班级：计算 1702 姓名：杨秉学

第 4 章 课后习题

1. 已知向量组

$$A: a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix};\ B: b_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix}$$

证明向量组B能由向量组A线性表示，但向量组A不能由向量组B线性表示

2 已知向量组

$$A: a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ B: b_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

证明向量组 4 与向量组 B 等价.

3. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

4. 问a取什么值时下列向量组线性相关?

$$a_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix};$$

5. 设矩阵$A=aa^T+bb^T$, 这里ab为n维列向量. 证明:

(1) $R(A)\le 2$

(2) 当a,b线性相关时，$R(A)\le 1$

6. 设a_1,a_2线性无关，a_1+b, a_2+b线性相关，求向量b用a_1,a_2线性表示式

7. 设a_1,a_2线性相关，b_1,b_2也线性相关，问a_1+b_1，a_2+b_2是否一定线性相关？试举例说明

班级：计算 1702　　姓名：杨秉学

8. 举例说明下列各命题是错误的：

(1) 若向量组$a_1, a_2 \dots a_m$是线性相关的，则a_1可由$a_2 \dots a_m$线性表示

(2) 若有不全为 0 的数$\lambda_1, \lambda_{2,} \dots, \lambda_m$，使

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 \dots \lambda_m \lambda_2 b_m = 0$$

成立，则$a_1, a_2 \dots a_m$线性相关，$b_1, b_2 \dots b_m$亦线性相关；

(3) 若只有当$\lambda_1, \lambda_{2,} \dots, \lambda_m$全为 0 时，等式

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 \dots \lambda_m \lambda_2 b_m = 0$$

才能成立，则$a_1, a_2 \dots a_m$线性无关，$b_1, b_2 \dots b_m$亦线性无关；

(4) 若$a_1, a_2 \dots a_m$线性相关，$b_1, b_2 \dots b_m$亦线性相关，则有不全为 0 的数$\lambda_1, \lambda_{2,} \dots, \lambda_m$，使

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0, \lambda_1 b_1 \dots \lambda_m \lambda_2 b_m = 0$$

同时成立

9. 设$b_1 = a_1 + a_2$，$b_2 = a_2 + a_3$，$b_3 = a_3 + a_4$，$b_4 = a_4 + a_1$，证明向量组b_1, b_2, b_3, b_4线性相关

10. 设$b_1 = a_1$，$b_2 = a_1 + a_2, \cdots$，$b_r = a_1 + a_2 + \cdots a_r$，且向量组$a_1 + a_2 + \cdots a_r$线性无关，证明向量组$b_1 + b_2 + \cdots b_r$线性无关

11. 设向量组a_1, a_2, a_3线性无关，判断向量组b_1, b_2, b_3的线性相关性；

(1) $b_1 = a_1 + a_2$，$b_2 = 2a_2 + 3a_3$，$b_3 = 5a_1 + 3a_2$；

(2) $b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$，$b_2 = 2a_1 + 2a_2 + 4a_3$，$b_3 = 3a_1 + a_2 + 3a_3$；

(3) $b_1 = a_1 - a_2$，$b_2 = 2a_2 + a_3$，$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$；

12. 设向量组$B: b_1, b_2 \dots b_r$，能由向量组$A: a_1, a_2 \dots a_r$，线性表示为

$$(b_1, b_2 \dots b_r) = (a_1, a_2 \dots a_r)K$$

其中K为$\mathrm{s} \times \mathrm{r}$矩阵，且向量组$A$线性无关，证明向量组$B$线性无关的充分必要条件是矩阵$K$上午秩$\mathrm{R}(K) = r$

班级：计算 1702

姓名：杨秉学

13. 求下面向量组的秩，并求一个最大无关组；

(1) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$;

(2) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示：

(1) $\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$

15. 设向量组

$$\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

的秩为 2，求a,b

班级：计算 1702 姓名：杨秉学

16. 设向量组$A: a_1, a_2$；向 量 组 $B: a_1, a_2, a_3$；向量组$C: a_1, a_2, a_4$的秩为 $R_A = R_B = 2$，$R_C = 3$，求向量组$D: a_1, a_2, 2a_3 - 3a_4$的秩.

