Лекция 1

Гиперболические уравнения
(введение)

Три основных типа задач

Уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) \qquad 0 \le x \le X$$

$u(0,x) = \mu(x)$ - Начальное условие

$c > 0 \quad u(t,0) = \Psi(t)$ - Краевое условие

$c < 0 \quad u(t,X) = \Psi(t)$ - Краевое условие

Волновое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

$u(0,x) = \mu_1(x)$ - Начальное условие

$u_t{}'(0,x) = \mu_2(x)$ - Начальное условие

$A_1\frac{\partial u}{\partial x} + B_1 u = \Psi_1(t)$ - Краевое условие

$A_2\frac{\partial u}{\partial x} + B_2 u = \Psi_2(t)$ - Краевое условие

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(t,x)$$

$u(0,x) = \mu(x)$ - Начальное условие

$A_1\frac{\partial u}{\partial x} + B_1 u = \Psi_1(t)$ - Краевое условие

$A_2\frac{\partial u}{\partial x} + B_2 u = \Psi_2(t)$ - Краевое условие

Эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t,x)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Psi(x,y)$$

Дополнительные уравнения

Уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = f(t,x)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Psi(x,y)$$

Система уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = \nu_m$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$p = p(\rho)$$

Многомерное уравнение теплопроводности

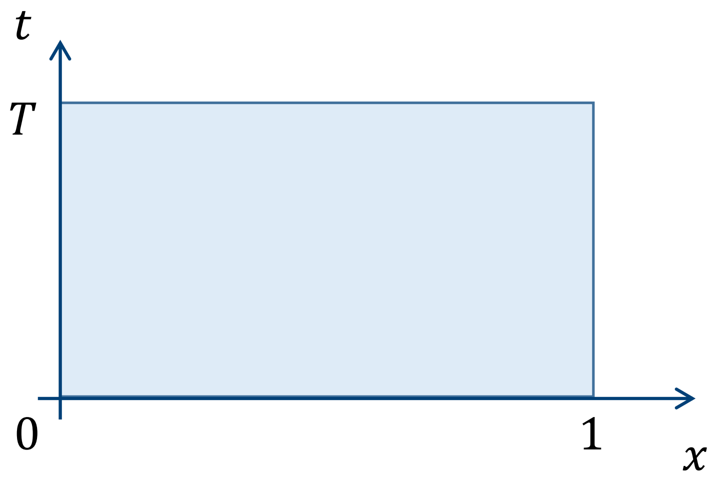
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(t,x)$$

$u(0,x,y) = \mu_1(t)$ - Начальное условие

$u|_{\partial\Omega} = \Psi(x,y)$ - Краевое условие

Одномерное уравнение теплопроводности

Дифференциальная задача

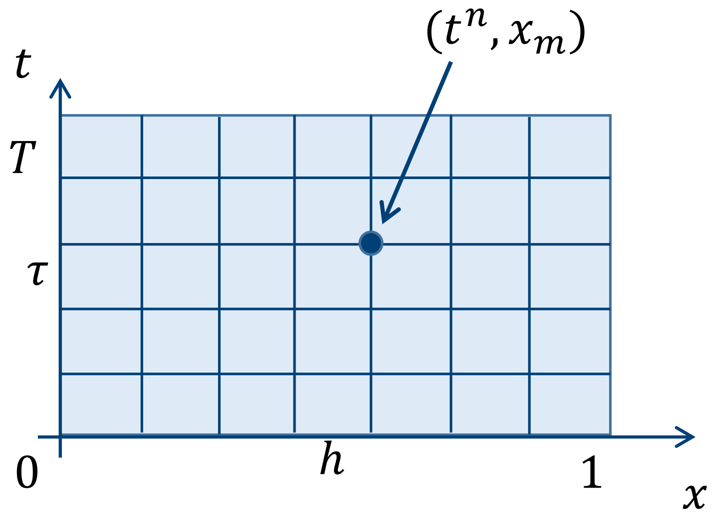


$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad c > 0, \qquad x \in (0,1), \qquad t > 0$$

