

Гиперболические уравнения (граничные условия, разностные схемы, монотонность)

Рассмотрим дифференциальную задачу $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0$

$$u(0, x) = \varphi_0(x)$$

$$u'_x(t, 0) = \psi_0(t)$$


Задача: поставить граничные условия с 2-м порядком точности

1-й способ:

$$u'_x \sim \frac{u_1^n - u_0^n}{h} \quad u_1^n = u_0^n + hu'_x + \frac{h^2}{2} u''_{xx} + \frac{h^3}{6} u'''_{xxx} + \dots$$

$$r = \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \psi_0(t) = u'_x + \frac{h}{2} u''_{xx} + \frac{h^2}{6} u'''_{xxx} + \dots - \psi_0(t) = \frac{h}{2} u''_{xx} + \frac{h^2}{6} u'''_{xxx} + \dots$$

Граничное условие $\frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2} u''_{xx} = \psi_0(t)$



$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2a} u''_{tx} = \psi_0(t)$$



$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2a} \psi'_{0t} = \psi_0(t)$$

$$u'_t + au'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u''_{tx} + au''_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad u''_{xx} = \frac{1}{a} u''_{tx}$$

2-й способ (фиктивные узлы)

$$u'_x \sim \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} \quad u_{\pm 1}^n = u_0^n \pm hu'_x + \frac{h^2}{2}u''_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u'''_{xxx} + \dots$$

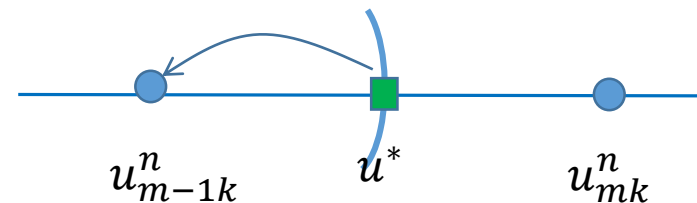
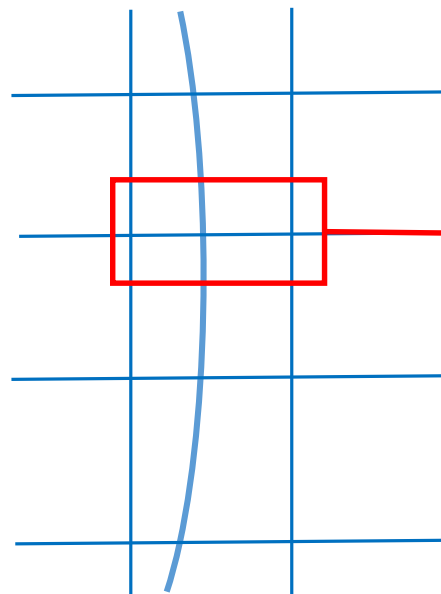
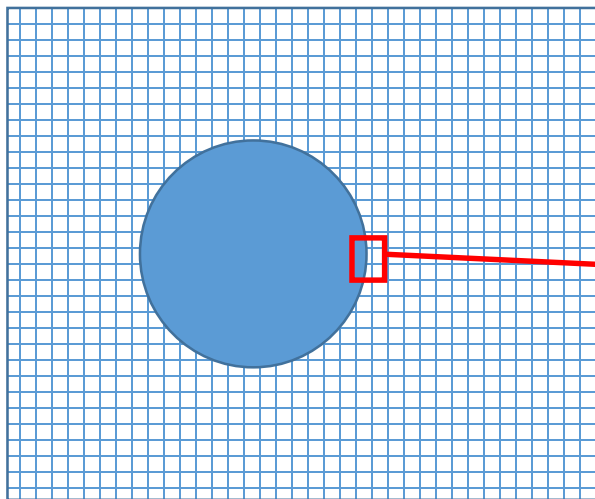
$$r = \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} - \psi_0(t) = u'_x + \frac{h^2}{6}u'''_{xxx} + \dots - \psi_0(t) = \frac{h^2}{6}u'''_{xxx} + \dots$$

Для фиктивного узла нужно использовать разностное уравнение на трех самых левых точках

Пусть
$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} + a \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} + \frac{a^2\tau}{2h^2}(u_1^n - 2u_0^n - u_{-1}^n) = 0$$

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} - \psi_0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{-1}^n = u_1^n - 2h\psi_0(t) = 0$$

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} + a \frac{u_1^n - (u_1^n - 2h\psi_0)}{2h} - \frac{a^2\tau}{h^2}(u_0^n + h\psi_0) = 0$$



$$\Delta x = x^* - x_{m-1}$$

$$u_{m-1k}^n = u(x^*) + u'_x \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} u''_{xx} + \dots$$

$$u_{m-1k}^n = u(x^*) - \frac{1}{a} \psi'_{0t} \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2a^2} \psi''_{0tt} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0$$

