Лекция 3

Гиперболические уравнения
(системы уравнений, граничные условия уравнения газовой динамики, КФЛ)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{f}$$

$\mathbf{U}$ – вектор неизвестных 1 x N
$\mathbf{A}$ – квадратная матрица N x N
$\mathbf{f}$– вектор правой части 1 x N

Опр.: Система уравнений в частных производных является гиперболической, если все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ являются вещественными

Собственные векторы-строки: $\boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^T$

$$\boxed{\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}_л^{-1} \Lambda \boldsymbol{\Omega}_л}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_л = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= (x_{11} \quad x_{12} \quad \dots \quad x_{1n}) \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= (x_{21} \quad x_{22} \quad \dots \quad x_{2n}) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\omega}_n &= (x_{n1} \quad x_{n2} \quad \dots \quad x_{nn}) \end{aligned}$$

квадратная матрица N x N
с собственными **векторами-строками**

Инварианты Римана

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_л^{-1}\Lambda\mathbf{\Omega}_л \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{f} \qquad \cdot\, \mathbf{\Omega}_л$$

$$\mathbf{\Omega}_л \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \Lambda\mathbf{\Omega}_л \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{\Omega}_л\mathbf{f} \qquad \frac{\partial \mathbf{\Omega}_л\mathbf{U}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \mathbf{\Omega}_л\mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{\Omega}_л\mathbf{f}$$

$\mathbf{Z} = \mathbf{\Omega}_л\mathbf{U}$ - Инварианты Римана

$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} = \mathbf{G}$ - Независимые друг от друга уравнения, которые могут решаться автономно

Приведение к системе инвариантов Римана

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{f}$$

$\mathbf{U}$ – вектор неизвестных 1 x N
$\mathbf{A}$ – квадратная матрица N x N
$\mathbf{f}$– вектор правой части 1 x N

Спектральное разложение

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}_л^{-1}\Lambda\mathbf{\Omega}_л}$$

$$\mathbf{\Omega}_л = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= (x_{11} \quad x_{12} \quad \dots \quad x_{1n}) \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= (x_{21} \quad x_{22} \quad \dots \quad x_{2n}) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\omega}_n &= (x_{n1} \quad x_{n2} \quad \dots \quad x_{nn}) \end{aligned}$$

квадратная матрица N x N
с собственными **векторами-строками**

Нахождение собственных векторов-строк

$$\boldsymbol{\omega}_i \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}_i \lambda$$

собственное значение

ЗАМЕТИМ (!): $(\boldsymbol{\omega}_i \mathbf{A})^{\boldsymbol{T}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}_i^T = \boldsymbol{\omega}_i^T \lambda$ $\qquad \lambda_{A^T} = \lambda_A$

собственные **векторы-столбцы**

$$\boxed{\mathbf{A} = {\boldsymbol{\Omega}_{\text{П}}^T}^{-1} \Lambda \boldsymbol{\Omega}_{\text{П}}^T}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{П}}^T = \boldsymbol{\Omega}_{\text{Л}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

квадратная матрица N x N
с собственными **векторами-столбцами,**
которая транспонируется

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9$$

ЛЕВЫЕ собственные векторы-строки

$$\lambda_1 = 3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \omega_{1л} = (2 \quad 1) \qquad \mathbf{\Omega}_л = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}_л^T$$

$$\lambda_2 = -3 \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \omega_{2л} = (1 \quad -1) \qquad \mathbf{\Omega}_л^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{\Omega}_л}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_л^{-1}\mathbf{\Omega}_л = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_л^{-1}\Lambda\mathbf{\Omega}_л = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9$$

ПРАВЫЕ собственные векторы-СТОЛБЦЫ

$$\Omega_п = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Omega_п^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \omega_{1п} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \omega_{2п} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_п^{-1} = \frac{1}{\det\Omega_п}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{1л} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{2л} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_п^{T^{-1}}\Lambda\Omega_п^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$$

Граничные условия

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x} = 0$$

$$\Downarrow$$

Вдоль характеристик $\lambda_i = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = 0$$

Корректная постановка граничных условий: на каждой границе (левой или правой) задаваемые граничные условия в совокупности с теми граничными условиями, которые приносятся по характеристикам на эту границу должны давать невырожденную систему по определению тех инвариантов, которые с этой границы уходят.

