

Теоретические задачи [1]:

1-ое задание:

Аппроксимация, сходимост: XII.7.2; XII.7.4 (см. [2] стр. 79, не забыть с результатом построения методом неопределенных коэффициентов); XII.7.15 (п. в) \rightarrow исследовать на устойчивость по спектральному признаку); XII.7.19.

ГСУ: XIV.8.5; XIV.9.2 (пп. а) – ж), не забыть исследовать на аппроксимацию и устойчивость); XIV.9.6; XIV.9.8 (построить схему и исследовать на сходимост); XIV.9.11 (п. а)); XIV.9.14 (п. б)).

2-ое задание:

Уравнения параболического типа: XII.7.6; XIII.7.3; XIII.9.3; XIII.9.8; XIII.9.9; XIII.9.17.

Уравнения эллиптического типа: XV.7.1; XV.7.4; XII.7.8; XII.7; XII.7.27; 8.6.6 (задача взята из [2], пример решения – там же на стр. 50-51).

Практические задачи:

1-ое задание:

1. Задача XIV.10.2 из [1].

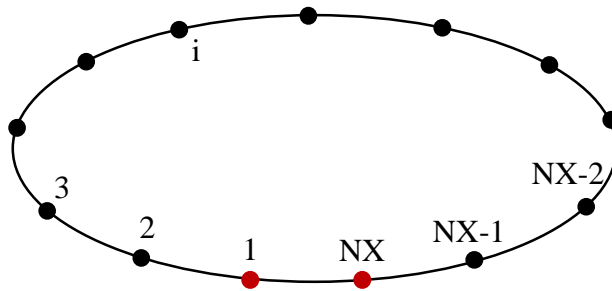
Здесь необходимо реализовать схему уголок (п. а)), а также схему Лакса-Вендрофа (п. б)) с начальными и граничными условиями, указанными в задачнике. Сетка равномерная:

$$x_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, NX, \quad h = \frac{L}{NX - 1}, \quad x_1 = 0, \quad x_{NX} = L.$$

Основную трудность здесь представляет реализация периодических граничных условий для п. б) (значение в последнем узле сетки (индекс NX) должно совпадать со значением в первом узле сетки (индекс 1), т.е. $y_{NX}^{n+1} = y_1^{n+1}$).

Обе схемы явные. Так для схемы уголок $y_i^{n+1} = f(y_{i-1}^n, y_i^n)$ поэтому реализация проста: для $i = 2, \dots, NX$ (индекс $i = 1$ мы не можем здесь использовать, т.к. значения $y_{i-1}^n = y_0^n$ у нас нет на сетке) считаем соответствующие значения y_i^{n+1} . Затем для учета граничного условия делаем переприсваивание $y_1^{n+1} = y_{NX}^{n+1}$. После этого переходим к следующему временному слою.

Для схемы Лакса-Вендрофа $y_i^{n+1} = f(y_{i-1}^n, y_i^n, y_{i+1}^n)$. Поэтому расчет решения на следующем временном слое проводится для $i = 2, \dots, NX-1$. Для учета кольцевых граничных условий можно применить следующий трюк: $y_{NX}^{n+1} = f(y_{NX-1}^n, y_{NX}^n, y_1^n)$, $y_1^{n+1} = f(y_{NX}^n, y_1^n, y_2^n)$, где в качестве f используется та же расчетная формула, что и при расчете решения во внутренних узлах сетки. Это легко можно понять, если представить расчетную область в форме замкнутой кривой:



Здесь черные точки соответствуют внутренним узлам, красные – граничным.

В качестве входных данных использовать следующие параметры: размер области L равен 20 (переменные в этой задаче безразмерные), время расчета $T = 18$. Шаг по пространству h принять равным 0.5, шаг по времени τ взять из числа Куранта CFL по формуле:

$$\tau = CFL * h.$$

Поэтому в качестве входных параметров здесь используются числа Куранта. Расчеты необходимо провести для следующих значений CFL : 0.6; 1; 1.01.