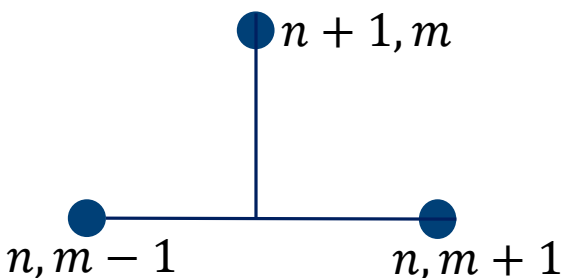
$$u(0, x) = \varphi_0(x)$$

$$u_x|_{\Gamma} = \psi_0(t)$$

$$u'_x = -\frac{1}{a} u'_t$$

$$u''_{xx} = -\frac{1}{a} u''_{tx}$$

$$u''_{xt} = -\frac{1}{a} u''_{tt} \Rightarrow u''_{xx} = \frac{1}{a^2} u''_{tt}$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

Аппроксимация

$$u_{m\pm 1}^n = u_m^n \pm hu'_x + \frac{h^2}{2}u''_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u'''_{xxx} + \dots$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u'_t + \frac{\tau^2}{2}u''_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u'''_{ttt} + \dots$$

$$r = u'_t + \frac{\tau}{2}u''_{tt} - \frac{h^2}{2\tau}u''_{xx} + a\left(u'_x + \frac{h^2}{6}u'''_{xx}\right) + \dots$$

Схема с условной аппроксимацией $O(\tau, h^2, \frac{h^2}{\tau})$

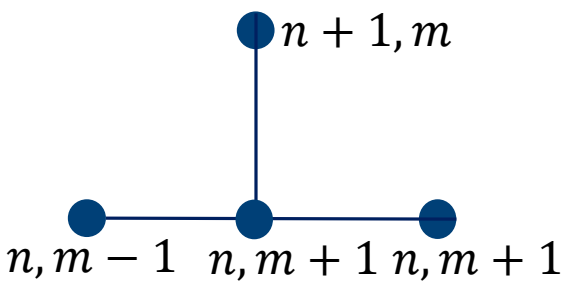
Устойчивость

$$\frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{ikh} + e^{-ikh})}{\tau} + a \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} = 0$$

$$\lambda = \cos(kh) - i\sigma \sin(kh)$$

$$\lambda^2 = \cos(kh)^2 + \sigma^2 \sin(kh)^2 = 1 + (\sigma^2 - 1) \sin(kh)^2$$

$|\sigma| \leq 1$ Схема условно устойчива



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Схема с 4-мя точками

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n \Rightarrow \text{Слабо устойчива}$$

Скорректируем ее на погрешность по времени

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2} a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = f_m^n$$

Устойчивость

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} - \frac{\tau}{2} a^2 \frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h^2} = 0$$

$$\lambda = 1 - i\sigma \sin(kh) - \sigma^2(1 - \cos(kh))$$

$$1 - \sigma^2(1 - \cos(kh)) = x$$

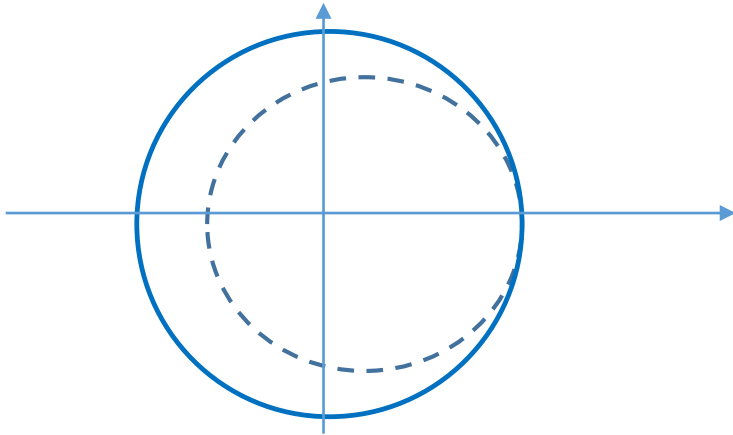
$$\cos(kh) = 1 - \frac{1 - x}{\sigma^2}$$

$$\sin(kh) = \frac{y}{\sigma}$$

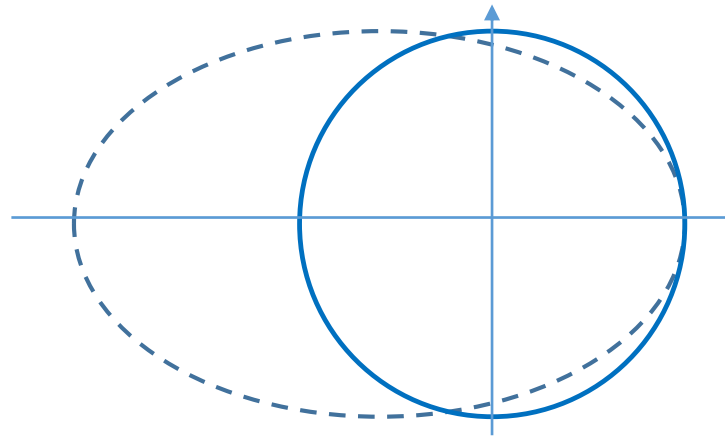
Из основного тригонометрического тождества

$$\left(1 - \frac{1-x}{\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma}\right)^2 = 1$$

$\sigma \leq 1$



$$\sigma > 1$$



Условно устойчивая схема

Монотонность по Фридрихсу $u_m^{n+1} = \sum \beta_l u_{m+l}^n \quad \beta_l \geq 0$

Теорема (Годунова): Линейная монотонная разностная схема для уравнения переноса не может иметь второй и более порядок аппроксимации.

