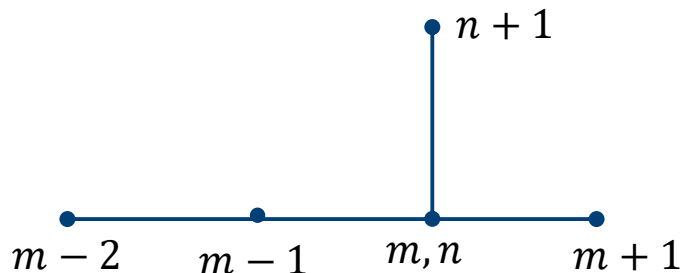


Гиперболические уравнения (пространство неопределенных коэффициентов, система уравнений акустики)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0$$

Всевозможные схемы на нем:

Рассмотрим шаблон



$$u_m^{n+1} = \sum_{k=-2}^1 \alpha_k u_{m+k}^n$$

Раскладываем неизвестные в ряд Тейлора в окрестности точки m, n

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u'_t + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u'''_{ttt} + \dots$$

$$\sigma = a \frac{\tau}{h}$$

$$u_{m+k}^n = u_m^n + kh u'_x + \frac{(kh)^2}{2} u''_{xx} + \frac{(kh)^3}{6} u'''_{xxx} + \dots$$

Коэффициенты α_k будем искать из условий аппроксимации

$$\begin{aligned} \alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 &= 1 \\ -2h\alpha_{-2} - h\alpha_{-1} + h\alpha_1 &= \tau a \end{aligned}$$



Оставим свободными коэффициенты α_{-2} и α_0

$$\alpha_{-1} = 0.5(1 + \sigma - 3\alpha_{-2} - \alpha_0)$$

$$\alpha_1 = 0.5(1 - \sigma + \alpha_{-2} - \alpha_0)$$

$$4h^2\alpha_{-2} + h^2\alpha_{-1} + h^2\alpha_1 = 0$$

$$-8h^3\alpha_{-2} - h^3\alpha_{-1} + h^3\alpha_1 = 0$$

Примем свободные коэффициенты за оси линейного пространства

$$\alpha_{-1} = 0.5(1 + \sigma - 3\alpha_{-2} - \alpha_0)$$

$$\alpha_1 = 0.5(1 - \sigma + \alpha_{-2} - \alpha_0)$$

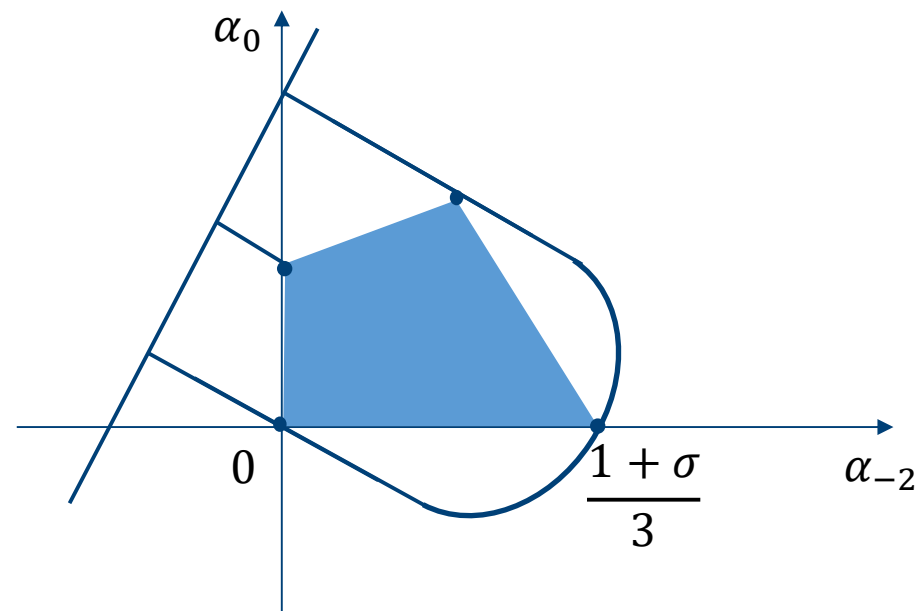
Кроме того можно выделить множество схем порядка $O(\tau + h^2)$

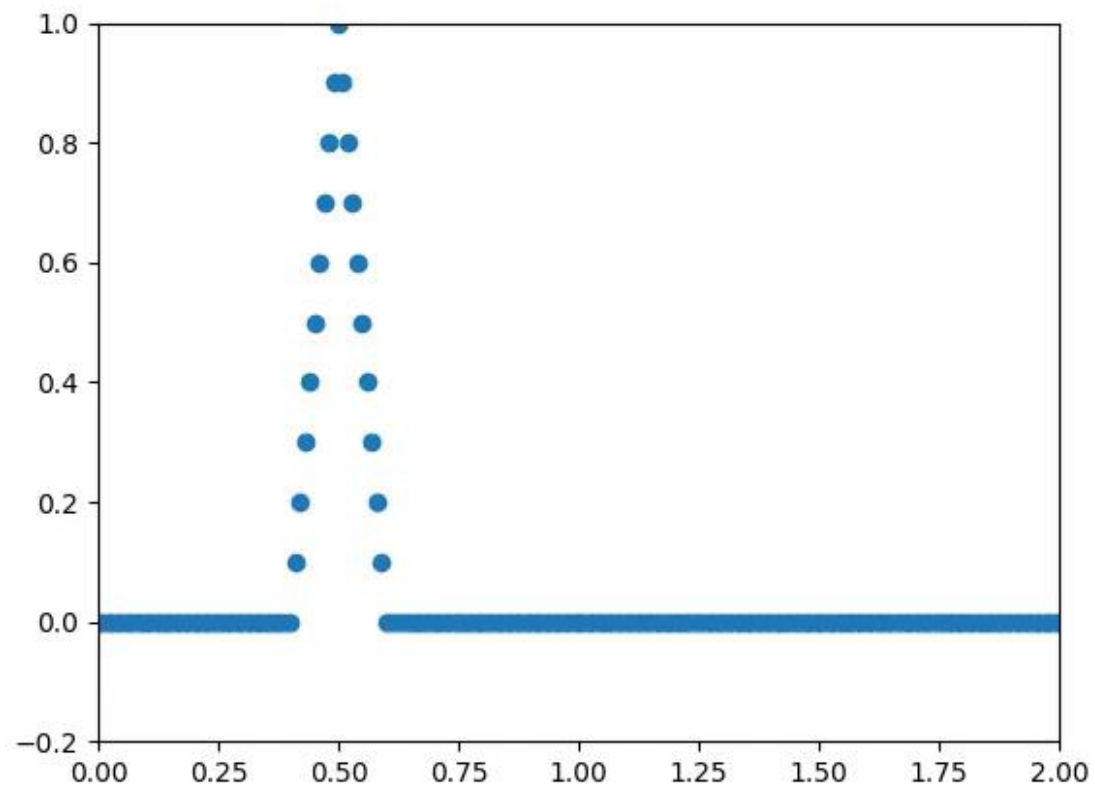
$$\alpha_0 = 1 - \sigma + 3\alpha_{-2}$$

