.3. Спектральная устойчивость системы
3.4. Инварианты Римана: предложить метод решения системы
3.5. Корректная постановка граничных условий для ГСУ

Сеточно-характеристический метод

Построить разностную схему для решения уравнения переноса на шаблоне с помощью сеточно-характеристического метода



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f, \qquad a > 0$$

Интегрируем вдоль характеристики

$$u^{n+1} - u^{*} = \frac{(f^{n+1} + f^{*})\tau}{2}$$

$$u^{n+1} = u^{*} + \tau\frac{f^{n+1} + f^{*}}{2}$$

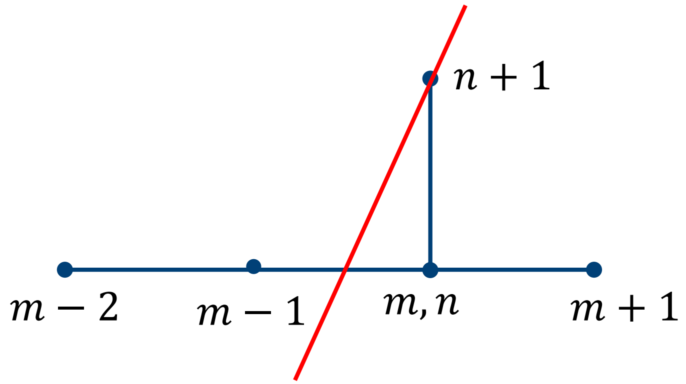
u^{*} - вычисляется из интерполяции на нижнем слое

x_{m-2}	u_{m-2}			
		$\frac{u_{m-2} - u_{m-1}}{-h}$		
			$\frac{u_{m-2} - 2u_{m-1} + u_m}{2h^2}$	
x_{m-1}	u_{m-1}			
		$\frac{u_{m-1} - u_m}{-h}$		$\frac{u_{m-2} - 3u_{m-1} + 3u_m - u_{m+1}}{-6h^3}$
x_m	u_m			
			$\frac{u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}}{2h^2}$	
		$\frac{u_m - u_{m+1}}{-h}$		
x_{m+1}	u_{m+1}			

$$P_3(x) = u_{m-2} - \frac{u_{m-2} - u_{m-1}}{h}(x - x_{m-2}) + \frac{u_{m-2} - 2u_{m-1} + u_m}{2h^2}(x - x_{m-2})(x - x_{m-1}) - \frac{u_{m-2} - 3u_{m-1} + 3u_m - u_{m+1}}{6h^3}(x - x_{m-2})(x - x_{m-1})(x - x_m)$$

Сеточно-характеристический метод

$$P_3(x) = u_{m-2} - \frac{u_{m-2}-u_{m-1}}{h}(x - x_{m-2}) + \frac{u_{m-2}-2u_{m-1}+u_m}{2h^2}(x - x_{m-2})(x - x_{m-1}) - \frac{u_{m-2}-3u_{m-1}+3u_m-u_{m+1}}{6h^3}(x - x_{m-2})(x - x_{m-1})(x - x_m)$$

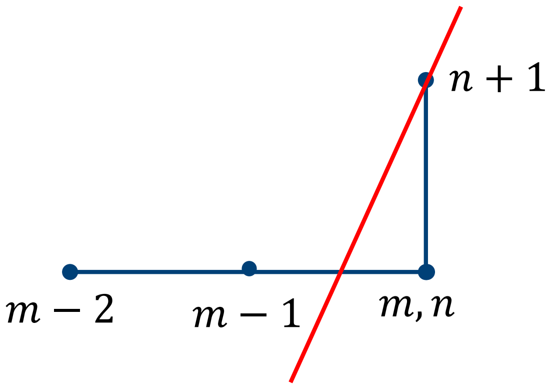


$$u^* = u_{m-2} - \frac{u_{m-2} - u_{m-1}}{h}(x_{m-2} + 2h - c\tau - x_{m-2}) + \frac{u_{m-2} - 2u_{m-1} + u_m}{2h^2}(x_{m-2} + 2h - c\tau - x_{m-2})(x_{m-1} + h - c\tau - x_{m-1}) +$$

$$- \frac{u_{m-2} - 3u_{m-1} + 3u_m - u_{m+1}}{6h^3}(x_{m-2} + 2h - c\tau - x_{m-2})(x_{m-1} + h - c\tau - x_{m-1})(x_m - c\tau - x_m)$$

$$u^* = u_{m-2} - \frac{u_{m-2} - u_{m-1}}{h}(2h - c\tau) + \frac{u_{m-2} - 2u_{m-1} + u_m}{2h^2}(2h - c\tau)(h - c\tau) + \frac{u_{m-2} - 3u_{m-1} + 3u_m - u_{m+1}}{6h^3}c\tau(2h - c\tau)(h - c\tau)$$

