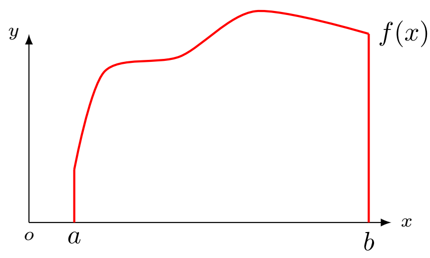
第七章定积分

第一节定积分的概念

一、引例

引例1 设函数$y = f(x) \in C[a,b]$,且非负,我们求由$x = a, x = b, y = 0, y = f(x) \geqslant 0$所围成图形的面积，我们称这样的图形为曲边梯形，显然这个图形的面积是存在的，我们设其为A.



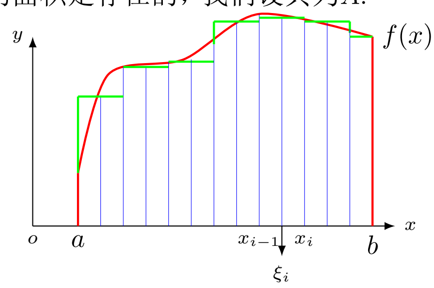


图7.1.1

解：我们将区间$[a,b]$任意分成n个小区间，使得$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

这样A就被分成n个小的曲边梯形$\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$,于是$A = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta A_k$ 在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任意取一点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,那么以$f(\xi_i)$为高，以$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$为宽的矩形条的面积为$f(\xi_i)\Delta x_i$,当矩形条足够窄，我们发现$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ ，于是我们得到A的近似值$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,若令$\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\}$，当$\lambda \to 0$ 时,这个近似值所作成的和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限就是$A$,即$A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

引例2,设质点M沿直线L以速度$v = f(t)$作变速直线运动,求从时刻$t = a$到时刻$t = b$，质点M所走过的路程.

解：显然我们不能用$f(t) \cdot (b - a)$来表示这段路程,但是我们将时间段分成一小段,一小段,即

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

当时间段$[t_{i-1}, t_i]$很小，质点M在这段时间的速度变化幅度不大，我们用$f(\xi), \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$来代替速度，那么所经过的路程的近似值为$f(\xi_i)\Delta t_i$,于是，整段路程的近似值为$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$

我们若取时间间隔$[t_{i-1}, t_i]$趋于零,那么所经过的路程应为$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$,其中$\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta t_i\}$.

以上两个完全不相干的问题,给出了一个本质上几乎一样的概念,这就是一个定义在区间$[a,b]$ 上的函数$f(x)$当我们任意分割区间 $[a,b]$成

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{i-1},x_i],\ldots[x_{n-1},x_n]$$

,在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任意取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,得到一个和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$ 然后考虑极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$是否存在的问题.

二、定积分的定义

定义7.1.1 设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有界，任意分割$[a,b]$成

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$,或$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{i-1},x_i],\ldots[x_{n-1},x_n]$

在每个小区间上任取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\ldots,n,$ 作和$S_n(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$(称为Riemann和),其中$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,

令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$若不论分割区间的方法和取点的方法如何,极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}S_n(f)$都存在，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上Riemann可积或简称可积，并将该极限值称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分.记作

$\lim\limits_{\lambda\to 0}S_n(f)=\int_a^b f(x)dx=J$，

其中$[a,b]$叫积分区间，$f(x)dx$叫被积表达式，x叫积分变量，a叫积分下限，b叫积分上限.

从上面的分析中可以知道定积分的几何意义就是由直线$x=a,x=b,y=0$和曲线$y=f(x)\geqslant 0$围成的曲边图形（梯形）A的面积，参见图7.1.1,即$A=\int_a^b f(x)dx$,质点M所经过的距离 $d=\int_a^b f(t)dt$

注：为了记法上简单，我们也记$\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$, 任意一个分割，我们记作$T=\{\Delta x_i\}$,分割的精细程度$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$称为分割的细度，记作 $\|T\|$或λ.

如果用极限的$\varepsilon-\delta$定义描述函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上可积，就是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,对于任意分割$T$，任意取值，当$\|T\|<\delta$ 时,恒有$|S_n(f)-J|<\varepsilon$.

究竟怎样的函数才能保证定义中所说的Riemanna和的极限存在，即函数可积呢？连续函数一定是可积的，由如下图示，若令

$m_i=\min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},M_i=\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

我们将得到两个Riemanna和数列$S_n(m)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i, S_n(M)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$

曲边梯形内嵌的矩形条面积和序列$S_n(m)$,伴随着分割越来越细，单调不减有上界A(曲边梯形的面积)，曲边梯形的外包的矩形条面积和序列$S_n(M)$，伴随着分割越来越细，单调不增有下界A, 于是由

$S_n(m)\leqslant S_n(f)\leqslant S_n(M)$,可知$\lim\limits_{\lambda\to 0}S_n(f)=A$

从几何上我们看到　间断函数$y=[x]$,在任意有限区间上也是可积的. 究竟可积函数的特征是什么？我们将在可积性一节讨论.

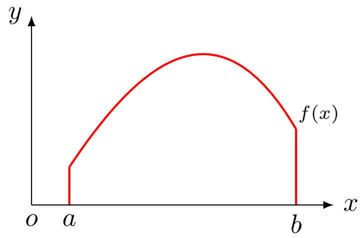


图7.1.2

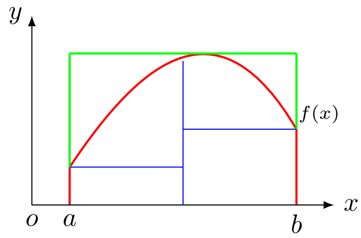


图7.1.3

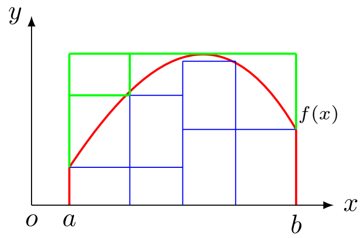


图7.1.4

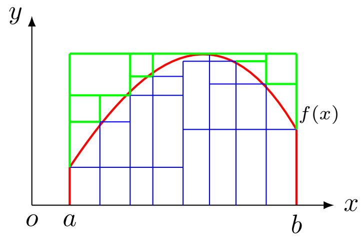


图7.1.5

注：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，积分值依赖于被积函数和积分区间，不依赖于积分变量的符号.

即$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\cdots=\int_a^b f(z)dz$

注：虽然我们在给出$\int_a^b f(x)dx$的定义时，假定了$a<b$ 但当$b<a$ 时，我们按照定义有$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

注：当$a=b$ 时规定: $\int_a^a f(x)dx=0$是合理的.

例7.1.1 计算$\int\limits_a^b kxdx \quad (a<b,k>0)$

解：由几何意义这等价于求由$y=kx, x=a, x=b, y=0$ 围成的图形的面积. 由于被积函数连续不妨将$[a,b]n$等分$\Delta x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n}$ $x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x,\ldots,x_n=a+n\Delta x$，我们不妨取小区间

的左端点值. $\xi_1=a,\xi_2=a+\Delta x,\dots,\xi_n=a+(n-1)\Delta x$ 于是Riemann和为：

$$\begin{aligned}S_n=&k\xi_1\Delta x+k\xi_2\Delta x+\cdots+k\xi_n\Delta x\\=&ka\Delta x+[k(a+\Delta x)]\Delta x+\cdots+[k(a+(n-1)\Delta x]\Delta x\\=&k\{a+(a+\Delta x)+(a+2\Delta x)+\cdots+(a+(n-1)\Delta x\}\Delta x\\=&k\{na+(1+2+3+\cdots+n-1)\Delta x\}\Delta x\\=&k\{na+\frac{n(n-1)}{2}\Delta x\}\Delta x\\=&k\{na\frac{b-a}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2}\}\\=&k(b-a)\{a+\frac{n-1}{n}\frac{b-a}{2}\}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=k[a+\dfrac{b-a}{2}]=k\dfrac{b^2-a^2}{2}$ 所以$\displaystyle\int_a^b kxdx=k\frac{b^2-a^2}{2}$这与我们的常识是吻合的.