И единственную на данном шаблоне схему 3-го порядка $O(\tau + h^3)$

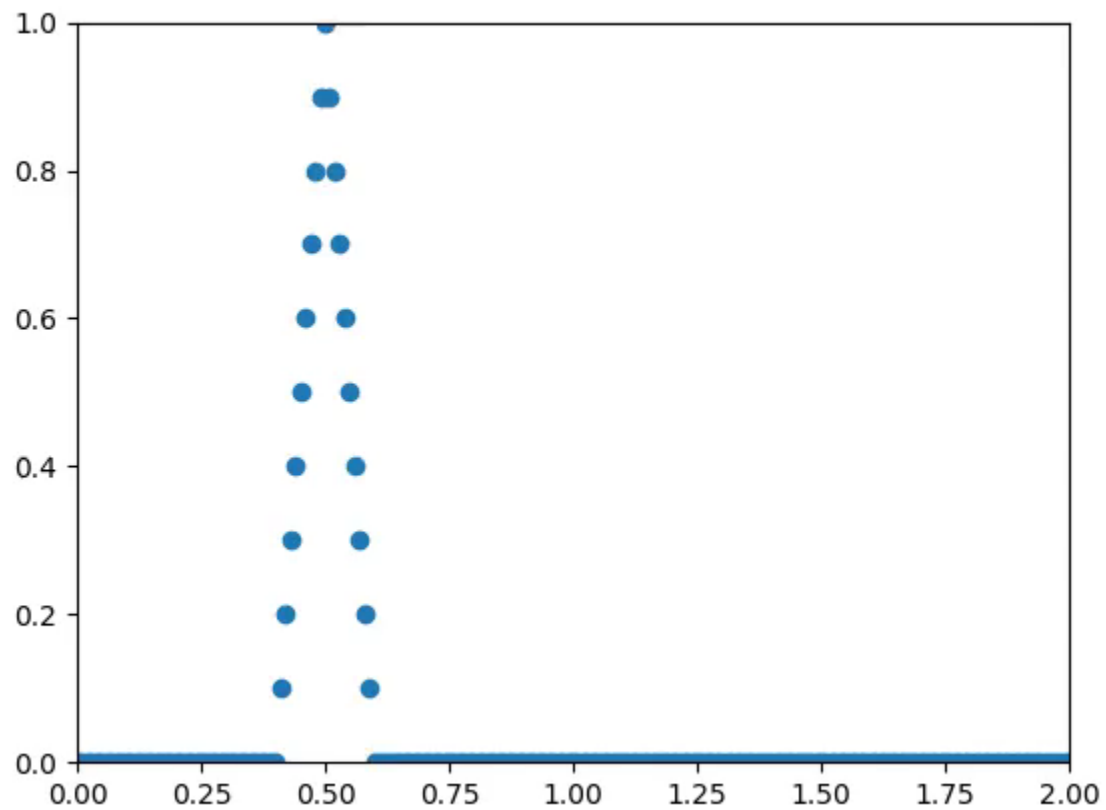
$$\alpha_{-2} = \frac{\sigma(\sigma - 1)}{6}$$