□ От противного

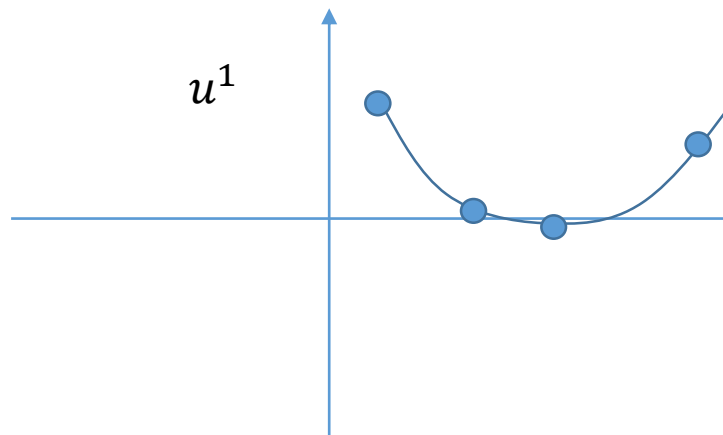
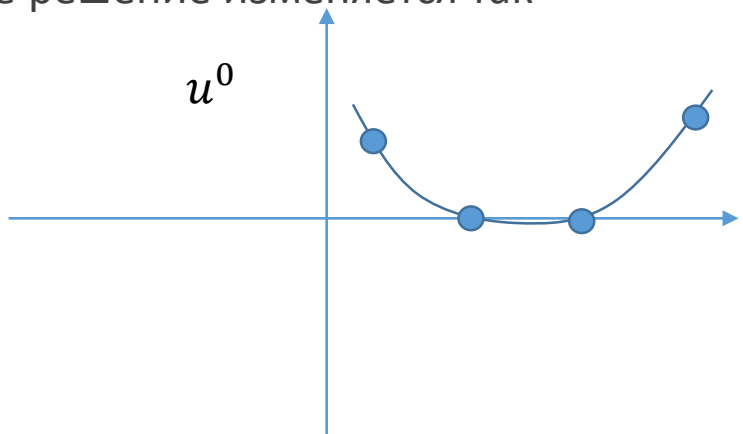
Возьмем начальное приближение

$$u^0 = \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

Тогда точное решение $u = \left(\frac{x - at}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$

Схема 2-го и более порядка аппроксимации для такого решения точна, т.к. погрешность пропорционально старшим степеням решения.

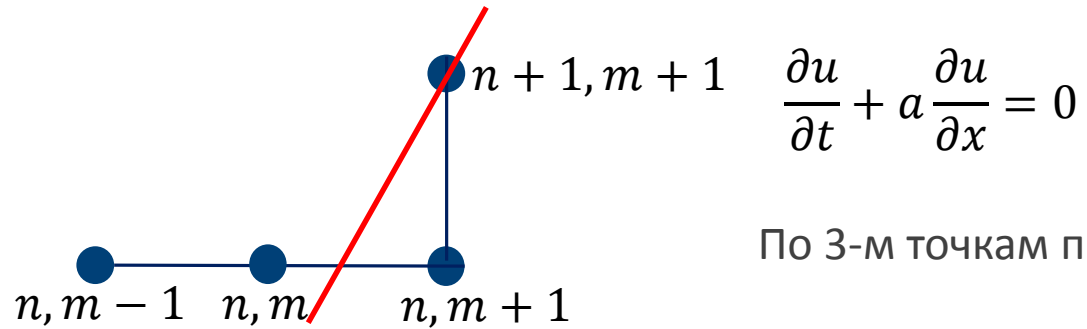
Сеточное решение изменяется так



Появляются отрицательные слагаемые, а такого быть не может по условию монотонности

- Заменять производные на конечные разности
- Интерполяционно-характеристический метод
- Интегро-интерполяционный метод
- Построение компактных схем
- Метод неопределенных коэффициентов

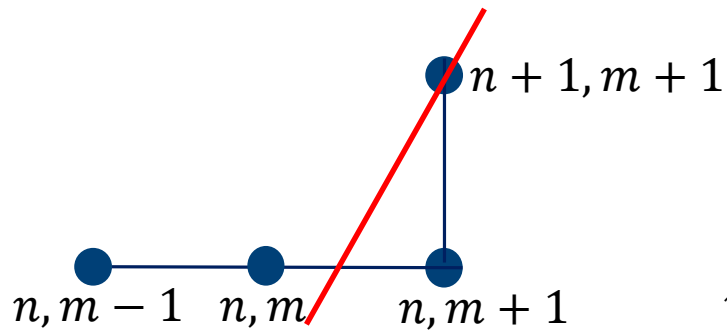
Используем интерполяционно-характеристический метод



