习题课

重积分的计算 及应用

2. (1) 设 Ω_1 由 $x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0$ 确定，Ω_2 由 $x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ 所确定，则 ___C___

$(A)\ \iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$

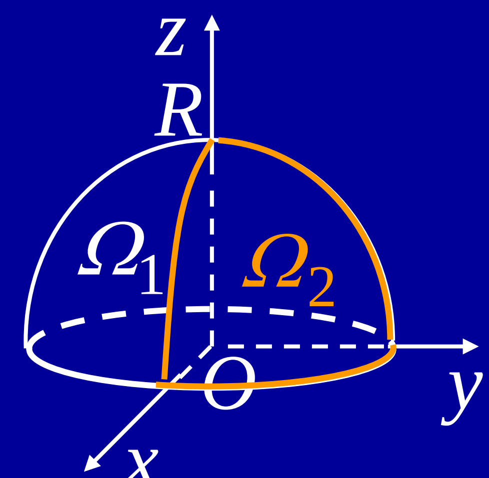
$(B)\ \iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$

$(C)\ \iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$

$(D)\ \iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$

Ω_1：上半球

Ω_2：第一卦限部分



提示: 利用对称性可知，$(A), (B), (D)$ 左边为 0，右边为正， 显然不对，故选 (C)

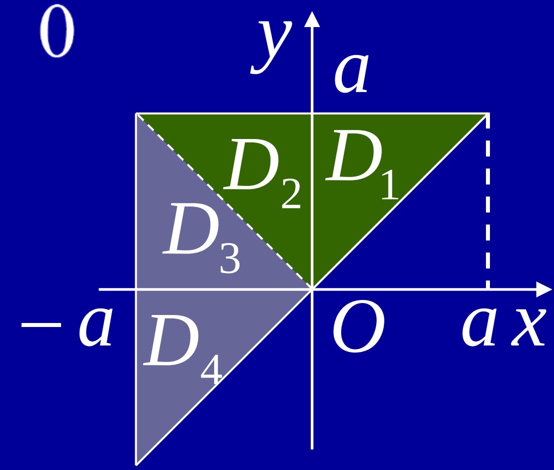
目录 上页 下页 返回 结束

2 (2). $D=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le a, x\le y\le a\}$, $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a, x\le y\le a\}$, 则

$$\iint_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\quad A \quad}$$

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (B) $2\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (D) 0



提示: 如图 , $D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$

由对称性知 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

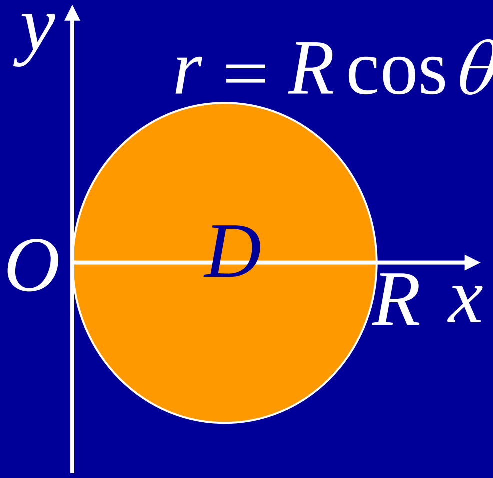
$$\cos x\sin y\begin{cases}\text{在 } D_3\cup D_4 \text{ 上是关于 } y \text{ 的奇函数}\\ \text{在 } D_1\cup D_2 \text{ 上是关于 } x \text{ 的偶函数}\end{cases}$$

3(3). 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

其中D 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D:\begin{cases} 0 \le r \le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



