第二节

偏 导 数

一、 偏导数概念及其计算

二、高阶偏导数

引入：

一元函数时，许多实际问题需要研究函数的变化率，即因变量随自变量变化而变化的快慢程度. ——**导数**

多元函数时，同样需要讨论它的变化率，但由于自变量不止一个，因变量与自变量关系要比一元函数复杂的多，许多问题中，常需考虑只有一个自变量变化而其余自变量固定不变时函数的变化率问题.

——**产生偏导数概念**

一、 偏导数定义及其计算

以$z=f(x,y)$为例，如果只有自变量x变化，而自变量y固定 (即看作常量)，这时$z=f(x,y)$就是x 的一元函数，此函数对x的导数，就称为二元函数$z=f(x,y)$ 对于x 的偏导数.

1. 定义： 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, 当y固定在y_0, 而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数.

称为$f(x,y)$在(x_0,y_0)处关于x的偏增量

记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$

$z_x\big|_{(x_0,y_0)}$; $f_x(x_0,y_0)$; $z'_x(x_0,y_0)$; $f'_x(x_0,y_0)$

注意: $$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

同样可定义对 y 的偏导数

$$\Delta_y z = f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

2. 偏导函数定义

若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数存在，则这个偏导数就是D内点(x, y)的函数，称其为$z = f(x, y)$对自变量x的偏导函数，简称偏导数.

记作 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x, f_x(x, y), z'_x, f'_x(x, y)$

分析： 此定义，对于任意一点$(x_0, y_0) \in D$,按照在该点处对x 求偏导——对应一个确定数值$f_x'(x_0, y_0)$构成了一个定义在D上新函数，这个新函数叫做原来函数$z = f(x, y)$关于自变量x的偏导数.

注： 偏导函数$f_x'(x, y)$在点(x_0, y_0)处的值就是函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处关于x的偏导数$f_x'(x_0, y_0)$.

类似地，可定义$z = f(x, y)$对y的偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z_y, \quad f_y(x, y), \quad z_y', \quad f_y'(x, y)$$

3. 偏导数的概念可以推广到二元以上的函数

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的

偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y, z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x, y, z) = ?$$

4. 偏导数的计算

多元函数对某个自变量的偏导数，只要把其它自变量看作常数，从而变成这个自变量的一元函数的求导问题.

例1． 求$f(x,y)=y\sin(xy)$的偏导数.

解： $f_x(x,y)=y\cos(xy)y=y^2\cos(xy)$

$$f_y(x,y)=\sin(xy)+xy\cos(xy)$$

例2． 求$f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$的偏导数.

解： $f_x(x,y)=\dfrac{-2y(y+\cos x)'}{(y+\cos x)^2}=\dfrac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$

$$f_y(x,y)=\frac{2(y+\cos x)-2y}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$$

例3． 求 $u = lncos(xyz)$的偏导数.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos(xyz)}[-\sin(xyz)yz] = \dfrac{-yz\sin(xyz)}{\cos(xyz)}$

由函数关于变量x, y, z的对称性. 可得其它.

例4． 求$z = (1 + xy)^y$的偏导数.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y(1 + xy)^{y-1}y = y^2(1 + xy)^{y-1}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)} = (1 + xy)^y\left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1+xy}\right]$$

例5. 求 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在(0,0)处的偏导数.

解: $$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0^2}{(\Delta x)^2+0^4}-0}{\Delta x}=0.$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

例6. 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1\,,\,2)$处的偏导数.

解法1: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y\,,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot1 + 3\cdot2 = 8,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot1 + 2\cdot2 = 7$$

解法2: $z\big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)} = (2x+6)\Big|_{x=1} = 8$$

$$z\big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)} = (3+2y)\Big|_{y=2} = 7$$

总结： 求函数在一点处的偏导数方法：

(1) 利用偏导数的定义，求极限；

(2) 先求偏导函数，再代入；

(3) 例求$f_y(x_0,y_0)$，先把$x=x_0$的值代入函数

$z=f(x,y)$ 得到关于y的函数，对它关于y

求导数，再代入$y=y_0$的值.

