

第五节

对坐标的曲面积分

一、有向曲面

二、对坐标的曲面积分的概念与性质

三、对坐标的曲面积分的算法

四、两类曲面积分的联系

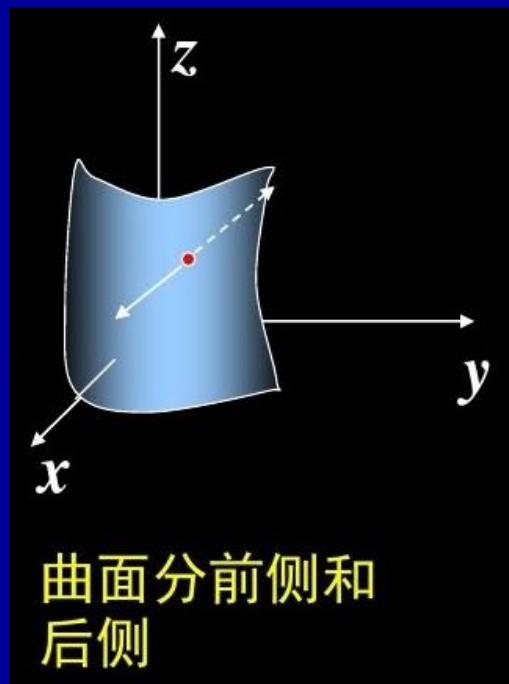


一、曲面的侧及有向曲面

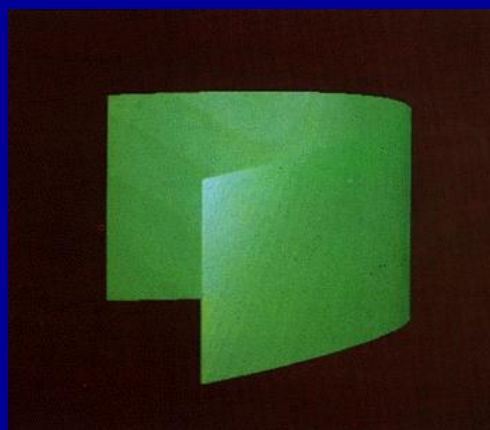
假设曲面光滑，通常遇到的曲面都是双侧的. 如：



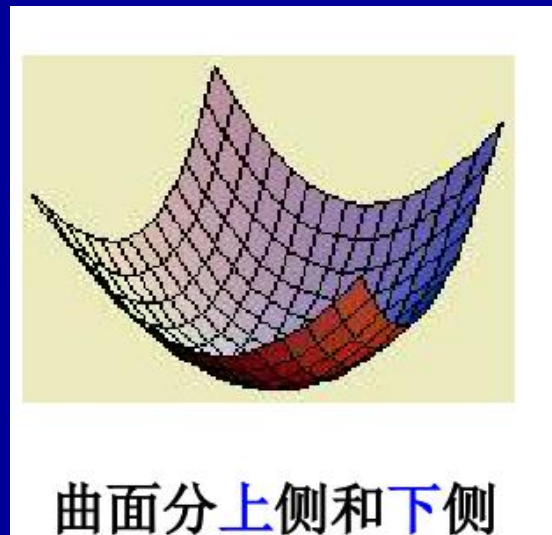
曲面分内侧和外侧



曲面分前侧和后侧



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

这种有两侧的曲面叫双侧曲面.

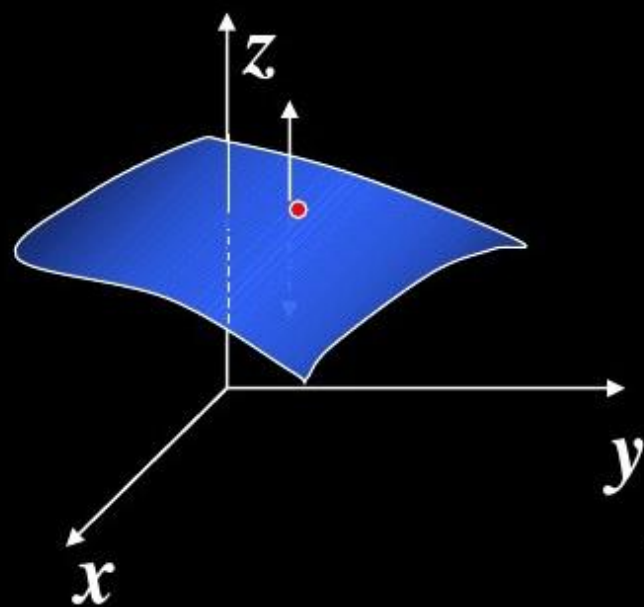
1. 双侧曲面的侧

光滑曲面上任一点的法向量有两个不同的方向，可通过规定法向量的方向(指向)来区分曲面的侧.