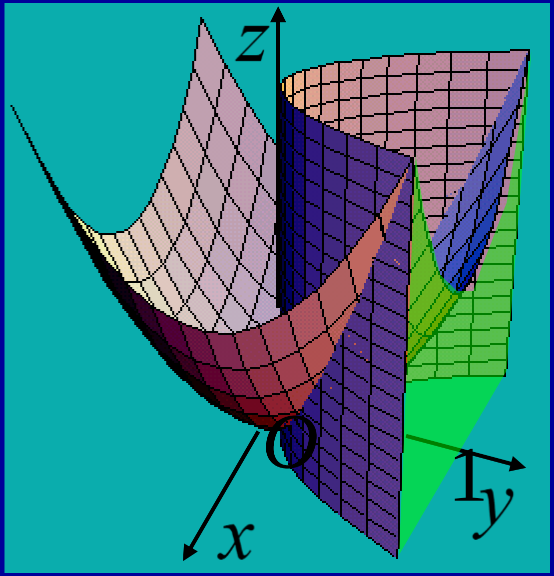
原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r$

$$= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}R^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$$

8. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分,

其中Ω由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1$, $z=0$

所围成的闭区域 .

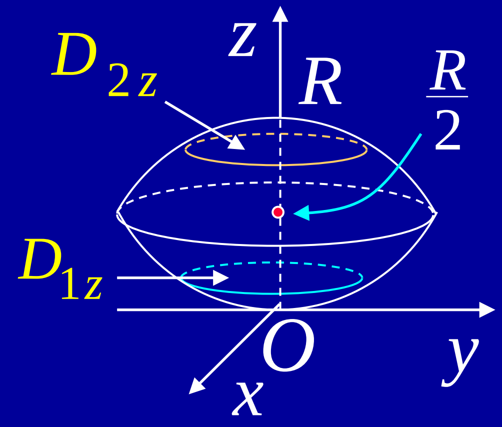


提示: 积分域为

$$\Omega:\begin{cases} 0\le z\le x^2+y^2 \\ x^2\le y\le 1 \\ -1\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

9 (1). 计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ ($R>0$)的公共部分.



提示: 由于被积函数缺 x , y ,

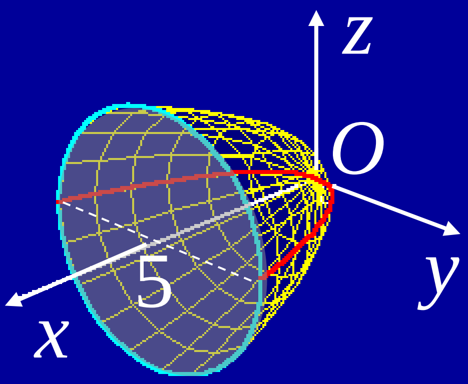
利用"**先二后一**" 计算方便 .

$$\text{原式} = \int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{1z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{2z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{R/2} z^2 \cdot \pi(2Rz - z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{R/2}^{R} z^2 \cdot \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5$$

9 (3). 计算三重积分$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$是由$xOy$平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面$x=5$所围成的闭区域 .



提示: 利用柱坐标 $\begin{cases} x=x \\ y=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{cases}$

$$\Omega:\begin{cases} \frac{1}{2}r^2\le x\le 5 \\ 0\le r\le\sqrt{10} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

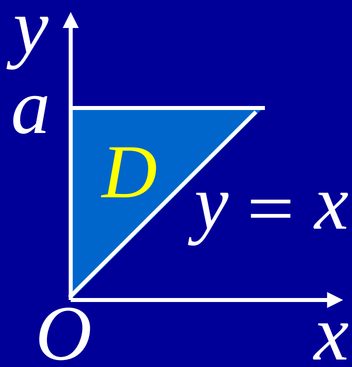
$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}r^3\,\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x=\frac{250}{3}\pi$$

5. 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$$

提示: 左端积分区域如图,

交换积分顺序即可证得.



9 (2). 求 $\iiint_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$是

由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域 .