例7.1.2 计算$\displaystyle\int\limits_0^b x^2dx$

解：等分$[0,b]$ $x=0,x_1=\Delta x,x_2=2\Delta x,\dots,x_n=b=n\Delta x,\Delta x=\frac{b}{n}$ ξ_i 取每个小区间的右端点，得积分和

$$\begin{aligned}S_n=&x_1^2\Delta x+x_2^2\Delta x+\cdots+x_n^2\Delta x\\=&[(\Delta x)^2\Delta x+(2\Delta x)^2\Delta x+\cdots+(n\Delta x)^2\Delta x]=(\Delta x)^3[1^2+2^2+\cdots+n^2]\end{aligned}$$

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.所以$S_n=\dfrac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{b^3}{6}(1+\dfrac{1}{n})(2+\dfrac{1}{n})$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=Q=\displaystyle\int_0^b x^2dx=\frac{b^3}{3}$

习题7.1

1,用定义证明：$\displaystyle\int_a^b kdx=k(b-a)$;

2,用定义计算下列定积分：

1) $\displaystyle\int_0^1 x^3dx$; 2) $\displaystyle\int_a^b e^xdx$

*第二节Riemann 可积条件

一、可积的必要条件

定理7.2.1 若函数f 在区间$[a,b]$上可积，则f 在$[a,b]$上有界.

证明: 反证，若f 在区间$[a,b]$上无界，则对于$[a,b]$ 的任意分割T,都存在区间$[x_{k-1},x_k]$ 使得$\forall M>0,\exists\xi\in[x_{k-1},x_k],|f(\xi)|>M$ 于是,存在一个$Riemann$和:$\overline{S_n(f)}=f(\xi_k)\Delta x_k+\sum\limits_{i\neq k}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,取$G=\left|\sum\limits_{i\neq k}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|$,

注意到f在$[x_{k-1},x_k]$上无界，故存在$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 使得$|f(\xi_k)|>\frac{M+G}{\Delta x_k}$,那么

$$\left|\overline{S_n(f)}\right|=\left|f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{i\neq k}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\geqslant|f(\xi_k)|\,\Delta x_k-\left|\sum_{i\neq k}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\geqslant\frac{M+G}{\Delta x_k}\cdot\Delta x_k-G=M$$

,所以f的Riemann和$S_n(f)$的极限不存在，与题设矛盾,故f 在$[a,b]$上有界.

可积函数在积分区间上有界是函数Riemann可积的必要条件，而非充分条件,例如Dirichlet函数$D(x)$就不是Riemann可积的.事实上，如果任意分割区间$[0,1]$ 分别得到两个Riemann和如下:

$S_n^1(D)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i$,其中$\xi_i$为区间$[x_{i-1},x_i]$上的无理数；
$S_n^2(D)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(\eta_i)\Delta x_i$,其中$\eta_i$为区间$[x_{i-1},x_i]$上的有理数；
由于$\lim\limits_{\|T\|\to0}S_n^1(f)=0,\ \lim\limits_{\|T\|\to0}S_n^2(f)=1$所以Riemann和$S_n(f)$没有极限，故不可积.

二、可积函数的特征

设$T=\{\Delta x_i\}$为区间$[a,b]$ 的任意一个分割，由于f可积,所以必然有界.于是, $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta x_i}f(x),m_i=\inf\limits_{x\in\Delta x_i}f(x_i)$存在，作和$S_T(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,s_T(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$分别称为$f$ 关于分割T 的上和与下和（或称Daubox 上和与Daubox下和)显然,对于函数f的任意Riemann 和$S_n(f)$,有如下关系式：$s_T(f)\leqslant S_n(f)\leqslant S_T(f)$.

1. Daubox和的性质

性质1.若函数f 在$[a,b]$ 上有界,记$m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x),M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$,则

$m(b-a)\leqslant s_T(f)\leqslant S_n(f)\leqslant S_T(f)\leqslant M(b-a)$

性质2.对同一分割T,

$S_T(f)=\sup\limits_{\xi_i\in\Delta x_i}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,s_T(f)=\inf\limits_{\xi_i\in\Delta x_i}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

证明: $\forall\varepsilon>0, M_i=\sup\limits_{x\in\Delta x_i}f(x)$,所以存在$\xi_i\in\Delta x_i$ 使得$f(\xi_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$,于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i &> \sum_{i=1}^n(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_i\\ &=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n\Delta x_i=S_T(f)-\varepsilon\end{aligned}$$

由上确界定义,$S_T(f)=\sup\limits_{\xi_i\in\Delta x_i}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 同理可证,$s_T(f)=\inf\limits_{\xi_i\in\Delta x_i}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

性质3.设T'是分割T增加p 个分点后所得到的分割,则

$S_T(f)\geqslant S_{T'}\geqslant S_T(f)-(M-m)p\|T\|$ (7.2.1)

$s_T(f)\leqslant s_{T'}\leqslant s_T(f)+(M-m)p\|T\|$ (7.2.2)

其中M,m 分别是f 在区间$[a,b]$上的上,下确界,

证明: 不等式(7.2.1)和(7.2.2)的证明是类似的，我们不妨证明不等式(7.2.1)，

当$p=1$时,新的分割T_1为分割T添加了一个分点，则新的分点必落入分割T的某个小区间Δ_k,于是,$\Delta_k=\Delta'_k\bigcup\Delta''_k$,$T$ 的其它分割区间依然是T_1 的分割区间.我们来比较$S_T(f)$和$S_{T_1}(f)$的每一项，它们的差别仅仅是第k项$M_k\Delta x_k$换成$M'_k\Delta x'_k+M''_k\Delta x''_k$(，其中$M'_k,M''_k$分别是$f$在小区间$\Delta'_k,\Delta''_k$ 上的上确界)，于是

$$\begin{aligned}S_T(f)-S_{T_1}(f)&=M_k\Delta x_k-(M'_k\Delta x'_k+M''_k\Delta x''_k)\\ &=M_k(\Delta x'_k+\Delta x''_k)-(M'_k\Delta x'_k+M''_k\Delta x''_k)\\ &=(M_k-M'_k)\Delta x'_k+(M_k-M''_k)\Delta x''_k\end{aligned}$$

由于$m\leqslant M'_k,M''_k\leqslant M_k\leqslant M$,故有

$$\begin{aligned}0\leqslant S_T(f)-S_{T_1}(f)&\leqslant(M-m)\Delta x'_k+(M-m)\Delta x''_k\\ &=(M-m)\Delta x_k\leqslant(M-m)\|T\|\end{aligned}$$

假定$k=0,1,\dots,p-1$时有$0\leqslant S_{T_k}(f)-S_{T_{k+1}}(f)\leqslant(M-m)\|T_k\|$,且$T_k$增加一个分点得到$T_{k+1}$

当$p=k$时,记$T_0=T,T_p=T'$,对上式关于k求和得到

$0\leqslant S_T(f)-S_{T'}(f)\leqslant(M-m)\sum\limits_{k=0}^{p-1}\|T_k\|\leqslant(M-m)p\|T\|$

于是性质3得证.

性质4.若T_1,T_2为任意两个分割，设$T=T_1+T_2$表示以T_1,T_2的分割点作为分点的新的分割（重复分点只记一次），则$S_T(f)\leqslant S_{T_j}(f), s_T(f)\geqslant s_{T_j}(f), j=1,2$

证明: 由于T可以分别看成T_1,T_2 通过增加分点得到的新的分割，所以由性质3得到证明.

性质5.若T_1,T_2为任意两个分割，则$s_{T_1}(f)\leqslant S_{T_2}(f)$

证明: 令$T=T_1+T_2$由性质2和性质4，我们有

$s_{T_1}(f)\leqslant s_T(f)\leqslant S_T(f)\leqslant S_{T_2}(f)$

性质6. $S_T(f)$关于分割单调不增有下界，$s_T(f)$单调不减有上界，则$S=\inf\limits_T S_T(f), s=\sup\limits_T s_T(f)$存在,并分别称为$f$的上积分和下积分，且$m(b-a)\leqslant s\leqslant S\leqslant M(b-a)$

证明: 容易由性质1、性质4和性质5推出:$m(b-a)\leqslant s\leqslant S\leqslant M(b-a)$，下面证明$S=\inf\limits_T S_T(f)$，同理可证$s=\sup\limits_T s_T(f)$.