二、偏导数几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在(x_0,y_0)处切线的斜率.

问：$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处偏导几何意义?

考虑 $f_x'(x_0,y_0)$：

(1) $f_x'(x_0,y_0)$是一元函数$f(x,y_0)$在x_0处的导数.

(2) $z=f(x,y)$是空间中一张曲面，$z=f(x,y_0)$的图像是曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$的交线.

(3) $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$对应于曲面上点M.

从而, 由一元函数导数的几何意义:

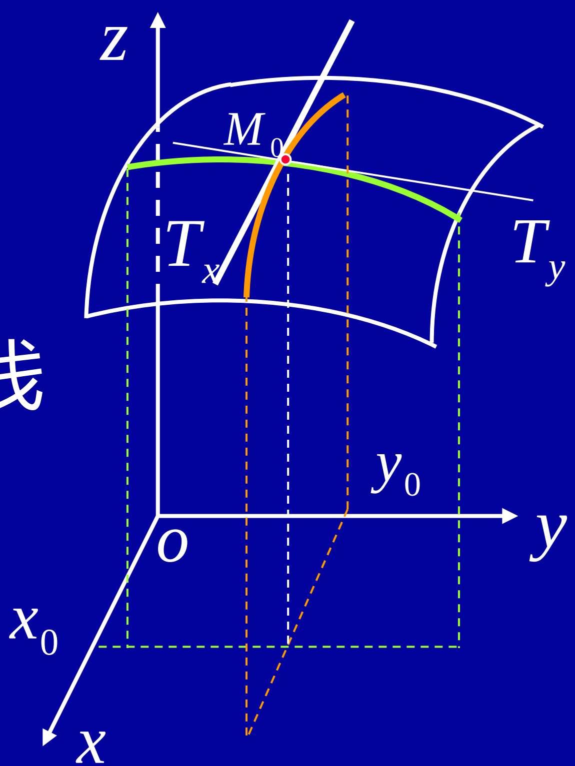
$f_x'(x_0, y_0)$几何意义是曲面$z = f(x, y)$与平面$y = y_0$

的交线L在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切线对x轴的斜率.

空间曲线L: $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.



$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点M_0处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

三、偏导数存在与连续关系

一元：　可导 $\Rightarrow$ 连续，连续 $\nRightarrow$ 可导

多元：　多元函数在一点偏导存在与该点连续没有关系.

理由：　$f_x(x_0, y_0)$仅与$z = f(x, y)$在$y = y_0$上的值有关.

$f_y(x_0, y_0)$仅与$z = f(x, y)$在$x = x_0$上的值有关.

这两个偏导数存在性及其值与(x_0, y_0)邻域内其它点上的函数值无关，因而不能保证 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ 存在，更谈不上连续.

事实上，$f_x(x_0,y_0)$存在只能保证点P沿着平行于x轴方向趋于P_0时，函数值$f(P)$的变化趋于$f(P_0)$.

$f_y(x_0,y_0)$类似. 因此不能保证P按任何方式趋于P_0时，函数值$f(P)$的变化趋势.

例如: 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在整个xOy面上都连续.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

可见 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 与 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在.

函数在某点各偏导数都存在，但在该点**不一定连续**.

例如， $$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

显然 $$f_x(0, 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 0)\Big|_{x=0} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0, y)\Big|_{y=0} = 0$$

前面证过 $f(x, y)$ 在点$(0, 0)$极限不存在，更不连续.

例1. 设 $z = x^y \ (x > 0,\ 且\ x \neq 1)$，求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证: $\because \quad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例2. 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数 .

解: $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

例3. 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 为常数)，

求证: $\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -1$

证: $p = \frac{RT}{V}$, $\quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$

$V = \frac{RT}{p}$, $\quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}$

$T = \frac{pV}{R}$, $\quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}$

$$\therefore \ \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{pV} = -1$$

说明: 此例表明，偏导数记号是一个整体记号，不能看作分子与分母的商！

例4. 设$f_x'(x,y)=3x^2y+y^2$，$f(x,x^2)=x^2$，求$f(x,y)$.