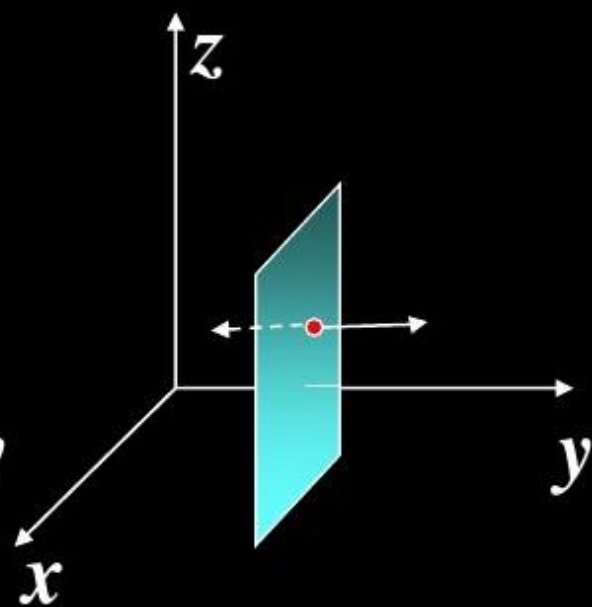
- 1) 如果 S 为封闭曲面，分为内侧(法向量的指向朝内)和外侧(法向量的指向朝外，即法向量指向曲面外部).
- 2) 单值函数曲面的侧：

曲面 S	侧	曲面 S 的法向量指向
$z = z(x, y)$	上侧	法向量与 z 轴正向夹角为锐角
	下侧	钝角
$y = y(z, x)$	右侧	法向量与 y 轴正向夹角为锐角
	左侧	钝角
$x = x(y, z)$	前侧	法向量与 x 轴正向夹角为锐角
	后侧	钝角

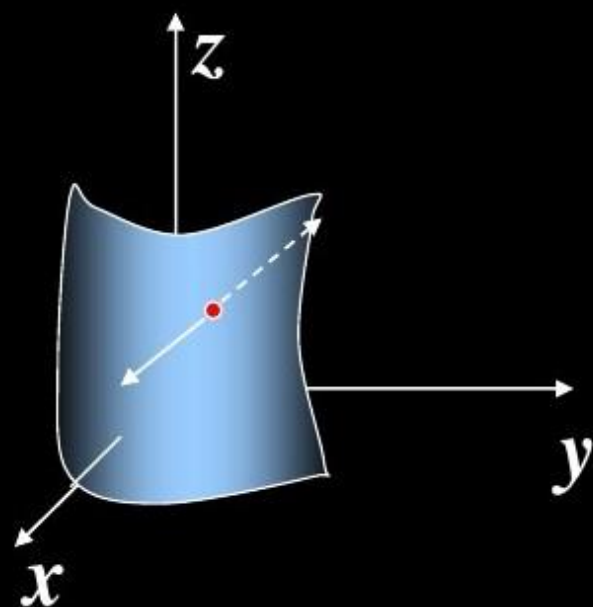
2. 双侧曲面： 取定了法向量，即选定了侧的曲面.



曲面分上侧和下侧



曲面分左侧和右侧



曲面分前侧和后侧

2. 单侧曲面: 只有一侧的曲面.

构造: 一矩形长纸带 $ABCD$,
将它的一端旋转 180° 后, 与另一端粘
合在一起, 即 A 与 C 重合, B 与 D 重合.

简言: 带上任意一处出发涂色, 不
越过边界可将它全部涂满.

讨论双侧曲面.