Область устойчивых
разностных схем

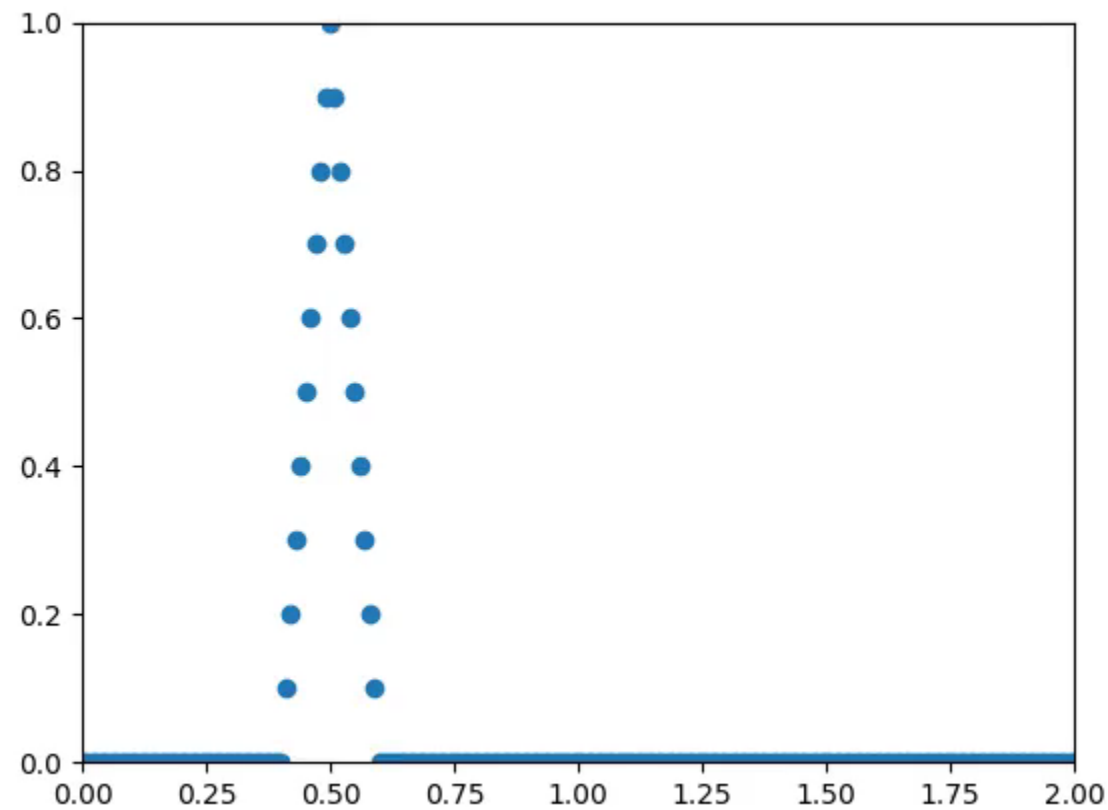




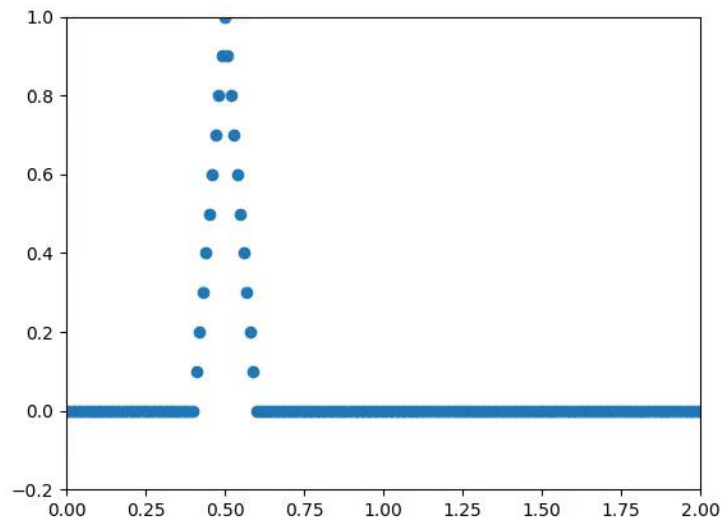
Сильно диссипирующая



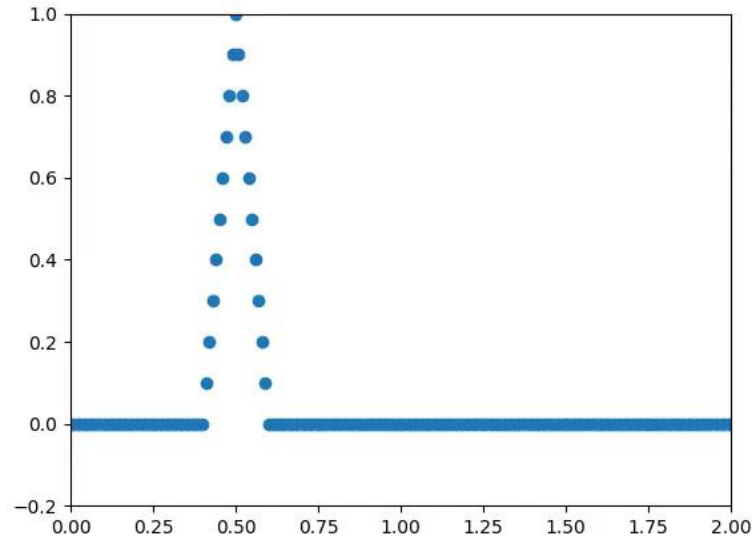
Наименее диссипирующая



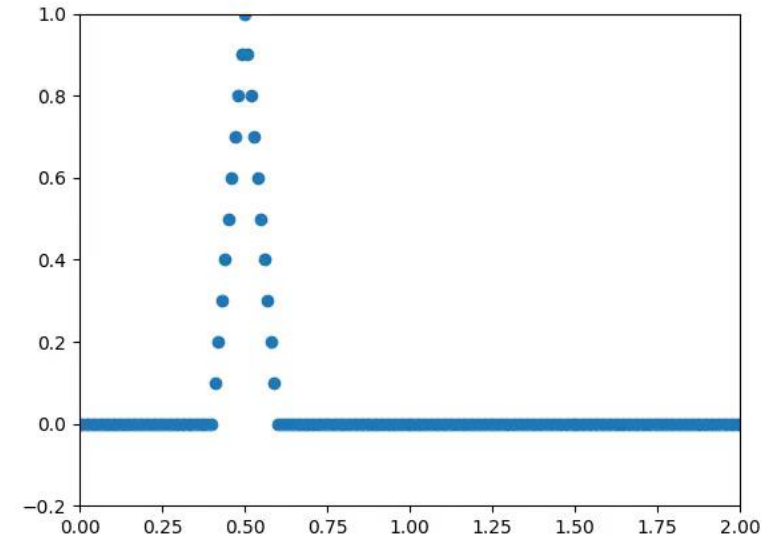
Наименее осциллирующая
с одной стороны

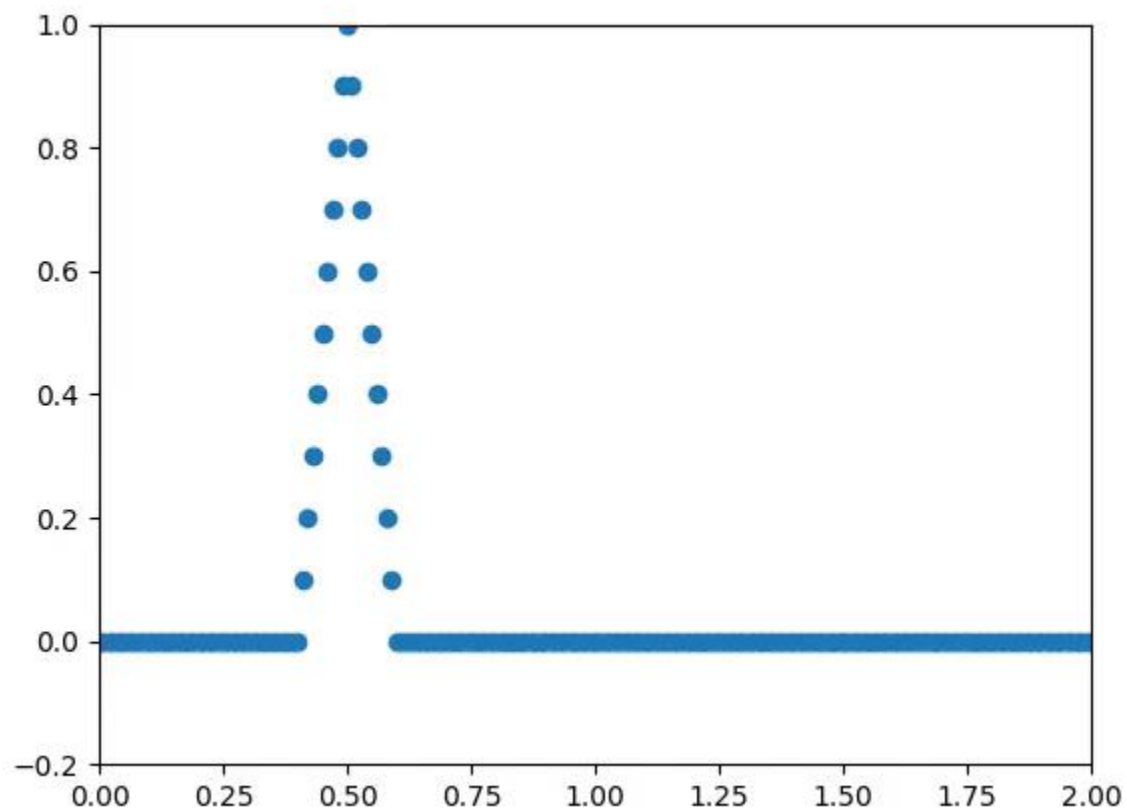


Наименее осциллирующая
с другой стороны

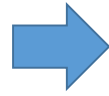


Наименее осциллирующая





$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$$



Для решения придется использовать
трехслойную разностную схему

Начальные условия $u(0, x) = \varphi_0(x)$
 $u'_t(0, x) = \varphi_1(x)$

Граничные условия $u(t, 0) = \psi_0(x)$
 $u(t, 1) = \psi_1(x)$

Переход к акустической системе $v(t, x) = a \int_0^t u'_x(x, \xi) d\xi$ Тогда $v'_t = au'_x$

Проинтегрируем уравнение $\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} d\xi - a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\xi = \int_0^t f(t, \xi) d\xi$

$$u'_t(x, t) - u'_t(x, 0) - a \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t u'_x(x, \xi) d\xi = \int_0^t f(t, \xi) d\xi$$

$$u'_t - av'_x = F(t, x)$$

$$F(t, x) = \int_0^t f(t, \xi) d\xi + \varphi_1(x)$$

$$v'_t = au'_x$$

$$u'_t - av'_x = F(t, x)$$

Начальные условия

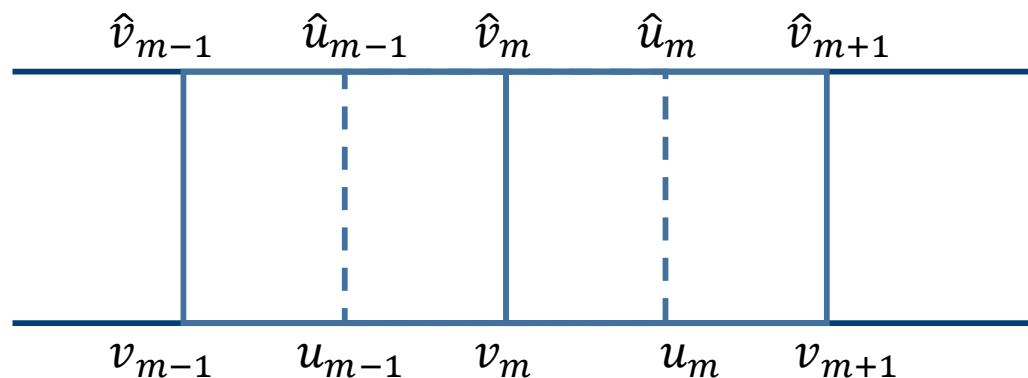