$\forall\varepsilon>0,\exists$分割$T_1$使得$S_{T_1}(f)<S+\varepsilon/2$, 设$T_1$由$p$个分点组成，对于任意分割$T, T+T_1$至多比$T$ 多p个分点，由性质3得到$S_T(f)-(M-m)p\|T\|\leqslant S_{T+T_1}(f)\leqslant S_{T_1}$于是$S_T(f)\leqslant S_{T_1}+(M-m)p\|T\|$,只要细度$\|T\|<\frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$，就有$S_T(f)\leqslant S_{T_1}(f)+\varepsilon/2$于是$S\leqslant S_T(f)<S+\varepsilon$,那么$\lim\limits_{\|T\|\to 0}S_T(f)=S$

定理7.2.2 函数f 在$[a,b]$ 上可积的充要条件是：f在$[a,b]$ 上的上积分等于下积分，即$S=s$.

证明: $(\Longrightarrow)$设f 在$[a,b]$ 上可积，令$J=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$,由定积分的定义$\varepsilon>0,\exists\delta>0$当分割的细度$\|T\|<\delta$,时有$|S_n(f)-J|<\varepsilon$,其中Riemann和$S_n(f)=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, 由性质2当细度，$\|T\|<\delta$有$|S_T(f)-S_n(f)|\leqslant\varepsilon, |s_T(f)-S_n(f)|\leqslant\varepsilon$,这就说明当$\|T\|\to 0$ 时$\lim\limits_{\|T\|\to 0}S_T(f)=J=\lim\limits_{\|T\|\to 0}s_T(f)$由性质6,$S=s$

$(\Longleftarrow)$设$S=s=J$,由性质6,$S=\inf\limits_T S_T(f)=s=\sup\limits_T s_T(f)=J$, 借助于性质1,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$当$\|T\|<\delta$时，有$J-\varepsilon<s_T(f)\leqslant S_n(f)\leqslant S_T(f)<J+\varepsilon$,即$|S_n(f)-J|<\varepsilon$ 从而f可积，且$J=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

定理7.2.3 函数f 在$[a,b]$ 上可积的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists$ 分割T,使得$S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$,即$\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$,其中$\omega_i=M_i-m_i$(称为f 在区间Δx_i上的振幅)$(i=1,2,\ldots,n)$

证明: $(\Longrightarrow)$设f 在$[a,b]$ 上可积，由定理7.2.2 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当分割的细度$\|T\|<\delta$,时有$|S_n(f)-J|<\varepsilon$,其中Riemann和$S_n(f)=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$，根据Daubox的性质2，当细度$\|T\|<\delta$时，有$|S_T(f)-J|\leqslant\varepsilon, |s_T(f)-$

$J| \leqslant \varepsilon$ 于是，$\lim\limits_{\|T\|\to 0} S_T(f) - s_T(f) = 0$,即$\forall \varepsilon > 0$ 存在分割T，只要细度$\|T\|$足够小，就有$S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$(\Longleftarrow)$若$S_T(f) - s_T(f) \to 0$注意到：$s_T(f) \leqslant s \leqslant S \leqslant S_T(f)$，我们有$0 \leqslant S - s \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$由$\varepsilon$的任意性$S = s$，由定理7.2.2函数$f$可积.

定理7.2.4 函数f 在$[a, b]$ 上可积的充要条件是：对于任意的正数，ε, η,总存在分割T,使得属于T 的所有小区间中，对应于振幅$\omega_{k'} \geqslant \varepsilon$ 的那些小区间$\Delta x_{k'}$的总长度$\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} < \eta$

证明: $(\Longrightarrow)$ f在$[a, b]$上可积，由定理7.2.3，对于$\sigma = \varepsilon\eta > 0$，存在分割$T$,使得$\sum\limits_{k} \omega_k \Delta x_k < \delta$，于是我们有

$\varepsilon \sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} \leqslant \sum\limits_{k'} \omega_{k'} \Delta x_{k'} \leqslant \sum\limits_{k} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon\eta$

于是，$\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} < \eta$

$(\Longleftarrow)\forall \varepsilon' > 0$,取$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2(b-a)}, \eta = \frac{\varepsilon'}{2(M-m)}$,由假设存在分割$T$, 对于满足$\omega_{k'} \geqslant \varepsilon$的小区间的总长$\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} < \eta$,在$T$的其余分割区间上，振幅$\omega_k < \varepsilon$,分别记$\omega_k = \omega_{k''}, \Delta x_k = \Delta x_{k''}$,因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k} \omega_k \Delta x_k &= \sum_{k'} \omega_{k'} \Delta x_{k'} + \sum_{k''} \omega_{k''} \Delta x_{k''} \\
&< (M - m) \sum_{k'} \Delta x_{k'} + \varepsilon \sum_{k''} \Delta x_{k''} \\
&\leqslant (M - m)\eta + \varepsilon(b - a) = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'
\end{aligned}$$

由定理7.2.3函数f可积.

三、可积函数类

命题7.2.1 若函数f在区间I上有界，则

$\sup\limits_{x\in I}\{f(x)\} - \inf\limits_{x\in I}\{f(x)\} = \sup\limits_{x', x''\in I} |f(x') - f(x'')|$

证明: 设$M = \sup\limits_{x\in I}\{f(x)\}, m = \inf\limits_{x\in I}\{f(x)\}$

若$M = m$,则$f(x) = M$,命题显然成立，

当$M > m$时，$\forall \varepsilon \in (0, \frac{M-m}{2}), x', x'' \in I$

$f(x') - f(x'') < M - m, f(x'') - f(x') < M - m$

那么$|f(x') - f(x'')| \leqslant M - m$,由确界的定义$\exists x', x'' \in I$,使得$f(x') > M - \frac{\varepsilon}{2}, f(x'') < m + \frac{\varepsilon}{2}$,我们

有$|f(x')-f(x'')|>(M-\frac{\varepsilon}{2})-(m-\frac{\varepsilon}{2})=(M-m)-\varepsilon$ 那么命题得证.

定理7.2.5 若$f\in C[a,b]$,则f 在$[a,b]$上可积.

证明: 因为$f\in C[a,b]$,则f在$[a,b]$上一致连续，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in[a,b]$,只要$|x'-x''|<\delta$,便有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/(b-a)$

于是，对区间$[a,b]$的任意分割T，只要$\|T\|<\delta$,由命题7.2.1对于f在T的任意子区间Δx_k上的振幅$\omega_k=\sup\limits_{x',x''\in\Delta x_k}|f(x')-f(x'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{(b-a)}$

于是，$\sum\omega_k\Delta x_k\leqslant\dfrac{\varepsilon}{(b-a)}\sum\Delta x_k=\varepsilon$,由定理7.2.3 f 在$[a,b]$上可积.

定理7.2.6 若有界函数f在区间$[a,b]$上只有有限个间断点，则f 在$[a,b]$上可积.

证明留给读者.

注：函数在积分区间上有无限多个间断点函数也可能可积，可以证明函数在积分区间上的间断点只要是第一类的，无论有限个还是无限个，函数都可积.

例7.2.1 设$R(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q}^C\bigcap[0,1],\\ 1, & x=0,\\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n},m\leqslant n,m,n\text{是互质的整数},\end{cases}$

证明：$R(x)$ 在$[0,1]$上可积，且$\displaystyle\int_0^1 R(x)dx=0$

证明 我们已经证明当$x_0\in\mathbf{Q}\bigcap[0,1]$, $R(x)$在x_0处均间断，但是$\forall\varepsilon>0$,使$R(x)>\varepsilon$的有理点$\frac{m}{n}$至多有有限个.事实上，当$\frac{1}{n}>\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,那么使得$R(x)>\varepsilon$的点$\frac{m}{n},0<m\leqslant n<\frac{1}{\varepsilon}$最多有有限个，对于区间$[0,1]$的分割$T$,我们将分割区间进行分类：使$R(x)>\varepsilon$的分割区间记作$\Delta x_{k'}$,其余的分割区间记作$\Delta x_{k''}$,于是我们有：

$\sum\omega_k\Delta x_k=\sum\omega_{k'}\Delta x_{k'}+\sum\omega_{k''}\Delta x_{k''}$

注意到任意分割区间上的振幅$\omega_k\leqslant1$,使得$R(x)>\varepsilon$的点只有有限个，包含这有限个点的分割区间的长度之和可以小于$\frac{\varepsilon}{2}$于是,只要分割T的细度$\|T\|<\frac{\varepsilon}{2}$,则$\sum\omega_k\Delta x_k<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$,因此$R(x)$在$[0,1]$上可积.

对于分割T，取$\xi_k\in\Delta x_k\bigcap\mathbf{Q}^C$, 我们有

$$\int_0^1 R(x)dx=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{k=1}^{n}R(\xi_k)\Delta x_k=0$$

习题7.2

1,若有界函数f在区间$[a,b]$上只有有限个间断点，则f 在$[a,b]$上可积.