Корректная постановка граничных условий

Пример:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(x,t) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t) \end{cases}$$

Начальные условия

$$u(0,x) = \varphi_0(x) \qquad v(0,x) = \varphi_1(x)$$

Какие граничные условия поставлены корректно

1) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\quad u(t,1) = \psi_1(x)$

2) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\quad v(t,1) = \psi_1(x)$

3) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\quad v(t,0) = \psi_1(x)$

4) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\quad -2u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(x)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1$ $\qquad e_1 = (0, \quad 1)$

$\lambda = -1$ $\qquad e_1 = (1, \quad 2)$

$$z_1 = v$$

$$z_2 = -2u + v$$

$$G = \begin{cases} f \\ -2f + g \end{cases}$$

Уравнения для инвариантов Римана

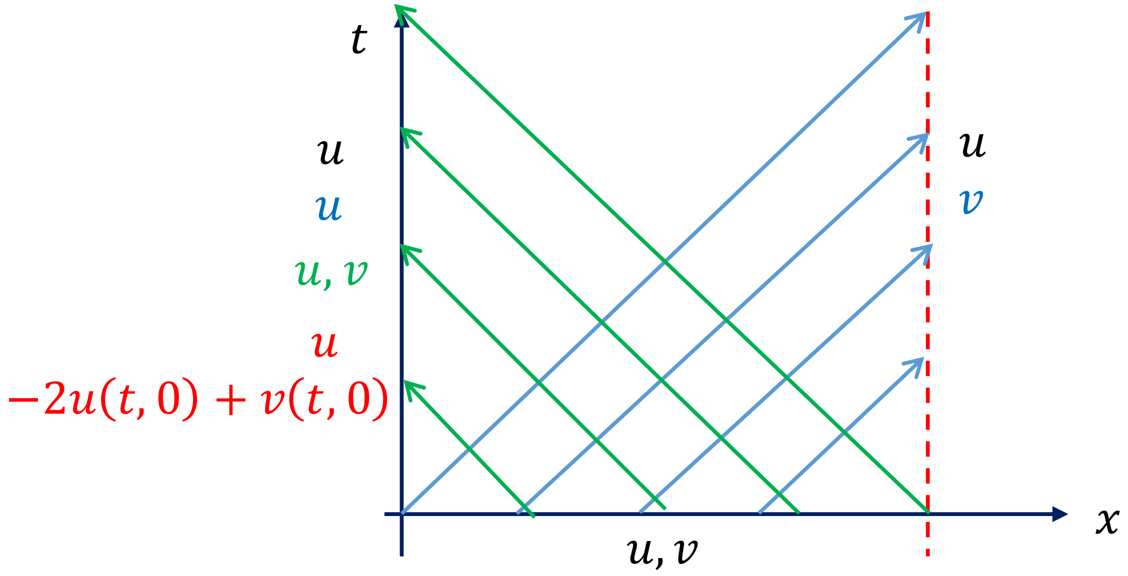
$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial x} = G_1$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{\partial z_2}{\partial x} = G_2$$

Корректная постановка граничных условий

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial x} = G_1 \qquad z_1 = v$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{\partial z_2}{\partial x} = G_2 \qquad z_2 = -2u + v$$



1) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\qquad$ $u(t,1) = \psi_1(x)$

2) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\qquad$ $v(t,1) = \psi_1(x)$

3) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\qquad$ $v(t,0) = \psi_1(x)$

4) $u(t,0) = \psi_0(t)$ $\qquad$ $-2u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(x)$

Уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ Характеристический вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} = 0$$ Дивергентный вид (следствие законов сохранения)