В качестве результата необходимо построить распределения решения по пространственной координате $y(x_i)$ в различные моменты времени (например, $T = 0; 5; 10; 15; 18$ или выводить результаты через постоянное время $dt_out_results$).

Таким образом, примерная схема реализации программы имеет вид:

1. Задание начальных данных.
2. Генерация сетки.
3. Цикл по времени, в котором:
 - а) проводится расчет y_i^{n+1} для $i = 2, \dots, NX$ в соответствии с используемым численным методом;
 - б) рассчитывается значение y_1^{n+1} (учет граничных условий);
 - в) инкрементирование времени $t += \tau$;
 - г) если $t \geq time_next_output$, сохраняем рассчитанное распределение y_i , $time_next_output += dt_out_results$ (запись результатов).

Что необходимо знать по теории: аппроксимация, устойчивость, сходимость, монотонность разностной схемы. Метод неопределенных коэффициентов для составления разностной схемы (уметь решать задачи), исследование разностной схемы на аппроксимацию (уметь решать задачи), исследование на устойчивость по спектральному признаку (уметь решать задачи, а также понимать для каких уравнений он применяется), принцип замороженных коэффициентов.

2. Задача Римана о распаде разрыва.

Рассматривается одномерная область $x \in [-L, L]$, $L = 10$ м, заполненная идеальным газом (показатель адиабаты равен $5/3$). По середине области (при $x = 0$) располагается тонкая перегородка, по обе стороны от которой газ имеет различные термодинамические параметры. В частности, параметры газа слева от перегородки $v_L = 0, \rho_L = 13 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, P_L = 10$ атм, параметры газа справа от перегородки $v_R = 0, \rho_R = 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, P_R = 1$ атм. В момент времени $t = 0$ перегородку убирают. С помощью схемы Куранта-Изаксона-Риса (КИР)

получить численное решение задачи о распаде разрыва до момента времени 0.02 с. Сопоставить полученный результат с аналитическим решением (стр. 51-53 в [3]; [4]).

Система уравнений одномерной газовой динамики, дополненная уравнением состояния идеального газа, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho u^2) = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u e) + P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ P = (\gamma - 1)\rho e \end{cases}$$

Подставив вместо давления его значение из последнего уравнения, приходим к системе (см. [2] стр. 107, уравнения 11.2.2 – 11.2.3):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где \vec{w} – вектор консервативных переменных:

$$\vec{w} = \{\rho, \rho u, \rho e\}^T.$$

Для решения системы уравнений (1) предлагается использовать разложение матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{\Omega}^T)^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}^T,$$

а также схему КИР:

$$(\mathbf{\Omega}^T)_l^n \frac{\vec{w}_l^{n+1} - \vec{w}_l^n}{\tau} + \left((\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|) \mathbf{\Omega}^T \right)_l^n \frac{\vec{w}_l^n - \vec{w}_{l-1}^n}{2h} + \left((\mathbf{\Lambda} - |\mathbf{\Lambda}|) \mathbf{\Omega}^T \right)_l^n \frac{\vec{w}_{l+1}^n - \vec{w}_l^n}{2h} = 0.$$

В задачнике [2] допущена опечатка в формуле для матрицы $\mathbf{\Omega}^T$. Матрица $\mathbf{\Omega}^T$ должна иметь следующий вид:

$$\mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} -uc & c & \gamma - 1 \\ -c^2 & 0 & \gamma - 1 \\ uc & -c & \gamma - 1 \end{pmatrix}.$$

После перегруппировки подобных слагаемых и умножения на матрицу $((\mathbf{\Omega}^T)^{-1})_l^n$ получаем расчетную формулу для вектора консервативных переменных на следующем временном слое:

$$\vec{w}_l^{n+1} = \vec{w}_l^n - \tau \mathbf{A}_l^n \frac{\vec{w}_{l+1}^n - \vec{w}_{l-1}^n}{2h} + \tau ((\mathbf{\Omega}^T)^{-1} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{\Omega}^T)_l^n \frac{\vec{w}_{l+1}^n - 2\vec{w}_l^n + \vec{w}_{l-1}^n}{2h}. \quad (2)$$