提示: 被积函数在对称域 Ω 上关于 z 为奇函数 , 利用

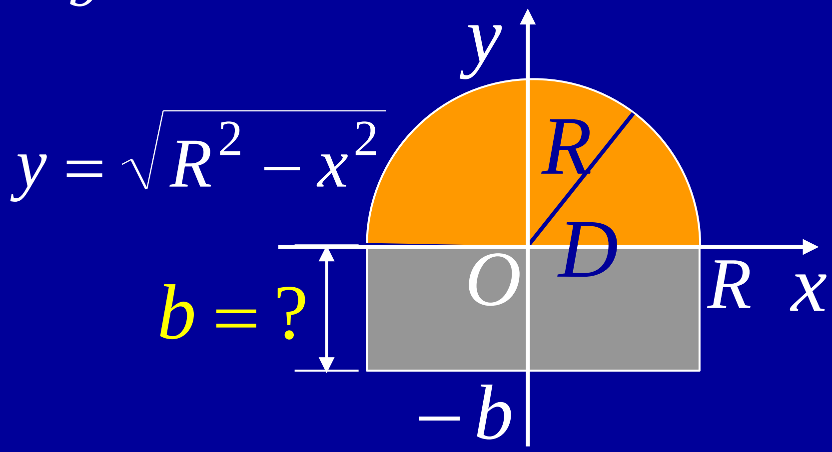
对称性可知原式为 0.

12. 在均匀的半径为R的圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，使整个薄片的重心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片的另一边长度应为多少?

提示: 建立坐标系如图. 由已知可知 $\bar{y}=0$, 即有

$$0=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}R^3-Rb^2$$



由此解得 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}R$

例1. 计算二重积分 $I=\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中:

(1) D为圆域 $x^2+y^2\le 1$;

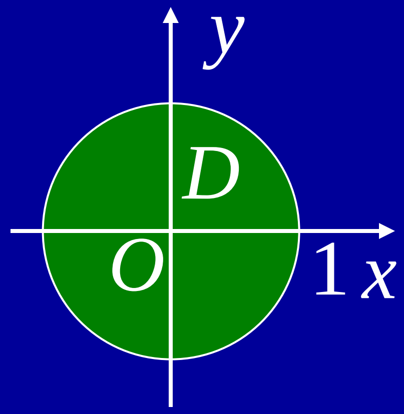
(2) D由直线 $y=x$, $y=-1$, $x=1$ 围成 .

解: (1) 利用对称性.

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$



$$I=\iint_D (x^2+xy\mathrm{e}^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

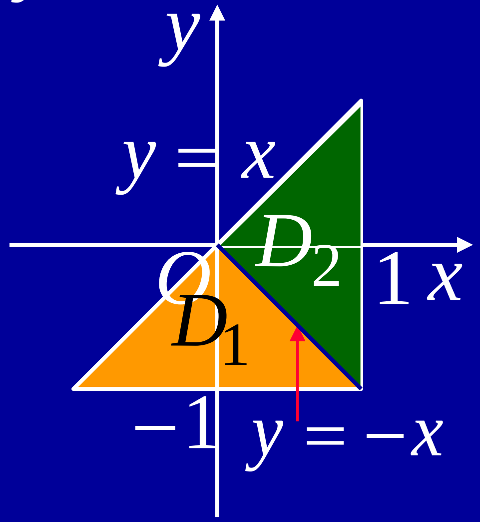
(2) 积分域如图: 添加辅助线 $y=-x$, 将D 分为 D_1, D_2, 利用对称性, 得

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1} xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+0+0$$

$$=\frac{2}{3}$$



例2. 计算二重积分 $\iint_D (5x+3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 所围成的平面域 .

解: $I = 5\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 3\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

积分区域 $(x+1)^2+(y-2)^2 \le 3^2$

其形心坐标为: $\bar{x}=-1,\ \bar{y}=2$

面积为: $A = 9\pi$

$= 5\cdot\bar{x}A + 3\cdot\bar{y}A$

$= [5\cdot(-1)+3\cdot 2]A = 9\pi$

形心坐标

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

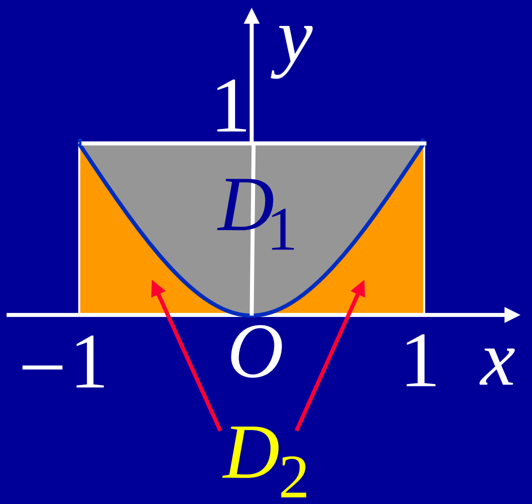
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3. 计算二重积分