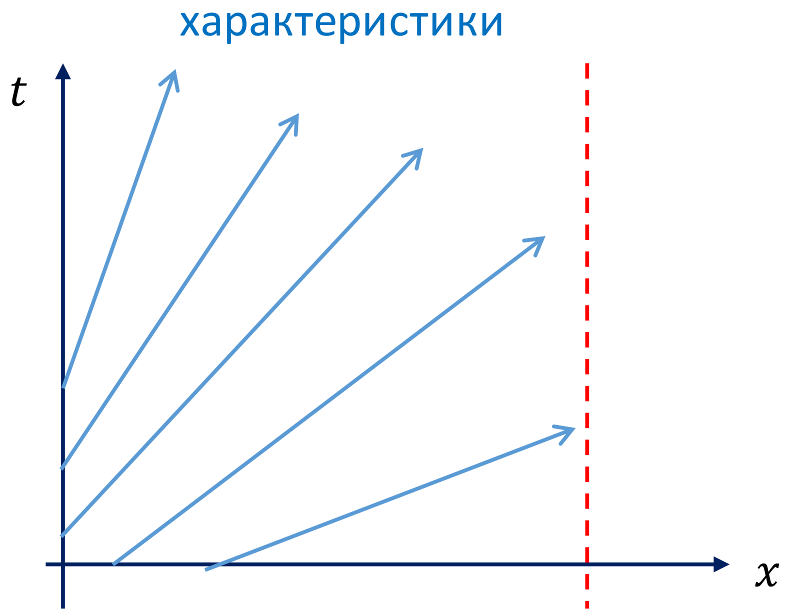
Рассмотрим следующие начальные условия

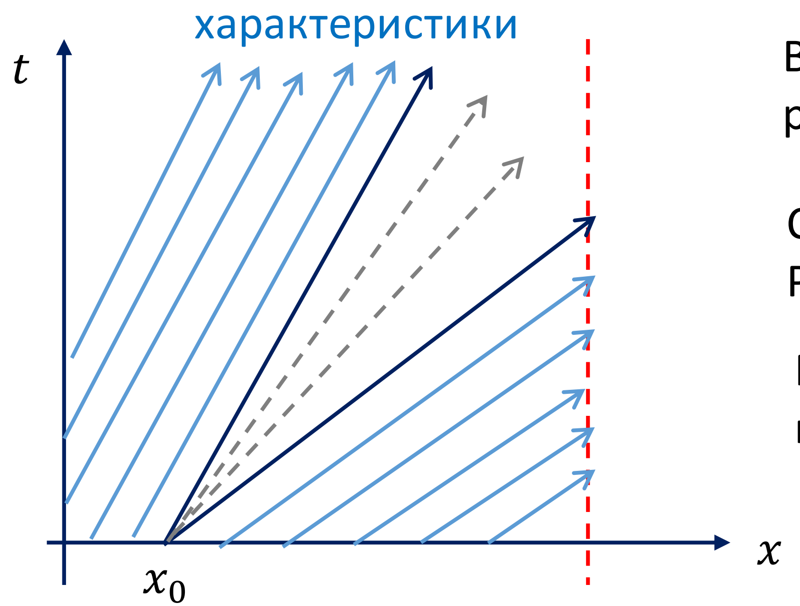
1) u(0,x) – монотонно возрастает >0

u(t,0) – монотонно убывает >0

2)
$$u(0,x) = \begin{cases} a, & x \le x_0 - \varepsilon \\ x\dfrac{b-a}{2\varepsilon} + \dfrac{a(x_0+\varepsilon) + b(\varepsilon - x_0)}{2\varepsilon} \\ b > a, & x > x_0 + \varepsilon \end{cases}$$