$$\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi_0(x) \\ v(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

$$v(t, x) = a \int_0^t u'_x(x, \xi) d\xi$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \psi_0(x) \\ u(t, 1) &= \psi_1(x) \end{aligned}$$

Разностная схема для этих уравнений – это схема, с разнесенной сеткой



$$v'_t = au'_x$$

$$u'_t - av'_x = F(t, x)$$

Запишем двухслойную схему с весами

$$\frac{\hat{u}_m - u_m}{\tau} = a \left\{ \xi_1 \frac{\hat{v}_m - \hat{v}_{m-1}}{h} + (1 - \xi_1) \frac{v_m - v_{m-1}}{h} \right\} + \xi_1 \hat{F}_m + (1 - \xi_1) F_m$$

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = a \left\{ \xi_2 \frac{\hat{u}_{m+1} - \hat{u}_m}{h} + (1 - \xi_2) \frac{u_{m+1} - u_m}{h} \right\}$$

Порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$

При $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}$ $O(\tau^2, h^2)$

Проводим замену

$$u_m \rightarrow \alpha \lambda^n e^{ikhm}$$

$$v_m \rightarrow \beta \lambda^n e^{ikhm}$$

$$\alpha \frac{\lambda - 1}{\tau} = a\beta \left\{ \xi_1 \lambda \frac{1 - e^{-ikh}}{h} + (1 - \xi_1) \frac{1 - e^{-ikh}}{h} \right\}$$

$$\beta \frac{\lambda - 1}{\tau} = \alpha a \left\{ \xi_2 \lambda \frac{e^{ikh} - 1}{h} + (1 - \xi_1) \frac{e^{ikh} - 1}{h} \right\}$$