По 3-м точкам проводим параболу на нижнем слое

$$u_{m+1}^{n+1} = u_{m-1}^{n+1} + (2h - a\tau) \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + \frac{\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}}{2h} (2h - a\tau)(h - a\tau)$$

$$\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + a \frac{3u_{m+1}^n - 4u_m^n + u_{m-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2} a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = f_m^n$$



Используем метод неопределенных коэффициентов

$$ku_{m+1}^{n+1} + lu_{m+1}^n + pu_m^n + qu_{m-1}^n = 0$$

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n - hu'_x + \frac{h^2}{2}u''_{xx} - \frac{h^3}{6}u'''_{xxx} + \dots$$

$$u_{m-1}^{n+1} = u_{m+1}^n - 2hu'_x + \frac{4h^2}{2}u''_{xx} - \frac{8h^3}{6}u'''_{xxx} + \dots$$

$$u_{m+1}^{n+1} = u_{m+1}^n + \tau u'_t + \frac{\tau^2}{2}u''_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u'''_{ttt} + \dots$$

$$k + l + p + q = 0$$

$$u'_t \quad k\tau = 1$$

$$u'_x \quad -ph - 2qh = a$$

$$u''_{xx} \quad \frac{ka^2\tau^2}{2} + \frac{ph^2}{2} + 2qh^2 = 0$$

$$k = \frac{1}{\tau}$$

$$q = \frac{a}{2h} + \frac{a^2\tau^2}{2h^2}$$

$$p = -\frac{2a}{h} + \frac{a^2\tau^2}{h^2}$$

$$l = \frac{3a}{2h} \frac{1}{\tau} - \frac{a^2\tau^2}{2h^2}$$

$$\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + a \frac{3u_{m+1}^n - 4u_m^n + u_{m-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2} a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = f_m^n$$

Для повышения порядка точности

Метод исследования: подставим в разностное уравнение $u_m^n = \lambda^n \cdot e^{ikmh}$

Каждая Фурье компонента движется со своей скоростью a и получает фазовое приращение

$$i\alpha kh = \frac{ia\tau}{h} kh \quad \alpha - \text{число Куранта}$$

за один шаг по пространству

$$\lambda_{\text{точное}} = e^{-i\alpha kh} = 1 - i\alpha kh - \frac{\alpha^2(kh)^2}{2} + \frac{i\alpha^3(kh)^3}{6} + \frac{\alpha^4(kh)^4}{24} - \dots$$

Поэтому разложение в ряд Тейлора по степеням $i\sigma kh$ и сравнение с этим рядом дает оценку погрешности.

С другой стороны нас интересуют амплитудная и фазовая компоненты ошибки

поскольку $\lambda \equiv |\lambda| \cdot e^{\Delta\phi}$ и в идеале $\lambda^{(\text{exact})} = e^{-i\alpha k \Delta x}$ то $\frac{c^*}{c^{(\text{exact})}} = \frac{\Delta\phi}{\alpha k \Delta x}$

более справедливой мерой амплитудной ошибки является не $|\lambda|$, а $|\lambda|^{(1/\alpha)}$ т.е. затухание не на 1 шаг по времени Δt , а на единицу пройденного пути. Т.е. наиболее полезны

$|\lambda|^{(1/\alpha)}$ и $c^*/c^{(\text{exact})}$ как функции $k\Delta x$ и числа Куранта α .

$$q_j^{n+1} = q_j^n - c\Delta t \cdot \frac{q_{j+1}^n - q_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{(c\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

подставляем $q_j^n = \lambda^n \cdot e^{ik\Delta x \cdot j}$

$$\lambda = 1 - i\alpha \sin(k\Delta x) - \alpha^2(1 - \cos(k\Delta x))$$

разложим в ряд Тейлора по степеням $k\Delta x$

$$\lambda = \underbrace{1 - i\alpha k\Delta x - \alpha^2 \frac{(k\Delta x)^2}{2}}_{\text{соответствует } \lambda^{(\text{exact})}} + \underbrace{i\alpha \frac{(k\Delta x)^3}{6}}_{\neq +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6}} + \underbrace{\alpha^2 \frac{(k\Delta x)^4}{24}}_{\neq +\alpha^4 \frac{(k\Delta x)^4}{24}} + \dots$$

- схема становится "точной" при $\alpha = 1$, т.е. $\lambda = \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x) = e^{-ik\Delta x}$. Ничего удивительного, это просто точное прохождение характеристик через точки (x_j, t^{n+1}) и (x_{j-1}, t^n) в пространстве-времени.