$$u(t,0) = a$$





Волна разрежения

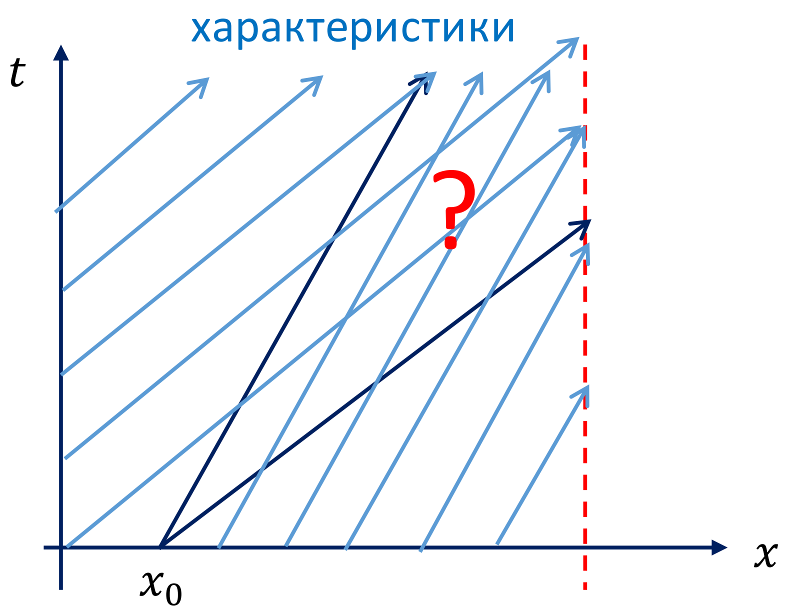
Слабый Разрыв

Разрыв производной

3) $u(0,x) = \begin{cases} a, & x \le x_0 - \varepsilon \\ b < a, & x > x_0 + \varepsilon \end{cases}$