$$(1)\ I=\iint_D \operatorname{sgn}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$$

$$(2)\ I=\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 其中D为圆域

$x^2+y^2\le 1$在第一象限部分.



解: (1) 作辅助线 $y=x^2$ 把D分成

D_1, D_2两部分, 则

$$I=\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

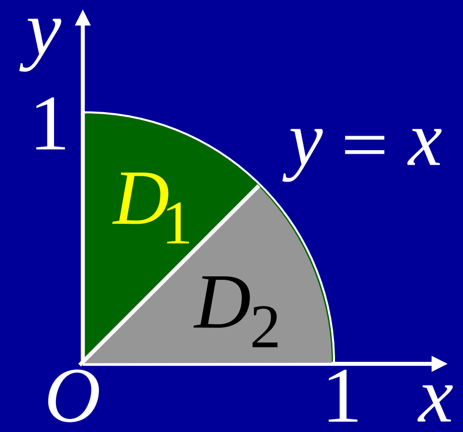
(2) **提示:**

$$I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作辅助线 $y=x$ 将 D 分成

D_1, D_2 两部分

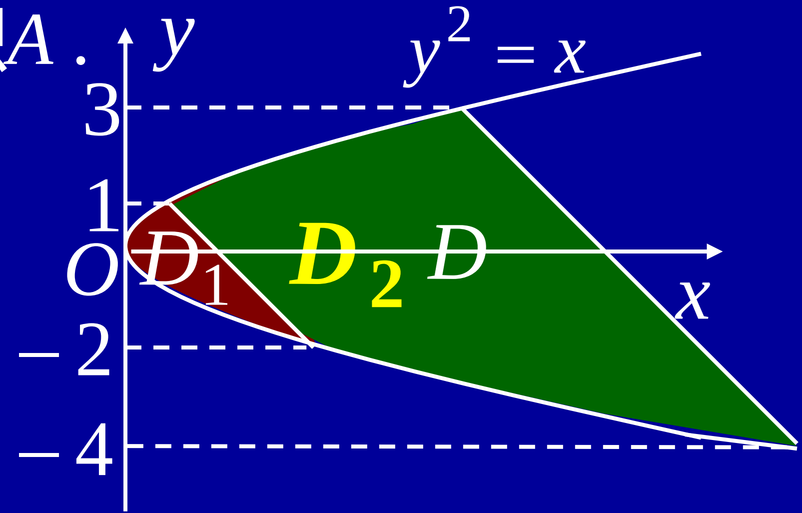


$$=2\iint_{D_2}(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\cdots=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$$

说明: 若不用对称性, 需分块积分以去掉绝对值符号.

例4. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y-2=0$ 及 $x+y-12=0$ 所围区域 D 的面积A .



解:如图所示 $D=D_2\setminus D_1$,

$$A=\iint_{D_2}\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-4}^{3}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{12-y}\mathrm{d}x-\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}\mathrm{d}x$$

$$=\Big[12y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{3}y^3\Big]_{-4}^{3}-\Big[2y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{3}y^3\Big]_{-2}^{1}=52\frac{2}{3}$$