Нас интересуют нетривиальные решения

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda - 1}{\tau} & -a \left\{ \xi_1 \lambda \frac{1 - e^{-ikh}}{h} + (1 - \xi_1) \frac{1 - e^{-ikh}}{h} \right\} \\ a \left\{ \xi_2 \lambda \frac{e^{ikh} - 1}{h} + (1 - \xi_1) \frac{e^{ikh} - 1}{h} \right\} & \frac{\lambda - 1}{\tau} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda - 1}{\tau} \right)^2 - a^2 \frac{1 - e^{-ikh}}{h} (\xi_1 \lambda + 1 - \xi_1) \frac{e^{ikh} - 1}{h} (\xi_2 \lambda + 1 - \xi_1) = 0$$

$$\left(\frac{\lambda - 1}{\tau}\right)^2 - a^2 \frac{1 - e^{-ikh}}{h} (\xi_1 \lambda + 1 - \xi_1) \frac{e^{ikh} - 1}{h} (\xi_2 \lambda + 1 - \xi_2) = 0$$

Это уравнение можно переписать немного по-другому

$$\gamma = 2 \left(\frac{a\tau}{h} \sin \frac{kh}{2} \right)^2$$

$$\varepsilon \lambda^2 - 2\mu \lambda + \nu = 0$$

$$\varepsilon = 1 + 2\gamma \xi_1 \xi_2 \geq 1$$

$$\nu = 1 + 2\gamma(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \geq 1$$

$$\mu = 1 - \gamma(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_1 \xi_2) \geq 1$$

Необходимо выполнение двух условий

$$|\lambda_1| \leq 1$$

$$|\lambda_2| \leq 1$$



$$\xi_1 + \xi_2 \geq 1$$

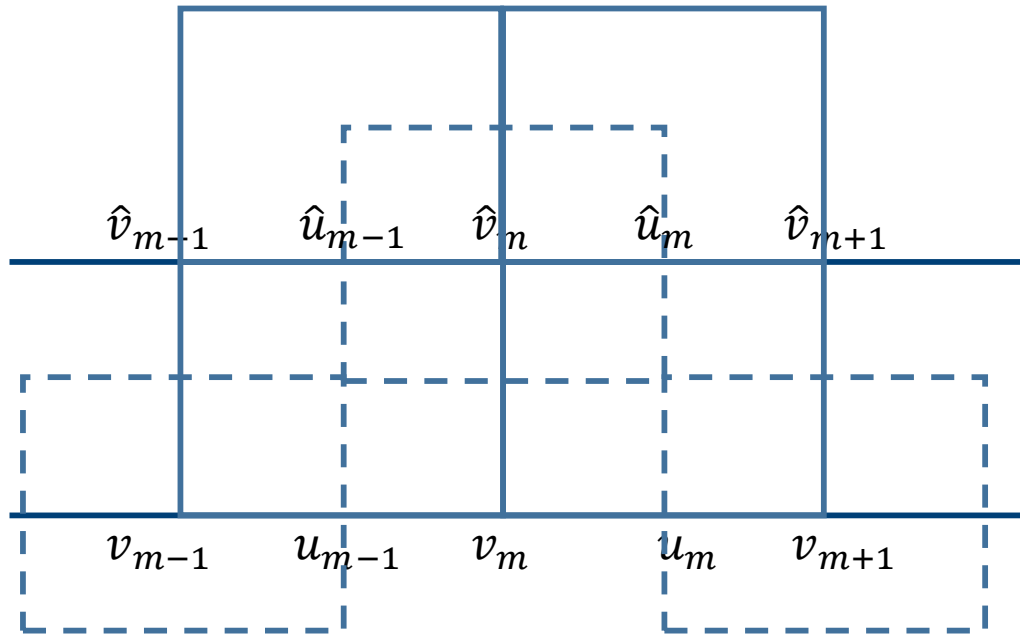
$$\frac{a\tau}{h} (2\xi_1 - 1)(2\xi_2 - 1) \geq 1$$