$$u(t,0) = a$$

Реализуется решение с разрывом

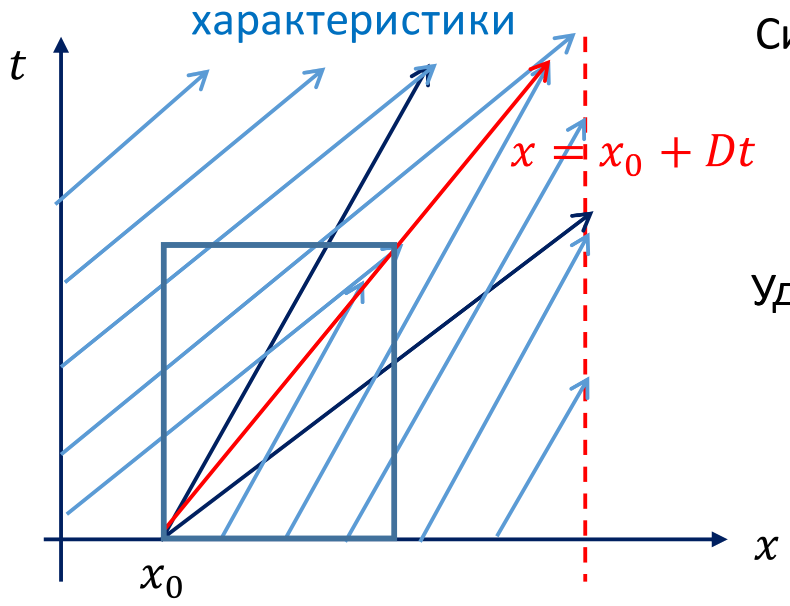


Проинтегрируем наше уравнение в прямоугольнике, содержащем разрыв

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x}\right) dxdt = 0$$

$$D = \frac{a+b}{2}$$

Скорость разрыва



Сильный разрыв

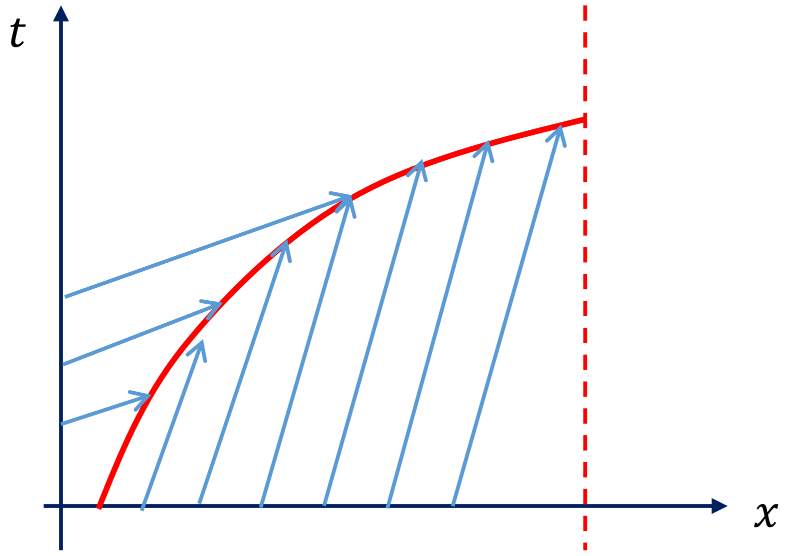
Ударная волна

Уравнение Хопфа

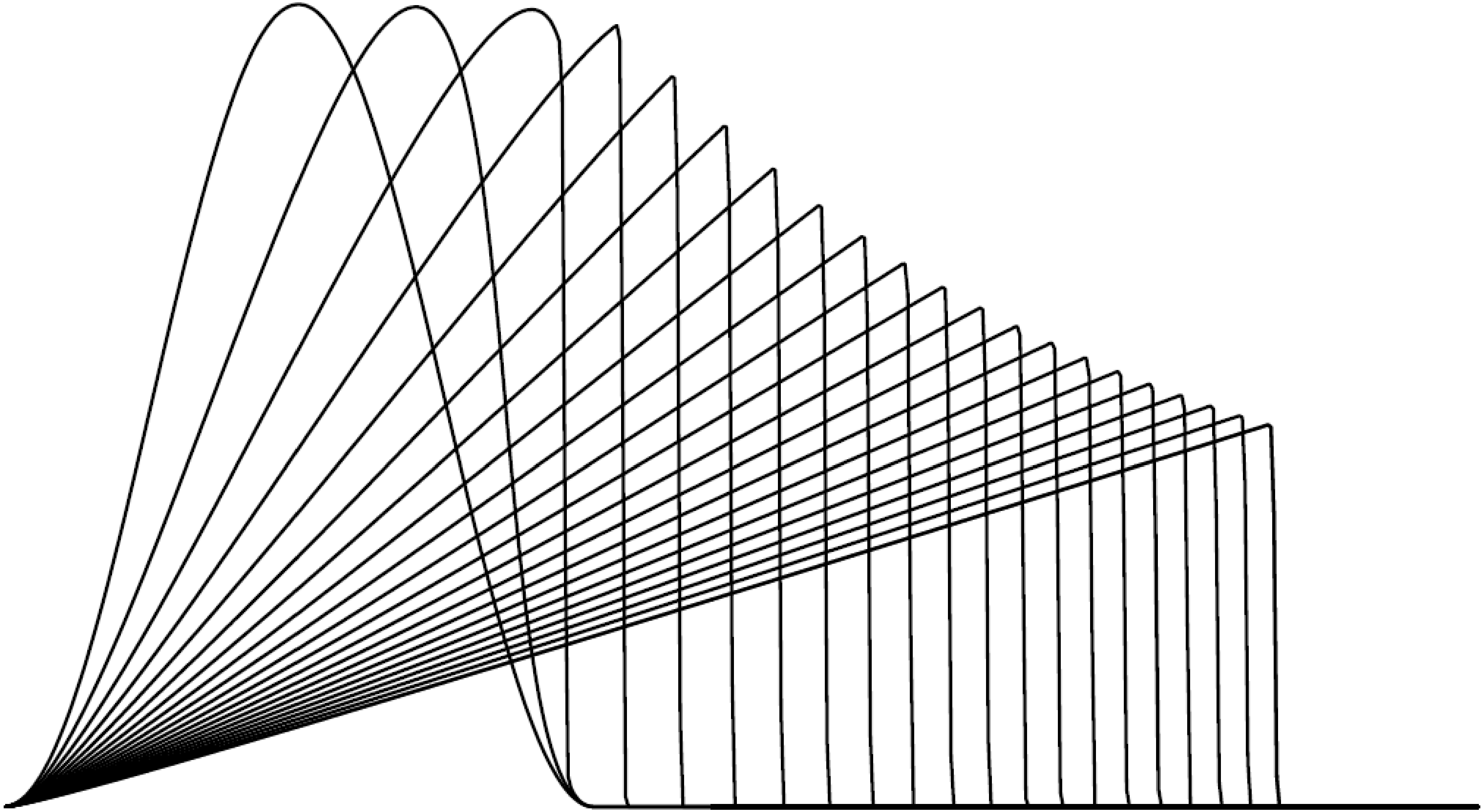
4) u(0,x) монотонно возрастает

Аппроксимация уравнений Хопфа в характеристическом виде иногда ведет к неправильной скорости разрыва

Для корректного описания разрывов нужно исходить из дивергентного вида.



Численное решение уравнения Хопфа



начальное состояние (крайний левый симметричный профиль) и 20 последовательных профилей снятых через равные промежутки времени

Система уравнений газовой динамики

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\
\dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(P + \rho u^2) = 0 \\
\dfrac{\partial \rho e}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u e) + P\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
P = (\gamma - 1)\rho e
\end{cases}
\Rightarrow
$$

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0
$$

$$
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left((\gamma - 1)\rho e + \rho u^2\right) = 0
$$

$$
\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u e) + (\gamma - 1)\rho e\frac{\partial u}{\partial x} = 0
$$

В качестве независимых переменных выделяем $\rho, \rho u, \rho e$

Система уравнений газовой динамики

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\gamma-1)\rho e+\rho u^2\right)=0}$$

В качестве независимых переменных выделяем $\rho, \rho u, \rho e$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}=u\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}=u\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial \rho u}{\partial x}=\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=u\frac{\partial \rho u}{\partial x}-u^2\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t}-u^2\frac{\partial \rho}{\partial x}+2u\frac{\partial \rho u}{\partial x}+(\gamma-1)\frac{\partial \rho e}{\partial x}=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u e)+(\gamma-1)\rho e\frac{\partial u}{\partial x}=0}$$