Стоит обратить внимание на условие устойчивости для задачи с постоянными коэффициентами:

$$CFL \equiv \frac{\tau \max_i |\lambda_i|}{h} \leq 1. \quad (3)$$

Поэтому в процессе решения необходимо на каждом временном слое контролировать выполнение условия устойчивости (3). Иными словами, если при текущем шаге по времени условие устойчивости (3) нарушается, необходимо уменьшить шаг по времени, а затем

определять неизвестные на следующем временном слое по (2). Так как задача нелинейная то разностная схема (2) может быть устойчивой при числах Куранта, гораздо меньших 1. У себя в расчетах я использовал числа Куранта, меньшие 0.01.

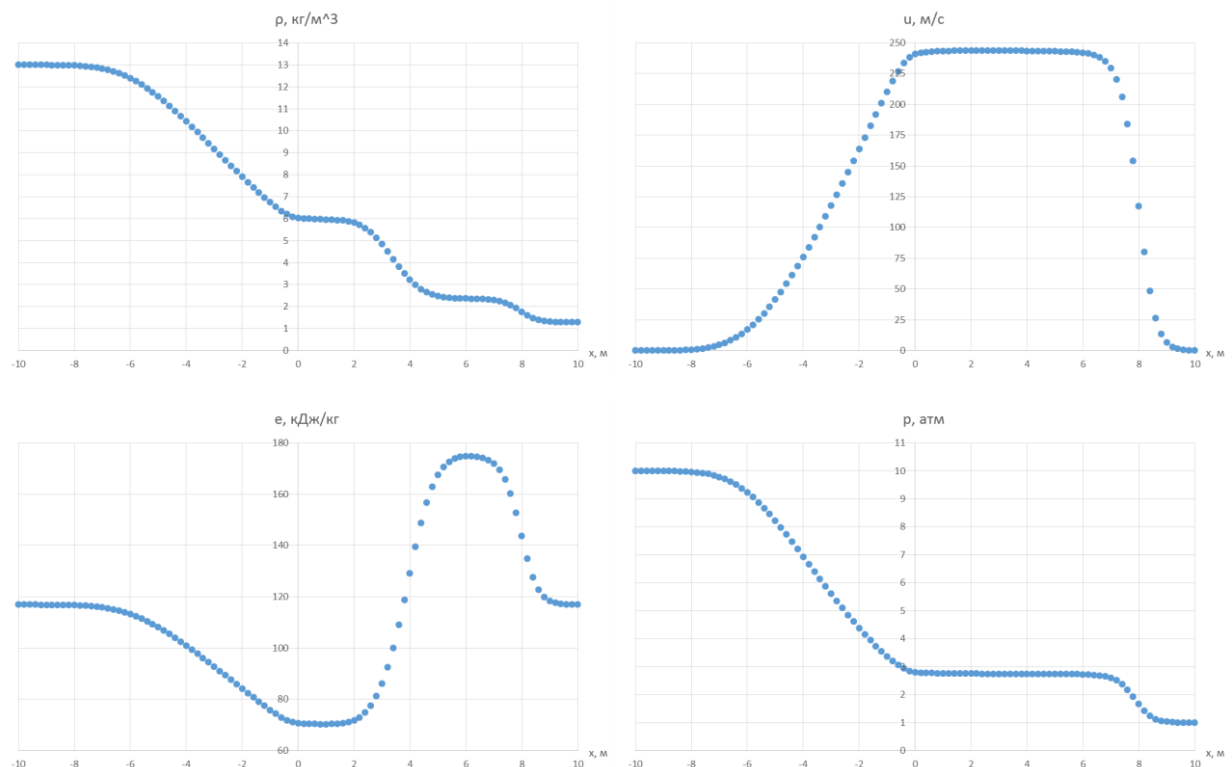
Граничные условия – нулевой градиент всех переменных, что позволяет газу покидать область через границы. Для вектора исходных (примитивных/физических) переменных граничные условия имеют вид:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad \vec{v}_{NX} = \vec{v}_{NX-1}.$$

Примерный порядок действий при решении задачи:

1. Задание начальных данных (параметры газа слева и справа от перегородки, шаг по пространству, шаг по времени, максимальное CFL и т.д.).
2. Генерация расчетной сетки (x_i).
3. Цикл по времени, в котором:
 - а) Рассчитываются матрицы $(\Omega^T)_l^n$, $((\Omega^T)^{-1})_l^n$, $|\Lambda|_l^n$, A_l^n .
 - б) Проверяется выполнение условия устойчивости (3).
 - в) Расчет вектора консервативных переменных по (2).
 - г) Переход от консервативных переменных к примитивным ($\vec{v} = \{\rho, u, e\}^T$).
 - д) Учет граничных условий ($i = 1$ и $i = NX$) на примитивные переменные.
 - е) Расчет давления $P = (\gamma - 1)\rho e$.
 - ж) Инкрементирование времени ($t = t + \tau$), шага по времени ($\tau = \max(\tau, \tau_{init})$) запись результатов (при необходимости).

Получаемые распределения неизвестных ($NX = 100$, $\tau = 10^{-7}$ с, $CFL_{max} = 0.01$) в момент времени 0.015 с:



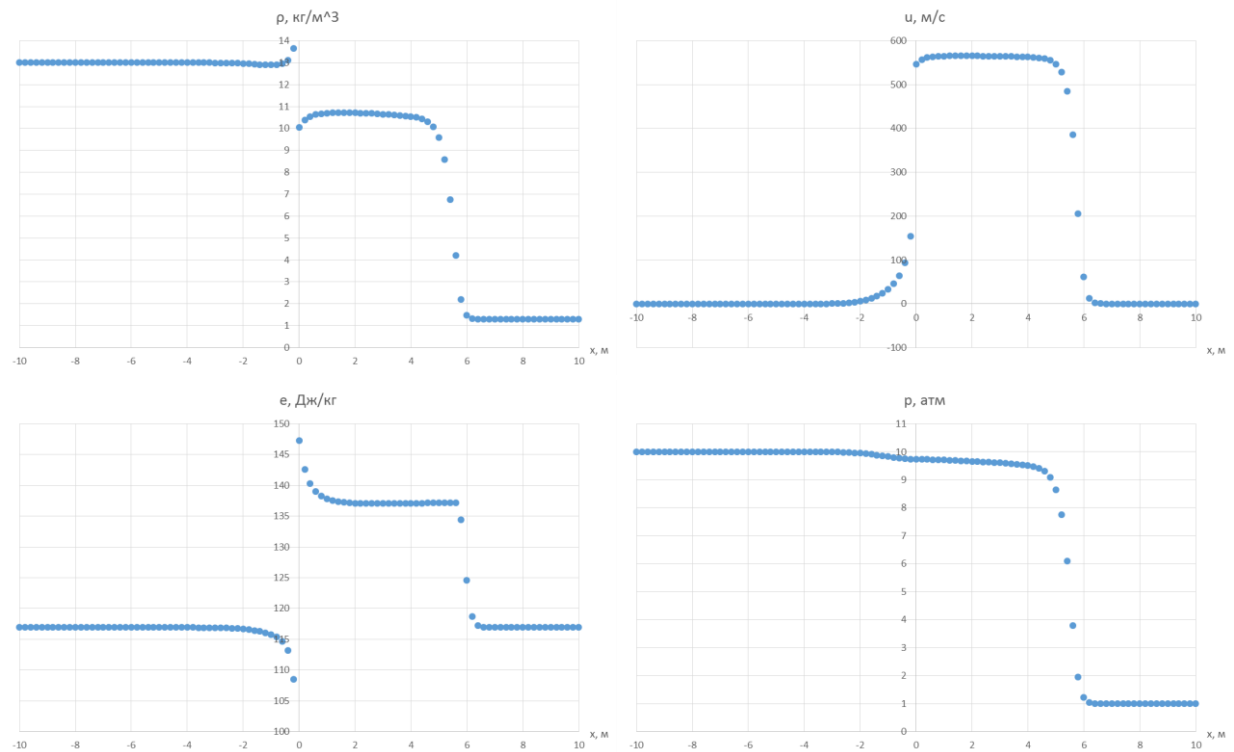
При отладке программы полезно проверять размерности переменных, а также провести тестирование с постоянными начальными условиями (значения переменных слева и справа

от перегородки совпадают между собой). В этом случае решение в любой момент времени соответствует начальному распределению неизвестных.