单侧曲面



莫比乌斯带

3. 有向曲面在坐标面上的投影

设 Σ 为有向曲面, 其上取一小块曲面 ΔS , 把 ΔS 投影到 xOy 面上, 得到一投影区域, 其面积为: $(\Delta\sigma)_{xy} \geq 0$.

假定 ΔS 上各点处的法向量与 z 轴的夹角 γ 的余弦 $\cos\gamma$ 有相同的符号(都是正的或负的).

定义**有向曲面 ΔS 在 xOy 面上的投影** $(\Delta S)_{xy}$:

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos\gamma > 0 \text{ 时} \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos\gamma < 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \cos\gamma \equiv 0 \text{ 时} \end{cases}$$

类似可规定 $(\Delta S)_{yz}, (\Delta S)_{zx}$

实际: 投影区域面积赋予一定的正负号.

二、对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为1)的速度场为 $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

求单位时间流过有向曲面 Σ 指定侧流体的质量, 即流量 Φ .

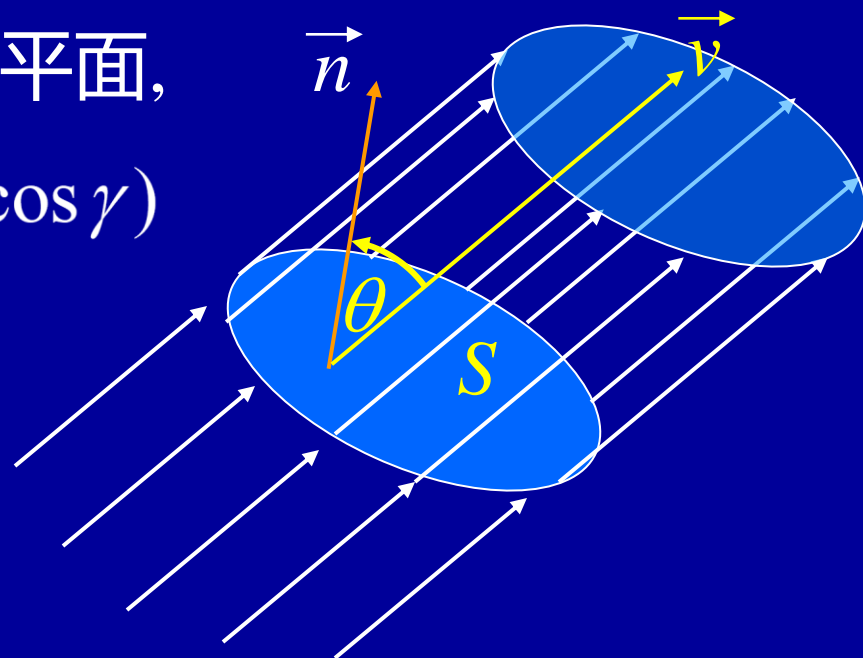
分析: 若 Σ 是面积为 S 的平面,

法向量: $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

流速为常向量: \vec{v}

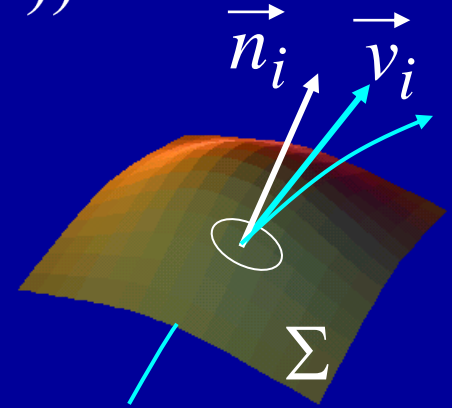
则流量

$$\begin{aligned}\Phi &= S \cdot |\vec{v}| \cos \theta \\ &= S \vec{v} \cdot \vec{n}\end{aligned}$$



对一般的有向曲面 Σ , 对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 用 “分割, 匀代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$



设 $\vec{n}_i = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$, 则

$$\begin{aligned} \Phi &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \right. \\ &\quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \right] \Delta S_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \right. \\ &\quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \right] \end{aligned}$$

2. 定义: 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, P, Q, R 在 Σ 上有界. 将 Σ 分割成 n 块小曲面 $\Delta S_i, i = 1, 2, \dots, n$. 同时, 用 ΔS_i 表示其面积. 任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta S_i$, 记 $\vec{n}_i = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$ 为 Σ 在该点处指定侧的单位法向量. 用 $(\Delta S_i)_{yz}, (\Delta S_i)_{zx}, (\Delta S_i)_{xy}$ 表示 ΔS_i 在 yOz 面, zOx 面, xOy 面上的投影. 令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i \text{ 的直径}\}$.

