第一部分作业

1 .指出下列函数在所给区间上适合拉格朗日定理的条件，并找出存在于所给区间内的ξ值；

1)$y = x^3, [0, a]$;　　　2)$y = \ln x, [1, e]$

2.证明：方程$x^n + px + q = 0, n \in \mathbf{N}$,当$n$为偶数时最多有两个实根，当$n$为奇数时，最多有三个实根；

3.设$f(x)$在(a, b)内二阶可导，$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$,且$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,求证，存在$\xi \in (a, b)$,使得$f''(\xi) = 0$

4.证明：

1)$py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y), (0 < y < x, p > 1$;

2)$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi sgn(x), (|x| \ge 1)$;

5) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, (0 < x < \frac{\pi}{2})$;

6) $\sin x + \tan x > 2x, (0 < x < \frac{\pi}{2})$;

5.设$f(x)$在$[a,b]$上可导，证明：存在$\xi \in (a,b)$,使得$2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$;

2.求下列不定式极限

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^n (n>0)$; 2) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}$;

3) $\lim\limits_{k_2\to k_1} \dfrac{k_2}{k_1-k_2}(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t})$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$;　　　6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2})^{\sin x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}$;　　　8) $\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}]$;

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^{x^x}-1)$;　　　10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln chx}{\sqrt[m]{chx}-\sqrt[n]{chx}}$;　　　12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

3.设函数$y=f(x)$在$x=0$的某邻域内具有n阶导数，且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$,试用Cauchy中值定理证明：

$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$

4.讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性.

5. 利用泰勒公式，求下列函数的极限：

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1+x)]}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$;

6. 设$f(x)$在区间I上恒有非负二阶导数，证明：$\forall\lambda\in(0,1),x_1,x_2\in I$ 有

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

7.设$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内具有连续的二阶导数，且$f''(x)\neq 0$,，证明：若$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)(0<\theta<1)$,则$\theta\to\frac{1}{2}(h\to 0)$

8. 求下列各函数的单调区间

1)$f(x)=x^3-3x^2-9x+14;$　　　2)$f(x)=x^2e^{-x};$

9. 若连续函数$f(x)$在点x_0取得极大值，试问是否存在$\delta>0$,使$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$ 内单调增加，在$(x_0,x_0+\delta)$内单调减少？研究函数$f(x)=\begin{cases}x^2(\sin^2\frac{1}{x}-1), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$x_0=0$点附近的极值性质；

10.设函数$f(x)$在定义域内可导，$y=f(x)$的图形如图1所示，则

导函数$f'(x)$的图形为以下4个图形中的哪一个？

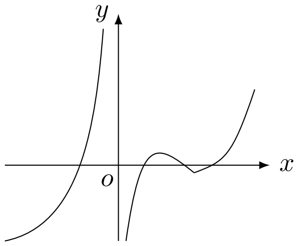
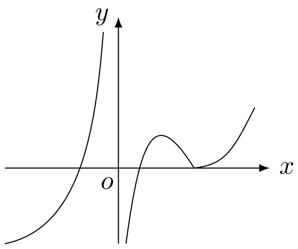
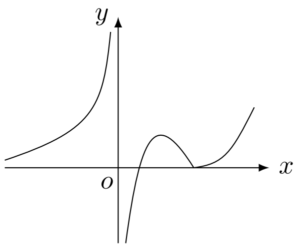


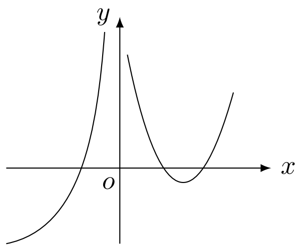
图1



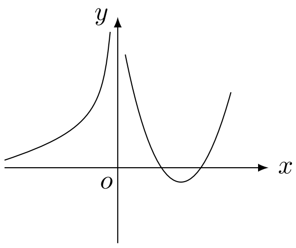
(A)



(B)



(C)



(D)

11. 设$f(0)=0, f'(x)$单调增,证明:$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$单调增;

12.试决定$y=k(x^2-3)^2$中的k值，使曲线的拐点处的法线通过原点；

13.设$y = f(x)$在$U(x_0)$内具有连续的三阶导数，如果$f''(x_0) =$

$0, f'''(x_0) \neq 0$,试问$(x_0, f(x_0))$是否是拐点？为什么？

14.试证明：曲线$y = \frac{x-1}{x^2+1}$有三个拐点位于同一直线上.