Использование подхода с переходом к инвариантам Римана вместо разностной схемы (2) приведет к **другой схеме**:

$$(\Omega^T)_l^n \vec{w}_l^{n+1} = (\Omega^T)_l^n \vec{w}_l^n - \tau(\Lambda + |\Lambda|)_l^n \frac{(\Omega^T)_l^n \vec{w}_l^n - (\Omega^T)_{l-1}^n \vec{w}_{l-1}^n}{2h} - \tau(\Lambda - |\Lambda|)_l^n \frac{(\Omega^T)_{l+1}^n \vec{w}_{l+1}^n - (\Omega^T)_l^n \vec{w}_l^n}{2h}. \quad (4)$$

в результате чего получается нефизическое распределение неизвестных:



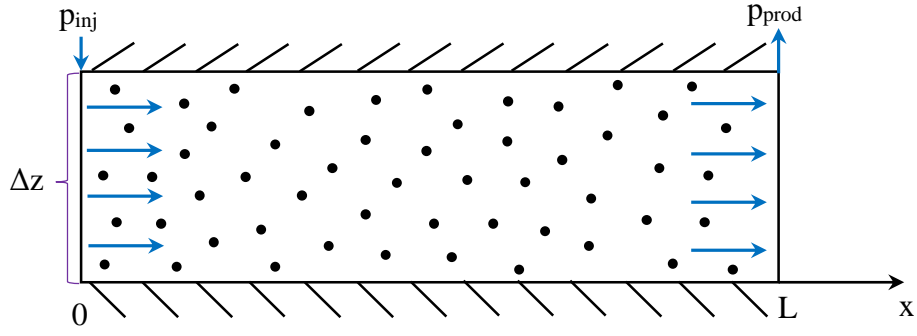
Нужно получить распределения неизвестных (ρ, u, e, P) в любой момент времени (≤ 0.02 с), аналогичные представленным ранее.

Что необходимо знать по теории: определение гиперболических систем уравнений (ГСУ), характеристики, инварианты Римана, уметь исследовать на устойчивость по спектральному признаку ГСУ, корректная постановка граничных условий для ГСУ.

2-ое задание:

3. Плоскопараллельная однофазная фильтрация вязкоупругой жидкости.

Рассматривается горизонтальный пласт постоянной толщины ($\Delta z = 10$ м) и ширины ($B = 50$ м), длина пласта L равна 500 м. Начальное пластовое давление (p_0) всюду постоянно и равно 100 атм. Пласт вскрыт галереей нагнетательных ($x = 0$) и добывающих ($x = L$) скважин, давление которых (соответственно $p_{inj} = 150$ атм и $p_{prod} = 50$ атм) поддерживается постоянным:



В пласте образуется неустановившийся прямолинейно-параллельный поток упругой жидкости. Давление (p) в любой точке потока определяется из уравнения упругого режима фильтрации:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \varphi c_f \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь k – проницаемость пласта ($10 \text{ мД} \approx 10^{-14} \text{ м}^2$), μ – вязкость жидкости ($1 \text{ сПз} \approx 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$), φ – пористость пласта (0.2), ρ – плотность жидкости, которая предполагается зависящей от давления:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + c_f (p - p^0) \right), \quad (2)$$

где c_f – сжимаемость жидкости (10^{-4} атм^{-1}), $\rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – плотность жидкости при опорном давлении p^0 (120 атм). Последнее давление p^0 соответствует давлению при проведении эксперимента по определению плотности (не путать с начальным пластовым давлением).

