Лекция 2

Гиперболические уравнения
(устойчивость разностных схем)

Двухслойные разностные схемы

Канонической формой записи двухслойной разностной схемы называется запись

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f^n \qquad y^n=\{y_m^n\}, m=0,1,\dots M$$

1) B = E – схема называется явной

2) B – нижняя треугольная матрица – схема бегущего счета

Будем рассматривать задачи, когда A > 0, B > 0, A = A^T, B = B^T

$$\exists c, \qquad \forall y \neq 0, \qquad (Ay,y) \geq c(y,y)$$

Можно ввести энергетическую норму: $\|y\|_A=\sqrt{(Ay,y)}$

Схема с весами для одномерного уравнения

Дифференциальная линейная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{d^2 u}{dx^2} + f \qquad D > 0, \qquad x \in (0,1), \qquad y \in (0,1), \qquad t > 0$$

$$u(0, x) = \psi(x)$$

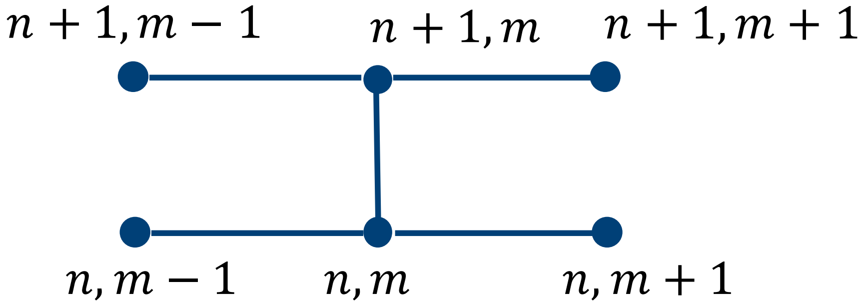
$$u(t, 0) = \varphi_1\,(t)$$
$$u(t, 1) = \varphi_2\,(t)$$

Разностная линейная задача

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\left(\sigma_1 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2} + \sigma_2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^{n+1}$$

$$u_{mk}^0 = \psi_m$$
$$u_{0k}^n = \varphi_{1k}^n$$
$$u_{Mk}^n = \varphi_{2k}^n$$

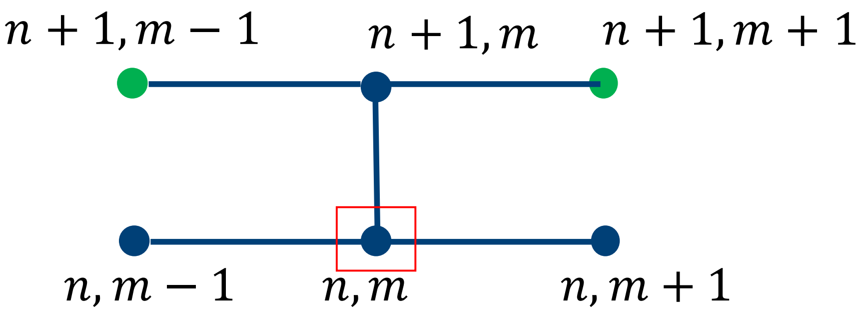
$$\boxed{\sigma_1 + \sigma_2 = 1}$$



Исследование на аппроксимацию

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \cancel{\tau u_t'} + \cancel{\frac{\tau^2}{2} u_t''} + O(\tau^3)$$

$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm \cancel{h_x u_x'} + \frac{h_x^2}{2}u_x'' \pm \frac{h_x^3}{6}u_x''' + \frac{h_x^4}{24}u_x^{IV} + O(h_x^5)$$



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$\begin{aligned} u_{m\pm1}^{n+1} = {} & u_m^n \pm \cancel{h_x u_x'} + \cancel{\tau u_t'} + \\ & + \frac{1}{2}\left(h_x^2 u_x'' \pm \cancel{2h_x \tau u_{xt}''} + \cancel{\tau^2 u_t''}\right) + \\ & + \frac{1}{6}\left(\cancel{\pm h_x^3 u_x'''} \pm \cancel{3h_x \tau^2 u_{xtt}'''} + 3h_x^2 \tau u_{xxt}''' + \cancel{\tau^3 u_t'''}\right) \\ & + \frac{1}{24}\left(h_x^4 u_x^{IV} \pm \cancel{4h_x \tau^3 u_{xttt}^{IV}} + 6h_x^2 \tau^2 u_{xt}^{IV} \pm \cancel{4h_x^3 \tau u_{xxxt}^{IV}} + \cancel{\tau^4 u_t^{IV}}\right) + O(\tau^5, h_x^5) \end{aligned}$$

