第一部分作业

1.对于数列$\{x_n = 1 - \frac{1}{10^n}\}$研究下列问题:

1),若$\varepsilon_1 = 10^{-1}, N_1 = ?$,,2),若$\varepsilon_2 = 10^{-3}, N_2 = ?$ 对于上述的$\varepsilon_1, \varepsilon_2$分别找到了$N_1, N_2$是否可以认为数列$\{x_n\}$有极限?

解: (1) $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10}$,取$N_1 = 2$即可

(2) $|x_n - 1| < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^3}$,取$N_2 = 4$即可

对于上述的$\varepsilon_j (j = 1, 2)$ 不能认为$x_n \to 1$,因为ε_j不是任意的小,只是绝对误差.

2. 用$\varepsilon - N$定义证明:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1, \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad 4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}] = 0$$

证明: (1),$\forall \varepsilon > 0$欲

$|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1| < \varepsilon$

而$|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1| = \frac{1}{n}$

取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

当$n > N$时欲证不等式成立,由定义命题得证

(2)$\forall \varepsilon > 0$欲

$|\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4} - \frac{1}{3}| < \varepsilon$

注意到

$|\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4} - \frac{1}{3}| = \frac{|5n-19|}{3|3n^2+2n-4|}$

由于$n \to \infty$,不妨设$n > 5$

那么$\frac{|5n-19|}{3|3n^2+2n-4|} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

取$N = \max\{5, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\}$

当$n > N$时,欲证不等式成立,由定义命题得证

(3)$\forall \varepsilon > 0$,欲

$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

令 $\sqrt[n]{n}-1=\alpha \Longrightarrow \alpha>0$

$n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2+\cdots$

于是$n>\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2<\frac{2}{n-1}$

取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]+1$

当$n>N$时，欲证不等式成立，于是命题得证

(4)$\forall\varepsilon>0$,欲

$|\frac{1}{n}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}]|<\varepsilon$

注意到$|\frac{1}{n}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}]|\leq\frac{1}{n}$

取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

当$n>N$时，欲证不等式成立，于是命题得证.

3.下列说法中哪些与$u_n\to a(n\to\infty)$等价:

1)$\forall\varepsilon\in(0,1),\exists N\in\mathbb{N}$,只要$n>N$就有$|u_n-a|<\varepsilon$;

2) $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$,只要$n>N$就有$|u_n-a|<100\varepsilon$;

3)$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$,只要$n>N$就有$|u_n-a|<\sqrt{\varepsilon}$;

4)对于正整数k,都能找到正整数N_k,只要$n>N_k$就有$|u_n-a|<\frac{1}{2^k}$

5)存在正整数N,只要$n>N$,就有$|u_n-a|<\frac{1}{n}$

6)$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$,只要$n>N$就有$|u_n-a|<\varepsilon/n$;

7)$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$,只要$n>N$就有$|u_n-a|<\sqrt{n}\varepsilon$.

解：(1),(2),(3)是等价的

(4),(5),(6),(7)与极限的定义不等价

例如(4)中$k=2$,(5)中$N=2$时尽管$n=3,\frac{1}{3}$不是任意小

4.下列哪个说法与$\{u_n\}$不收敛于a等价:

1) 存在$\varepsilon_0\geq 0$,及正整数N,只要$n>N$就有$|u_n-a|\geq\varepsilon_0$;

2)$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$,只要$n>N$就有$|u_n-a|\geq\varepsilon$;

3)$\{u_n\}$中除有限项外,都满足$|u_n - a| \geq \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$是某个正整数;

4)$\{u_n\}$中有无穷多项满足$|u_n - a| \geq \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$是某个正整数.