Аппроксимация уравнения (1) на равномерной сетке (шаг $h = \text{const}$) приводит к системе уравнений с трехдиагональной матрицей. i -ое уравнение системы имеет следующий вид:

$$c_i p_{i-1}^{n+1} + a_i p_i^{n+1} + b_i p_{i+1}^{n+1} = d_i, \quad (3)$$

где коэффициенты a_i , b_i , c_i , d_i вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{k \rho_{i-1/2}^n}{\mu h^2}, \\ b_i &= \frac{k \rho_{i+1/2}^n}{\mu h^2}, \\ a_i &= \left(-c_i - b_i - \frac{\varphi c_f \rho_0}{\tau} \right), \\ d_i &= -\frac{\varphi c_f \rho_0}{\tau} p_i^n. \end{aligned} \quad (4)$$

Стоит обратить внимание, что задача нелинейная, т.к. плотность является функцией решения (давления p). Так как сжимаемость жидкости достаточно мала, то для вычисления плотности $\rho_{i\pm 1/2}$ на границах сеточного блока используется явный метод (вычисляется по давлению на предыдущем временном слое) со взвешиванием «против потока», т.е.:

$$\begin{aligned}\rho_{i+1/2}^n &= \begin{cases} \rho(p_i^n), & \text{если } p_i^n \geq p_{i+1}^n \\ \rho(p_{i+1}^n), & \text{если } p_i^n < p_{i+1}^n \end{cases} \\ \rho_{i-1/2}^n &= \begin{cases} \rho(p_{i-1}^n), & \text{если } p_{i-1}^n \geq p_i^n \\ \rho(p_i^n), & \text{если } p_{i-1}^n < p_i^n \end{cases}\end{aligned}\quad (5)$$

Таким образом, зная распределение давления с предыдущего временного слоя, можно из (4-5) определить коэффициенты в уравнении (3). Проведение итераций не требуется, в результате чего представленный метод учета нелинейностей прост в реализации. Однако, в случае сильного изменения решения в течение одного временного шага (что может быть обусловлено большим коэф-ом сжимаемости, высоким коэф-ом подвижности флюида, малой пористостью или слишком большим временным шагом). Для представленной задачи шага по времени, равного 1 сутки, должно быть достаточно для получения устойчивого решения. Но лучше взять шаг по времени меньший, чтобы получить более детальную картину распространения давления от времени.

Остановимся на алгоритме учета граничных условий. Для сетки с распределенными узлами учет граничных условий приведет к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & c_i & a_i & b_i \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & c_{NX-2} & a_{NX-2} & b_{NX-2} \\ & & & & & & c_{NX-1} & a_{NX-1} & b_{NX-1} \\ & & & & & & \textcolor{red}{0} & & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ p_3^{n+1} \\ \dots \\ p_i^{n+1} \\ \dots \\ p_{NX-2}^{n+1} \\ p_{NX-1}^{n+1} \\ p_{NX}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{p}_{inj} \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_{NX-2} \\ d_{NX-1} \\ \textcolor{red}{p}_{prod} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Таким образом $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_{NX} = 1$, $c_{NX} = 0$.

Для блочно-центрированной сетки учет граничных коэффициентов осуществляется путем добавления фиктивного узла (по одному с каждой границы), аппроксимации граничного самого условия и преобразования коэффициентов a_1 , b_1 , a_{NX} , c_{NX} с учетом разностного уравнения (подробнее см. лекцию 1).