$$u(0, x) = \psi(x)$$

$$u(t, 0) = \varphi_1(t)$$

Разностная задача



$$u(t^n, x_m) = u_m^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

$$u_m^0 = \psi_m$$

$$u_0^n = \varphi_1^n$$

Постановка задачи

Дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) \qquad 0 \le x \le X$$

$u(0,x) = \mu(x)$ - Начальное условие

$c > 0 \quad u(t,0) = \Psi(t)$ - Краевое условие

Разностная задача

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n$$

$$u_m^0 = \mu_m$$

$$u_0^n = \Psi^n$$

Операторное представление

$$Lu = f$$

Точное решение

Дифференциальный оператор

Правая часть

$$L_h u_h = f_h$$

Проекция правой части

Разностный оператор

Приближенное решение

Основные определения

Дифференциальная задача

$$Lu = f \qquad (1)$$

Разностная задача

$$L_h u_h = f_h \qquad (2)$$

Опр 1: Будем говорить, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной, если

$$\|u_h - [u]_h\| \le C_2 h^p$$ p – порядок сходимости

Опр 2: Результат подстановки сеточной проекции точного решения (1) в разностную схему (2) называется невязкой

$$r_h = L_h[u]_h - f_h$$

Опр 3: Если $\|r_h\|_{h\to 0} \to 0$, то разностная задача (2) аппроксимирует дифференциальную задачу (1)

Если $\|r_h\| \le Ch^p$, то аппроксимация порядка p

Опр 4: Будем говорить, что решение разностной схемы устойчиво, если для решения двух возмущенных задач

$$L_h u_h^1 = f_h + \varepsilon_h^1$$
$$L_h u_h^2 = f_h + \varepsilon_h^2$$

Справедлива оценка

$$\left\|y_h^1 - y_h^2\right\| \le C_1\left(\left\|\varepsilon_h^1\right\| + \left\|\varepsilon_h^2\right\|\right)$$

Основная теорема вычислительной математики

Теорема (Лакса-Рябенького-Филипова): Пусть семейство разностных схем (2) аппроксимирует дифференциальную задачу (1) и устойчива, тогда решение задачи (2) сходится к решению задачи (1). Причем, если аппроксимация имела порядок *p*, то и сходимость будет иметь порядок *p*.

Если выполняется условие аппроксимации, то

$$\|L_h[u]_h - f_h\| \leq Ch^p$$

Тогда $L_h[u]_h = f_h + r_h$

и $L_h u_h = f_h$

Из условия устойчивости

$$\|[u]_h - u_h\| \leq C_1(\|r_h\| + 0) = C_1 C h^p = Dh^p$$

Устойчивость (для неэволюционных задач)

Опр 4: Будем говорить, что решение разностной схемы устойчиво, если для решения двух возмущенных задач

$$L_h u_h^1 = f_h + \varepsilon_h^1$$
$$L_h u_h^2 = f_h + \varepsilon_h^2$$

Справедлива оценка $\|y_h^1 - y_h^2\| \le C_1\left(\|\varepsilon_h^1\| + \|\varepsilon_h^2\|\right)$

Опр 5: Разностная схема (2) с линейным оператором L_s называется устойчивой, если для решения уравнения (2) имеет место

$$\|u_s\| \le M\|f_s\|$$

Теорема: В случае линейного оператора L_s определения устойчивости (опр.4 и опр.5) эквивалентны

□ Пусть разностная схема устойчива в смысле определения 3

$$L_h u_h^1 = f_h + \varepsilon_h^1, \quad L_h u_h^2 = f_h \;\Rightarrow\; L_h\underbrace{(u_h^1 - u_h^2)}_{y_h} = \varepsilon_h^1 \;\xRightarrow{\text{По опр 4}}\; \|y_h\| \le C\|\varepsilon_h^1\|$$