解：(3),(4)与数列无极限等价

5.设$a_1, b_1 > 0$,且$a_1 < b_1, a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, b_2 = \sqrt{a_1b_1} \cdots$

$a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \cdots$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

证明：$a_1 < b_1$,

$a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1} < \frac{2a_1b_1}{2\sqrt{a_1b_1}} = \sqrt{a_1b_1} = b_2$

假定$a_{n-1} < b_{n-1} \Longrightarrow$

$a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} < \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}} = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = b_n$

$b_2 = \sqrt{a_1b_1} < \sqrt{b_1^2} = b_1$

假定$b_n < b_{n-1} \Longrightarrow$

$b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} < \sqrt{b_n^2} = b_n$

$a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1} > \frac{2a_1b_1}{2b_1} = a_1$

假定$a_n > a_{n-1}$

$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} > \frac{2a_nb_n}{2b_n} = a_n$

于是$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_1$

由单调有界准则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

注意到$b_n^2 = a_{n-1}b_{n-1}$ 两端取极限得

$b^2 = ab \Longrightarrow b(b-a) = 0$

由于$b \neq 0$,于是$a = b$

6.若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$证明:

1)$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$

2)若$a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$

证明：$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$

当$n>N_1$时$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

而$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a=\frac{a_1-a+a_2-a+\cdots a_{N_1}-a+a_{N_1+1}-a+\cdots+a_n-a}{n}$

$|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a|\leq\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_1}|a_k-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}$

令$\sum\limits_{k=1}^{N_1}|a_k-a|=C,$

取$N=\max\{N_1,\left[\frac{2C}{\varepsilon}\right]+1\}$,当$n>N$时，恒有

$|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a|<\varepsilon$

于是(1) 得证

(2)注意到$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}=a$

由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

注：这里我们回避了$a=0$ 的情形，尽管结论对于$a=0$依然成立，但上述的夹逼定理不适用，所以要另想法处理

7.若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=a(b_n>0)$证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$

证明：注意到$b_n=b_1\frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}$

$\sqrt[n]{b_n}=\sqrt[n]{b_1\frac{b_2}{b_1}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}}$

由前一题$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}=a$

8.求极限

$$\begin{array}{ll}1)\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n, & 2)\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n\\ 3)\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n & 4)\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2})^n\end{array}$$

解：(1)$(1-\frac{1}{n})^n=(\frac{n-1}{n})^n$

$=(\frac{n}{n-1})^{-n}=(1+\frac{1}{n-1})^{-(n-1)\frac{n-1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}^{\frac{n-1}{n}}$

$=\frac{1}{e}=e^{-1}$

(2)$(1+\frac{k}{n})^n=(1+\frac{1}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}\cdot k}$

令$\frac{k}{n}=\alpha$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=[\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^k=e^k$

$(3)(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n<(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{(n-1)n})^n=(1+\frac{1}{n-1})^n$

由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=e$

9.若$|q|<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$

证明：$0\le|nq^n|=n|q|^n$

注意到$|q|<1\Longrightarrow|q|=\frac{1}{1+a}(a>0)$

于是$n|q|^n=\frac{n}{(1+a)^n}<\frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)a^2}=\frac{2}{a^2}\frac{1}{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{a^2}\frac{1}{n-1}=0$

由夹逼定理得证

10. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$是m个正数，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

证明：令$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

$\Longrightarrow a^n<a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n<ma^n$

$\Longrightarrow a<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n}<\sqrt[n]{m}a$

注意到$\sqrt[n]{m}\to 1(n\to\infty)$,由夹逼定理得证

11.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a;$

(2)若，$a>0,a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1;$

证明：

(1)注意到$x-1\le[x]\le x$

$\frac{1}{n}(na_n-1)\le\frac{[na_n]}{n}\le\frac{na_n}{n}$

由夹逼定理得证

(2)因为$a_n\to a(n\to\infty),\Longrightarrow\exists N\in\mathbb{N}$

当$n>N$ 恒有

$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a$

$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$

由夹逼定理得证

12.试确定常数λ和μ使等式

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$ 成立.

解：$0=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\lambda+\frac{\mu}{x})$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\lambda=0$

$\Longrightarrow \lambda=-1$

于是$\mu=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$

而$\sqrt[3]{1-x^3}+x=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}$

由于$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0$

于是$\mu=0$

13.试确定α的值,使下列函数与x^α当$x\to 0$ 时为同阶无穷小:

1)$\frac{1}{1+x}-(1-x)$;　　　2)$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

3)$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$

解：(1)$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}\Longrightarrow\alpha=2$

(2)$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}},\Longrightarrow\alpha=1$

(3)$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}=x^{\frac{2}{5}}\sqrt[5]{3-4x},\Longrightarrow\alpha=\frac{2}{5}$

14.证明:无穷大量一定是无界的量,其逆命题不真.