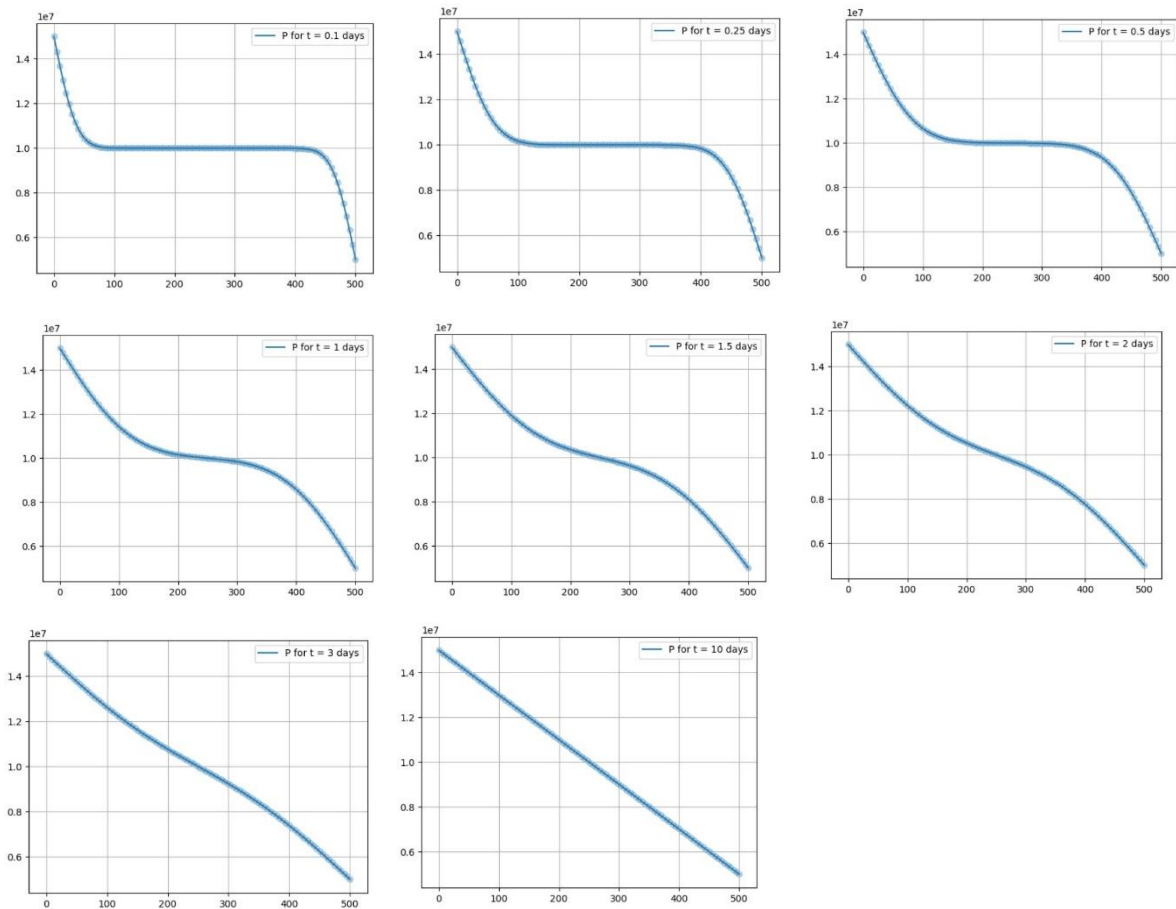
Нужно реализовать программу, которая позволяет определить распределение давления в пласте в различные моменты времени ($T_{\max} = 10$ дней).

Примерная схема реализации программы:

1. Задание начальных данных (для первого шага по времени – p^0 , для последующих шагов – p^n).
2. Генерация сетки (использовать сетку с распределенными узлами, около 100 узлов, шаг по времени взять примерно 1 час).
3. Цикл по времени, в котором:
 - а) рассчитываются коэффициенты матрицы (6) системы линейных уравнений и правая часть. При расчете плотности не забывать анализировать направление потока;
 - б) методом прогонки находится решение системы уравнений (6) $\rightarrow p_i^{n+1}$;
 - в) инкрементирование времени $t += \tau$;

г) если $t \geq \text{time_next_output}$, сохраняем рассчитанное распределение p_i , $\text{time_next_output} += \text{dt_out_results}$ (запись результатов примерно через 0.1 день).

Получаемые распределения давления (правда в Паскалях вместо атмосфер) в различные моменты времени (не забываем подписывать оси):



Что необходимо знать по теории: типы сеток (блочнo-центрированная и сетка с распределенными узлами), уметь аппроксимировать уравнений теплопроводности (также при наличии нелинейностей в коэффициентах) и граничные условия на различных типах сеток; метод прогонки (для каких матриц применяется, условие устойчивости); уравнения, описывающие многофазную фильтрацию + сопутствующие определения; методы аппроксимации нелинейных коэффициентов в уравнении теплопроводности (взвешивание «по» и «против потока»); метод Ньютона для учета нелинейности (и его модификации).