2,设$f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$,证明：

1)$f(x)$在$[0,1]$上可积；

2)求$\int_0^1 f(x)dx$之值.

3，设$f(x)$在$[a,b]$上可积，证明：$\int_a^b f^2(x)dx=0 \Longleftrightarrow$ 对$f(x)$在$[a,b]$上的每一个连续点x有$f(x)=0$

4，证明:若函数$f(x)$在$[0,1]$上可积，且$\int_0^1 f(x)dx>0$,则存在某个区间$[a,b]\subset[0,1]$ 使得$\forall x\in[a,b]$,有$f(x)>0$

5,若$f(x)$ 在$[a,b]$上严格单调且连续，$\varphi(y)$ 为$f(x)$ 的反函数，且$\alpha=f(a),\beta=f(b)$, 证明：$\int_\alpha^\beta \varphi(y)dy=b\beta-a\alpha-\int_a^b f(x)dx$

第三节可积函数的性质

定理7.3.1 函数f在区间$[a,b]$ 上可积,则$Cf(x)$在$[a,b]$ 上可积，且
$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$,其中$C$为常数.

证明: 因为f 可积，所以对于任意分割$\|T\|$, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$，对此分割,

$$\begin{aligned}\int_a^b Cf(x)dx =& \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^n Cf(\xi_k)\Delta x_k\\ =&C\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = C\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

定理7.3.2 若函数$f_1(x), f_2(x)$在$[a,b]$上可积，则$f_1 \pm f_2$,在$[a,b]$上可积，且
$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

证明留给读者

进一步我们有若$f_j(j=1,2,\cdots,m)$在$[a,b]$ 上可积，则
$\int_a^b \sum\limits_{i=1}^m C_i f_i(x)dx = \sum\limits_{i=1}^m C_i\int_a^b f_i(x)dx$, 其中$C_i$是常数,$i=1,2,\cdots,m$

定理7.3.3 若函数f,g在$[a,b]$上可积，则$f\cdot g$在$[a,b]$上也可积.

证明: 因为f,g在$[a,b]$上可积，故f,g在$[a,b]$上有界，

则$A=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|, B=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$ 存在.

若$A=0$或$B=0$，则$f=0$或$g=0$，于是,$f\cdot g=0$,定理是显然的.

不妨设$A>0, B>0 \Longrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists$分割$T', T''$,使得

$\sum\limits_{T'}\omega_k^f\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{2B}, \sum\limits_{T''}\omega_k^g\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{2A}$

取分割$T=T'+T''$,即以T',T''的分点作为T的分点，那么

$$\begin{aligned}\omega_k^{f\cdot g} =& \sup_{x',x''\in\Delta x_k}||f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\ \leqslant& \sup_{x',x''\in\Delta x_k}\big[|g(x')||f(x')-f(x'')|+|f(x'')||g(x')-g(x'')|\big]\\ \leqslant& B\omega_k^f + A\omega_k^g\end{aligned}$$

于是,$\sum\omega_k^{f\cdot g}\Delta x_k \leqslant B\sum\omega_k^f\Delta x_k + \sum\omega_k^g\Delta x_k < B\frac{\varepsilon}{2B} + A\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon$.

所以$f\cdot g$在$[a,b]$上可积.

定理7.3.4 f在$[a,b]$上可积$\Longleftrightarrow \forall c\in(a,b), f$在$[a,c],[c,b]$上都可积,且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

证明:($\Longrightarrow$) 因为f 可积,则$\forall\varepsilon>0,\exists$分割$T$,使得$\sum\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$,记$T^*$为分割$T$加入分割点$c$得到的新的分割,由Daubox和性质有$S_{T*}(f)\leqslant S_T(f), s_T(f)\leqslant s_{T*}(f) \Longrightarrow S_{T*}(f)-s_{T*}(f)\leqslant S_T(f)-s_T(f)\Longrightarrow$

$$\sum_{T*}\omega_k^*\Delta x_k^* \leqslant \sum_T\omega_k\Delta x_k < \varepsilon$$

而分割T^*在$[a,c]$和$[c,b]$上的部分构成了对$[a,c],[c,b]$的分割,分别记作T',T'',那么

$$\sum_{T'}\omega_{k'}\Delta x_{k'} \leqslant \sum_{T*}\omega_k^*\Delta x_k^* < \varepsilon, \sum_{T''}\omega_{k''}\Delta x_{k''} \leqslant \sum_{T*}\omega_k^*\Delta x_k^* < \varepsilon$$

所以f 在$[a,c],[c,b]$ 上可积.

($\Longleftarrow$) 因为f,g 在$[a,c],[c,b]$ 上可积,故$\forall\varepsilon>0$分别存在分割T',T'',使得

$$\sum_{T'}\omega_{k'}\Delta x_{k'} < \varepsilon/2, \sum_{T''}\omega_{k''}\Delta x_{k''} < \varepsilon/2$$

分割$T=T'+T''$,构成对$[a,b]$的分割,那么

$\sum\limits_T\omega_k\Delta x_k = \sum\limits_{T'}\omega_{k'}\Delta x_{k'} + \sum\limits_{T''}\omega_{k''}\Delta x_{k''} < \varepsilon$, 所以f在$[a,b]$ 上可积,关于分割T的Riemann和可以写成: $S_n(f) = \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{[a,c]} + \sum\limits_{[c,b]}$,其中$\sum\limits_{[a,c]}$, $\sum\limits_{[c,b]}$分别是f在$[a,c]$和$[c,b]$上关于分割T的Riemann和,故等式两端取极限得到$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

注:当$a<b<c$时,只要f在$[a,c]$上可积, 仍然有$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

事实上, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$,那么

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

定理7.3.5 设f在$[a,b]$上可积,且$f(x)\geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

读者自己证明

推论7.3.1 设f,g在$[a,b]$上可积,且$f(x)\geqslant g(x)$,则$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$

推论7.3.2 若$f,g\in C[a,b]$,则$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$,其中m,M分别是f 在$[a,b]$上的最小值和最大值.

定理7.3.6 设f在$[a,b]$上可积,则$|f|$在$[a,b]$上可积,且$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

证明: 因为f在$[a,b]$上可积,所以$\forall\varepsilon>0,\exists$分割$T$,有$\sum\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$,

注意到: $||f(x')|-|f(x'')|| \leqslant |f(x')-f(x'')| \Longrightarrow \omega_k^{|f|} \leqslant \omega_k^f$

于是,$\sum\omega_k^{|f|}\Delta x_k<\varepsilon$,所以$|f|$可积.

由$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$和定理7.3.5及推论7.3.1得到

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

注: 此定理得逆不成立,例如

$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\bigcap[0,1],\\ -1, & x\in\mathbf{Q}^C\bigcap[0,1],\end{cases}$,易知$f$不可积,但$|f|=1$显然可积.

定理7.3.7 (**积分中值定理**) 若$f(x)\in C[a,b]$，则存在$\xi\in[a,b]$使得$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$

证明: 由推论7.3.2 有$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)\Longrightarrow m\leqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant M$,由闭区间上连续函数的介值性,至少存在一点$\xi\in[a,b]$使得$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)$,即$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

注：如果没有连续的条件积分中值定理可能不成立，例如$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

例7.3.1 若$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续，且$\int_a^b f^2(x)dx=0$, 则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$

证明若存在$x_0\in(a,b), f(x_0)\neq 0$, 由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，存在$\delta>0$ ，当$x\in U(x_0,\delta), |f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}>0$

于是，$\int_a^b f^2(x)dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx\geqslant\dfrac{1}{4}f^2(x_0)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx=\dfrac{\delta}{2}f^2(x_0)>0$,与题设矛盾.故结论成立.

习题7.3

1,若函数$f_1(x),f_2(x)$在$[a,b]$上可积，则$f_1\pm f_2$,在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx$$

2, 设$f(x)\in C[0,1]$,且$f(x)>0$,证明：$\ln\int_0^1 f(x)dx\geqslant\int_0^1\ln f(x)dx$

3,证明：$\sqrt{\frac{2}{e}}<\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}e^{-x^2}dx<\sqrt{2}$;

4,设$f(x)$在$[0,1]$上连续非负单调递减，证明：对于$0<\alpha<\beta\leqslant 1$ 有$\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant\dfrac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)dx$;

5,若f,g在$[a,b]$上可积，证明：$\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}$也在$[a,b]$上可积.