若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 下面极限总存在, 且为同一值,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\vec{A}(M_i) \cdot \vec{n}_i \right) \Delta S_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + \\
 &\quad Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \\
 &\quad + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}]
 \end{aligned}$$

则称此极限为向量场 \vec{A} 在有向曲面上**对坐标的曲面积分**，或**第二型曲面积分**。记作

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

P, Q, R 叫做**被积函数**； Σ 叫做**积分曲面**。

$\iint_{\Sigma} P dy dz$ 称为 P 在有向曲面 Σ 上**对坐标 y, z 的曲面积分**;

$\iint_{\Sigma} Q dz dx$ 称为 Q 在有向曲面 Σ 上**对坐标 z, x 的曲面积分**;

$\iint_{\Sigma} R dx dy$ 称为 R 在有向曲面 Σ 上**对坐标 x, y 的曲面积分**.

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

3. 存在性

当 P, Q, R 在有向光滑曲面 Σ 上连续时, 对坐标曲面积分一定存在. 分片光滑有向曲面, 用积分曲面可加性.

4. 性质

具有与第二型曲线积分相类似的性质. 以 $\iint_{\Sigma} R dx dy$ 为例.

(1) 线性性质:
$$\iint_{\Sigma} (k_1 R_1(x, y, z) + k_2 R_2(x, y, z)) dx dy = k_1 \iint_{\Sigma} R_1 dx dy + k_2 \iint_{\Sigma} R_2 dx dy$$

(2) 积分曲面可加性 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$, 且 Σ_i 间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} R dx dy$$

(3) 有向性. 用 Σ^- 表示有向曲面 Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} R dx dy = - \iint_{\Sigma} R dx dy.$$

表明：当积分曲面改变为相反侧时，对坐标的曲面积分改变符号. 因此，必须注意积分曲面所取的侧.

(4) 当 Σ 为母线平行于 z 轴的柱面时, 有向曲面 Σ 在 xOy 面上的投影为0. 从而有

$$\iint_{\Sigma} R \, dx \, dy = 0.$$

三、对坐标的曲面积分的算法

————— 转化为其投影区域上的二重积分

- (1) 若曲面 Σ 方程: $z = z(x, y)$. Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} . 设 $z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数 (即 Σ 光滑曲面). 要求 **Σ 为单值函数曲面**. 设 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

这里当有向曲面 Σ 取上侧时为正, 当 Σ 取下侧时为负.

证明:
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) (\Delta S_i)_{xy}$$

当 Σ 取上侧时, $\cos \gamma > 0$, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = \underline{(\Delta \sigma_i)_{xy}}$

投影区域面积

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) (\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

当积分曲面 Σ 取下侧, 则 $\cos \gamma < 0$, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta \sigma_i)_{xy}$.

从而
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

注: 若 Σ 的方程在 D_{xy} 上不是单值的, 应将 Σ 分为几个单值曲面分片处理.

(2) 若**单值函数曲面** $\Sigma: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

前侧 ($\cos \alpha > 0$) 取正号; 后侧 ($\cos \alpha < 0$) 取负号

(3) 若**单值函数曲面** $\Sigma: y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx$$

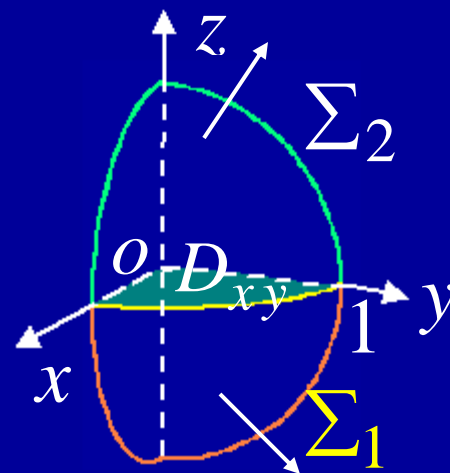
右侧 ($\cos \beta > 0$) 取正号; 左侧 ($\cos \beta < 0$) 取负号

- 注:**
- 1) 正负号取决于有向曲面侧法向量方向余弦正负值;
 - 2) 注意“投影”是往哪个坐标面上投的;
 - 3) 对不同坐标的曲面积分, 可将曲面 Σ 向不同坐标面投影, 化为投影域上不同的二重积分.