15.试问a为何值时，函数$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$在$x = \frac{\pi}{3}$处取得极值？它是极大值还是极小值？并求极值。

16. 设矩形内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,求其中面积最大的矩形的边长；

17.设$f''(x)$在 $[0,1]$上连续，且$f''(x) > 0, f(0) = f(1) = 0$, 若$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$,证明： $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geq 8$

第三部分：微分中值定理及导数的应用

一、选择题

1.若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=$

$A.0, B.6.C.36.D.\infty$

2. 设$[0,1]$ 上，$f''(x)>0$,则下列不等式成立的是

$A.f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$　$B.f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

$C.f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　$D.f'(1)<f'(0)<f(1)-f(0)$

3.设$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在$x=a$处

$A.f(x)$ 的导数存在且$f'(a)\neq 0$, $B.f(x)$取得极大值

$C.f(x)$取得极小值$D.f(x)$的导数不存在

4.设k 为任意实数，则方程$x^3-3x+k=0$ 在$[-1,1]$上

$A.$ 一定没有实根，$B.$最多只有一个实根

$C.$最多有两个互异的实根，$D.$最多有三个互异的实根

5.设$f(x),g(x)$在x_0 的某个去心邻域内可导，$g'(x)\neq 0$,且适合$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$是$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$的

$A.$ 充分非必要条件，$B.$必要非充分条件

$C.$必要非充分条件，$D.$既非充分也非必要条件

6. 设$f(x)$在区间(a,b)内二阶可导，$x_0 \in (a,b)$,且$f'(x_0) \neq 0, f''(x_0) = 0$, 则$f(x)$

A.在$x = x_0$处不取极值，但$(x_0, f(x_0))$是其图形的拐点，

B.在$x = x_0$处不取极值，但$(x_0, f(x_0))$可能是其图形的拐点，

C.在$x = x_0$处可能取极值，但$(x_0, f(x_0))$也可能是其图形的拐点，

D.在$x = x_0$处不取极值，但$(x_0, f(x_0))$也不是其图形的拐点

7. 设$f(x)$在$x = 0$的某邻域内可导，且$f'(0) = 0, \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\sin x} = -\frac{1}{2}$,则

A.$f(0)$ 一定是$f(x)$的一个极大值，

B.$f(0)$ 一定是$f(x)$的一个极小值，

C.$(0, f(0))$ 一定是$f(x)$的一个拐点，

D.在$f(0)$一定不是$f(x)$的一个极小值

8. 设$f(x)$在$x = x_0$的某邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} = -1$,则

$A.f'(x_0) = -1, B.f(x)$在x_0的某个邻域内单调递减，C.$f(x_0)$ 是$f(x)$的一个极小值，D.$f(x_0)$ 是$f(x)$的一个极大值，

9. 设$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$严格单调减少，$f(x)$在$x = x_0$处取极大值，则$g(f(x))$在$x = x_0$处

A. 取极大值，B.取极小值，C.一定不取极值，D. 是否取极值不能判定

10. 设$f'(x)=[\varphi(x)]^2$, 而$\varphi(x)>0,\varphi'$单调减少，$\varphi'(x_0)=0$,则

$A.(x_0,f(x_0))$是曲线$f(x)$的拐点，$B.x=x_0$ 为$f(x)$的极大值点，$C.$曲线$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为凹弧，$D.f(x_0)$为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的最小值

11.函数$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k(k>0)$在$(0,+\infty)$的零点的个数为

$A.0,B.1.C.2.D.3$

12.设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b),f''(x)\neq 0$,则下列命题成立的是

$A.$在(a,b)区间内$f'(x)\neq 0$

$B.$至少存在$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$,使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