$$r_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - D\left(\sigma_1 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2} + \sigma_2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^{n+1} + O(\tau^2, h_x^4)$$

$$r_m^n = u_t' + \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\sigma_1\left\{u_x'' + \frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}\right\} + \sigma_2\left\{u_x'' + \frac{h_x^2}{12}u_x^{IV} + \tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^{n+1} + O(\tau^2, h_x^4)$$

Перегруппировываем

$$r_m^n = \cancel{u_t'} + \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\cancel{\boldsymbol{u_x''}\underbrace{(\boldsymbol{\sigma_1 + \sigma_2})}_{=1}} + \frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2)}_{=1} + \sigma_2\left\{\tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right) + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma_1 + \sigma_2})}_{=1}\boldsymbol{f_m^n} + O(\tau^2, h_x^4)$$

Исследование на аппроксимацию

$$r_m^n = \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV} + \sigma_2\left\{\tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right) + O(\tau^2, h_x^4)$$

Посмотрим, можно ли «занулить» коэффициент при τ

Для этого рассматриваем исходное дифференциальное уравнения

$$u_t' = Du_{xx}''$$

Дифференцируем по t

$$\Downarrow$$

$$u_{tt}'' = Du_{xxt}'''$$

Следовательно при $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\tau}{2}u_{tt}'' - D\tau\sigma_2 u_{xxt}''' = 0$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$

Схема Кранка-Николсон $\quad r_m^n = O(\tau^2, h_x^2)$

Заметим, что при $\sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{h_x^2}{12\tau}$ $\qquad \frac{\tau}{2}u_t'' - D\left(\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV} + \sigma_2\left\{\tau u_{xxt}''' + \frac{\tau^2 u_{xt}^{IV}}{2}\right\}\right)$=0

$\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{h_x^2}{12\tau} \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{h_x^2}{12\tau}$

$r_m^n = O(\tau^2, h_x^4)$

Устойчивость разностных схем

Для эволюционных уравнений

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f^n \qquad y^n=\{y_m^n\}, m=0,1,\ldots M$$

Будем рассматривать уравнения вида $A = AT > 0$ $\quad B = BT > 0$

Рассмотрим схему с весами для уравнения тепропроводности

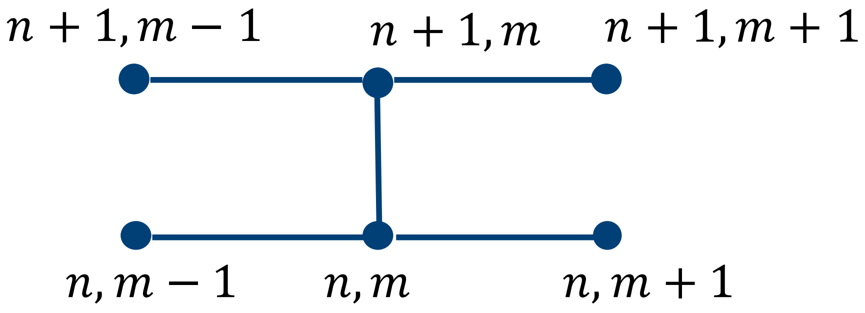
$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{d^2u}{dx^2}+f \qquad D>0, \qquad x\in(0,1), \qquad y\in(0,1), \qquad t>0$$

$$u(0,x)=\psi(x) \qquad \begin{aligned} u(t,0)&=\varphi_1(t)\\ u(t,1)&=\varphi_2(t)\end{aligned}$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=D\left(\sigma_1\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h_x^2}+\sigma_2\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right)+\sigma_1 f_m^n+\sigma_2 f_m^{n+1}$$

$$u_{mk}^0=\psi_m$$
$$u_{0k}^n=\varphi_{1k}^n$$
$$u_{Mk}^n=\varphi_{2k}^n$$

$$\boxed{\sigma_1+\sigma_2=1}$$



Устойчивость разностных схем

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\left(\sigma_1 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2} + \sigma_2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right) + \sigma_1 f_m^n + \sigma_2 f_m^{n+1}$$

$$\Lambda_{xx} u^n = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2}$$

Перейдем к операторному виду

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_{xx} u^n + (1 - \sigma_1)\Lambda_{xx} u^{n+1} + f_m^{\sigma_2}$$

$$(E + \tau\sigma_1\Lambda_{xx})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \Lambda_{xx} u^{n+1} = f_m^{\sigma_1}$$