опр 5

В обратную сторону

$$L_h u_h^1 = f_h + \varepsilon_h^1, \quad L_h u_h^2 = f_h + \varepsilon_h^2 \;\Rightarrow\; L_h(u_h^1 - u_h^2) = \varepsilon_h^1 - \varepsilon_h^2 \;\xRightarrow{\text{По опр 5}}\; \|y_h^1 - y_h^2\| \le C_1\left(\|\varepsilon_h^1 + \varepsilon_h^2\|\right) \le C_1\left(\|\varepsilon_h^1\| + \|\varepsilon_h^2\|\right)$$

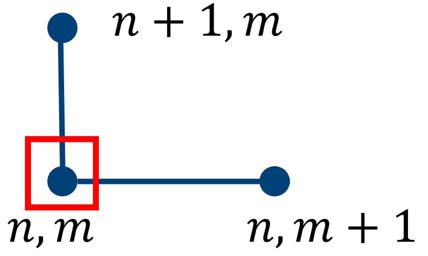
опр 4 ■

Исследование на аппроксимацию

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\,\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

$$u_m^0 = \psi_m$$

$$u_0^n = \varphi_1^n$$



Совокупность узлов, участвующих в элементарном акте вычислений по разностной схеме называется шаблоном

Аппроксимация

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_t' + O(\tau^3)$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h u_x' + \frac{h^2}{2} u_x'' + \frac{h^3}{6} u_x''' + \frac{h^4}{24} u_x^{IV} + O(h^5)$$

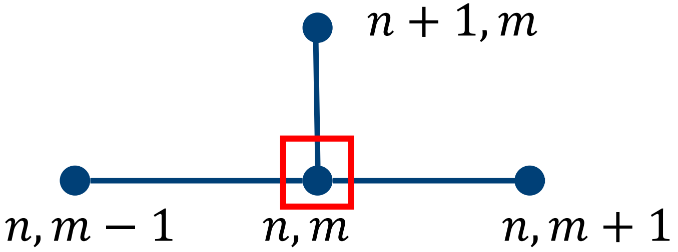
$$r_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\,\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - 0 = u_t' + \frac{\tau}{2} u_t'' + O(\tau^2) + c\left(u_x' + \frac{h}{2} u_x''\right) \sim O(\tau, h^2)$$

$$\|r_m^n\| \le C_1 \tau + C_2 h$$

Первый порядок аппроксимации по времени и первый по пространству

Явная схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$



Аппроксимация

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_t' + O(\tau^3)$$

$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm h u_x' + \frac{h^2}{2} u_x'' \pm \frac{h^3}{6} u_x''' + \frac{h^4}{24} u_x^{IV} + O(h^5)$$

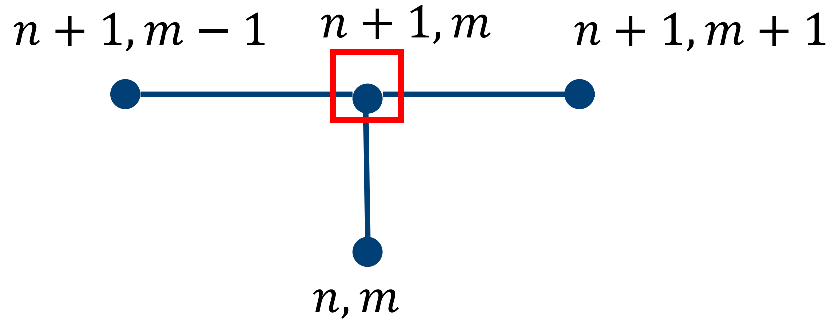
$$r_m^n = u_t' + \frac{\tau}{2} u_t' + O(\tau^2) - \mathrm{D}\left(u_x'' + \frac{h^2}{12} u_x^{IV} + O(h^3) \right) \sim O(\tau, h^2)$$

$$\|r_m^n\| \le C_1 \tau + C_2 h^2$$

Первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству

Неявная схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n}}{\tau} = D\,\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$