6，求下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2/3}\dfrac{x^n}{1+x}dx$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\cos^n xdx$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx(p>0)$

7,设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递减，证明$\forall a\in(0,1)$,有$\int_0^a f(x)dx\geqslant a\int_0^1 f(x)dx$

第四节定积分的计算

一、Newton-Leibnitz公式

若f在$[a,b]$上可积，则$\forall x\in[a,b]$，$f(x)$在区间$[a,x]$上都可积，于是$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$,是$[a,b]$ 上的函数.由于积分上限x是变量，所以习惯上称此函数是变上限函数，同理称$\int_x^a f(t)dt$为变下限函数，见图7.4.1.

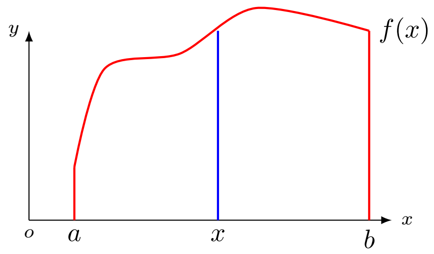


图7.4.1

注：虽然定积分的值与变量的符号没有关系，但是为了不混淆积分变量和积分上(下)限，在写积分上(下)限和积分变量时最好有区别，即积分上限函数记作$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

定理7.4.1 若函数f在$[a,b]$上可积，则

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$,在$[a,b]$上连续.

证明: $\forall x\in[a,b]$, 因为$\Delta\Phi=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

注意到：f在$[a,b]$上可积，所以存在$M>0$,使得$|f(x)|\leqslant M$,于是

$|\Delta\Phi|\leqslant M|\Delta x|\iff \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=0$ 由连续的定义，Φ在x点连续，由x的任意性，所以$\Phi(x)\in C[a,b]$

定理7.4.2 若$f(x)\in C[a,b]$,则$\Phi(x)$在$[a,b]$上可导，且

$\dfrac{d}{dx}\Phi(x)=f(x)$.

证明: $\forall x\in[a,b]$ 给x一个改变量Δx；我们有

$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

于是, $\Delta\Phi=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

由积分中值定理（定理7.3.7) $\Delta\Phi=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$,其中ξ介于x和$x+\Delta x$ 之间.

$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\dfrac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(\xi)$ 因此

$\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)$,

考虑到$\xi \to x(\Delta x \to 0)$,注意到函数$f(x)$的连续性,我们有$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$ 于是$\Phi'(x) = f(x)$

注: 这个定理表明连续函数一定有原函数，但对于可积函数f，其变上限函数不一定是被积函数的原函数.

例7.4.1 $\int\limits_a^x sgn(t)dt$ 不是函数$sgn(x), x \in (a,1)$ $(a > -1)$的原函数

解: 若$F(x) = \int_a^x sgn(t)dt$ 是函数$sgn(x)$的原函数, 则$F'(x) = sgn(x), x \in [-1,1]$,利用Lagrange中值定理我们有

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} F'(\xi_1) \\ &= \lim_{x \to 0^+} sgn\xi_1 = 1 \quad (0 < \xi_1 < x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} F'(\xi_2) \\ &= \lim_{x \to 0^-} sgn\xi_2 = -1 \quad (x < \xi_2 < 0) \end{aligned}$$

所以$F(x)$ 在$x = 0$处不可导.

定理7.4.3 (Newton-Leibnitz)**公式** 若$f(x) \in C[a,b]$, $F(x)$ 是函数$f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$$

证明: 设$F(x)$ 是函数$f(x)$ 的一个原函数，由定理7.4.2 , 函数$\int_a^x f(t)dt$ 也是$f(x)$的一个原函数于是, $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

特别取$x = a$得到$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$ 那么$C = -F(a)$ 因此, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$，再令$x = b$得到Newton-Leibnitz 公式.

注：利用N-L公式计算定积分时，要关注被积函数在积分区间上的连续性，而积分值与选择哪个原函数无关，所以利用前一章求不定积分的方法,只要求出一个原函数即可.

定理7.4.4(积分第二中值定理)设函数f在$[a,b]$上可积.

(i)若函数g在$[a,b]$上单调减，且$g(x)\geqslant 0$,则存在$\xi\in[a,b]$,使得
$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx;$
(ii)若函数g在$[a,b]$上递增，且$g(x)\geqslant 0$,则存在$\eta\in[a,b]$,使得
$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx$
证明: 不妨证明(i),若$g(a)=0$,则$g(x)\equiv 0$,命题是显然的.

若$g(a)>0$,令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$,则$F(x)\in C[a,b]$,因此存在m,M使得$F(x)$以m,M为最小值和最大值，于是所证明的问题转化成证明

$F(\xi)=\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$或$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant Mg(a)$

因为f可积，所以f有界，即$|f(x)|\leqslant L, x\in[a,b]$,而$g(x)$总是可积的，于是$\forall\varepsilon>0$,及对于任意的分割T

$\sum\limits_T\omega_i^g\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{L}$,对于此分割

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)dx\\&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)dx+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

对于I_1,我们有

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})||f(x)|dx\\&\leqslant L\cdot\sum_{i=1}^n\omega_i^g\Delta x_i<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon\end{aligned}$$

对于I_2,注意到$F(x_0)=F(a)=0$和

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_a^{x_i} f(x)dx - \int_a^{x_{i-1}} f(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= g(x_0)[F(x_1) - F(x_0)] + \cdots + g(x_{n-1})[F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= F(x_1)[g(x_0) - g(x_1)] + \cdots + F(x_{n-1})[g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})] + F(x_n)g(x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}) \end{aligned}$$

由于$g(x) \geqslant 0$且递减,使得$g(x_{n-1}) \geqslant 0, g(x_{i-1}) - g(x_i) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$,注意到$F(x_i) \leqslant M, i = 1, 2, \cdots, n$,我们有

$$I_2 \leqslant M \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + Mg(x_{n-1}) = Mg(a)$$

同理由$F(x_i) \geqslant m, i = 1, 2, \cdots, n$,我们有$I_2 \geqslant mg(a)$

综合得到$I = I_1 + I_2, |I_1| < \varepsilon, mg(a) \leqslant I_2 \leqslant Mg(a)$,于是

$$-\varepsilon + mg(a) \leqslant I \leqslant Mg(a) + \varepsilon$$

由介值定理存在$\xi \in [a, b]$,使得$F(\xi) = \frac{I}{g(a)}$.

推论7.4.1 设函数f在$[a, b]$上可积,若g 为单调函数,则存在$\xi \in [a, b]$, 使得
$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

证明: 若g为单调递减函数,令$h(x) = g(x) - g(b)$,则h为非负递减函数,则由定理,存在$\xi \in [a, b]$,使得

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = h(a)\int_a^{\xi} f(x)dx = (g(a) - g(b))\int_a^{\xi} f(x)dx$$

于是$\int_a^b f(x)g(x)dx - g(b)\int_a^b f(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx - g(b)\int_a^{\xi} f(x)dx$, 那么$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

Taylor公式的积分型余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}$$

证明：设f 在$U(x_0)$内有直到$n+1$阶的连续导数，则

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= (x-t)^n f^{(n)}(t)\big|_{x_0}^{x} + n\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \\ &= \Big[(x-t)^n f^{(n)}(t) + n(x-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots n!f(t)\Big]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} 0\cdot f(t)dt \\ &= n!f(x) - n![f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n] \\ &= n!R_n(x)\end{aligned}$$

由$f^{(n+1)}(x)$连续，$(x-t)^n$在$[x_0,x]$或$[x,x_0]$上保号，所以由推广的第一积分中值定理得

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

其中$\xi = x_0+\theta(x-x_0), 0\leqslant\theta\leqslant 1,$

如果直接用第一积分中值定理，我们有

$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$

注意到

$$\begin{aligned}(x-\xi)^n(x-x_0) &= (x-x_0-\theta(x-x_0)]^n(x-x_0) \\ &= (1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

于是$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$ 此余项称为Cauchy余项.

习题7.4

1. 设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(x)>0$,证明：存在唯一的$\xi\in(a,b)$,使得直线$x=\xi$将曲线$y=f(x)$和直线$x=a,x=b$及$y=0$所围成的平面图形分成面积相等的两部分.