证明：不妨设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

$\forall M>0,\exists\delta>0,$当$x\in U(x_0,\delta)\bigcap D_f$恒有

$|f(x)|>M$,即$\exists x_1\in D_f$,使得$|f(x_1)|>M$

逆命题不真，例如$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$当$x\in(0,1)$时是无界的，但不是无穷大，事实上

令$x_n=\frac{1}{2n\pi}$,那么$f(x_n)=0$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\infty$

15.证明：1)$\circ\left[O(f(x))\right]=\circ(f(x))$; 2)$O\left[\circ(f(x))\right]=\circ(f(x))$

证明：(1)由于$\frac{|O(f(x))|}{|f(x)|}\leq L$,

于是$-L|f(x)|\leq O(f(x))|\leq L|f(x)|$

那么$\circ\left[O(f(x))\right]=\circ(f(x))$

同理得到(2)

16.证明:$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$,

在$\overset{\circ}{U}(0)$内无界,但当$x\to 0$时,不是无穷大;

证明：取$x_n=\frac{1}{n\pi}\in\overset{\circ}{U}(0)$

$f(x_n)=n\pi(-1)^n\Longrightarrow|f(x_n)|\geq n$

所以$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(0)$内无界

取$x_n'=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$f(x_n')=0$,于是$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$

17.根据函数极限或无穷大定义，填写下表:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时, 即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			
$x\to x_0^+$				
$x\to x_0^-$				
$x\to\infty$		$\forall M>0$, $\exists X>0$, 使当$\lvert x\rvert>X$时, 即有$\lvert f(x)\rvert>M$		
$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

第二部分作业

一、选择题

1.函数$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to 0$时，有(　　　)

$A.f(x)$与x是等价无穷小，$B.f(x)$与x是同阶但非等价无穷小

$C.f(x)$是比x高阶的无穷小，$D.f(x)$是比x低阶的无穷小

解：$f(x)=2^x-1+3^x-1\sim\ln 2\cdot x+\ln 3\cdot x=(\ln 6)x$于是是同阶无穷小

这里用到若$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,则

只要$\frac{\alpha}{\beta}\to k\neq -1$,有

$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$

2. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,则$f(\ln x)$的定义域是(　　　)

$A.x\leq 0,B.x\geq 0,C.[1,e],D.[0,1]$

解：注意到$0\leq\ln x\leq 1\Longrightarrow 1\leq x\leq e$

3.$\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$为(　　　)

$A.0,B.1,C.2,D.$ 不存在

解：$\sqrt{1-\cos t}\sim\frac{|t|}{\sqrt{2}}(t\to 0)$

$f(0^+)=\sqrt{2},f(0^-)=-\sqrt{2}$

D正确

4.设$f(x)=x\sin x$, 则$f(x)$(　　　)

$A.$在$(-\infty,+\infty)$上有界，$B.$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界

$C.$当$x\to\infty$时无穷大，$D.$ 当$x\to\infty$ 时存在有限的极限值

解：取$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2},|f(x_n)|=2n\pi>n$,显然$B$正确

5. 当$x\to 0$时$e^{7x}-e^{2x}$为x 的(　　　)

$A.$高阶无穷小，$B.$ 低阶无穷小

$C.$同阶但不是等价无穷小，$D.$ 等价无穷小

解：因为$e^u-1\sim u(u\to 0),\Longrightarrow$

$e^{7x}-e^{2x}=e^{7x}-1-(e^{2x}-1)\sim 7x-2x=5x$

C正确

6.若$x\to 0$时，$f(x)$为无穷小量，且是比x^2高阶的无穷小，

则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=($　　　$)$

$A.0, B.1, C.\infty, D.\frac{1}{2}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$

7.设$f(x-1)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \ln(x+1), & x<0\end{cases}$,则$f(x)$在$x=-1$处(　　　)