Если $\xi_1 \geq \frac{1}{2}$ $\xi_2 \geq \frac{1}{2}$

То схема безусловно устойчива

Если $\xi_1 + \xi_2 < 1$

То схема не устойчива



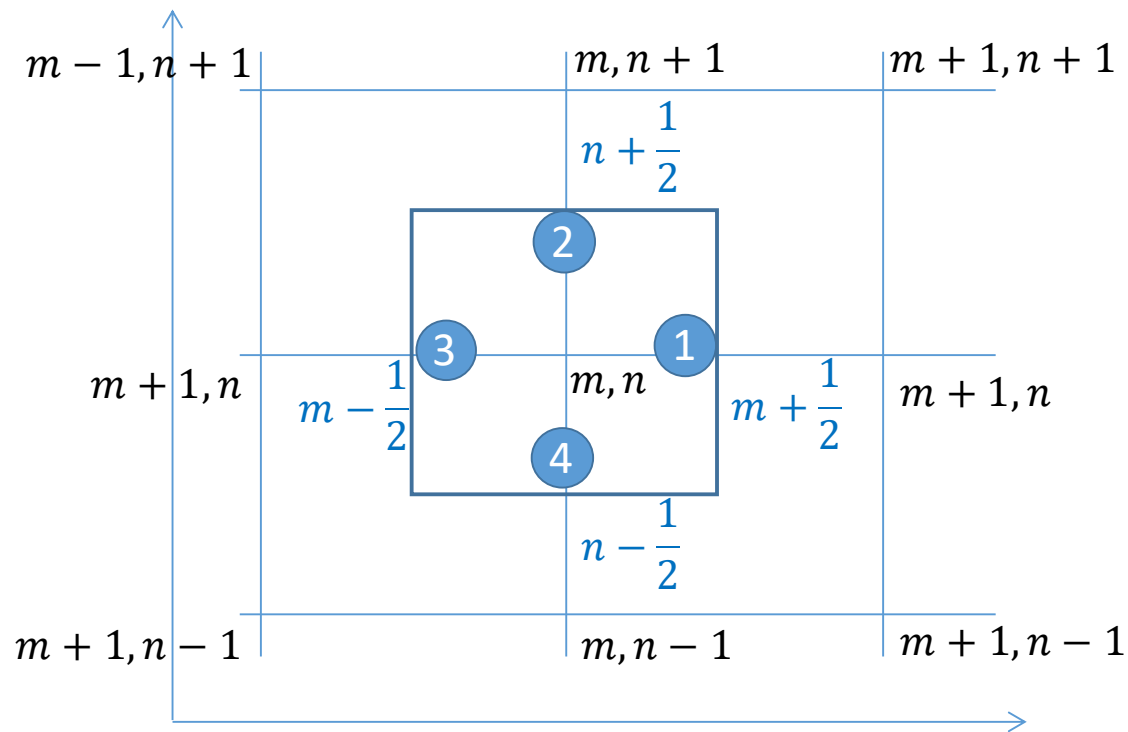
Явная схема

$$\xi_1 = 1 \quad \xi_2 = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 0$$

Условие устойчивости $\frac{a\tau}{h} \leq 1$

В этой случае схема так же обладает вторым порядком аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$

Метод конечных объемов (Finite-Volume)



$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = 0,$$



$$\oint_{\partial\Omega} (u dx - a u dt) = 0,$$



$$-a \int_1 u dt + \int_2 u dx - a \int_3 u dt + \int_4 u dx = 0$$

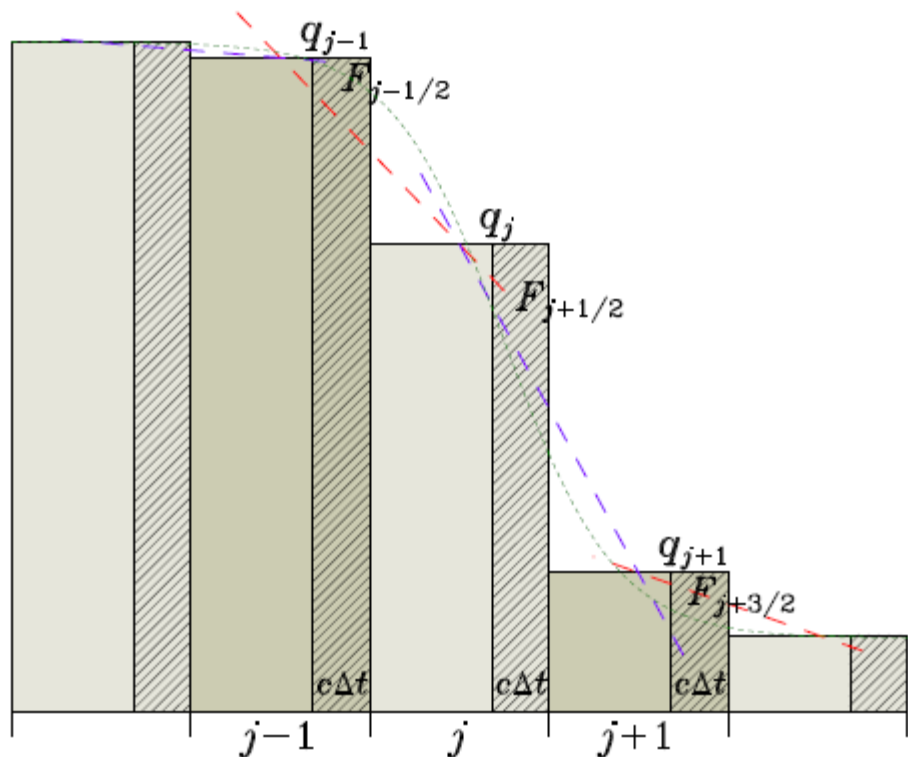
$$-a u_{m+\frac{1}{2}}^n \tau + u_m^{n+1} h + a u_{m-\frac{1}{2}}^n \tau - u_m^n h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a \frac{(u_{m+\frac{1}{2}}^n - u_{m-\frac{1}{2}}^n)}{h} = 0$$



$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{(F_{m+\frac{1}{2}}^n - F_{m-\frac{1}{2}}^n)}{h} = 0$$

Решается

$$\partial_t q + \partial_x (c \cdot q) = 0$$



Профиль движется вправо не изменяя своей формы (по крайней мере в пределах одного шага Δt), тогда количество вещества, переходящего из ячейки j в ячейку $j+1$ равно площади заштрихованной части в ячейке j . То же самое для $j-1$ и j .

$$\Delta x \cdot \bar{q}_j^{n+1} = \Delta x \cdot \bar{q}_j^n - \int_{x_{j+1/2}-c\Delta t}^{x_{j+1/2}} q(x) dx + \int_{x_{j-1/2}-c\Delta t}^{x_{j-1/2}} q(x) dx$$