17. 设有n维向量组$A: a_1, a_2 \dots a_n$，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一n维向量都可由它们线性表示

18. 设向量组$a_1, a_2 \dots a_m$线性相关，且$a_1 \neq 0$，证明存在某个向量$a_k (2 \leq k \leq m)$，使a_k能由$a_1, a_2 \dots a_{k-1}$线性表示

19 设$\begin{cases} \beta_1 = \quad\quad \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ \beta_2 = \alpha_1 \quad\quad + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ \quad\quad \dots\dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}, \end{cases}$

证明向量组$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$与向量组$\beta_1$，$\beta_2, \cdots \beta_n$等价

20. 已知 3 阶矩阵A与 3 维列向量x满足$A^3 x = 3Ax - A^2 x$，且向量组x，$Ax, A^2 x$线性无关

(1) 记$y = Ax$，$z = Ay$，$P = (x, y, z)$，求 3 阶矩阵B，使$AP = PB$；(2) 求$|A|$

21. 求下列齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

(3) $nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$

班级：计算1702　　姓名：杨秉学

22. 设$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 9 & -5 & 2 & 8\end{pmatrix}$，求一个 4×2 矩阵$B$使$AB=0$且$R(B)=2$

23. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$\xi_1=(0,1,2,3)^T,\xi_2=(3,2,1,0)^T$$

24. 设四元齐次线性方程组

$$I:\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\end{cases}\quad II:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

求：(1) 方程组I与II的基础解系；(2) I与II的公共解

25. 设n阶矩阵A满足$A^2=A$，E为n阶单位矩阵，证明

$$R(A)+R(A-E)=n$$

26. 设A为n阶矩阵$(n\geq 2)$，A^*为A的伴随矩阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases}n & 当R(A)=n\\ 1 & 当R(A)=n-1\\ 0 & 当R(A)\leq n-2\end{cases}$$

班级：计算1702　　　　姓名：杨秉学

27. 求下列非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$

28. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知取而,取是它的三个解向量，且

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程的通解

29. 设有向量组A: $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$及向量$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$,问$\alpha, \beta$为何值时：

(1) 向量b不能由向量组A线性表示；

(2) 向量b能由向量组A线性表示,且表示式唯一；

(3) 向量b能由向量组A线性表示,且表示式不唯一,并求一般表达式。

班级：计算 1702　　　　姓名：杨秉学

30. 设

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\left(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3\right),$$

证明三直线$\begin{cases}l_1:a_1x-b_2y+c_1=0\\l_2:a_2x+b_2y+c_2=0\\l_3:a_3x+b_2y+2c_3=0\end{cases}$相交于一点的充分必要条件为：向量组$a,b$线性无关，且向量组$a,b,c$线性相关

31. 设矩阵$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$，其中a_2,a_3,a_4线性无关，$a_1=2a_2-a_3$，向量$b=a_1+a_2+a_3+a_4$，求$Ax=b$的通解。

32. 设η^*是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\dots,\xi_{\mathrm{n}-1}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

(1) η^*，$\xi_1,\dots,\xi_{\mathrm{n}-1}$线性无关；

(2) η^*，$\eta^*+\xi_1,\dots,\eta^*+\xi_{\mathrm{n}-1}$线性无关

33. 设$\eta_1,\dots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的s个解，$k_1,\dots,k_s$为实数，满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$$

也是它的解

34. 设非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵的秩为r，$\eta_1,\dots,\eta_{n-r+1}$是它的$n-r+1$个线性无关的解（由题 32 知它确有$n-r+1$个线性无关的解），试证明它的任一解渴表示为

$$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}(\text{其中}k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1)$$

35. 设

$$V_1=\left\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T|x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},\text{满足}x_1+\cdots+x_n=0\right\},$$

$$V_2=\left\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T|x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},\text{满足}x_1+\cdots+x_n=1\right\},$$

问V_1,V_2是不是向量空间？为什么？

班级：计算1702　　　　姓名：杨秉学

36. 由$a_1=(1,1,0,0)^T$，$a_2=(1,0,1,1)^T$所生成的向量空间记作L_1，由$b_1=(2,-1,3,3)^T$，$b_2=(0,1,-1,-1)^T$所生成的向量空间记作L_2，试证$L_1=L_2$

37. 验证$a_1=(1,-1,0)^T$，$a_2=(2,1,3)^T$，$a_3=(3,1,2)^T$为$\mathbb{R}^3$的一个基，并把$v_1=(5,0,7)^T$，$v_2=(-9,-8,-13)^T$用这个基线性表示

38. 已知$\mathbb{R}^3$的两个基为

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{及}b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

(1) 求由基a_1,a_2,a_3到基b_1,b_2,b_3的过渡矩阵P

(2) 设向量x在前一基中的坐标为$(1,1,3)^T$，求它在后一基中的坐标