$A.$ 极限存在，但不连续，$B.$连续，$C.$右连续，但不左连续，$D.$左连续，但不右连续

解：令$x-1=u, f(u)=\begin{cases}\frac{\sin(1+u)}{1+u}, & u>-1\\ 0 & u=-1\\ \ln(u+2) & u<-1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\sin(1+x)}{1+x}=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\ln(x+2)=0$

D正确

8.设$f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\frac{1}{x}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　　)

$A.$ 可去间断点,$B.$跳跃间断点,$C.$无穷间断点,$D.$振荡间断点

解：

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\frac{1}{x}$

$=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi$

$f(0^-)=-\frac{\pi}{2}$

于是B正确

9.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1+x}}}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{x^2(1-\cos x)}{\sin^4 x}, & x>0\end{cases}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　　)

$A.$ 连续点，$B.$第一类可去间断点，$C.$第一类不可去间断点，$D.$第二类间断点

解：$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\frac{x^2}{2}}{x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0)$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{2^{\frac{1}{1+x}}}=\frac{1}{2}\neq f(0)$

B正确

10.$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$,则

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是(　　)

$A.$ 初等函数，$B.$处处有定义的函数，$C.$处处有极限的函数，$D.$处处连续的函数

解：$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

于是B正确

11.若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，下列哪一个条件能推出$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在(　　)

$A.\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$存在, $B.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$存在;

$C.\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+b_n|$存在, $D.\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-7b_n)$存在.

解：$b_n=-(-1)\frac{1}{7}7b_n=-\frac{1}{7}(4a_n-7b_n)+\frac{4}{7}a_n$

于是当D成立，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在

12. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$,则当$x\to 1$时，(　　)

$A.\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, $B.\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$;

$C.f(x)\to\infty(x\to 1)$, $D.f(x)$不存在极限，也不趋于∞.

解：

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

$f(1^-)=0$ D 正确

13.当$x\to 0$时，与x等价的无穷小量是(　　)

$A.\sin x-x^2$, $B.x-\sin x$;

$C.x^2-\sin x$, $D.1-\cos x$.

解；A正确

14.当$x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$是与$\cos x-1$等价的无穷小量，则

常数$a=($ $\qquad$ $)$

$A.\frac{3}{2}, B.\frac{2}{3}, C.-\frac{3}{2}, D.-\frac{2}{3}$

解：$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a$

C正确

15.若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,则$($ $\qquad$ $)$

$A.a=1, b=1, B.a=-1, b=1;$

$C.a=1, b=-1, D.a=-1, b=-1$

解：

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2-(a+b)x-b}{x+1} \quad (a=1)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-(1+b)x-b}{x+1} \quad (b=-1)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{aligned}$$

于是C正确

二、解答题

1.设$f(x)=\begin{cases}x^2, & \frac{1}{e}<x<1\\ \ln x, & 1\le x<e\end{cases}$, $g(x)=e^x$,求$f[g(x)]$及$f[g(\frac{1}{2})]$

$$\begin{aligned}\text{解：}\quad f(g(x)) &= \begin{cases}g^2(x) & \frac{1}{e}<g(x)<1\\ \ln g(x), & 1\le g(x)<e\end{cases}\\ &= \begin{cases}e^{2x}, & -1<x<0\\ x & 0\le x<1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(g(\tfrac{1}{2})) &= f(e^{\frac{1}{2}})=f(\sqrt{e})\\ &= \ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{15}(3x+1)^{25}}{(3x-1)^{40}}$

$$\begin{aligned}\text{解：}\quad &\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{15}(3x+1)^{25}}{(3x-1)^{40}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x-1}{3x}\right)^{15}\cdot\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{25}}{(1-\frac{1}{3x})^{40}}\\ &= \frac{2^{15}}{3^{15}}\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

$$\begin{aligned}\text{解：}\quad &\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$ (忌讳$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$)

$=0$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}x[\ln(2x+1)-\ln 2x]$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left((1+\frac{1}{2x})^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\ln\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{2x})^{2x}$ (连续函数极限号与函数号交换次序)

$=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1})^{x^2-1}\right)^{\frac{x}{x^2-1}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$ $(\alpha=\frac{1}{x^2-1})$