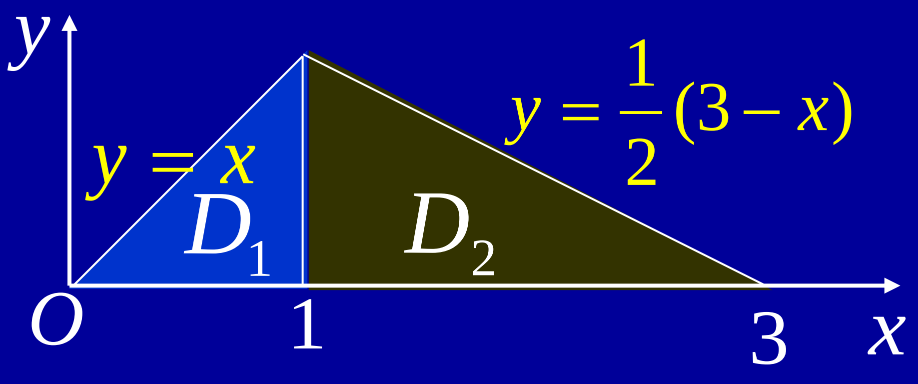
注: 计算 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 时, 若 $f(x,y)$ 可扩展到 D_1 上可积 , 则也可利用上述方法简化计算.

例5. 交换积分顺序计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y+\int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{3-x}{2}} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$

解: 积分域如图.

$$I=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{3-2y}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x$$



$$=3\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$$

$$=3(\mathrm{e}-2)$$

例6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，**证明**

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明: 左端 $=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$

$$=\iint_D f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{D:\begin{cases} a\le x\le b \\ a\le y\le b\end{cases}}$$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D [f^2(x)+f^2(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

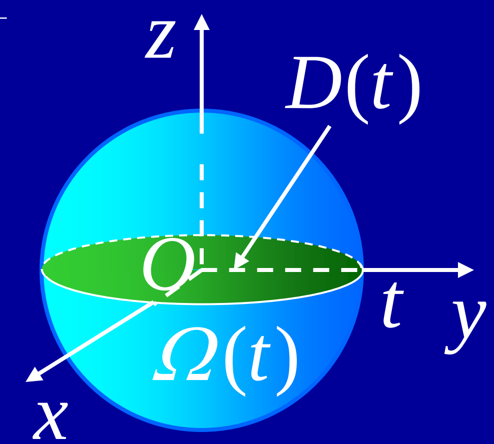
$$=\iint_D f^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$=(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ $=$ 右端

例7. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$



其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

(2003考研)

解: (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t)=2\frac{t\,f(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$\because f(x)$ 恒大于零, $\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$,

故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 问题转化为证 $t>0$时, $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$$

即证 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r]^2>0$

因 $$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0$$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增, 又因 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故有

$$g(t)>g(0)=0\qquad(t>0)$$

因此 $t>0$ 时, $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0.$

目录 上页 下页 返回 结束

例8. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解： 利用“先二后一”计算.

$$D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^c\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^c\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$

例9. 求球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 包含在锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 内那一部分的面积.

解： 所求曲面的方程为 $x^2+y^2+z^2=2Rz$

于是 $z_x=\dfrac{-x}{z-R}$ $\quad z_y=\dfrac{-y}{z-R}$

在xOy面上的投影区域为D：$x^2+y^2\le\dfrac{3}{4}R^2$

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}dx\,dy$$

$$= R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \pi R^2$$

注：计算曲面面积时，注意到 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$

中坐标(x, y, z)满足曲面方程，利用这一点可简化计算.

本例中：$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 + (z - R)^2}{(z - R)^2}}$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$$

例10. 求球体$x^2+y^2+z^2\le a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$所截得的那部分立体的体积. $(a>0)$

解法1：二重积分几何意义

对称性知：体积等于位于第一卦限立体的体积4倍 .

$$V=4\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

解法2：三重积分（柱面坐标）

体积等于位于第一卦限立体的体积4倍

$$V = 4V' = 4\iiint_{\Omega'} dxdydz$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