Аппроксимация

$$u_m^{n+1} = u_m^{n+1} + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2}u_t' + O(\tau^3)$$

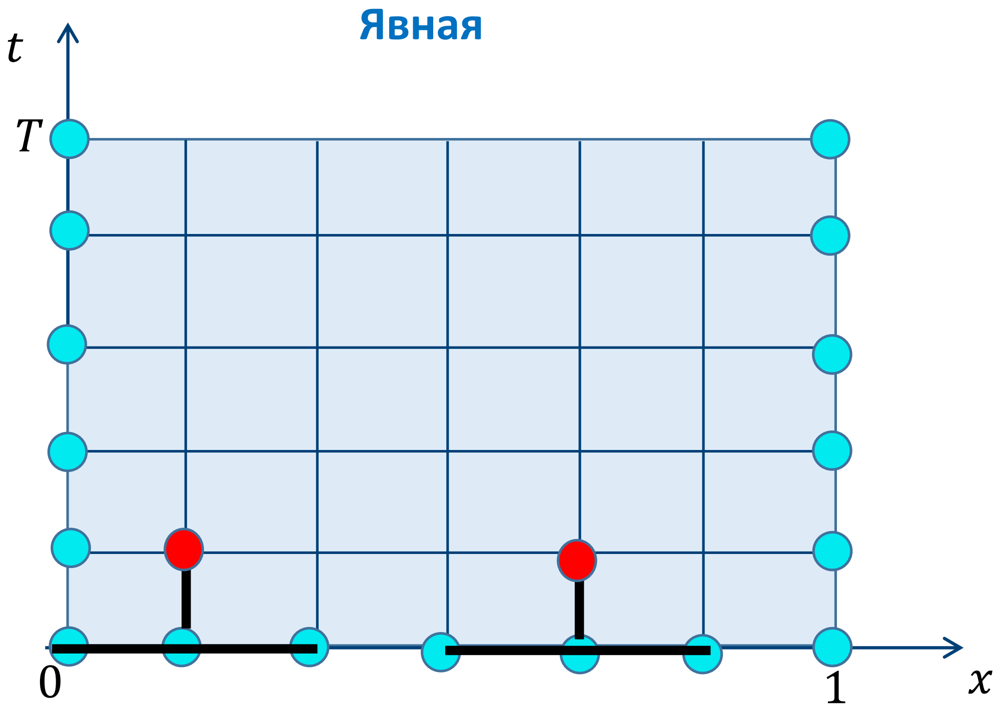
$$u_{m\pm1}^{n+1} = u_m^{n+1} \pm h u_x' + \frac{h^2}{2}u_x'' \pm \frac{h^3}{6}u_x''' + \frac{h^4}{24}u_x^{IV} + O(h^5)$$