解：$f(x,y)=\int(3x^2y+y^2)\,dx$

$$=x^3y+xy^2+\varphi(y)$$

其中$\varphi(y)$是y的待定函数.

由 $f(x,x^2)=x^2=2x^5+\varphi(x^2)$

知：$\varphi(x^2)\ =x^2-2x^5$　$\varphi(y)$=$y-2y^{\frac{5}{2}}$

，

因此, $f(x,y)=x^3y+xy^2+y-2y^{\frac{5}{2}}$.

三、高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

则在 D 内它们仍是x,y的函数, 可考虑它们的偏导问题.

定义： 若上面两个偏导数仍在D内有偏导数，则称它们的偏导数为$z=f(x,y)$的二阶偏导数. 按对自变量求导顺序不同，有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$ 或记 $f''_{xx}(x,y)$, z''_{xx}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$ 或记 f''_{xy}, z''_{xy}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

(混合偏导)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);$$ 或记 f''_{yx}, z''_{yx}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

(混合偏导)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$ 或记 f''_{yy}, z''_{yy}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

这些二阶偏导数仍是关于x,y的函数,可继续考虑它们的偏导数. 类似可定义三阶、四阶….以及n阶导数.

二元函数的三阶偏导数有 8个;

n阶偏导数有2^n个.

2是变量个数,
n是偏导数的阶数.

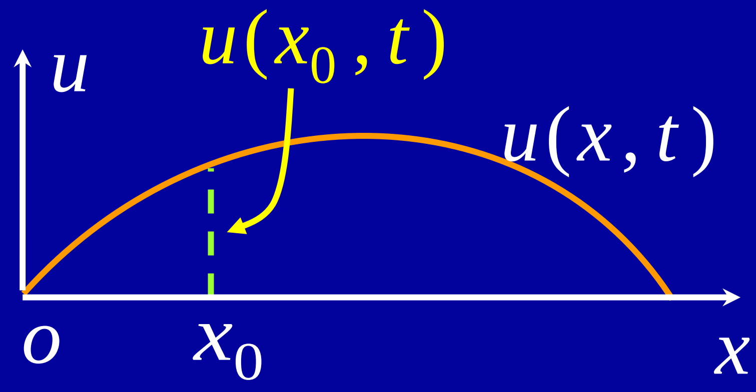
例如, $z=f(x,y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z=f(x,y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数, 再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

实例: 研究弦在点 x_0 处的振动速度与加速度，就是将振幅 $u(x,t)$ 中的 x 固定于 x_0 处, 求 $u(x_0,t)$ 关于 t 的一阶导数与二阶导数.



例1. 证明函数 $u=\dfrac{1}{r},\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

证： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}$

$=r^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

利用对称性，有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3y^2}{r^5},\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3z^2}{r^5}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(\boxed{x^2+y^2+z^2})}{r^5}=0$$

例2. 求函数 $z=e^{x+2y}$ 的二阶偏导数及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

解：

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=2e^{x+2y}$$

注意:此处 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 但这一结论并不总成立.

定理 若$f_{xy}(x,y)$和$f_{yx}(x,y)$在区域D内连续, 则在D内,

这两个二阶混合偏导数必相等.

(二阶混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关)

本定理对 n 元函数的高阶混合导数也成立.

例如, 对三元函数 $u = f(x, y, z)$, 当三阶混合偏导数

在点 (x, y, z) **连续**时, 有

$$f_{xyz}(x,y,z) = f_{yzx}(x,y,z) = f_{zxy}(x,y,z)$$

$$= f_{xzy}(x,y,z) = f_{yxz}(x,y,z) = f_{zyx}(x,y,z)$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数，

而初等函数在其定义区域内是连续的，

故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

作 业

P71 1: (4),(5)， 3, 5,

6: (3), 7， 8

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\left\{\begin{array}{l}\text{先代后求}\\ \text{先求后代}\\ \text{利用定义}\end{array}\right.$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法