2.设$f(x)\in C[a,b]$,且$\int_a^b f(x)dx=0,\int_a^b xf(x)dx=0$,证明：至少存在两点$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$,使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

3.设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加，且连续，证明：$\int_a^b xf(x)dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$;

4. 当$x\geqslant 0$时，$f(x)$连续，且满足$\int_0^{x^2(1+x)}f(t)dt=x$,求$f(2)$

5.设$f(x)$在$[a,b]$上单调减少，非负，函数$g(x)$在$[a,b]$上可积，则存在$\xi\in[a,b]$，使得
$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx$

6.证明：若函数$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$,且$f(x)=\int_0^x f(t)dt$,则$f(x)\equiv 0$

第五节定积分换元积分法和分部积分法

一、换元积分法

定理7.5.1 设$f(x)\in C[a,b]$ 令$x=\varphi(t)$，且

(i) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,$

(ii) $\varphi(t)$ 和$\varphi'(t)$ 在区间$[\alpha,\beta]$ 上连续,

(iii) $f[\varphi(t)]$ 在区间$[\alpha,\beta]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

证明: 若$F(x)$ 是函数$f(x)$的原函数, 则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]+C$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= F[\varphi(t)]|_\alpha^\beta\\ &= F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]\\ &= F(b)-F(a).\end{aligned}$$

注:用换元法求定积分不必像不定积分那样，要代回原变量.

例7.5.1 计算$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$

解：令:$x=r\sin t,dx=r\cos tdt$

$\begin{matrix} x= & 0当t= & 0\\ x= & r当t= & \frac{\pi}{2}\end{matrix}$ 结果

$$\begin{aligned}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos tdt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt\\ =r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}.\end{aligned}$$

利用定积分的几何意义：这个积分恰是圆盘$x^2+y^2\leqslant r^2$的$\frac{1}{4}$ 面积.

例7.5.2求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$

解: 设 $\begin{matrix} t= & \cos x,\Longrightarrow & dt=-\sin xdx & \\ x= & 0\Longrightarrow t=1; & x=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow & t=0\end{matrix}$

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 t^5 dt = \frac{1}{6}t^6|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

例7.5.3 计算$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx.$

解：注意$\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|$,直接利用Newton-Leibnitz公式

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x(-\cos x) dx \\
&= \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

例7.5.4 计算$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx.$

解：令$\sqrt{2x+1} = t, \Longrightarrow dx = tdt$，

$x = 0 \Longrightarrow t = 1, x = 4 \Longrightarrow t = 3,$

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3) dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} + 3t\right]_1^3 \\
&= \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

注：$f(x)$ 是区间$[-a,a]$上连续的偶函数,则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

事实上，$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$

令$I = \int_{-a}^0 f(x)dx, x = -t,$于是$I = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(t)dt,$命题成立.

注：$f(x)$ 是区间$[-a,a]$ 上连续的奇函数,则$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$

注：若$f(x)$ 是以T为周期的连续函数，则$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

我们证明最后一个,其余留给读者.

$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$

对$\int_T^{a+T} f(x)dx$,作变换:$x=T+t\Longrightarrow$

$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(T+t)dt=\int_0^a f(x)dx$与第一项$\int_a^0 f(x)dx$抵消, 于是命题成立.

例7.5.5 被积函数$f(x)\in C[0,+\infty)$, $f(x)>0$, 证明: $F(x)=\dfrac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$在区间$(0,+\infty)$上单调.

$$
\begin{aligned}
\text{证明:}F'(x)=&\frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)dt-\int\limits_0^x tf(t)dtf(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\\
=&\frac{f(x)\int\limits_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}
\end{aligned}
$$

注意到: $f(x)>0,(x-t)f(t)>0$,则$f(x)\int\limits_0^x(x-t)f(t)dt>0\Longrightarrow F'(x)>0$, 所以$F(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

例7.5.6 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x te^{2t^2}dt}$

解：这是一个$\frac{0}{0}$型的不定式,用L'Hospital法则得:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x te^{2t^2}dt}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=2.
\end{aligned}
$$

二、分部积分法

因为$d(uv)=vdu+udv$,那么$\int_a^b vdu=uv\left.\right|_a^b-\int_a^b udv$,于是我们有

定理7.5.2 若$u=u(x), v=v(x)$在$[a,b]$上有连续的导数,则
$\int_a^b vdu = uv\,|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b udv$
例7.5.7 计算$I=\int_0^{4/3}\sqrt{x^2+1}dx.$

$$
\begin{aligned}
\text{解：} I &= x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{4/3} - \int_0^{4/3}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \frac{20}{9} - \int_0^{4/3}\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \frac{20}{9} - I + \int_0^{4/3}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
&= \frac{20}{9} - I + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^{4/3} \\
&= \frac{20}{9} - I + \ln 3
\end{aligned}
$$

于是,$I=\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\ln 3$

例7.5.8 计算$I=\int_{1/2}^{3/2}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}dx.$

$$
\begin{aligned}
\text{解：} I &= \int_{1/2}^{3/2}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx \\
&= \int_{-1/2}^{1/2}\frac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt \text{ 利用} 1-x=t, dx=-dt \\
&= -2\int_0^{1/2}\arcsin t d(\sqrt{1-t^2}) \\
&= -2\sqrt{1-t^2}\cdot\arcsin t|_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2}dt = 1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.
\end{aligned}
$$

例7.5.9 设$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\geqslant 0 \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0 \end{cases}$ 计算$\int_1^4 f(x-2)dx.$
解：令$x-2=t$,则$dx=dt, x=1\Longrightarrow t=-1; x=4, \Longrightarrow t=2$于是,

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2}dt \\ &= \int_{-1}^0 \sec^2\frac{t}{2}d\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}d(-t^2) \\ &= \left[\tan\frac{t}{2}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^2 \\ &= \tan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例7.5.10 证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{(n-1)!!}{n!!}a$,其中$a = \begin{cases} 1 & n = 2k+1 \\ \frac{\pi}{2} & n = 2k \end{cases}$

证明:令$x = \frac{\pi}{2} - t$,则

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t(-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} xd\cos x \\ &= \left[-\cos x\sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 xdx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

于是$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$,依次递推得到

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\dots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 \\ I_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\dots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 \end{aligned}$$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 1$ 于是结论得证.

注：利用换元积分方法,我们有下列常用的公式:

(1) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx\ (a>0)$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

我们给出(2)的证明,(1)留给读者.

令$x=\pi-t \Longrightarrow dx=-dt$

$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)(-dt)=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-I$

于是结论得证

例7.5.11 求$I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

解：$\sqrt{1-\sin 2x}=|\cos x-\sin x|$以$\pi$为周期，则

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\cos x-\sin x|dx \\
&= n\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx \\
&= 2\sqrt{2}n
\end{aligned}$$

例7.5.12 求$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$

解：注意到积分区间是对称的，我们由前面的注，得到

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^4(-x)}{1+e^{-(-x)}}\right]dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx \\
&= \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} \\
&= \tfrac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

例7.5.13求$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

解:由$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x})dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx = \frac{\pi-1}{4}.
\end{aligned}
$$

例7.5.14 求$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\sin x}dx$

解: 直接利用函数本身的特征将奇函数分离出来，然后利用积分区间的对称性

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{x\sin x}{\cos^2 x})dx \\
&= -2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = -2x\sec x|_0^{\frac{\pi}{4}}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx \\
&= -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}+2\ln(\sec x+\tan x)|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}+2\ln(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

例7.5.15 求$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解:令$x=\tan t$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x+\cos x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x))dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx \text{ 对第二项作变换} u=\frac{\pi}{4}-x \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2.
\end{aligned}
$$

习题7.5

1.计算下列定积分:

1) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$;　　2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 4x}dx$;

3) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$;　　4) $\int_2^2 \min\{x^2, \frac{1}{|x|}\}dx$;

5) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$;　　6) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;

7) $\int_0^1 e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx$;　　8) $\int_1^{\sqrt{2}} x^2 \arctan\sqrt{x^2-1}dx$;

9) $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}dx$;　　10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}dx$;

11) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$;　　12) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$;

13) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(5-4\cos x)^2}dx$;　　14) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx$;

2.设$f(x)\in C[a,b], F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)dt$,证明：$F''(x)=f(x)$

3.设f在区间$[-a,a]$上可积，证明：

1)若f为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

2)若f为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

4.设$J(m,n)=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n xdx(m,n$为正整数$)$,证明：

$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)$

5.设f连续可微，求$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f'(t)dt$

6.设f为$[0,2\pi]$上的单调递减函数，证明：对任意的正整数n恒有$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \geqslant 0$

7.设f非负严格单调递减，在$[0,b]$上连续，$0<a<b$,证明：$b\int_0^a f(x)dx > a\int_a^b f(x)dx$;

8.设$f(x)\in C[0,\pi]$，且$\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$,证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

9.设$f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$内可导，且满足$f(1)=k\int_0^{1/k} xe^{1-x}f(x)dx(k>1)$,证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

10. 设$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$,已知$f(1)=1$,求$\int_1^2 f(x)dx$的值；

11. 证明：$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}$

12. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，证明：

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$

13.设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加，非负，函数$g(x)$在$[a,b]$上可积，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_\xi^b g(x)dx$

第六节广义积分

虽然我们在定义Riemann积分时,限定了被积函数在积分区间上是有界的,积分区间是有限的,但是利用极限我们还可以将Riemann积分拓广到无穷区间和被积函数是无界的情况,同时这种拓广也有实际的背景.