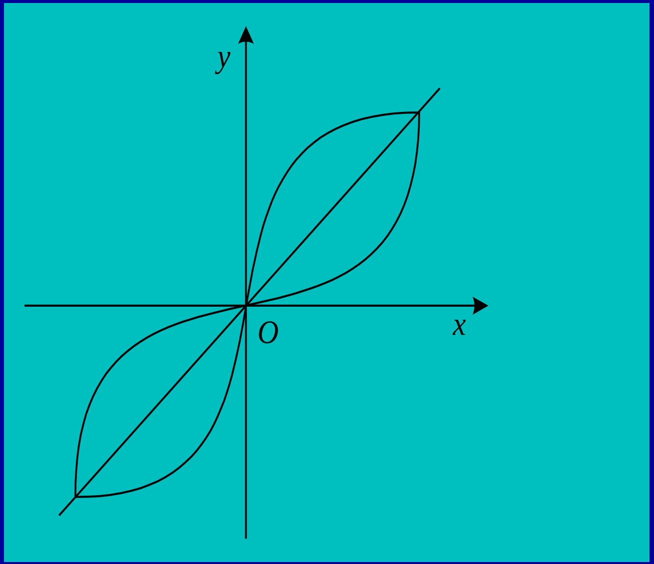
例11. 求由曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$所围区域面积.

解：曲线极坐标方程：

$$r^2=a^2\sin 2\theta$$

由$\sin 2\theta \geq 0$，得到θ范围为：

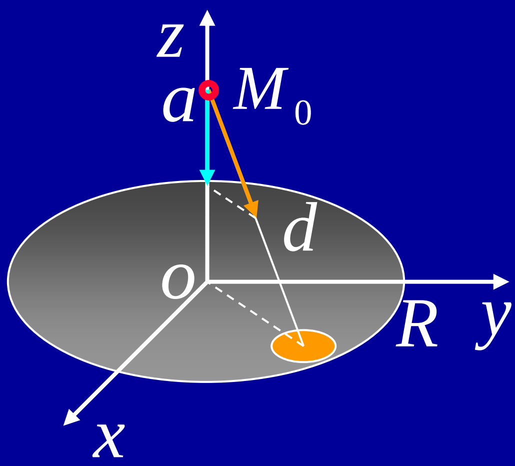
$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \text{ 和 } \pi\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi$$



所求面积是第一象限内那部分面积的 2倍.

$$S=2S_1=2\iint_{D_1}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}r\,dr=a^2$$

例12. 设面密度为μ ,半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2$, $z=0$,求它对位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>0)$ 处的单位质量质点的引力.



解: 由对称性知引力$\vec{F}=(0\,,0\,,F_z)$

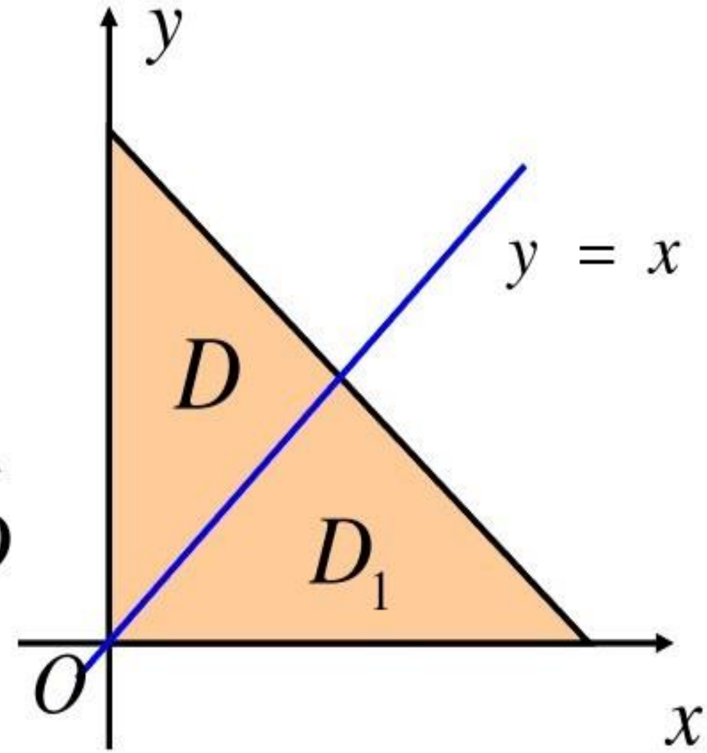
$$\mathrm{d}F_z=-G\frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{d^2}\cdot\frac{a}{d}=-Ga\mu\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\ F_z=-Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=-Ga\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}}=2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