$C.$存在唯一$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$

$D.$至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f=0$

13.设在$[0,1]$上，$f''(x)>0$,则下列不等式成立的是

$A.f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$ $B.f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

$C.f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ $D.f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

14. 设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$,则$f^{(n)}(0)=$

$A.0, B.a_n.C.a_0.D.n!a_0$

15.曲线$y=(x-1)^2(x-3)^2$拐点的个数为

$A.0, B.1.C.2.D.3$

16.设$f(x)$在x_0的某邻域内有连续三阶导数，若$f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)<0$，则

$A.f(x)$在x_0处取极大值，$B.f(x)$在x_0处取极小值

$C.f(x)$在x_0某个邻域内单调减少，$D.$点$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

17.设二阶可导，并且处处满足方程$f''(x)+3(f'(x))^2+2e^x f(x)=0$,若$x_0$是该函数的一个驻点且$f(x_0)<0$,则$f(x)$在点$x_0$

$A.$取极大值，$B.$取极小值,$C.$不取极值，$D.$不能确定

二、解答题

1. 求极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\sin x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\ln(\sin^3 x+e^x)-x}$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

(6)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}=0$

2.设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=$

A(A为有限值),试证至少存在一点ξ,使得$f'(\xi)=0$.

3.试证明：若$f(x)$满足条件(1)在x_0点连续，(2)在x_0的某去心邻域内可导，(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$(或$\infty$),则$f'(x_0)=A$(或$\infty$).

4. 设$f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内连续可导，且$x>a$,时$f'(x)>1$,证明：若$f(a)<0$, 则方程$f(x)=0$,在$(a,a-f(a))$内有且仅有一个实根.

5.若函数$f(x)$在(a,b)内具有二阶导数，且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,其中$a<x_1<x_2<x_3<b$,证明：在(x_1,x_3)内至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.

6.证明不等式

(1) 当$b > a > e$时，$\frac{a}{b} < \frac{\ln a}{\ln b}$.

(2)当$x > 0$时，$e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$.

(3)当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$

(4)当$x > 0$时，$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$

7.设$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$,证明多项式$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots +$

$a_n x^n$在$(0,1)$内至少有一个零点.

8. 设$f(x)$ 在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$f(a)=0$,证明:存在一点$\xi\in(0,a)$使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

9. 在$[0,1]$上，$0<f(x)<1, f(x)$可微且$f'(x)\neq 1$,证明在$(0,1)$内，存在唯一x_0使得$f(x_0)=x_0$

10. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内$f''(x)>0$证明：

$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$在$(a,b]$上是单调增加的

11.设$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0, f(1)=1$且$f(x)$不恒等于x，证明存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)>1$

‘

三、选做题

1. 设函数$f(x)$具有二阶导数，且

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2,$求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$.

2.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，若连接$(a,f(a)),(b,f(b))$两点的直线和曲线$y=f(x)$相交于$(c,f(c))(a<c<b)$点，证明：$f''(x)=0$，在(a,b)内至少有一个实根.

3. 若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x=x_0$，证明方程$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$必有一个小于$x_0$ 的正根.

4.设$0 < a < b$,函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，试利用柯西中值定理证明存在一点$\xi \in (a, b)$使得$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$.

5.设$f''(x) < 0, f(0) = 0$,证明：对于$x_1 > 0, x_2 > 0$都有

$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

6.设$f(x)$在$[0, a]$上连续，在$(0, a)$内可导，且$f(a) = 0$.证明存在一点$\xi \in (0, a)$使得$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

7.Jordan不等式$x \in (0, \frac{\pi}{2})$,则$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$

‘

8.设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0,f'(a)f'(b)>0$,证明：在(a,b)内存在两点ξ,η，使$f(\xi)=0,f''(\eta)=0$

9. 设函数f在$[a,b]$上可导，且$f'_+(a)\neq f'_-(b),k$为介于$f'_+(a),f'_-(b)$之间的任意数，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=k$

10.设$f(x)$具有二阶连续导数，$f''(0)$存在，且$f'(0)=0,f(0)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

(1)确定a ,使$g(x)$处处连续；

(2)对以上确定的a，证明$g(x)$具有一阶连续导数