Опр 6: Однородная разностная схема устойчива по начальным данным, если существует константа M_0, такая что:

$$\forall n \quad \|y^n\| \le M_0 \|y^0\|$$

Устойчивость разностных схем

$$\left.\begin{array}{l} (E + \tau\sigma_1\Lambda_{xx})\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \Lambda_{xx}u^{n+1} = f_m^{\sigma_1} \\ u_{mk}^0 = \psi_m \end{array}\right\} = Lu^n = f$$

Опр 7: Разностная схема устойчива по правой части, если существует константа C, такая что:

$$\|y^n\| \le C\|f\|$$

Теорема: Для устойчивости разностной схемы по начальным данным при $f = 0$ необходимо и достаточно выполнения условия неравенства

$$B \ge \frac{\tau}{2}A \quad \Rightarrow \quad (By, y) \ge \frac{\tau}{2}(Ay, y)$$

(Необходимость)

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=0$$

$$y^n=\frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\tau\frac{-y^n+y^{n+1}}{2\tau}$$

$$w^n=\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} \Rightarrow y^n=\frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\frac{\tau}{2}w^n$$

Умножим скалярно на w^n

$$(Bw^n,w^n)+(A(\frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\frac{\tau}{2}w^n),w^n)=0$$

$$\boxed{((B-\frac{\tau}{2}A)w^n,w^n)+\frac{\tau}{2}(A(y^n+y^{n+1}),y^{n+1}-y^n)=0}$$

Энергетическое тождество

Устойчивость разностных схем

$$((B-\frac{\tau}{2}A)w^n,w^n)+\frac{\tau}{2}(A(y^n+y^{n+1}),y^{n+1}-y^n)=0$$

Преобразуем

$$(A(y^n+y^{n+1}),y^{n+1}-y^n)=\cancel{(Ay^n,y^{n+1})}+(Ay^{n+1},y^{n+1})-(Ay^n,y^n)-\cancel{(Ay^{n+1},y^n)}\;=$$

$$(Ay^n,y^{n+1})=(y^n,Ay^{n+1})\qquad A=A^*$$

$$=(Ay^{n+1},y^{n+1})-(Ay^n,y^n)=\|y^{n+1}\|_A-\|y^n\|_A$$

$$\Downarrow$$

$$((B-\frac{\tau}{2}A)w^n,w^n)+\frac{\tau}{2}(\|y^{n+1}\|_A-\|y^n\|_A)=0$$

Для того, чтобы $\|y^{n+1}\|_A\le\|y^n\|_A$ Необходимо $B-\frac{\tau}{2}A\ge 0$

Достаточность

Запишем схему в момент времени $t = 0$

$$((B - \frac{\tau}{2}A)w^1, w^1) + \frac{\tau}{2}(\|y^1\|_A - \|\Psi\|_A^n) = 0$$

Если $B - \frac{\tau}{2}A \geq 0$ то $\|y^1\|_A \leq \|\Psi\|_A^n$ для любых начальных данных ■

Теорема: Пусть $A = A^* > 0$ и пусть имеет место неравенство $B \geq \frac{(1+\varepsilon)}{2}\tau A \geq 0$ $(\varepsilon > 0)$ тогда имеет место

оценка $\|y^{n+1}\|_A^2 \leq \|y^0\|_A^2 + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\tau \sum_{k=0}^{n} \|f^k\|_{B^{-1}}$

(из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части)

При этом мы предполагаем, что правая часть от самого решения <u>не зависит</u>

Исследуем устойчивость взвешенной схемы

$$(E + \tau\sigma_1\Lambda_{xx})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \Lambda_{xx}u^{n+1} = f_m^{\sigma_1}$$