$=e^0=1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}\frac{1-\cos x}{x^3\cos x}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$

$=\frac{1}{4}$

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1)$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot\frac{a}{2x}$ $(\sqrt{1+u}-1\sim\frac{u}{2}(u\to 0))$

$=\frac{a}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\sin x-x}-1}{\sin x-x}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$

(9) 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$,求$a$和$b$

解：因为$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$,

所以$4+2a+b=0,b=-4-2a$

于是$x^2+ax+b=(x-2)(x+2+a)$

那么$2=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2+a}{x+1}=\frac{4+a}{3}$于是

$a=2,b=-8$

(10) 设$x_1=1,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n},(n=1,2,\ldots)$,

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：显然$0 < x_n < 2$所以x_n是有界数列，

$x_1 < x_2$，

假定$x_{n-1} < x_n$

所以$x_{n-1} + x_{n-1}x_n < x_n + x_{n-1}x_n$，

那么$x_{n-1}(1 + x_n) < x_n(1 + x_{n-1})$

于是$1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} < 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$，

即$x_n < x_{n+1}$于是x_n单调递增有界，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,于是$a = 1 + \frac{a}{1+a}$

即$a^2 - a - 1 = 0$,那么$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

注意：证明数列单调的办法很多，例如此题

注意到假定$x_{n-1} < x_n$

$x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{n-1}}} < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_n}} = x_{n+1}$

或者$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+x_n} > 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = x_n$

(11).求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$.

解：原式

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3}\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{a^x-1+b^x-1+c^x-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}}$$
$$= e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}\right)}$$
$$= e^{\frac{1}{3}\ln abc} = \sqrt[3]{abc}$$

(12)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{1+x+x^2}$

$= -\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}$

$= -1$

(13) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = 0$,试确定$a, b$的值

解： $0 = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x})$

第二个因子必须 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} = 0$

$\Longrightarrow a = 1$

$0 \quad = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x-b)$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-(1+2b)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x+b}$

分子必须满足$b=-\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow a=1, b=-\frac{1}{2}$

(14)$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\ln(1+x^2)}$

解：原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x\sin x}{x^2}$

$(\sqrt[n]{1+u}-1\sim\frac{u}{n}, \ln(1+u)\sim u(u\to 0))$

$=\frac{1}{3}$

(15)$\lim_{x\to 0}(ax+e^{bx})^{\frac{1}{x}}$

解： $(ax+e^{bx})^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln e^{bx}(1+\frac{ax}{e^{bx}})}$

$=e^{b+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{ax}{e^{bx}})}$

$=e^b\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{ax}{e^{bx}})}$

于是 $\lim_{x\to 0}(ax+e^{bx})^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}e^b\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{ax}{e^{bx}})}$

$=e^b e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{ax}{e^{bx}})}$

$=e^b\cdot e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{ax}{e^{bx}}}$

$=e^{a+b}$

(16)求$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)$

$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))$

$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\lim_{x\to 0}\sin x$

$=0$

3. $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}, g(x)=\sin x$,讨论$f(g(x))$的连续性.

解：$f(g(x)) \quad =\begin{cases}1, & g(x)\geq 0\\ -1, & g(x)<0\end{cases}$

$=\begin{cases}1, & x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]\\ -1, & x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)\end{cases}$

注意这里需要$k\in\mathbb{N}$,于是在$\pm k\pi$ 处均跳跃间断.

4.讨论函数

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，判断其类型

解:$f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1. \end{cases}$

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1,$

$f(1^-)=1, f(-1^-)=1, f(-1^+)=-1,$

于是$x=\pm 1$是第一类间断点，或跳跃间断点

5.证明方程$\sin x+x+1=0$,在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

证明：令$f(x)=\sin x+x+1$,于是

$f(x)\in C[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,注意到

$f(-\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})=2+\frac{\pi}{2},$

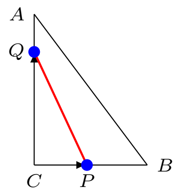
由零点存在定理，在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内至少存在一点$\eta$使得

$f(\eta)=0$

6.已知$Rt\Delta ABC$中，直角边AC,BC 的长度分别为$20,15$,动点P从C出发，沿三角形边按

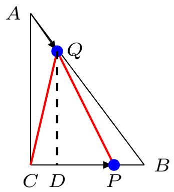
$C\longrightarrow B\longrightarrow A$方向移动，动点$Q$从$C$出发，沿三角形边界按

$C\longrightarrow A\longrightarrow B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点Q移动的速度是点P移动的速度的2倍.设动点P移动的距离为x,ΔCPQ 的面积为y,试求y与x之间的函数关系.