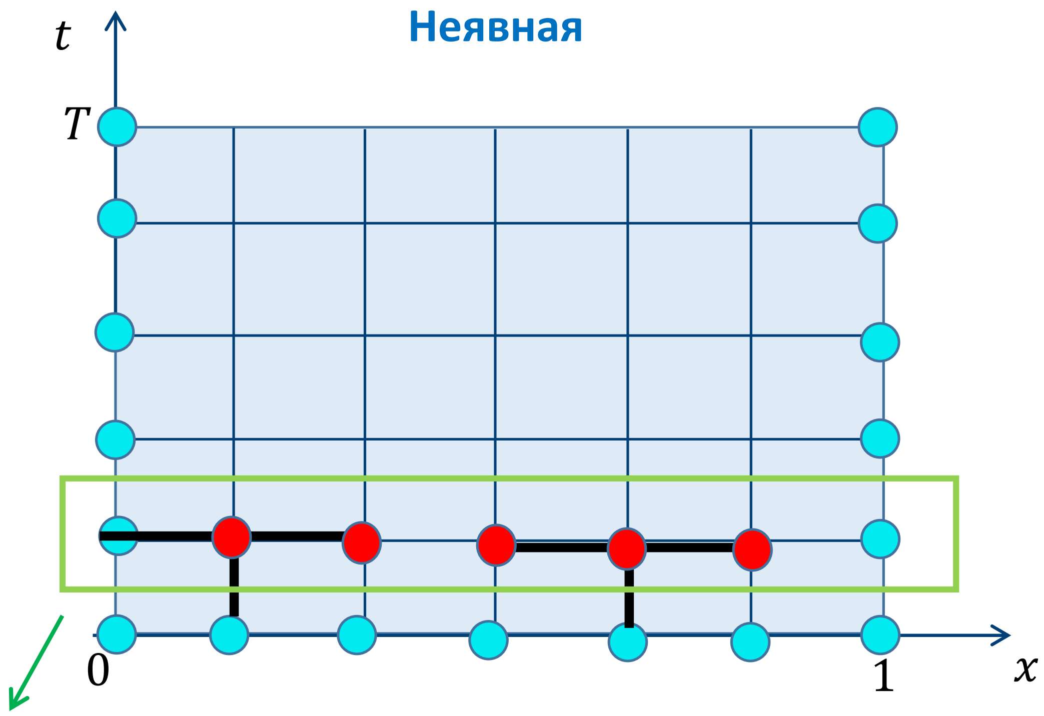
$$r_m^{n+1} = u_t' + \frac{\tau}{2}u_t' + O(\tau^2) - \mathrm{D}\left(u_x'' + \frac{h^2}{24}u_x^{IV} + O(h^3)\right) \sim O(\tau, h^2)$$

$$\|r_m^n\| \le C_1\tau + C_2 h^2$$

Первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству

Явная схема vs неявная





Невозможно получить решение на следующем слое по времени из предыдущего только использованием разностной схемы. Получается только линейная связь между неизвестными.

Двухслойные разностные схемы

Канонической формой записи двухслойной разностной схемы называется запись

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f^n \qquad y^n=\{y_m^n\}, m=0,1,\dots M$$

1) B = E – схема называется явной

2) B – нижняя треугольная матрица – схема бегущего счета

Будем рассматривать задачи, когда A > 0, B > 0, A = A^T, B = B^T

$$\exists c, \qquad \forall y \neq 0, \qquad (Ay,y) \geq c(y,y)$$

Можно ввести энергетическую норму: $\|y\|_A=\sqrt{(Ay,y)}$

Схема с весами для одномерного уравнения

Дифференциальная линейная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{d^2u}{dx^2} + f \qquad D > 0, \qquad x \in (0,1), \qquad y \in (0,1), \qquad t > 0$$

$$u(0,x) = \psi(x)$$

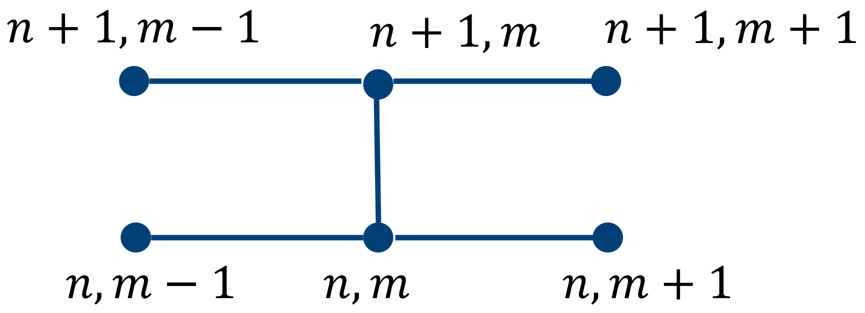
$$u(t,0) = \varphi_1\,(t)$$
$$u(t,1) = \varphi_2\,(t)$$

Разностная линейная задача

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\left(\sigma_1\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2} + \sigma_2\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^{n+1}$$

$$u_{mk}^0 = \psi_m$$
$$u_{0k}^n = \varphi_{1k}^n$$
$$u_{Mk}^n = \varphi_{2k}^n$$