Повышение порядка точности



$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$Au_{m-2}^{n}+Bu_{m-1}^{n}+Cu_{m}^{n}+Du_{m}^{n+1}=0$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{u_{m-2}^n-4u_{m-1}^n+3u_m^n}{2h}=0$$

Главные члены погрешности

$$r\sim\frac{\tau^2}{2}u_t''+\frac{3h^2}{2}u_x'''$$

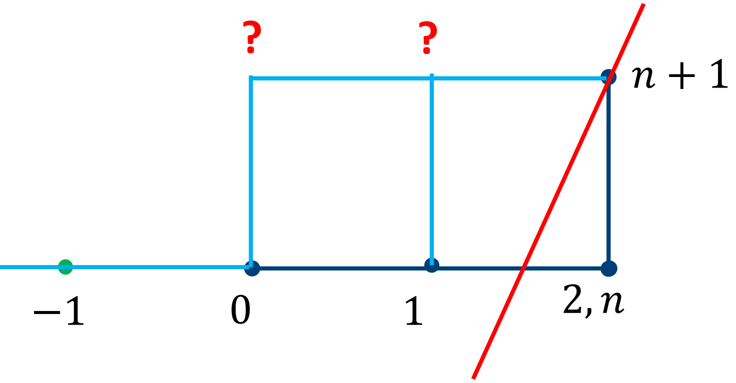
$$u_t''+u_{tx}''=0$$
$$u_{tx}''+u_{xx}''=0$$

$$\Rightarrow\quad u_t''=-u_x''\quad\Rightarrow$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{u_{m-2}^n-4u_{m-1}^n+3u_m^n}{2h}-\frac{\tau^2}{2}\frac{u_{m-2}^n-2u_{m-1}^n+u_m^n}{h^2}=0$$

Точность граничных условий

Задача: Предложить граничные условия, с порядком точности не хуже, чем у расчетной схемы



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(0, x) = \varphi$$

$$u'_x(t, 0) = \psi$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 3u_m^n}{2h} = 0$$

Проблемы:

- Не хватает одного условия
- Нужно точно приблизить производную на границе

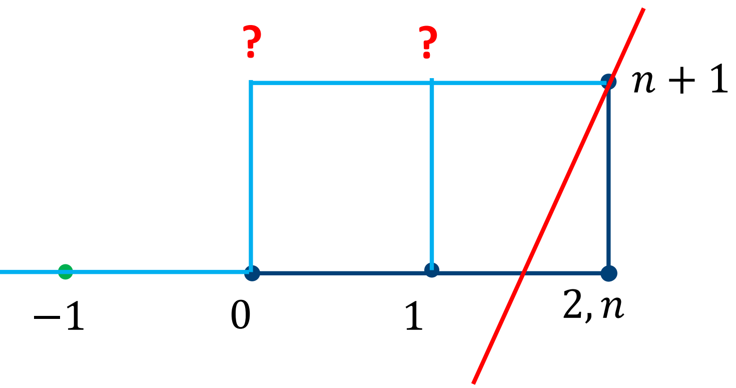
Решим проблему с производной, введя фиктивную точку

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = \psi^n \quad \Rightarrow \quad u_{-1}^n = u_1^n - 2h\psi^n$$

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\tau} + \frac{(u_1^n - 2h\psi^n) - 4u_0^n + 3u_1^n}{2h} = 0$$

Точность граничных условий

Задача: Предложить граничные условия, с порядком точности не хуже, чем у расчетной схемы

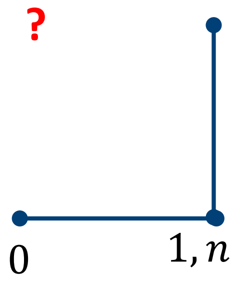


Теперь есть линейная связь между u_0^n и u_1^n, но одной точки по-прежнему не хватает

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\tau} + \frac{-2u_0^n + 2u_1^n}{h} = \psi^n$$

Доопределим значение в u_0^{n+1}

На границе



$$u_0^{n+1} = u_1^{n+1} - u_x' h + u_x'' \frac{h^2}{2} - u_x''' \frac{h^3}{3!} + \cdots = u_0^n - \psi h - \psi' \frac{h^2}{2} - \cdots$$

$$u_x'(t,0) = \psi(t)$$

$$u_{tx}'' + u_{xx}'' = 0 \quad u_{xx}'' = -u_{tx}'' = -\psi'(t)$$

$$u_0^{n+1} = u_1^{n+1} - \psi h - \psi' \frac{h^2}{2}$$

Устойчивость 2D

Задача: Исследовать на устойчивость по спектральному признаку

$$\frac{u_{lm}^{n+1}-u_{lm}^{n}}{\tau}+\frac{u_{lm+1}^{n}-u_{lm-1}^{n}}{2h_x}+\frac{u_{ml+1}^{n}-u_{ml-1}^{n}}{2h_y}=f_{mk}^{n}$$

$$u_{km}^{n}\to\lambda^{n}e^{ikmh_x}e^{iklh_y}$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau}+\frac{e^{ikh_x}-e^{-ikh_x}}{2h_x}+\frac{e^{ikh_y}-e^{-ikh_y}}{2h_y}=0$$

$$\lambda=1+\frac{1}{2}i\sigma_x\sin(kh_x)+\frac{1}{2}i\sigma_y\sin\left(kh_y\right)$$

$$|\lambda|^2=1+\frac{1}{4}\left(\sigma_x\sin(kh_x)+\sigma_y\sin\left(kh_y\right)\right)^2>1$$

