

3. Logistic Regression (4)

우측 그림에 나타난 단순 데이터에 대해 로지스틱 회귀 모델 $h_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}}}$ 를 유도하려고 한다. 여기서 ●와 ○는 각각 positive example과 negative example을 나타낸다. 이 두 차원 데이터에 대해, $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2)$ 이고 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ 이며 $x_0 = 1$ 이다. 또한, 우도(Likelihood) 함수 P 는 아래와 같이 정의된다.

$$P(d|h_{\mathbf{w}}) = \prod_j P(d_j|h_{\mathbf{w}}) = \prod_j \hat{p}(\mathbf{x}_j)^{y_j} (1 - \hat{p}(\mathbf{x}_j))^{1-y_j}$$

3-1. 이 모델에 대한 두 가지 파라미터 후보 $\mathbf{w}_1 = (0, -1, 1)$ 과 $\mathbf{w}_2 = (-3, -1, 3)$ 에 대해, 우도를 계산하여 비교하여 더 나은 것을 결정하라.

답:

- Positive 예제(●): $(1, 2), (2, 3)$
- Negative 예제(○): $(3, 1), (4, 2)$

$\mathbf{w}_1 = (0, -1, 1)$ 에 대한 우도 계산:

- $(1, 2)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2)}} = \frac{1}{1+e^{-1}} = 0.731$
- $(2, 3)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3)}} = \frac{1}{1+e^{-1}} = 0.731$
- $(3, 1)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1)}} = \frac{1}{1+e^{-2}} = \frac{1}{1+e^2} = 0.119$
- $(4, 2)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(0 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2)}} = \frac{1}{1+e^{-2}} = \frac{1}{1+e^2} = 0.119$

$$P(d|h_{\mathbf{w}_1}) = 0.731^1 \times 0.731^1 \times (1 - 0.119)^1 \times (1 - 0.119)^1 = 0.731 \times 0.731 \times 0.881 \times 0.881 \approx 0.421$$

$\mathbf{w}_2 = (-3, -1, 3)$ 에 대한 우도 계산:

- $(1, 2)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2)}} = \frac{1}{1+e^{-2}} = 0.881$
- $(2, 3)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3)}} = \frac{1}{1+e^{-4}} = 0.982$
- $(3, 1)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1)}} = \frac{1}{1+e^{-5}} = \frac{1}{1+e^5} = 0.007$
- $(4, 2)$: $\hat{p} = \frac{1}{1+e^{-(-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2)}} = \frac{1}{1+e^{-5}} = \frac{1}{1+e^5} = 0.007$

$$P(d|h_{\mathbf{w}_2}) = 0.881^1 \times 0.982^1 \times (1 - 0.007)^1 \times (1 - 0.007)^1 = 0.881 \times 0.982 \times 0.993 \times 0.993 \approx 0.856$$

$\mathbf{w}_2 = (-3, -1, 3)$ 가 더 좋은 파라미터입니다.

3-2. $\mathbf{w}_2 = (-3, -1, 3)$ 에 대한 결정 경계(Decision Boundary)를 그려라.

답:

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}}} = 0.5$$

$$1 + e^{-\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}} = 2$$

$$e^{-\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}} = 1$$

$$-\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{w}_2 = (-3, -1, 3)$ 와 $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2)$ 를 대입

$$(-3) \cdot 1 + (-1) \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0$$

$$-3 - x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_2 - x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{x_1+3}{3}$$

$$\text{답 : } x_2 = \frac{x_1+3}{3}$$