$$e\frac{\partial \rho u}{\partial x}=e\rho\frac{\partial u}{\partial x}+eu\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$e\rho\frac{\partial u}{\partial x}=e\frac{\partial \rho u}{\partial x}-eu\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u e)=ue\frac{\partial \rho}{\partial x}+\cancel{u\rho\frac{\partial e}{\partial x}}+\cancel{\rho e\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u e)=e\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\cancel{u\rho\frac{\partial e}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u e)=\cancel{\rho e\frac{\partial u}{\partial x}}+u\frac{\partial \rho e}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u e)=e\frac{\partial \rho u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho e}{\partial x}-ue\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t}+\left(e\frac{\partial \rho u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho e}{\partial x}-ue\frac{\partial \rho}{\partial x}+(\gamma-1)\left(e\frac{\partial \rho u}{\partial x}-eu\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right)=0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho e}{\partial t}-\gamma ue\frac{\partial \rho}{\partial x}+\gamma e\frac{\partial \rho u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho e}{\partial x}=0}$$

Собственные значения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + (\gamma - 1)\frac{\partial \rho e}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} - \gamma u e \frac{\partial \rho}{\partial x} + \gamma e \frac{\partial \rho u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho e}{\partial x} = 0$$

В качестве независимых переменных выделяем ρ, ρu, ρe

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & (\gamma - 1) \\ -ue\gamma & \gamma e & u \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u - \lambda & (\gamma - 1) \\ -ue\gamma & \gamma e & u - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} 2u - \lambda & \gamma - 1 \\ \gamma e & u - \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u^2 & \gamma - 1 \\ -ue\gamma & u - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda(2u - \lambda)(u - \lambda) + \lambda\gamma e(\gamma - 1) + u^2(u - \lambda) - ue\gamma(\gamma - 1) = (u - \lambda)(-2u\lambda + \lambda^2 + u^2) + \underbrace{\gamma e(\gamma - 1)}_{c^2}(\lambda - u)$$

$$= (u - \lambda)[-2u\lambda + \lambda^2 + u^2 - c^2] = (u - \lambda)(u - \lambda - c)(u - \lambda + c) = 0$$

$$\lambda_1 = u + c$$

$$\lambda_2 = u$$

$$\lambda_3 = u - c$$

Собственные векторы

Ищем собственные векторы-строки (!)