- отличие множителя $i\alpha$ от идеального $i\alpha^3$ при степени $(k\Delta x)^3$ соответствует движению высоких Фурье компонент со скоростями медленнее чем идеальная. Это ошибка **дисперсионного типа**, замедляющая, т.к. $+i\alpha(k\Delta x)^3/6$ действует против $-i\alpha k\Delta x$
 - отличие множителя α^2 от идеального α^4 при степени $(k\Delta x)^4$ соответствует искусственному подавлению высоких Фурье компонент, т.е. ошибка **гипердиффузионного типа**, диссипативная

- т.к. различие в $(k\Delta x)^4$ члене порядка α^2 а не α (в первой степени), то эта схема ведёт себя как бездиссипативная в пределе бесконечно малых чисел Куранта, $\alpha \rightarrow 0$

$$q_j^{n+1} = q_j^n - c\Delta t \cdot \frac{3q_j^n - 4q_{j-1}^n + q_{j-2}^n}{2\Delta x} + \frac{(c\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{q_j^n - 2q_{j-1}^n + q_{j-2}^n}{\Delta x^2}$$

соответственно

$$\lambda = 1 - \alpha \left(\frac{3}{2} - 2\cos(k\Delta x) + \frac{1}{2}\cos(2k\Delta x) \right) + \frac{\alpha^2}{2} (1 - 2\cos(k\Delta x) + \cos(2k\Delta x)) \\ - i\alpha \left(2\sin(k\Delta x) - \frac{1}{2}\sin(2k\Delta x) \right) + \frac{i\alpha^2}{2} (2\sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x))$$

и

$$\lambda = 1 - \underbrace{i\alpha k\Delta x - \alpha^2 \frac{(k\Delta x)^2}{2}}_{\text{соответствует } \lambda^{(\text{exact})}} - \underbrace{i\alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} \right) (k\Delta x)^3}_{\neq +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6}} - \underbrace{\alpha \left(1 - \frac{7\alpha}{6} \right) \frac{(k\Delta x)^4}{4}}_{\neq +\alpha^4 \frac{(k\Delta x)^4}{24}} + \dots$$

- схема "точная" при $\alpha = 1$, ...а так же $\alpha = 2$, обращаясь в $q_j^{n+1} = q_{j-1}^n$ и $q_j^{n+1} = q_{j-2}^n$ соответственно. Так же подстановка $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ как в точное выражение для λ , так и в его разложение в ряд Тейлора даёт совпадение с идеальным $\lambda = \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x)$ и $\lambda = \cos(2k\Delta x) - i\alpha \sin(2k\Delta x)$.

- искусственно ускоряющая **дисперсионная ошибка** при всех числах Куранта $0 < \alpha < 1$, что видно из поведения α -множителя при $(k\Delta x)^3$

- из α -множителя при $(k\Delta x)^4$ видно что схема ведет себя как **гипер-диффузионная** (диссипативная) при всех числах Куранта, в том числе и при стремлении $\alpha \rightarrow 0$.

$$q_j^{n+1} = q_j^n - c\Delta t \cdot \frac{q_{j+1}^n + 3q_j^n - 5q_{j-1}^n + q_{j-2}^n}{4\Delta x} + \frac{(c\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{q_{j+1}^n - q_j^n - q_{j-1}^n + q_{j-2}^n}{2\Delta x^2}$$

и

$$\lambda = 1 - \alpha \left(\frac{3}{4} - \cos(k\Delta x) + \frac{1}{4} \cos(2k\Delta x) \right) + \frac{\alpha^2}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2k\Delta x) \right) - i\alpha \left(\frac{3}{2} \sin(k\Delta x) - \frac{1}{4} \sin(2k\Delta x) \right) + \frac{i\alpha^2}{2} \left(\sin(k\Delta x) - \frac{1}{2} \sin(2k\Delta x) \right)$$

и

$$\lambda = 1 - \underbrace{i\alpha k\Delta x - \alpha^2 \frac{(k\Delta x)^2}{2}}_{\text{соответствует } \lambda^{(\text{exact})}} - \underbrace{i\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{2} \right) \frac{(k\Delta x)^3}{6}}_{\neq +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6}} - \underbrace{\alpha(3-4\alpha) \frac{(k\Delta x)^4}{24}}_{\neq +\alpha^4 \frac{(k\Delta x)^4}{24}} + \dots$$

- схема "точная" при $\alpha = 1$ обращаясь в $q_j^{n+1} = q_{j-1}^n$
- схема становится **бездисперсионной** если $\alpha = 1/2$.

$$-i\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{2} \right) \frac{(k\Delta x)^3}{6} \Big|_{\alpha=1/2} = +\frac{i}{8} \cdot \frac{(k\Delta x)^3}{6} = +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6} \Big|_{\alpha=1/2}$$

- гипер-диффузионная** (диссипативная) при всех числах Куранта, но ошибка вдвое меньше чем у **B&W**, $-\alpha/8$ против $-\alpha/4$.