当$0<x<10$,ΔCPQ的面积为

$y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x=x^2$



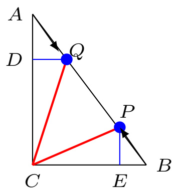
当$10 \le x < 15$时，ΔCPQ的面积$y = \frac{1}{2} \cdot QD \cdot x$

$20 + AQ = 2x, AQ + QB = 25, \Longrightarrow QB = 45 - 2x$

$\sin B = \frac{QD}{45-2x} = \frac{20}{25}$

$QD = \frac{4}{5}(45 - 2x)$

$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}(45 - 2x) \cdot x = 18x - \frac{4}{5}x^2$



令ΔQAC的面积为S_1,ΔPCB的面积为S_2

$y = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 - (S_1 + S_2)$

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot QD$

$\sin A = \frac{QD}{AQ} = \frac{15}{25}$

$QD = \frac{3}{5}AQ$

$\sin B = \frac{PE}{PB} = \frac{20}{25}$

$PE = \frac{4}{5}PB$

$15 + PB = x, 20 + AQ = 2x$

$PE = \frac{4}{5}(x - 15)$

$QD = \frac{3}{5}(2x - 20)$

$y = 360 - 18x$

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \le x < 15, \\ 360 - 18x, & 15 \le x < 20 \end{cases}$$

三、选择题

1.设$f(x)$在$(0,2a)$上连续，且$f(0)=f(2a)$,则在$[0,a]$

上至少存在一点ε, 使得

$f(\varepsilon)=f(\varepsilon+a)$.

解：令$g(x)=f(x)-f(x+a)$,于是$g(x)\in C[0,a]$

注意到$g(0)=f(0)-f(a),g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$,

于是$g(0)\cdot g(a)=-(f(0)-f(a))^2\leq 0$

当$f(0)=f(a)$,

取$\varepsilon=0\in[0,a]$,当$f(0)\neq f(a)$,

由零点存在定理至少存在一点$\varepsilon\in(0,a)$ 使得$g(\varepsilon)=0$

2.设$f(x)$在点$x=0$连续，若$\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} e^2 &=\lim_{x\to 0}(1+\tfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{\sin x}}\\ &=\lim_{x\to 0}\left[(1+\tfrac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x\sin x}}\\ &=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}} \end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

3.讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$的连续性

解：当$x>e,f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x^n\left[(\frac{e}{x})^n+1\right]}{n}$

$=\ln x$

当$x<e,f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln e^n\left[(\frac{x}{e})^n+1\right]}{n}$

$=1$

当$x=e,f(x)=1$

于是$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>e\\ 1, & x\leq e\end{cases}$,于是$f(x)$ 在正半轴上连续.

4.$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{9\cdots9}_{n个}=1$

证明：$\forall\varepsilon>0$,

欲$|0.\underbrace{9\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$

而$|0.\underbrace{9\cdots9}_{n个}-1| = |1-\frac{1}{10^n}-1| = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$

取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$当$n>N$时所求不等式恒成立，由定义得证.

5.根据定义证明：函数$y=\frac{1+2x}{x}$为当$x\to 0$时的无穷大.问x应满足什么条件，能使$|y|>10^4$

证明：$\forall M>$欲证$|y|>M$,

而$|y|=|\frac{1}{x}+2|\geq\frac{1}{|x|}-2$,只要$\frac{1}{|x|}-2>M$

即$|x|<\frac{1}{M+2}$取$\delta=\frac{1}{M+2}$,当$x\in U(0,\delta), |y|>M$

特别当取$\delta=\frac{1}{10^4+2}, |x|<\delta$时，$|y|>10^4$