$$\lambda_1 = u + c \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -u-c \\ -u^2 \\ -ue\gamma \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ u-c \\ \gamma e \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ (\gamma-1) \\ -c \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$(-u-c)x_1 - u^2 x_2 - ue\gamma x_3 = 0$$

$$(\gamma-1)x_2 - c x_3 = 0$$

$$\omega_1 = (-uc, c, \gamma - 1)$$

$$\lambda_2 = u \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -u \\ -u^2 \\ -ue\gamma \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ u \\ \gamma e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ (\gamma-1) \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$(\gamma-1)x_2 = 0$$

$$x_1 + \gamma e x_3 = 0 \quad \cdot (\gamma - 1)$$

$$\omega_2 = (-c^2, 0, \gamma - 1)$$

$$\lambda_3 = u - c \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -u+c \\ -u^2 \\ -ue\gamma \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ u+c \\ \gamma e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ (\gamma-1) \\ c \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = (uc, -c, \gamma - 1)$$

Инварианты Римана

$$\omega_1 = (-uc, c, \gamma - 1)$$

$$\omega_2 = (-c^2, 0, \gamma - 1) \qquad \Omega = \begin{pmatrix} -uc & c & \gamma - 1 \\ -c^2 & 0 & \gamma - 1 \\ uc & -c & \gamma - 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = (uc, -c, \gamma - 1)$$

Инварианты Римана

$$Z = \Omega \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -uc & c & \gamma - 1 \\ -c^2 & 0 & \gamma - 1 \\ uc & -c & \gamma - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(-uc + uc + e(\gamma - 1)) \\ -\rho(c^2 + e(\gamma - 1)) \\ \rho(uc - uc + e(\gamma - 1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho e(\gamma - 1) \\ -\rho(c^2 + e(\gamma - 1)) \\ \rho e(\gamma - 1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} = 0 \qquad \lambda_1 = u + c$$

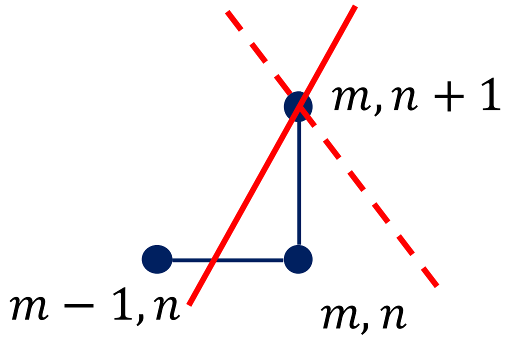
$$\frac{\partial z_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} = 0 \qquad \lambda_2 = u$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial z_3}{\partial x} = 0 \qquad \lambda_3 = u - c$$

Выбор разностной схемы

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \lambda_2 = u$$

Знак λ_2?



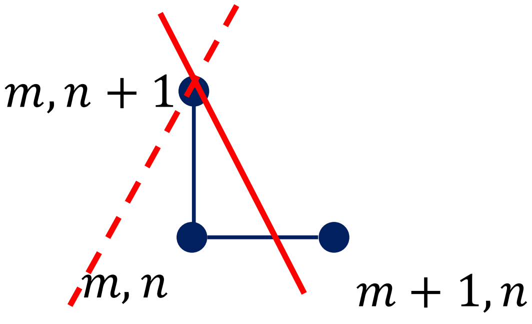


Схема Куранта-Изаксона-Риса (КИР)

$$\frac{u+|u|}{2} = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u, & u \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\lambda_2 + |\lambda_2|}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\lambda_2 - |\lambda_2|}{2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u-|u|}{2} = \begin{cases} 0, & u \geq 0 \\ u, & u < 0 \end{cases}$$

$$\frac{z_m^{n+1} - z_m^n}{\tau} + \frac{\lambda_2 + |\lambda_2|}{2}\frac{z_m^n - z_{m-1}^n}{h} + \frac{\lambda_2 - |\lambda_2|}{2}\frac{z_{m+1}^n - z_m^n}{h} = 0$$

Условие Куранта-Фридрихса Леви (КФЛ)

Оригинал 1928 г. на немецком языке. Существует английский текст.