一, 无穷限积分

定义7.6.1 设$f(x)\in C[a,+\infty)$,取$b>a$,若极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在,则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,该极限值称为函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上的广义积分,即$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$,若上述极限不存在,称广义积分发散, 这时$\int_a^{+\infty} f(x)dx$仅仅是一个记号.

类似我们可以定义$(-\infty,a]$上的广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$

对于$(-\infty,+\infty)$上的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$,当$\int_{-\infty}^a f(x)dx$, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$同时收敛时,则称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛,且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx$

注:如果$\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^T f(x)dx$存在,我们称该极限值为函数$f(x)$的Cauchy 积分主值,记作$PV\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^T f(x)dx$,Cauchy 主值下积分收敛并不能保证原广义积分收敛.

例7.6.1求$\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$

解：$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\dfrac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan x\,|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b=\dfrac{\pi}{2}$

例7.6.2 求α 使得$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$ 收敛

解：当$\alpha\neq1$

$$\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$$

如果$\alpha>1$,则$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$,

如果$\alpha<1$, 则$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}=\infty$,

如果$\alpha=1$,$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=\infty$.

例7.6.3 求$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

第二个积分等于$\frac{\pi}{2}$ 而

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\arctan x|_{\alpha}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

所以$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$

二、无界函数的广义积分（瑕积分）

定义7.6.2 设函数f 定义在区间$(a,b]$上，在点a处无界，$\forall u\in(a,b]$, f在区间$[u,b]$上有界可积，若$\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx$收敛，则称广义积分（瑕积分）$\int_a^b f(x)dx$收敛，且称该极限值为广义积分$\int_a^b f(x)dx$的值.显然当广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散时，$\int_a^b f(x)dx$仅仅是一个记号.

使得被积函数无界的点a通常称为瑕点，所以也称这样的广义积分为瑕积分.

类似地，可以定义瑕点为b 的广义积分：

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{u\to b^-}\int_a^u f(x)dx$

若瑕点$c\in(a,b)$,则广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛的充要条件是广义积分$\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ 同时收敛.

若瑕点为a,b，则广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛的充要条件是，$\forall u\in(a,b)$

广义积分$\int_a^u f(x)dx$, $\int_u^b f(x)dx$同时收敛.

例7.6.4 计算瑕积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解：$x=1$为瑕点，被积函数$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\in C[0,1)$,依广义积分的定义

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}&=\lim_{u\to1^-}\int_0^u\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\lim_{u\to1^-}\arcsin u=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

例7.6.5 讨论瑕积分$\int_0^1\frac{dx}{x^q}(q>0)$的敛散性

解：瑕点为$x=0$,由于

$\int_u^1\frac{dx}{x^q}=\begin{cases}\frac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q\neq1,\\ -\ln u, & q=1\end{cases},(0<u<1)$

当$0<q<1$时，瑕积分收敛，且$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}=\lim\limits_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{dx}{x^q}=\frac{1}{1-q}$;

当$q\geqslant 1$瑕积分发散.

有时我们也会遇到无穷限广义积分和瑕积分同时写在一起的广义积分，这种类型的广义积分收敛要求：无穷限广义积分和瑕积分同时收敛.例如广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}dx$，显然该广义积分收敛的充要条件是广义积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^p},\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$同时收敛，由前面讨论对于任意实数$p$该广义积分均发散.

对于广义积分而言，我们更关心其收敛性.

三、无穷限广义积分收敛性质及判别法

1.无穷限广义积分收敛的性质

定理7.6.1 广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists G>0$,当$u_1,u_2>G$,时有$|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx|<\varepsilon$

证明 由广义积分的定义,积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛充分必要条件是变上限函数$F(u)=\int_a^b f(x)dx$收敛,由函数收敛的Cauchy准则$\forall\varepsilon>0$ 存在$X>0$当$u_1,u_2>X$时$|F(u_1)-F(u_2)|<\varepsilon$, 即$\left|\int_a^{u_1}f(x)dx-\int_a^{u_2}f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\right|<\varepsilon$,

定理7.6.2 若$\int_a^{+\infty}f_1(x)dx,\int_a^{+\infty}f_2(x)dx$ 都收敛,c_1,c_2是任意的常数, 则$\int_a^{+\infty}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]dx$收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]dx=c_1\int_a^{+\infty}f_1(x)dx+c_2\int_a^{+\infty}f_2(x)dx$$

请读者自己证明

定理7.6.3 若函数f 在任何有限区间$[a,u]$上都可积，$a<b$,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_b^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散，且
$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty}f(x)dx$$

证明: 若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\forall\varepsilon>0,\exists G>0$,当$u_1,u_2>G$时，有$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$,由Cauchy收敛准则，$\int_b^{+\infty}f(x)dx$收敛，反之亦然.

定理7.6.4 若函数f 在任何有限区间$[a,u]$上都可积，且$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$必收敛,且$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$

证明: 因为$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛,所以$\forall\varepsilon>0,\exists G>0$ 当$u_1,u_2>G$时,有$\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx=\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$,

而$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| \leqslant \int_{u_1}^{u_2} |f(x)|dx$, 故$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$,所以$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛.

注意到:$\left|\int_a^u f(x)dx\right| \leqslant \int_a^u |f(x)|dx(u > a)$,令$u \to +\infty$,取极限得到$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$

注:此定理的逆命题不真,当$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$收敛,称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛,此定理的逆命题是收敛不一定绝对收敛,当$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,但$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$不收敛,则称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$条件收敛.

2.无穷限积分收敛判别法

定理7.6.5 (比较法则) 设定义在$[a, +\infty)$上的两个函数,f和g都在任意有限区间上可积,且满足:

$|f(x)| \leqslant g(x), x \in [a, +\infty)$,则当$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时,$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛,当$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$发散时$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散.

证明留给读者

例7.6.6 证明:广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nx}{1+x^2}dx$ 绝对收敛.

证明: 因为$\left|\frac{\sin nx}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$,由比较判别法原积分绝对收敛.

推论7.6.1 若f和$g > 0$在任意有限区间$[a, u]$上可积,且$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c$,则

$i)$当$0 < c < +\infty$时,$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$同敛散;

$ii)$当$c = 0$时,若$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛,则$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$也收敛;

$iii)$当$c = +\infty$时,若$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散,则$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$也发散;

推论7.6.2 设f 定义在区间$[a, +\infty)$上,且在任意有限区间$[a, u]$上可积,则

$i)$当$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x^p}, x \in [a, +\infty), p > 1$时$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$收敛;

$ii)$当$|f(x)| \geqslant \frac{1}{x^p}, x \in [a, +\infty), p \leqslant 1$时$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$发散;

推论7.6.3 设f 定义在区间$[a, +\infty)$上,在任意有限区间$[a, u]$上可积,且$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = \lambda$,则

$i)$当$p > 1, 0 \leqslant \lambda < +\infty$时,$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$收敛;

$ii)$当$p \leqslant 1, 0 < \lambda \leqslant +\infty$时$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$发散;

例7.6.7 判别下列广义积分的敛散性:

1) $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^5}}dx$;

解: 1)当$p>1$时,$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p x^2 e^{-x}=0$,由推论7.6.3 i)此广义积分绝对收敛;

2)由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^5}}=1$, 由推论7.6.3 ii)此广义积分发散.