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第五卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

根据对称性 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy \neq 0$

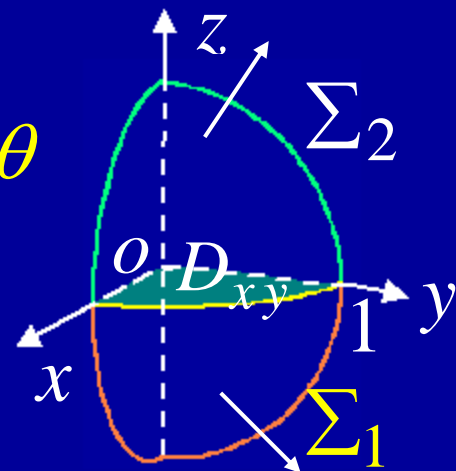


解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

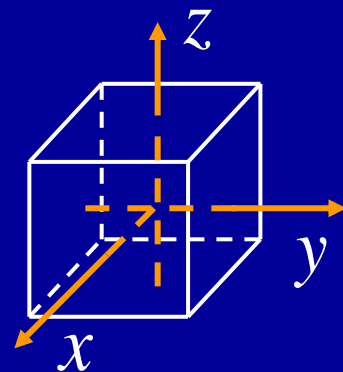
$$\begin{aligned}
\therefore \iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_2} xyz \, dx \, dy \\
&= -\iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx \, dy \\
&\quad + \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy$
其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.

解: 利用对称性.

$$\text{原式} = 3 \iint_{\Sigma} (z+x)dx dy$$



Σ 的顶部 $\Sigma_1: z = \frac{a}{2} \ (|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z = -\frac{a}{2} \ (|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2})$ 取下侧

$$= 3 \left[\iint_{\Sigma_1} (z+x)dx dy + \iint_{\Sigma_2} (z+x)dx dy \right]$$

$$= 3 \left[\iint_{D_{xy}} \left(\frac{a}{2} + x \right) dx dy - \iint_{D_{xy}} \left(-\frac{a}{2} + x \right) dx dy \right]$$

$$= 3a \iint_{D_{xy}} dx dy = 3a^3$$

例3. 求 $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0, z = 1$ 所围空间区域的边界曲面, 方向向外.

解: 有向曲面 Σ 分成三部分:

$\Sigma_1: z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 下侧

$\Sigma_2: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 上侧

$\Sigma_3: x^2 + y^2 = 1$ ($0 \leq z \leq 1$) 外侧

$$\begin{aligned} \text{所以 } \iint_{\Sigma} x^2 dy dz &= \iint_{\Sigma_3} x^2 dy dz \\ &= \iint_{D_1} (1 - y^2) dy dz - \iint_{D_1} (1 - y^2) dy dz = 0 \end{aligned}$$

$D_1: -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. (Σ_1, Σ_2 在 yOz 面上的投影为0)

$$\iint_{\Sigma} y^2 dz dx = \iint_{\Sigma_3} y^2 dz dx =$$

$$\iint_{D_2} (1-x^2) dz dx - \iint_{D_2} (1-x^2) dz dx = 0.$$

$$D_2: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

(Σ_1, Σ_2 在 xOz 面上的投影为0)

$$\iint_{\Sigma} z^2 dx dy = \iint_{\Sigma_1} z^2 dx dy + \iint_{\Sigma_2} z^2 dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} 0 dx dy + \iint_{D_{xy}} dx dy = \pi$$

(Σ_3 在 xOy 面上的投影为0)

故原式 $=\pi$.

说明: 计算一个完整的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \text{ 需向各个坐标面}$$

分别投影,为避免向各坐标面投影,也可利用两类曲面积分间的联系公式,化成第一型曲面积分,将其统一成一种形式,即将对三个坐标面上投影的积分转化为投影到一个坐标面上的积分.