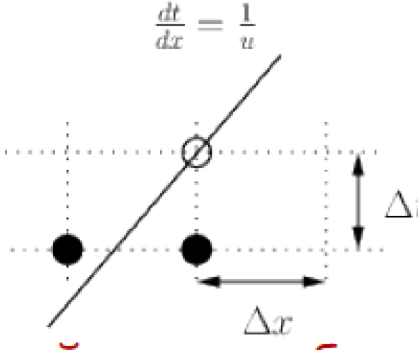
Courant, R., K. Friedrichs, H. Lewy, (March 1967) [1928]: On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, **11** (2), pp. 215-234, doi:10.1147/rd.112.0215

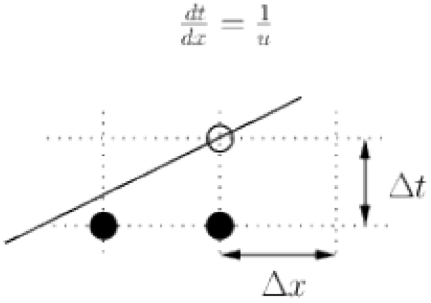
$$\frac{q_i^{n+1}-q_i^n}{\Delta t}+u\cdot\frac{q_i^n-q_{i-1}^n}{\Delta x}=0$$

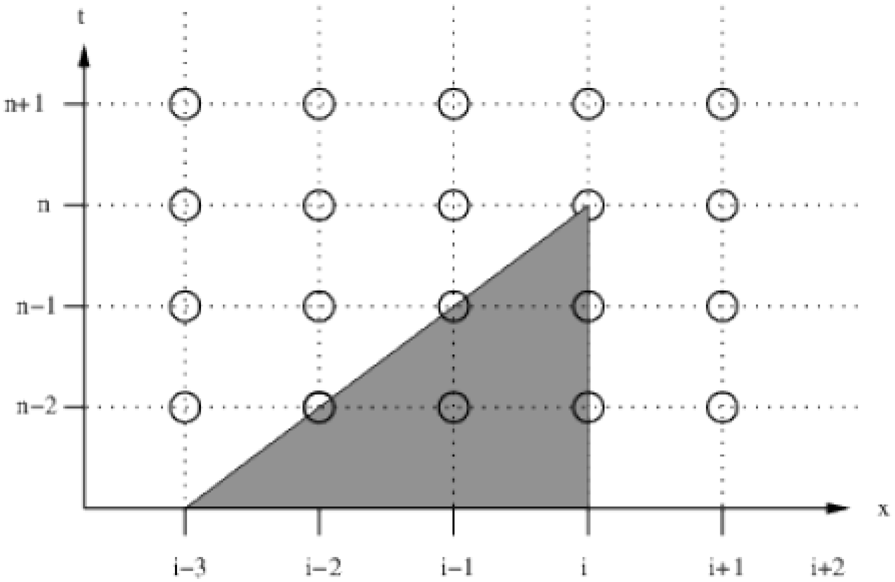
$$q_i^{n+1}=(1-\alpha)\cdot q_i^n+\alpha\cdot q_{i-1}^n$$

где $\alpha=\dfrac{u\cdot\Delta t}{\Delta x}$ число Куранта

если оба коэффициента, $(1-\alpha)$ и α, неотрицательны и не превышают 1 то схема устойчива.







область зависимости для точки (i,n) разностной схемы уголок

Если $\alpha>1$ или $\alpha<0$ то прямой подстановкой можно убедиться что для начального условия $q_i^{n=0}=\lambda_0(-1)^i$ будет рост амплитуды.