定理7.6.6 (Dirichlet判别法) 若$F(u)=\displaystyle\int_a^u f(x)dx$ 在$[a,+\infty)$上有界,$g(x)$在$[a,+\infty)$上当$x\to+\infty$时单调趋于0,则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

证明: 因为$F(u)$有界,所以存在$M>0,\forall u\in[a,+\infty)$有$\left|\displaystyle\int_a^u f(x)dx\right|\leqslant M$. 又$g(x)$单调趋于零,所以$\forall\varepsilon>0,\exists G\geqslant a$,当$x>G$时,有$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$,由第二积分中值定理,对于任意的$u_1,u_2>G,\exists\xi\in[u_1,u_2]$,

$\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx=g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx+g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx.$

于是,

$$\begin{aligned}\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| &\leqslant |g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right|+|g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|\\ &=|g(u_1)|\cdot\left|\int_a^{\xi} f(x)dx-\int_a^{u_1} f(x)dx\right|\\ &\quad+|g(u_2)|\cdot\left|\int_a^{u_2} f(x)dx-\int_a^{\xi} f(x)dx\right|\\ &<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon\end{aligned}$$

由Cauchy准则广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

定理7.6.7 (Abel判别法) 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上单调有界,则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

证明留给读者.

例7.6.8 讨论广义积分$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$的敛散性.

解: 当$p>1$时,因为$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^p}$,有比较判别法,广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$绝对收敛;

当$0<p\leqslant 1$时,$\forall u\geqslant 1$, $|\displaystyle\int_1^u \sin x dx|=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$,而$\frac{1}{x^p}$ 单调趋于零,由Dirichlet 判别法,原积分收敛.

但注意到$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\dfrac{\sin^2 x}{x^p}\geqslant\dfrac{1}{2x}-\dfrac{\cos 2x}{2x},x\in[1,+\infty)$

其中$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$,由Dirichlet判别法知其收敛,但$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$发散,所以当$0<p\leqslant 1$时$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛.

例7.6.9 求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\sin t^2 dt$.

解: 令$t^2=u\Longrightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$,则

$\int_n^{n+1}\sin t^2dt=\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du$

由例8知广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$收敛,于是由Cauchy收敛准则,

$\forall\varepsilon>0,\exists G>0,$当$u_1,u_2>G,$时$\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\right|<\varepsilon$ 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{(n+1)}\sin t^2dt=0$

四、瑕积分收敛性质及判别法

1.瑕积分收敛的性质

定理7.6.8 设瑕积分$\int_a^b f(x)dx$以a为瑕点,则其收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$u_1,u_2\in(a,a+\delta),$时有$|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx|<\varepsilon$

证明与无穷限广义积分类似,留给读者

定理7.6.9 设a为函数f_1,f_2的瑕点, 若$\int_a^b f_1(x)dx,\int_a^b f_2(x)dx$ 都收敛,c_1,c_2是任意的常数, 则$\int_a^b[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]dx$收敛，且

$\int_a^b[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]dx=c_1\int_a^b f_1(x)dx+c_2\int_a^b f_2(x)dx$

请读者自己证明

定理7.6.10 设a若函数f的瑕点$\forall c\in(a,b),$则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^c f(x)dx$ 同敛散，且

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

请读者自己证明

定理7.6.11 设a为函数f 的瑕点$\forall u\in(a,b],f$在任何闭区间$[u,b]$ 上都可积，若$\int_a^b|f(x)|dx$收敛,则$\int_a^b f(x)dx$必收敛,且$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

证明留给读者

注:此定理的逆命题不真,当$\int_a^b|f(x)|dx$收敛,称$\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛,此定理的逆命题是收敛不一定绝对收敛,当$\int_a^b f(x)dx$收敛,但$\int_a^b|f(x)|dx$不收敛,则称$\int_a^b f(x)dx$条件收敛.

2.瑕积分收敛判别法

定理7.6.12 (比较法则) 设定义在$(a,b]$上的两个函数,f和g 都以$x=a$ 为瑕点，且$\forall u\in(a,b]$满足:

$|f(x)|\leqslant g(x),x\in(a,b],$则当$\int_a^b g(x)dx$ 收敛时,$\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛,当$\int_a^b|f(x)|dx$发散时$\int_a^b g(x)dx$发

散.

证明留给读者

推论7.6.4 若$g>0$,且$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$,则

$i)$当$0<c<+\infty$时,$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$与$\displaystyle\int_a^b g(x)dx$同敛散;

$ii)$当$c=0$时,若$\displaystyle\int_a^b g(x)dx$收敛,则$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$也收敛;

$iii)$当$c=+\infty$时,若$\displaystyle\int_a^b g(x)dx$发散,则$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$也发散;

推论7.6.5 设f 定义在区间$(a,b]$上,且$\forall u\in(a,b]$, f在$[u,b]$上可积,则

$i)$当$|f(x)|\leqslant\frac{1}{(x-a)^p}$,且$0<p<1$时,$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$收敛;

$ii)$当$|f(x)|\geqslant\frac{1}{(x-a)^p}$, $p\geqslant1$时,$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$发散;

推论7.6.6 设f 定义在区间$(a,b]$上,且$\forall u\in(a,b]$ f在$[u,b]$上可积,若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p|f(x)|=\lambda$,则

$i)$当$0<p<1, 0\leqslant\lambda<+\infty$时,$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$收敛;

$ii)$当$p\geqslant1, 0<\lambda\leqslant+\infty$时,$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$发散;

例7.6.10 判别下列广义积分的敛散性:

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\displaystyle\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$;

解: 1)瑕点位$x=0$,因为$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac34}\left|\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac14}}=0$ 此广义积分绝对收敛;

2)瑕点为$x=1$,且$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}=1$, 此广义积分发散.

习题7.6

1.证明：定理7.6.2；

2.证明：定理7.6.5

3.证明：定理7.6.7

4.证明：定理7.6.8、定理7.6.9、定理7.6.10、定理7.6.11和定理7.6.12

5.设f,g,h是定义在$[a,+\infty)$上的三个连续函数，且满足：$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, 证明：

(1)若$\int_a^{+\infty}h(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$都收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛;

(2)若$\int_a^{+\infty}h(x)dx=\int_a^{+\infty}g(x)dx=A$,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx=A$

6.讨论下列积分的收敛性:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　　2) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-e^x}dx$;

3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　　4) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;

5) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^n}$;　　6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx(n,m\geqslant 0)$;

7.讨论下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}dx}{x}$;　　2) $\int_0^{+\infty}\frac{sgn(\sin x)}{1+x^2}dx$;

3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos xdx}{100+x}$;　　4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$;

8.讨论下列瑕积分的收敛性：

1) $\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$;　　2) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$;

3) $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$;　　4) $\int_0^{1}\frac{\ln x}{1-x}dx$;

5) $\int_0^{1}\frac{\arctan xdx}{1-x^3}$;　　6) $\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$;

7) $\int_0^{1}\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$;　　8) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln xdx$;

9. 证明：$J=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$,并利用此结果求广义积分

1) $\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta$;　　2) $\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta$;

练习七

1.设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递减且非负连续,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f(x)dx, n=1,2,\cdots,$

证明:数列$\{a_n\}$收敛;

2.设f是以p为周期的连续函数，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{p}\int_0^p f(t)dt$;

3.设f,g在$[a,b]$上可积，证明：$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$

4.设f,g在$[a,b]$上可积，证明：$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b|g(x)|^q\right)^{1/q}$,其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

5.证明：若$f\in C[a,b]$,且$f(x)>0$,则$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\geqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx$

6.已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$,设$\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$,证明：$I=\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x))dx=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

7.计算下列积分：

1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+8}$;　　2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x dx}{x^2}$;　　4) $\int_{1/2}^{3/2}\dfrac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$;

5)$I_n=\int_0^1 x\ln^n xdx$;　　6) $\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$;

7) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$;　　8) $\int_1^2\left(\dfrac{1}{x\ln^2 x}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx$;

8.求下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left[\dfrac{1}{n^4+1}+\dfrac{1}{n^4+2^4}+\cdots+\dfrac{1}{n^4+n^4}\right]$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2dt$

9.设$f(x)$在$[a,b]$上单调,函数$g(x)$在$[a,b]$上可积，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

10.设地球的半径约为$R=6.371\times10^6(m)$,在地球表面垂直发射火箭，要使火箭可服地球引力无限远离地球，试问初速度v_0至少要多大?

11.设$f(x)$为连续函数，证明：

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt$$

12.设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}, x\in[a,b]$$

证明：

(1)$F'(x)\geqslant 2$;

(2)方程$F(x)=0$在区间(a,b)内有且仅有一个根.

13.求$\displaystyle\int_0^2 f(x-1)dx$其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$$

14.设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续且不变号，证明：至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad \text{(积分第一中值定理)}$$