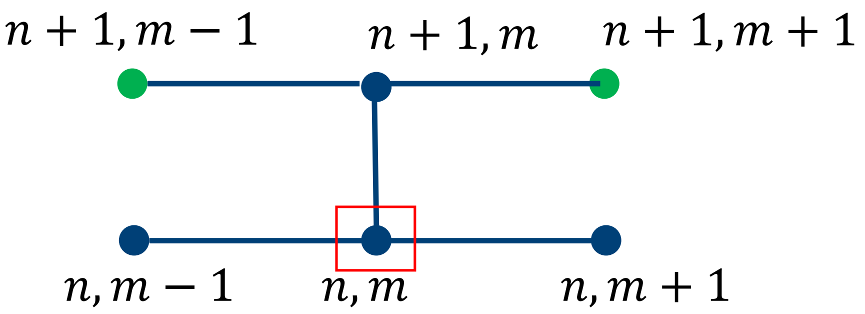
$$\boxed{\sigma_1 + \sigma_2 = 1}$$



Исследование на аппроксимацию

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \cancel{\tau u_t'} + \cancel{\frac{\tau^2}{2}u_t''} + O(\tau^3)$$

$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm \cancel{h_x u_x'} + \frac{h_x^2}{2}u_x'' \pm \frac{h_x^3}{6}u_x''' + \frac{h_x^4}{24}u_x^{IV} + O(h_x^5)$$



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$\begin{aligned} u_{m\pm1}^{n+1} = u_m^n &\pm \cancel{h_x u_x'} + \cancel{\tau u_t'} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(h_x^2 u_x'' \pm \cancel{2h_x\tau u_{xx}''} + \cancel{\tau^2 u_t''}\right) + \\ &+ \frac{1}{6}\left(\cancel{\pm h_x^3 u_x'''} \pm \cancel{3h_x\tau^2 u_{xtt}'''} + 3h_x^2\tau u_{xxt}''' + \cancel{\tau^3 u_t'''}\right) \\ &+ \frac{1}{24}\left(h_x^4 u_x^{IV} \cancel{\pm 4h_x\tau^3 u_{xttt}^{IV}} + 6h_x^2\tau^2 u_{xt}^{IV} \pm \cancel{4h_x^3\tau u_{xxxt}^{IV}} + \cancel{\tau^4 u_t^{IV}}\right) + O(\tau^5, h_x^5) \end{aligned}$$

$$r_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - D\left(\sigma_1\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2} + \sigma_2\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^n + O(\tau^2, h_x^4)$$

$$r_m^n = u_t' + \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\sigma_1\left\{u_x'' + \frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}\right\} + \sigma_2\left\{u_x'' + \frac{h_x^2}{12}u_x^{IV} + \tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^n + O(\tau^2, h_x^4)$$

Перегруппировываем

$$r_m^n = \cancel{u_t'} + \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\cancel{\boldsymbol{u_x''}\underbrace{\boldsymbol{(\sigma_1 + \sigma_2)}}_{=1}} + \frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2)}_{=1} + \sigma_2\left\{\tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right) + \underbrace{\boldsymbol{(\sigma_1 + \sigma_2)}}_{=1}\boldsymbol{f_m^n} + O(\tau^2, h_x^4)$$

Исследование на аппроксимацию

$$r_m^n = \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV} + \sigma_2\left\{\tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right) + O(\tau^2, h_x^4)$$

Посмотрим, можно ли «занулить» коэффициент при τ

Для этого рассматриваем исходное дифференциальное уравнения

$$u_t' = Du_{xx}''$$

Дифференцируем по t

$$\Downarrow$$

$$u_{tt}'' = Du_{xxt}'''$$

Следовательно при $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\tau}{2}u_{tt}'' - D\tau\sigma_2 u_{xxt}''' = 0$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$