为此,研究两类曲面积分之间的联系.

四、两类曲面积分的联系

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \right. \\ & \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \right] \end{aligned}$$

↓ 曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$\begin{aligned} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \right. \\ & \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \right] \Delta S_i \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad \underline{\text{面积微元}}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是有向曲面 Σ 指定侧的法向量的方向余弦.

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

——— (*)

曲面
面积
微元
向量

令 $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\vec{dS} = \vec{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy)$$

有向曲
面 Σ 指
定侧的
单位法
向量

向量形式 $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$

$A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$ (\vec{A} 在 \vec{n} 上的投影)

$$= \iint_{\Sigma} A_n dS$$

例：若假设 $\Sigma: z = z(x, y)$ 给出，光滑单值函数曲面.

在 xOy 面上投影区域为 D_{xy} . 假定 Σ 取上侧. 故

$$(*) = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} [P(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \\ Q(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \\ R(x, y, z(x, y)) \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right)] \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} [-P(x, y, z(x, y))z_x - Q(x, y, z(x, y))z_y + \\ R(x, y, z(x, y))] dx dy$$

Σ 取下侧:

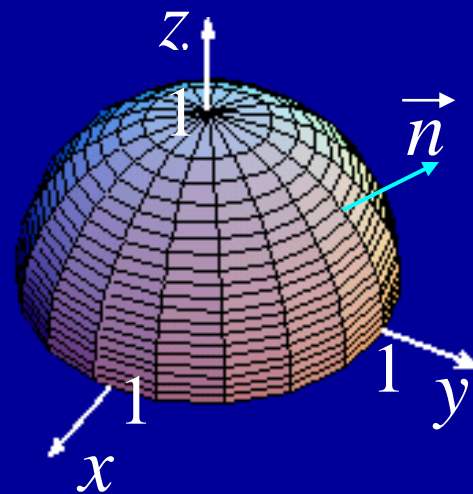
$$\begin{aligned} (*) &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[P(x, y, z(x, y)) z_x + \right. \\ &\quad \left. Q(x, y, z(x, y)) z_y - R(x, y, z(x, y)) \right] dx dy \end{aligned}$$

注: 这是把第一型曲面积分转化成投 xOy 面上的二重积分. 若方便可类似考虑投影到 yOz 面, zOx 面, 同时注意选定的侧.

例4. 设 $\Sigma: z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I = \iint_{\Sigma} z^2 \cos \gamma \, dS$.

解:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} z^2 \cos \gamma \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} z^2 \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (1-x^2-y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



例5. 位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{q}{r^3} (x, y, z) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

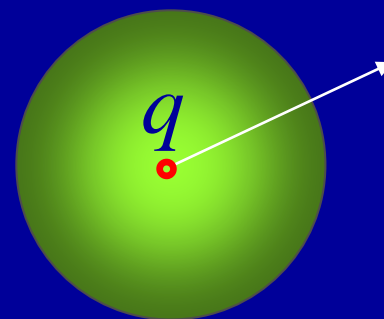
求 \vec{E} 通过球面 $\Sigma: r = R$ 外侧的电通量 Φ .

解: $\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

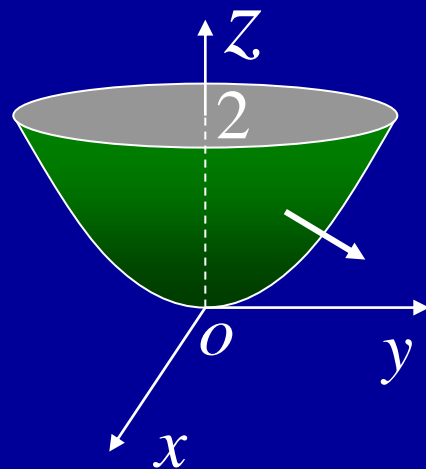
$$= \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS$$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{q}{r^2} dS = \frac{q}{R^2} \iint_{\Sigma} dS$$

$$= 4\pi q$$



例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 Σ 旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha dS \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} [(z^2 + x)(-x) - z] dx dy$$