начальное распределение $q = q_0(x)$ задано в виде короткого импульса сформированного функцией

$$q_0(x) = \begin{cases} \cos^2 \left(\pi \cdot \frac{x - x_0}{2\sigma} \right), & |x - x_0| < \sigma \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

решается задача Коши

$$\partial_t q + \partial_x q = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

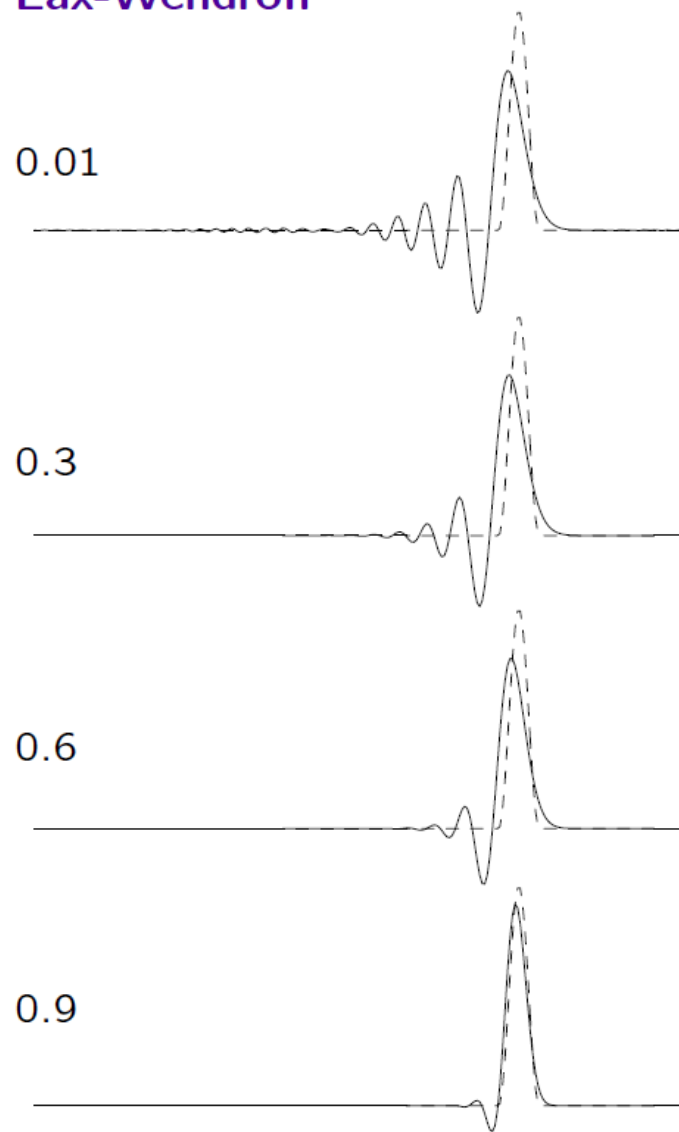
$$q|_{t=0} = q_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$q(1) = q(0) \quad \partial_x q|_{x=1} = \partial_x q|_{x=0}, \quad \partial_{xx}^2 q|_{x=1} = \partial_{xx}^2 q|_{x=0}$$

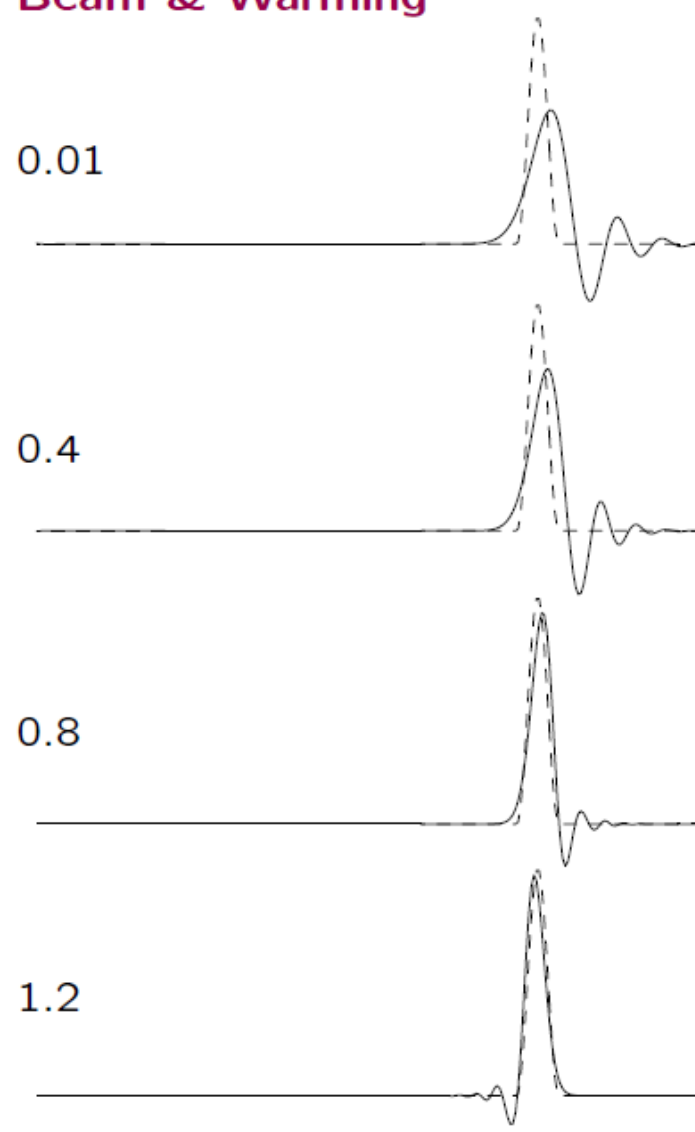
Точным решением является движение вправо без изменения формы, выход через границу на правом конце и возвращение через левую границу (периодические граничные условия), так, что по достижении $t = 1$ распределение должно достичь положения эквивалентного начальному состоянию (т.е. завершить один период).