Схема Кранка-Николсон $\quad r_m^n = O(\tau^2, h_x^2)$

Заметим, что при $\sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{h_x^2}{12\tau}$ $\qquad \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV} + \sigma_2\left\{\tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right)=0$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{h_x^2}{12\tau} \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{h_x^2}{12\tau}$$

$$r_m^n = O(\tau^2, h_x^4)$$

Для эволюционных уравнений

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f^n \qquad y^n=\{y_m^n\}, m=0,1,\dots M$$

Будем рассматривать уравнения вида $A = AT > 0$ $\quad B = BT > 0$

Рассмотрим схему с весами для уравнения тепропроводности

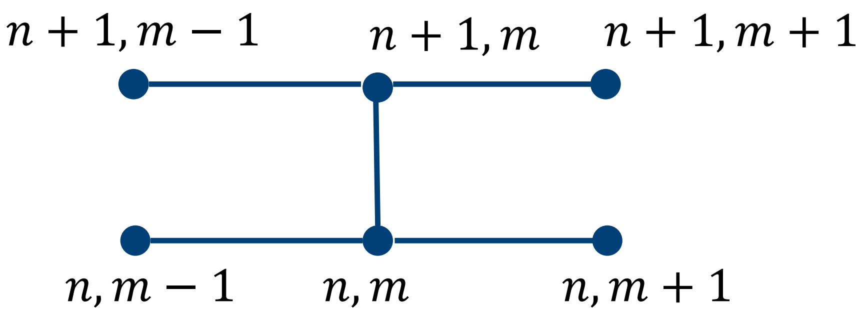
$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{d^2u}{dx^2}+f \qquad D>0, \qquad x\in(0,1), \qquad y\in(0,1), \qquad t>0$$

$$u(0,x)=\psi(x) \qquad \begin{aligned} u(t,0)&=\varphi_1(t)\\ u(t,1)&=\varphi_2(t)\end{aligned}$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=D\left(\sigma_1\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h_x^2}+\sigma_2\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right)+\sigma_1 f_m^n+\sigma_2 f_m^{n+1}$$

$$u_{mk}^0=\psi_m$$
$$u_{0k}^n=\varphi_{1k}^n$$
$$u_{Mk}^n=\varphi_{2k}^n$$

$$\boxed{\sigma_1+\sigma_2=1}$$



Устойчивость разностных схем

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\left(\sigma_1 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2} + \sigma_2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^{n+1}$$

$$\Lambda_{xx} u^n = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2}$$

Перейдем к операторному виду

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_{xx} u^n + (1 - \sigma_1)\Lambda_{xx} u^{n+1} + f_m^{\sigma_2}$$

$$(E + \tau\sigma_1\Lambda_{xx})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \Lambda_{xx} u^{n+1} = f_m^{\sigma_1}$$

Опр 6: Однородная разностная схема устойчива по начальным данным, если существует константа M_0, такая что:

$$\forall n \quad \|y^n\| \le M_0 \|y^0\|$$

Устойчивость разностных схем

$$\left.\begin{aligned} &(E+\tau\sigma_1\Lambda_{xx})\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}-\Lambda_{xx}u^{n+1}=f_m^{\sigma_1} \\ &u_{mk}^0=\psi_m \end{aligned}\right\} = Lu^n = f$$

Опр 7: Разностная схема устойчива по правой части, если существует константа C, такая что:

$$\|y^n\| \le C\|f\|$$

Теорема: Для устойчивости разностной схемы по начальным данным при $f = 0$ необходимо и достаточно выполнения условия неравенства

$$B \ge \frac{\tau}{2}A \quad \Rightarrow \quad (By, y) \ge \frac{\tau}{2}(Ay, y)$$

(Необходимость)

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=0$$

$$y^n=\frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\tau\frac{-y^n+y^{n+1}}{2\tau}$$

$$w^n=\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} \Rightarrow y^n=\frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\frac{\tau}{2}w^n$$