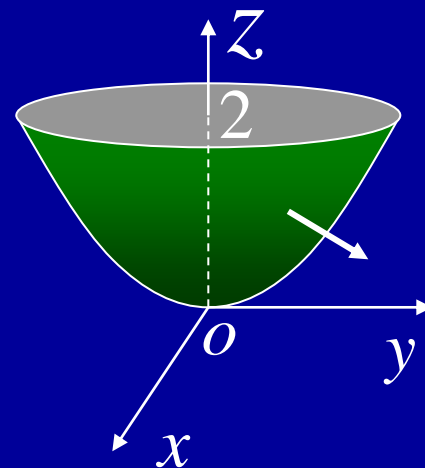
将 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 代入, 得

$$\text{原式} = -\iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right](-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^2) r dr$$

$$= 8\pi$$



例7. 求 $\iint_{\Sigma} xy \, dy \, dz + z^2 \, dz \, dx + (x^2 + y^2) \, dx \, dy$

Σ 为 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在柱面 $x^2 + y^2 = x$ 内的部分,
其法向量与 OZ 轴的夹角为锐角.

解: 原式 $= \iint_D \left[xy \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right)^2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + (x^2 + y^2) \right] dx dy$

(D: $x^2 + y^2 \leq x$)

$$= \iint_D \left(\frac{y - y^3}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + x^2 + y^2 \right) dx dy$$

对称性

$$= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 dr = \dots$$

例8. 设 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧, 求

$$I = \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$$

解: 平面 Σ 上侧法向量的方向余弦为:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ I &= \iint_{\Sigma} ([f(x, y, z) + x] \frac{1}{\sqrt{3}} + [2f(x, y, z) + y] (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &\quad + [f(x, y, z) + z] \frac{1}{\sqrt{3}}) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例9. 求 $I = \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$

Σ 为半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

解: $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = 0$, 因 Σ 关于 yOz 面对称, x^2 关于 x 偶函数,

化为二重积分是, 由前后侧两张曲面, 正负号抵消.

同理, $\iint_{\Sigma} y^2 dz dx = 0$.

$$\begin{aligned} I = \iint_{\Sigma} z^2 dx dy &= \iint_D (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= 4 \iint_{D_1} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{\pi}{2} a^4 \end{aligned}$$

注: 曲面对变量字母不具有轮换对称性.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 与 $y^2 + z^2 + x^2 = a^2 (x \geq 0)$

并非同一曲面.

例10. 求 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$,

Σ : $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 正法线方向朝上.

解: 积分平面具有轮换对称性, 轮换时正法线方向不变.

$$I = 3 \iint_{\Sigma} z dx dy = 3 \iint_D (1 - x - y) dx dy = \frac{1}{2}$$

$$D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

法二: 化为第一型曲面积分, 向上单位法向量 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

例11. $\oiint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为球面
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

解: Σ 对变量具有轮换对称性.

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} x^3 dy dz &= \oiint_{\Sigma} y^3 dz dx = \oiint_{\Sigma} z^3 dx dy \\ \oiint_{\Sigma} z^3 dx dy &= \iint_D (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy \\ &\quad - \iint_D -(R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} r dr = \frac{4}{5} \pi R^5\end{aligned}$$

$$\text{原式} = 3 \oiint_{\Sigma} z^3 dx dy = \frac{12}{5} \pi R^5$$

注： 利用对称性可简化计算，对于数量值函数积分
(黎曼积分：二重、三重积分，第一型曲线、曲面积分)
利用积分区域对称性和被积函数奇偶性.

向量值函数积分 (第二型曲线、曲面积分), 还需要
考虑积分曲线、曲面的方向性. 在利用对称性时, 易出错.
一般情形下, 建议先化成定(二重)积分后, 用对称性.

当然, 在易于判断情况下, 直接利用对称性简化计算.

备用题 求 $I = \oiint_{\Sigma} \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} \right)$, 其中

$$\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 取外侧.}$$

解:
$$\oiint_{\Sigma} \frac{dxdy}{z} = \frac{2}{c} \iint_{D_{x,y}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy$$

注意±号

$$D_{x,y}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, dxdy = abr dr d\theta$$

$$= \frac{2}{c} ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dx dy}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$

利用轮换对称性

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dy dz}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dz dx}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\therefore I = 4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

作业

P231 3, 4: (1)