Найдем спектр оператора Λ_{xx} при нулевых граничных условиях

$$-\Lambda_{xx}y = \lambda y$$

$$-\frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} = \lambda y_m$$

$$-(y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}) = \lambda h^2 y_m$$

$$y_{m+1} - y_m(2 - \lambda h^2) + y_{m-1} = 0$$

Составим характеристическое уравнение

$$y_{m+1} = q y_m \qquad q^2 - q(2 - \lambda h^2) + 1 = 0$$

По теореме Виета $\quad q_1 q_2 = 1$

Тогда $\quad y_m = C_1 q_1^m + C_2 q_2^m$

$$y_m = C_1 q^m + C_2 q^{-m}$$

Исследуем устойчивость взвешенной схемы

$$y_m = C_1 q^m + C_2 q^{-m}$$

Подставляем однородные граничные условия

$y_0 = 0$ $\quad C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$$y_m = C_1(q^m - q^{-m})$$

$y_M = 0$ $\quad C_1(q^M - q^{-M}) = 0$

Нужны нетривиальные решения $\Rightarrow (q^M - q^{-M}) = 0 \Rightarrow q^{2M} = 1 = e^{2\pi i k}$

$$q = e^{\frac{\pi k i}{M}}$$

$$y_m = C_1(e^{\frac{\pi k m i}{M}} - e^{-\frac{\pi k m i}{M}})$$

$$y_m = C\sin(\frac{\pi m k}{M})$$

$$q^2 - q(2 - \lambda h^2) + 1 = 0$$

Исследуем устойчивость взвешенной схемы

Возвращаемся к характеристическому уравнению и находим λ

$$q^2 - q(2 - \lambda h^2) + 1 = 0$$

$$q - 2 + q^{-1} = -\lambda h^2$$

$$q = e^{\frac{\pi m i}{M}} \qquad e^{\frac{\pi m k i}{M}} - 2 + e^{-\frac{\pi m k i}{M}} = -\lambda h^2$$

$$-\lambda h^2 = 2\cos\left(\frac{\pi m k}{M}\right) - 2$$

$$\lambda = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi m k}{2M}\right)$$

Оценим границы спектра, упорядочив собственные значения по возрастанию

$$\frac{\pi^2}{4M^2} \approx \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \cdots < \lambda^{(M-1)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi(2M-1)}{2M}\right) \approx \frac{4}{h^2} - \frac{\pi^2}{4M^2}$$

$k, m = 1$ $\qquad$ $k \cdot m = 2M - 1$

Исследование на устойчивость

$$(E+\tau\sigma_1\Lambda_{xx})\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}-\underbrace{\Lambda_{xx}u^{n+1}}_{A=A^T>0}=f_m^{\sigma_1}$$

0

Попадаем в условие теоремы

$$E+\tau\sigma_1\Lambda_{xx}\geq\frac{\tau}{2}(-\Lambda_{xx})$$

$$E\geq\tau(\sigma_1-\frac{1}{2})(-\Lambda_{xx})\qquad\|-\Lambda_{xx}\|\leq|\lambda_{\max}|$$

$$\tau(\sigma_1-\frac{1}{2})\lambda_{\max}\leq 1$$

$$\sigma_1\leq\frac{1}{\lambda_{\max}\tau}+\frac{1}{2}$$

Условие устойчивости разностной схемы

Явная схема $\sigma_1=1$

$$1\leq\frac{h^2}{4\tau}+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{h^2}{4\tau}\Rightarrow\frac{\tau}{h^2}\leq\frac{1}{2}$$

Неявная схема $\sigma_1=0$

$$0\leq\frac{h^2}{4\tau}+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\tau}{h^2}\geq-\frac{1}{2}$$

Кранка-Николсон $\sigma_1=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\leq\frac{h^2}{4\tau}+\frac{1}{2}\qquad\frac{\tau}{h^2}\geq 0$$

Монотонность

Опр. Разностная схема называется монотонной, если она сохраняет монотонность пространственного профиля во времени.

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=0$$

$$y^{n+1}=(E-\tau B^{-1}A)y^n=Ry^n$$

$$y_m^{n+1}=\sum_k C_k y_{m+k}^n$$

Теорема. Для монотонности разностных схем для однородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall k \quad C_k \geq 0$$

1. Пусть $\forall k \quad C_k \geq 0$, докажем монотонность профиля

Пусть, например y^n - возрастает $\qquad y_{m+1}^n > y_m^n \qquad y_{m+1}^n - y_m^n > 0$

$$y_{m+1}^{n+1}-y_m^{n+1}=\sum_k C_k\underbrace{(y_{m+1+k}^n-y_{m+k}^n)}_{>0} > 0 \;\Rightarrow\; \forall m \quad y_{m+1}^{n+1} > y_m^{n+1}$$