4. Двумерное уравнение теплопроводности.

Рассматривается следующая задача:

$$25\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad x, y, t \in [0,1]$$

$$\varphi(x, y, 0) = \cos(\pi x) \sin(5\pi y) \quad (1)$$

$$\varphi(x, 0, t) = \varphi(x, 1, t) = 0, \quad x, t \in [0,1]$$

$$\varphi(0, y, t) = \sin(5\pi y) e^{-50\pi^2 \lambda t}, \quad \varphi(1, y, t) = -\sin(5\pi y) e^{-50\pi^2 \lambda t}, \quad y, t \in [0,1]$$

В качестве λ используется значение 10^{-4} .

Задача (1) допускает аналитическое решение:

$$\varphi(x, y, t) = \cos(\pi x) \sin(5\pi y) e^{-50\pi^2 \lambda t} \quad (2)$$

Необходимо численно решить задачу (1) полностью неявным методом. Использовать сетку с распределенными узлами (шаг постоянен). Для решения получаемой в результате дискретизации системы уравнений с пятидиагональной матрицей использовать полинейный метод Гаусса-Зейделя. Полученные результаты моделирования сопоставить с аналитическим решением (2), а именно нужно построить график зависимости $\|\varphi_{\text{numerical}}(x_i, y_j) - \varphi_{\text{analytical}}(x_i, y_j)\|$ от шага по пространству при фиксированном моменте времени. Для этого необходимо провести расчеты со следующим числом ячеек ($NX = NY$): 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000. Сравнить полученный порядок сходимости по пространству с теоретическим.

Примерная схема реализации программы:

1. Задание начальных данных.
2. Генерация сетки.
3. Цикл по времени, в котором:
 - 3.1. Рассчитываются коэффициенты матрицы системы линейных уравнений и правая часть.
 - 3.2. Полинейным методом Гаусса Зейделя находится φ_i^{n+1} .
 - 3.3. Инкрементирование времени $t += \tau$;
 - 3.4. Если $t \geq \text{time_next_output}$, сохраняем рассчитанное распределение p , $\text{time_next_output} += \text{dt_out_results}$ (запись результатов примерно через 0.01).

Что необходимо знать по теории: дискретизация уравнений параболического типа на двумерной сетке, методы упорядочения; методы простой итерации, Якоби и Зейделя для решения СЛАУ (а также критерии и достаточные условия сходимости МПИ, Якоби и Зейделя); модификации метода Гаусса-Зейделя для решения двумерных задач; методы релаксации; неявный метод переменных направлений; методы неполной факторизации.

Литература:

1. Аристова, Е.Н., Лобанов, А.И. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ: учеб. пособие. Часть II. – М.: МФТИ, 2015. – 310 с.
2. Барабанищikov, А.В., Гамилов, Т.М., Демченко, В.В., Пастушков Р.С., Симаков, С.С. Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Ч. II: учеб. пособие. Часть II. – М.: МФТИ, 2014. – 182 с.
3. Зельдович, Я.Б., Райзер, Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 688 с.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%A0%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%B0_%D0%BE_%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B0%D0%B4%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D1%80%D0%B0%D0%B7%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%B0
5. Басниев, К.С., Кочина, И.Н., Максимов, В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.

Сроки сдачи:

1-ая программа: до 25.02 (≤ 10); до 03.03 (≤ 9); до 10.03 (≤ 7); до 17.03 (≤ 5); затем ≤ 3 .

2-ая программа: до 17.03 (≤ 10); до 24.03 (≤ 9); до 31.03 (≤ 7); до 7.04 (≤ 5); затем ≤ 3 .

3-ья программа: до 07.04 (≤ 10); до 14.04 (≤ 9); до 21.04 (≤ 7); до 28.04 (≤ 5); затем ≤ 3 .

4-ая программа: до 28.04 (≤ 10); до 05.05 (≤ 9); до 12.05 (≤ 7); до 19.05 (≤ 5); затем ≤ 3 .