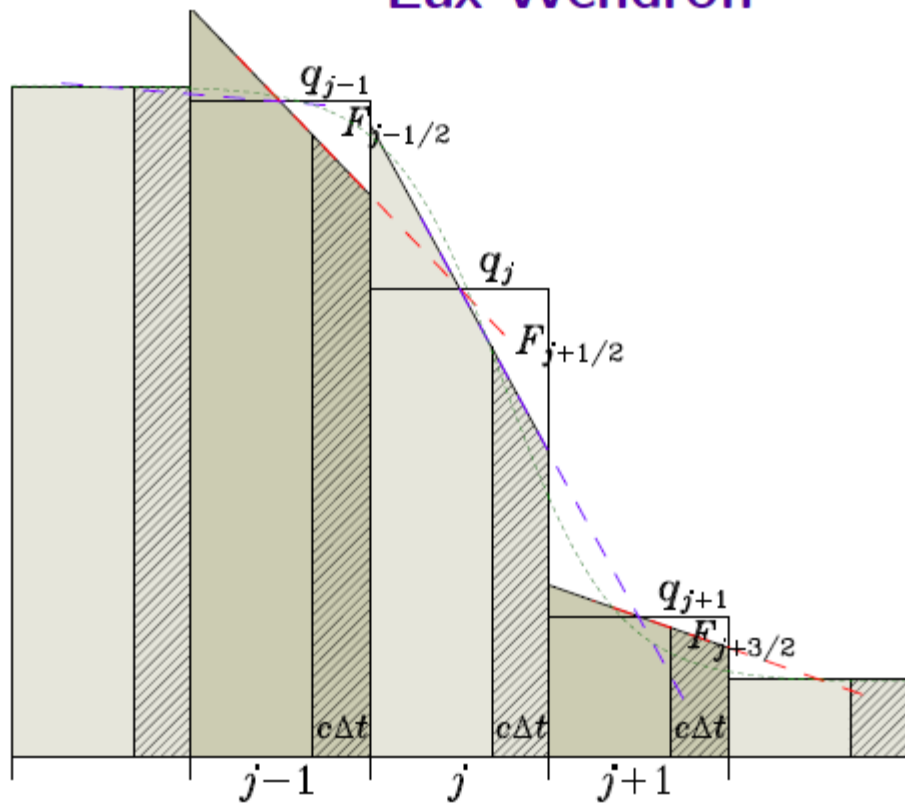
или просто

$$\Delta x \cdot \bar{q}_j^{n+1} = \Delta x \cdot \bar{q}_j^n - c\Delta t \cdot \bar{q}_j^n + c\Delta t \cdot \bar{q}_{j-1}^n$$

или

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (\bar{q}_j^n - \bar{q}_{j-1}^n)$$

Lax-Wendroff

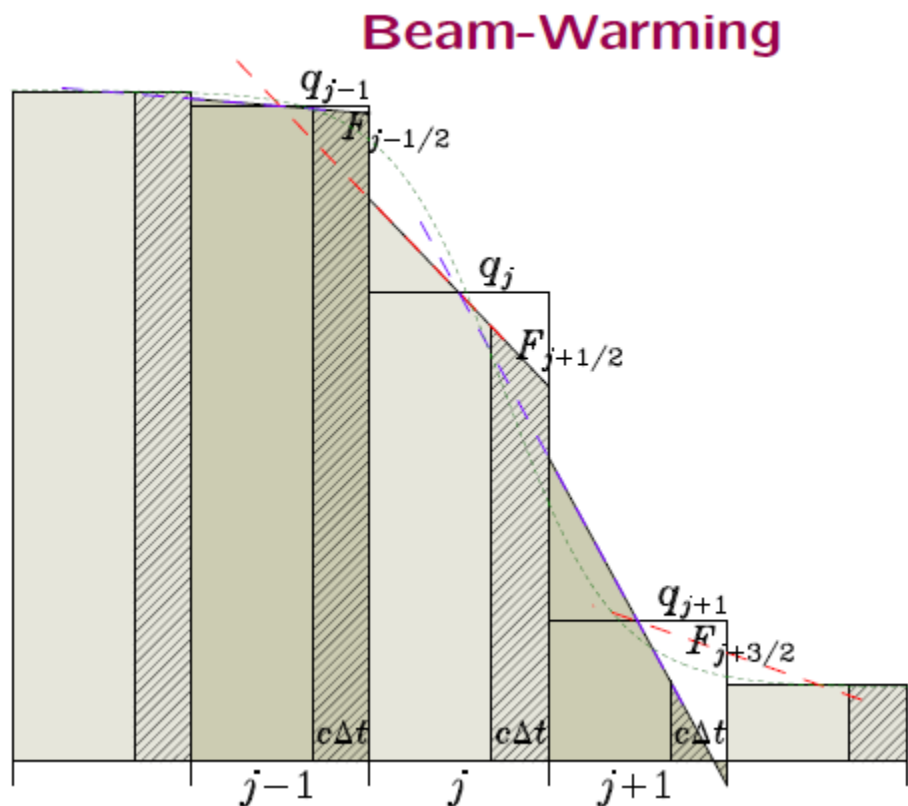


$$\Delta x \cdot \bar{q}_j^{n+1} = \Delta x \cdot \bar{q}_j^n - F_{j+1/2}^{n+1/2} + F_{j-1/2}^{n+1/2}$$

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = c\Delta t \left[\underbrace{\bar{q}_j^n + \frac{\overbrace{\bar{q}_{j+1}^n - \bar{q}_j^n}^{\text{наклон}}}{\Delta x}}_{\text{средняя высота трапеции}} \cdot \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{c\Delta t}{2} \right) \right]$$

Что легко приводится к виду

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = c\Delta t \left[\bar{q}_j^n \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) + \bar{q}_{j+1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad \alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