В стандартной постановке сетка состоит из 256 интервалов, а $\sigma = 1/32$, что соответствует ширине распределения $8\Delta x$ измеренной на уровне половины высоты.

Lax-Wendroff



Beam & Warming



зависимость характера численной ошибки от числа Куранта, решение в момент $t = 1$ (один период)

Lax-Wendroff

$N=256$

362

512

724

1024

1448

2048

сходимость схемы Lax-Wendroff при измельчении сетки в $\sqrt{2}$ раз при каждом изменении

число Куранта 0.2 во всех случаях

сходимость медленная!

Задача: Зная что **L&W** даёт отрицательную численную дисперсионную ошибку, **B&W** положительную, **Fromm** где-то посередине и лучше их обеих, но все равно даёт дисперсию – можно ли скомбинировать **L&W** и **B&W** так чтобы избавиться от численной дисперсии во втором порядке точности совсем?

?

Да можно:

$$\begin{array}{l}
 \textbf{L\&W} \quad \lambda = 1 - \underbrace{i\alpha k\Delta x - \alpha^2 \frac{(k\Delta x)^2}{2}}_{\text{соответствует } \lambda^{(\text{exact})}} + \underbrace{i\alpha \frac{(k\Delta x)^3}{6}}_{\neq +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6}} + \underbrace{\alpha^2 \frac{(k\Delta x)^4}{24}}_{\neq +\alpha^4 \frac{(k\Delta x)^4}{24}} + \dots \\
 \textbf{B\&W} \quad \lambda = 1 - \underbrace{i\alpha k\Delta x - \alpha^2 \frac{(k\Delta x)^2}{2}}_{\text{соответствует } \lambda^{(\text{exact})}} - \underbrace{i\alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) (k\Delta x)^3}_{\neq +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6}} - \underbrace{\alpha \left(1 - \frac{7\alpha}{6}\right) \frac{(k\Delta x)^4}{4}}_{\neq +\alpha^4 \frac{(k\Delta x)^4}{24}} + \dots
 \end{array}$$

Взвешенная сумма **L&W** · (1 − φ(α)) + **B&W** · φ(α). Выберем φ(α) так чтобы (kΔx)³ совпал с идеальным.

$$\begin{aligned}
 (1 - \phi(\alpha)) \cdot i\alpha \frac{(k\Delta x)^3}{6} - \phi(\alpha) \cdot i\alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) (k\Delta x)^3 &= +i\alpha^3 \frac{(k\Delta x)^3}{6} \\
 1 - \phi(\alpha) - (2 - 3\alpha) \cdot \phi(\alpha) &= \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \phi(\alpha) = \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{3}
 \end{aligned}$$