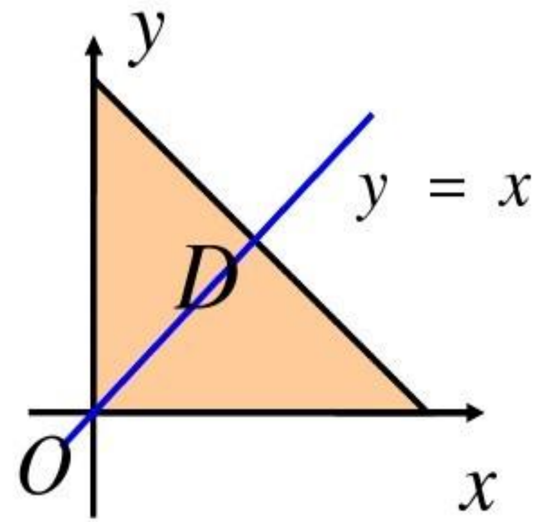
定理 2

若有界闭区域 D 与区域 D_1 关于直线 $y = x$ 对称，$f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

推论 2.1

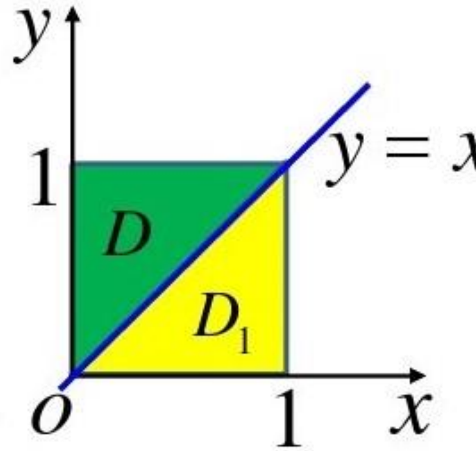


若有界闭区域D关于直线$y = x$对称,$f(x, y)$在区域D上连续，则

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(y, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$,

$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$，证明 $I = \dfrac{A^2}{2}$.



证明: 注意到被积函数关于 x 和 y 对称，考虑利用定理2，补区域 D_1 使其与区域 D 关于直线 $y=x$ 对称。

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x = \iint_D f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} f(y)f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1,$$

$$\therefore I + I_1 = 2I = \iint_{D\cup D_1} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = A^2,\quad I = \frac{A^2}{2}.$$

证毕

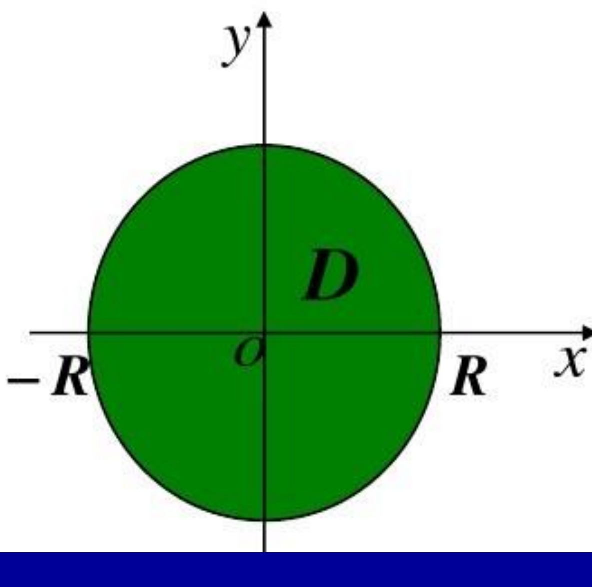
例5.

设$f(x)$为取值恒大于0的连续函数，区域

$D:\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2(R>0)\right\}$，$a$与$b$ 是两个

非零常数，则二重积分

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}.$$



解：由于区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，根据

推论2.1可得

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy = \iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy,$$

从而 $$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}+\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\right]dxdy$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D dxdy=\frac{a+b}{2}\pi R^2.$$