Уравнение характеристик

Найти уравнение характеристик

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{t}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\ln x}$$

$$\int \ln x dx = \int t dt$$

$$\ln x = z$$

$$x = \exp(z)$$

$$dx = \exp(z)\, dz$$

$$\int \ln x dx = \int z \exp(z)\, dz \ = z \exp(z) - \int \exp(z)\, dz \ = (z-1)\exp(z)$$

$$(\ln x - 1)x = \frac{t^2}{2} + const$$

Задача: Записать систему в характеристическом виде и предложить для ее решения сходящуюся разностную схему.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(t,x). \end{cases} \quad 0 \le t \le 1, -\infty \le x \le +\infty,$$

Решение:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{f}\,, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - 1 - 3 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm 2.$$

$$1)\ \lambda_1 = 2:\ (\omega_1, \omega_2)(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

За собственный вектор можно взять $\vec{\omega}_1^T = (1, 1)$.

$$2)\ \lambda_1 = -2:\ (\omega_1, \omega_2)(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}) = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0), \qquad \vec{\omega}_2^T = (1, -3).$$

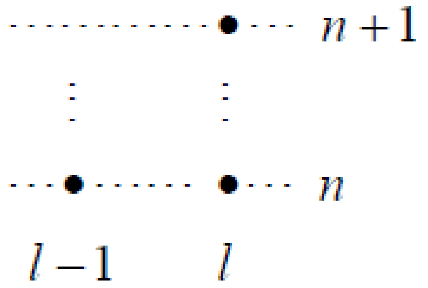
Система уравнений

Составим матрицу, строками которой являются левые собственные векторы: $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Обозначим $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда справедливо $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}$. Приведем исходную систему к характеристическому виду, домножив слева на $\mathbf{\Omega}$:

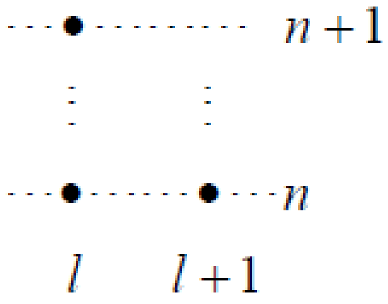
$$\mathbf{\Omega}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \mathbf{\Omega}\vec{f}, \text{ обозначим } \mathbf{\Omega}\vec{u} = \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u-3v \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \mathbf{\Omega}\vec{f} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial r_1}{\partial x} = f + g, \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial t} - 2\dfrac{\partial r_2}{\partial x} = f - 3g. \end{cases}$$

Получили систему относительно инвариантов Римана. Первому уравнению соответствует положительное собственное значение, поэтому разностную схему для него можно расписать по шаблону



. Второму уравнению соответствует отрицательное собственное значение, поэтому разностную схему для него распишем по шаблону



. В результате получим:

$$\begin{cases} \dfrac{(r_1)_l^{n+1}-(r_1)_l^n}{\tau}+2\dfrac{(r_1)_l^n-(r_1)_{l-1}^n}{h}=f_l^n+g_l^n, \\ \dfrac{(r_2)_l^{n+1}-(r_2)_l^n}{\tau}-2\dfrac{(r_2)_{l+1}^n-(r_2)_l^n}{h}=f_l^n-3g_l^n. \end{cases}$$

Или, в исходных переменных

$$\begin{cases} \dfrac{u_l^{n+1}+v_l^{n+1}-u_l^n-v_l^n}{\tau}+2\dfrac{u_l^n+v_l^n-u_{l-1}^n-v_{l-1}^n}{h}=f_l^n+g_l^n, \\ \dfrac{u_l^{n+1}-3v_l^{n+1}-u_l^n+3v_l^n}{\tau}-2\dfrac{u_{l+1}^n-3v_{l+1}^n-u_l^n+3v_l^n}{h}=f_l^n-3g_l^n. \end{cases}$$

Граничные условия

11.3.5. Какие из предложенных вариантов граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), \end{cases} \quad 0 \le t \le 1,\, 0 \le x \le 1,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 =$$

$$= (4-\lambda)\lambda = 0$$

$$w_1 = (1 \quad -2)$$
$$w_2 = (1 \quad 2)$$

а) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,1) = \psi_1(t),\ u(t,1) + v(t,1) = \psi_2(t)$,

б) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,1) + v(t,1) = \psi(t)$,

в) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,0) = \psi(t)$?

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} u - 2v \\ u + 2v \end{pmatrix}$$