Умножим скалярно на w^n

$$(Bw^n,w^n)+(A(\frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\frac{\tau}{2}w^n),w^n)=0$$

$$\boxed{((B-\frac{\tau}{2}A)w^n,w^n)+\frac{\tau}{2}(A(y^n+y^{n+1}),y^{n+1}-y^n)=0}$$

Энергетическое тождество

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n-Ay^{n+1}+Ay^{n+1}=f^n$$

$$(E+\tau\sigma_1\Lambda_{xx})\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}-\Lambda_{xx}u^{n+1}=f_m^{\sigma_1}$$

Устойчивость разностных схем

$$((B-\frac{\tau}{2}A)w^n,w^n)+\frac{\tau}{2}(A(y^n+y^{n+1}),y^{n+1}-y^n)=0$$

Преобразуем

$$(A(y^n+y^{n+1}),y^{n+1}-y^n)=(Ay^n,y^{n+1})+\cancel{(Ay^{n+1},y^{n+1})}-(Ay^n,y^n)-\cancel{(Ay^{n+1},y^n)} =$$

$$(Ay^n,y^{n+1})=(y^n,Ay^{n+1}) \qquad A=A^*$$

$$=(Ay^{n+1},y^{n+1})-(Ay^n,y^n)=\|y^{n+1}\|_A-\|y^n\|_A$$

$$((B-\frac{\tau}{2}A)w^n,w^n)+\frac{\tau}{2}(\|y^{n+1}\|_A-\|y^n\|_A)=0$$

Для того, чтобы $\|y^{n+1}\|_A\le\|y^n\|_A$ Необходимо $B-\frac{\tau}{2}A\ge 0$

Устойчивость разностных схем

Достаточность

Запишем схему в момент времени $t = 0$

$$((B - \frac{\tau}{2}A)w^1, w^1) + \frac{\tau}{2}(\|y^1\|_A - \|\Psi\|_A^n) = 0$$

Если $B - \frac{\tau}{2}A \geq 0$ то $\|y^1\|_A \leq \|\Psi\|_A^n$ для любых начальных данных $\blacksquare$

Теорема: Пусть $A = A^* > 0$ и пусть имеет место неравенство $B \geq \frac{(1+\varepsilon)}{2}\tau A \geq 0$ $(\varepsilon > 0)$ тогда имеет место

оценка $\|y^{n+1}\|_A^2 \leq \|y^0\|_A^2 + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\tau \sum_{k=0}^{n} \|f^k\|_{B^{-1}}$

(из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части)

При этом мы предполагаем, что правая часть от самого решения <u>не зависит</u>

Исследование схемы с весами на устойчивость

$$u_m^n \to \lambda^n e^{ikmh}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = D\left(\sigma_1 \frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h_x^2} + \sigma_2 \lambda \frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h_x^2}\right)$$

Замечаем, что $\sigma = \dfrac{D\tau}{h_x^2}$ и $e^{ikh} - 2 + e^{-ikh} = -4sin^2\left(\dfrac{kh}{2}\right)$

$$\lambda - 1 = \sigma\left(-4sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\sigma_1 - 4sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\sigma_2\lambda\right) \Rightarrow \lambda\left(1 + 4\sigma\sigma_2 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right) = 1 - 4\sigma\sigma_1 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)$$

$$|\lambda| = \left|\frac{1 - \overbrace{4\sigma\sigma_1 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)}^{>0}}{1 + \underbrace{4\sigma\sigma_2 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)}_{>0}}\right| < 1$$

Схема безусловно устойчива

Критерии оценки

	Баллы
Контрольная работа 1	1
Самостоятельная работа 1	1
Теоретическая самостоятельная (24-29.02)	0,25
Теоретическая самостоятельная (09-13.03)	0,25
Теория (1 задание)	1
Практика (1 задание)	2
Контрольная работа 2	1
Самостоятельная работа 2	1
Теоретическая самостоятельная (30.03-04.04)	0,25
Теоретическая самостоятельная (20-24.04)	0,25
Теория (2 задание)	1
Практика (2 задание)	2

Сумма 11