Fromm

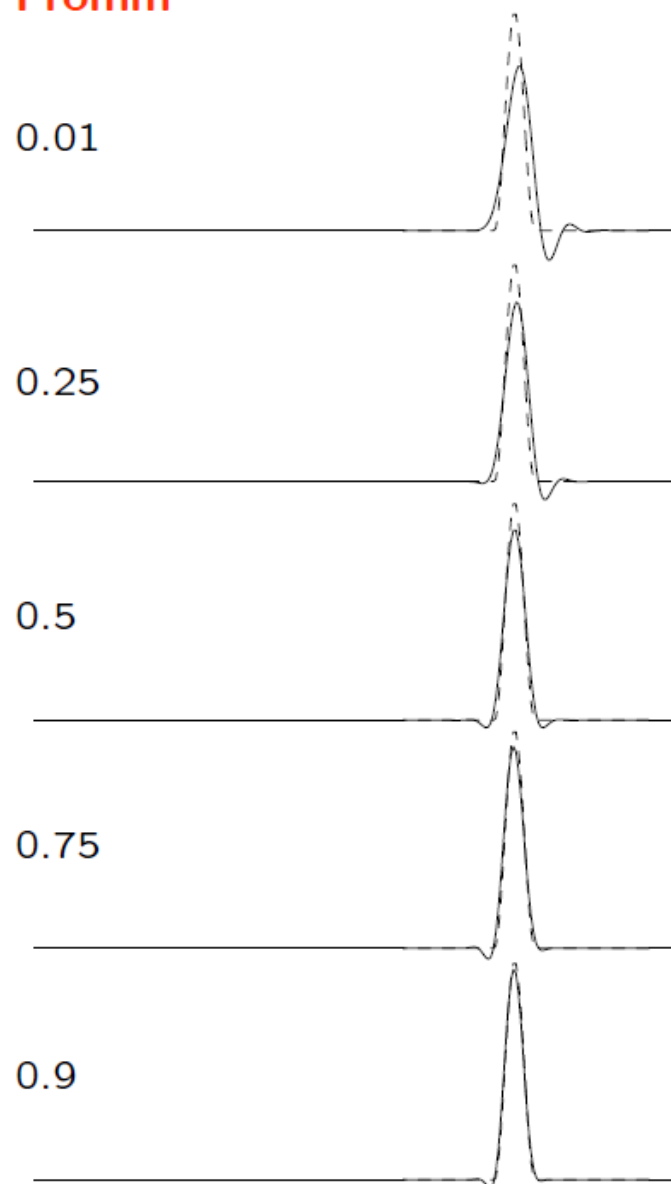
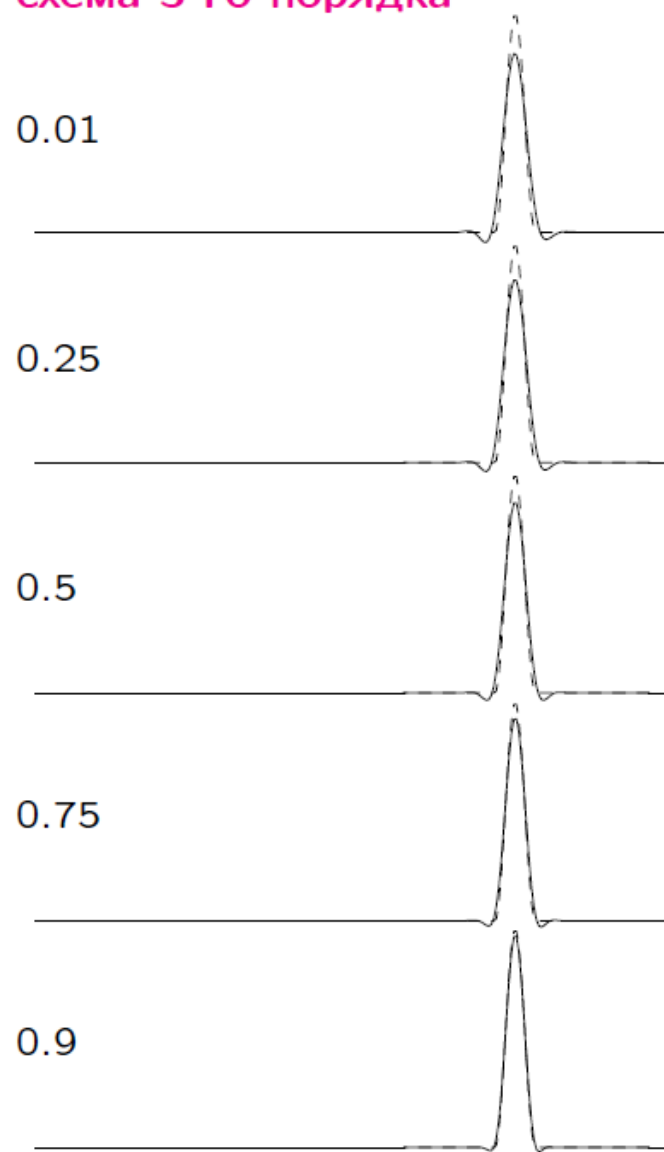


схема 3-го порядка



зависимость характера численной ошибки от числа Куранта, решение в момент $t = 1$ (один период)

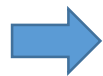
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$$

$$u_m^n = u(\tau n, hm)$$

$$\bar{u}_m(t) = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u(t, x) dx$$

Проинтегрируем уравнение внутри ячейки

$$\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{a}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t, x) dx$$



$$\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial t} + \frac{a}{h} (u_{m+1} - u_m) = \frac{1}{h} \bar{f}_m$$

Проинтегрируем уравнение внутри ячейки еще раз, предварительно продифференцировав

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$$



$$\frac{1}{h} \frac{\partial (u_{m+1} - u_m)}{\partial t} + \frac{a}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{m+1} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_m \right) = \frac{1}{h} (f_{m+1} - f_m)$$

?

$$\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{a}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dx$$

Формула Ньютона-Маклорена

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u dx = \bar{u}_m = \frac{h}{2} (u_{m+1} + u_m) - \frac{h^2}{12} (u'_{xm+1} - u'_{xm}) + O(h^2)$$



$$\frac{1}{h} \frac{\partial (u_{m+1} - u_m)}{\partial t} + \frac{a}{h} \left(-\frac{12}{h^2} \bar{u}_m + \frac{6}{h} (u_{m+1} + u_m) \right) = \frac{1}{h} (f_{m+1} - f_m)$$