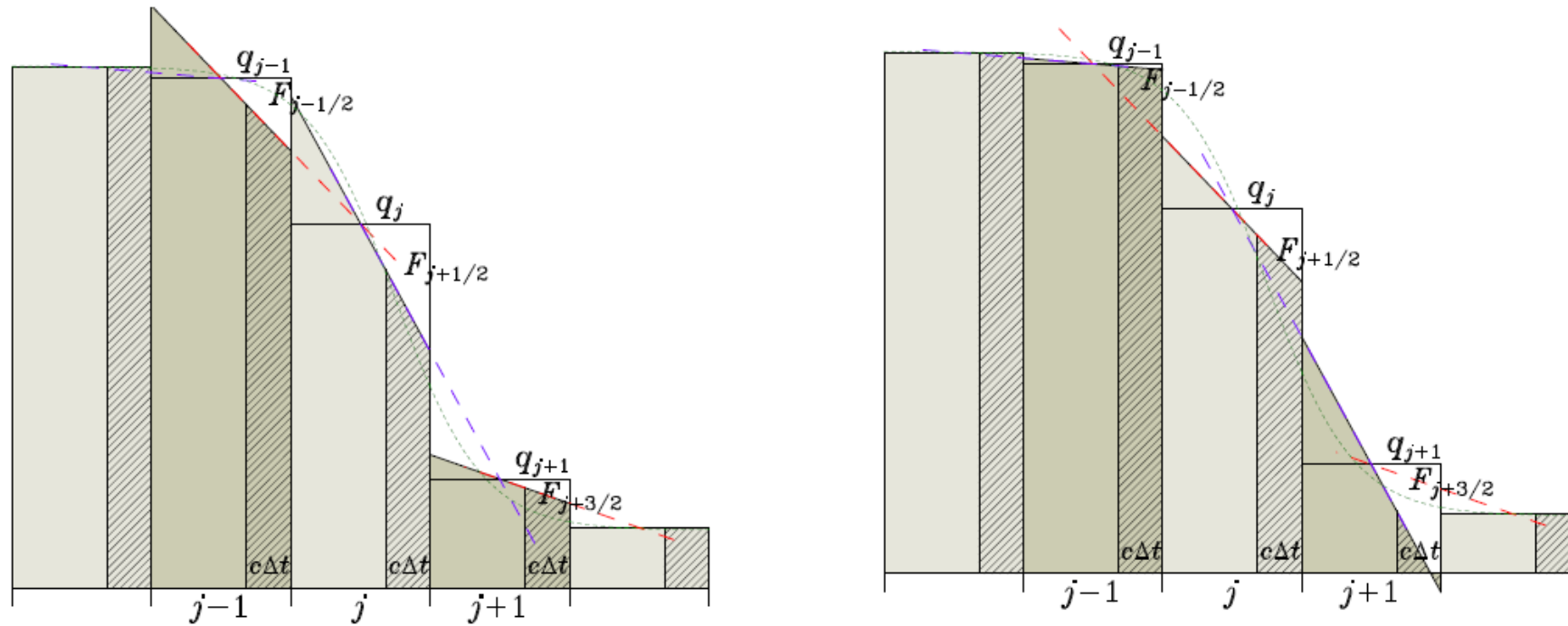


$$\Delta x \cdot \bar{q}_j^{n+1} = \Delta x \cdot \bar{q}_j^n - F_{j+1/2}^{n+1/2} + F_{j-1/2}^{n+1/2}$$

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = c\Delta t \left[\underbrace{\bar{q}_j^n + \frac{\overbrace{\bar{q}_j^n - \bar{q}_{j-1}^n}^{\text{наклон}}}{\Delta x} \cdot \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{c\Delta t}{2} \right)}_{\text{средняя высота трапеции}} \right]$$

Что легко приводится к виду

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = c\Delta t \left[\underbrace{\bar{q}_j^n \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) - \bar{q}_{j-1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)}_{\text{фактически это экстраполяция}} \right]$$

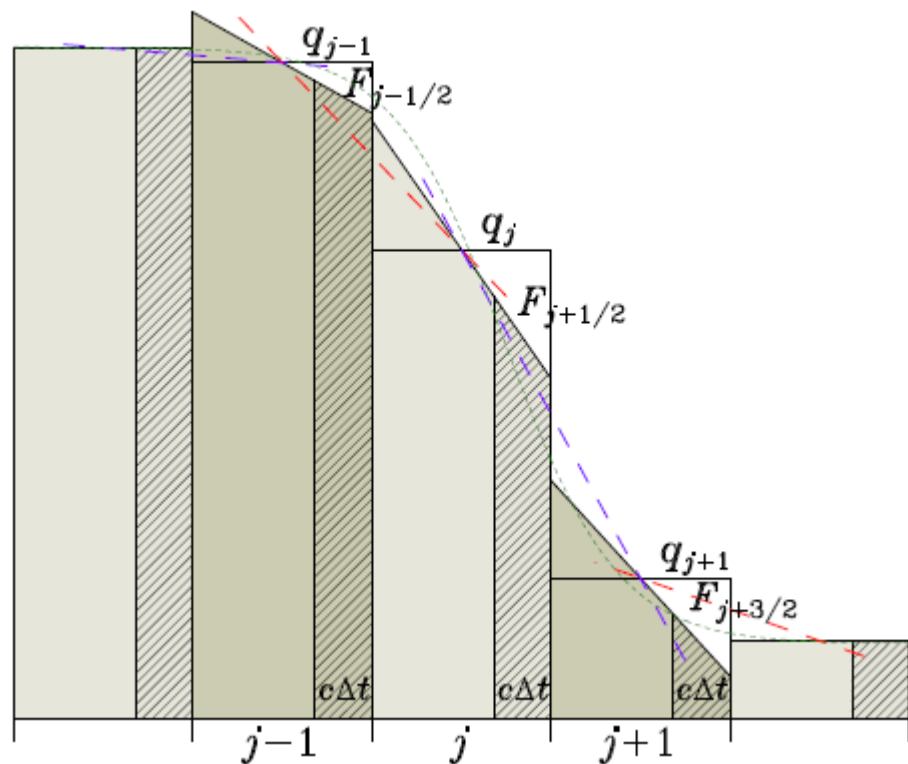


в обоих случаях в каждой ячейке строится кусочно-линейное распределение путем наклона с центром в центре ячейки, т.е. площадь косой трапеции закрашенная цветом в ячейке j равна площади прямоугольника высотой q_j .

профиль движется слева направо, тогда количество вещества переходящего из ячейки j в ячейку $j + 1$ равно площади заштрихованной части в ячейке j .

отличие: **L&W** использует $(\bar{q}_{j+1} - \bar{q}_j)/\Delta x$ в качестве градиента в ячейке j (т.е. взятую *ниже по потоку*, но ближайшую к границе ячеек j и $j + 1$, там где вычисляется поток $F_{j+1/2}$). **B&W** использует $(\bar{q}_j - \bar{q}_{j-1})/\Delta x$ (всегда *выше по потоку*).

Lax-Wendroff не переключает шаблон при изменении направления скорости.



$$\text{наклон}_j = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{q}_{j+1} - \bar{q}_j}{\Delta x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{q}_j - \bar{q}_{j-1}}{\Delta x}$$

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = c\Delta t \left[\underbrace{\bar{q}_j^n + \frac{\overbrace{\bar{q}_{j+1}^n - \bar{q}_{j-1}^n}^{\text{наклон}}}{2\Delta x} \cdot \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{c\Delta t}{2} \right)}_{\text{средняя высота трапеции}} \right]$$

фактически

$$\text{Fromm} = \frac{\text{L\&W} + \text{B\&W}}{2}$$