Монотонность

2. «от противного» Пусть $\exists k = l \quad C_l < 0$,

$$y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1} = \sum_k C_k \left(y_{m+1+k}^n - y_{m+k}^n\right)$$

$$y_{l+1}^{n+1} - y_l^{n+1} = C_l\left(y_{l+1}^n - y_l^n\right) < 0$$

$y_{l+1}^{n+1} < y_l^{n+1}$ Несохранение монотонности на конкретном профиле ■

Монотонность схемы с весами

Явная

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h_x^2}$$

$$u_m^{n+1} = \frac{\tau D}{h_x^2}u_{m+1}^n + \left(1 - \frac{2\tau}{h_x^2}\right)u_m^n + \frac{\tau D}{h_x^2}u_{m-1}^n$$

$$\boxed{\frac{\tau D}{h_x^2} \geq 0 \qquad 1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \geq 0}$$

Условие монотонности

Совпадает с условием устойчивости

Монотонность

Неявная $$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=D\left((1-\sigma)\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h_x^2}+\sigma\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h_x^2}\right)$$

$$u_m^{n+1}\left(2+\frac{h_x^2}{\sigma D\tau}\right)=u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}+u_m^n\left(\frac{h_x^2}{\sigma D\tau}-2\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)$$

Здесь будет рекурсия, но везде будет одно и то же слагаемое, что приводит к достаточному условию устойчивости

$$\frac{h_x^2}{\sigma D\tau}-2\frac{1-\sigma}{\sigma}\geq 0$$

откуда $$\frac{D\tau}{h_x^2}\leq\frac{1}{2(1-\sigma)}$$

Для неявной схемы $\sigma=1$ $$\frac{D\tau}{h_x^2}\leq\infty$$

Для Кранка-Николсон $\sigma=\frac{1}{2}$ $$\frac{D\tau}{h_x^2}\leq\frac{1}{2}$$

Спектральный признак устойчивости

Пусть мы смогли привести разностную схему к виду $y^{n+1} = R_n y^n + \tau\rho_n$

Разностная задача $\begin{cases} L_h y^h = f^h \\ y^0 = \varphi \end{cases}$

Введем норму правой части $\|f\| = \max(|f^h|, \|\varphi\|)$

$$y^n = Ry^{n-1} + \tau\rho_{n-1} = R^2\, y^{n-2} + \tau(R\rho_{n-2} + \rho_{n-1}) = \dots = R^n\, y^0 + \tau(R^{n-1}\rho_0 + R^{n-2}\rho_1 + \dots + \rho_{n-1})$$

$$\forall n \quad \|R^n\| \le M$$

$$\|y^n\| \le M\|\varphi\| + \underbrace{\tau N M}_{T}\max|\rho_n|$$

$$\|y^n\| \le M\|f\|(1 + T)$$

Необходимое условие устойчивости – ограниченность оператора перехода

$$\|R\| \ge \max_i |\lambda_i|$$

Следовательно требуется 1. $|\lambda_i| \le 1$ $\Rightarrow$ $M = 1$

2. Нет кратных корней на границе

Спектральный признак устойчивости

Точное решение $u \sim e^{\tilde{\lambda} t} e^{i\omega x}$

Решение разностной задачи $u^n \sim \lambda^{\tilde{n}} e^{i\omega m}$

Т.е. условие устойчивости – условие невозрастания гармоник решения и условие кратности корней

Исследование схемы с весами на устойчивость

$$u_m^n \to \lambda^n e^{ikmh}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = D\left(\sigma_1 \frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h_x^2} + \sigma_2 \lambda \frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h_x^2}\right)$$

Замечаем, что $\sigma = \frac{D\tau}{h_x^2}$ и $e^{ikh} - 2 + e^{-ikh} = -4sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)$

$$\lambda - 1 = \sigma\left(-4sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\sigma_1 - 4sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\sigma_2\lambda\right) \Rightarrow \lambda\left(1 + 4\sigma\sigma_2 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right) = 1 - 4\sigma\sigma_1 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)$$

$$|\lambda| = \left|\frac{1 - 4\sigma\sigma_1 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)}{1 + 4\sigma\sigma_2 sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)}\right| < 1$$

Устойчивость зависит от свойств коэффициентов