第六节

高斯公式　通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

三、通量与散度

Green 公式： 平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间建立联系.

问题：空间有界闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间有无关系？

—— Gauss 公式

一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的封闭曲面Σ 所围成，函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\oint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Gauss 公式)}$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧.

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\oint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是Σ在点(x, y, z)处外法向量的方向余弦.

先证: $\displaystyle\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\oint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

证明：（1） 设Ω是关于xOy面简单区域，投影区域为D_{xy}，

$$\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$$

即：Ω是一个柱体，以D_{xy}边界为准线，母线平行于z轴的柱面与曲面$z=z_1(x,y)$，$z=z_2(x,y)$所围成区域，

其边界曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$：

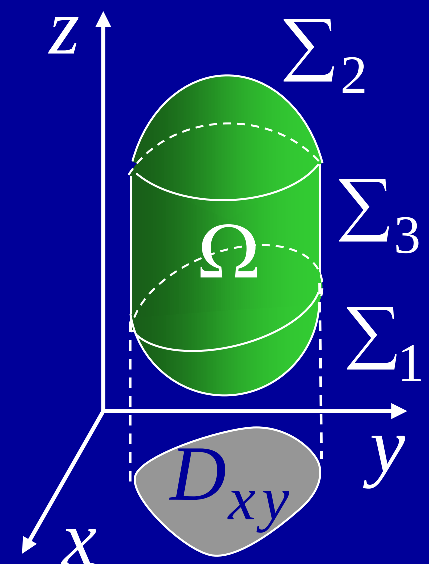
$$\Sigma_1: z=z_1(x,y),\ (x,y)\in D_{xy} \quad \text{取下侧}$$

$$\Sigma_2: z=z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy} \quad \text{取上侧}$$

Σ_3： 以D_{xy}边界曲线为准线，母线平行于z轴的柱面介于曲面$z=z_1(x,y)$，$z=z_2(x,y)$之间的部分， 取外侧.

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



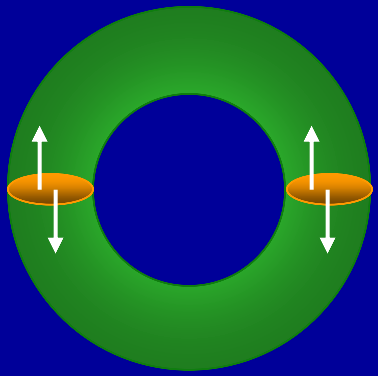
$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3}\right) R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可见:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) 若Ω不满足(1), 引进辅助光滑曲面片, 将Ω分割成有限个闭区域，使每个闭区域满足条件(1)，在辅助面正反两侧曲面积分正负抵消, 故上式仍成立 .



类似可证 $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注: 1) 高斯公式为计算闭曲面积分提供新的解决方法.

2) 应用公式应注意:

1^0 清楚P,Q,R对什么变量求偏导;

2^0 是否满足P,Q,R在区域Ω内具有一阶连续偏导数,否则不能用高斯公式;

3^0 $\sum$ 是封闭曲面，取外侧; 若取内侧时，高斯公式应加负号.

3) 若$P=x,Q=y,R=z$,则高斯公式为

$$V=\iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

其中 $\sum$ 是Ω的外侧.

例1. 设Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$围成的空间区域，Σ是Ω的整个边界的外侧，求 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz+y dz\,dx+z dx\,dy$.

解：高斯公式

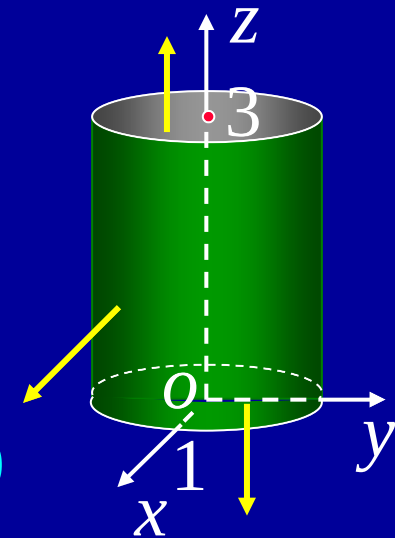
$$I=3\iiint\limits_{\Omega} dV=3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$=\left(2-\sqrt{2}\right)\pi R^3$$

例2. 用Gauss 公式计算 $\iint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间

闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(用柱坐标)}$$

$$=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

例3. 求 $I = \oiint\limits_{\Sigma} x^2\,dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2 dx\,dy$

$\Sigma: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$内侧.

解： Σ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2zc + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$$

$$\mathrm{I} = \oiint_{\Sigma} (2ax + 2by + 2zc - a^2 - b^2 - c^2 + R^2 - y^2 - z^2)\,dy\,dz$$

$$+(2ax + 2by + 2zc - a^2 - b^2 - c^2 + R^2 - x^2 - z^2) dz\,dx$$

$$+(2ax + 2by + 2zc - a^2 - b^2 - c^2 + R^2 - x^2 - y^2) dx\,dy$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega} (2a + 2b + 2c)\,dx\,dy\,dz \qquad (\Omega\text{是}\Sigma\text{所围区域})$$

$$= -(2a + 2b + 2c)\frac{4\pi R^3}{3}$$

注： 若直接用高斯公式，会遇到求

$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,dV$ 计算困难.

但若在用高斯公式前，被积函数中的变量x, y, z

满足曲面方程Σ，代入可用其先化简被积函数，使

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 简单. 但在用了高斯公式转化成了

三重积分，就不能再代入边界曲面方程了.

例4. 设Σ为曲面$z=x^2+y^2\ (z\le 1)$的上侧，求

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\,dy\,dz+(y-1)^3dz\,dx+(z-1)dx\,dy.$$

解: 补充 $\Sigma_1\!:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$ 法向量朝下，

$\Sigma+\Sigma_1$封闭围成Ω. $\Sigma+\Sigma_1$边界曲面取内侧.

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

注意到：Σ_1在yOz面，xOz面的投影为0.

$$\iint_{\Sigma_1}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iint_{\Sigma_1}(z-1)\,dx\,dy=0$$

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,\mathrm{dy}$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1]\,dV$$

$$= -3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dV + \underbrace{6\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\,dV}_{=0} - \iiint\limits_{\Omega} 7\,dV$$

"对称性"

$$= -3\int_0^1 dz \iint_{D_z} r^3\,dr\,d\theta \text{-} 7\int_0^1 dz \iint_{D_z} dxdy$$

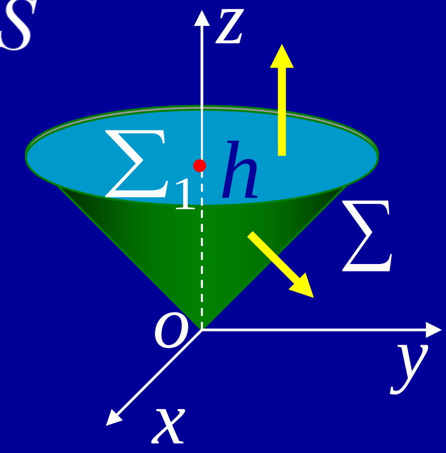
$$= -3\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} r^3\,dr - 7\int_0^1 \pi z\,dz = -4\pi.$$

其中 D_z: $x^2 + y^2 \le z.$

例5. 计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,\ \text{取上侧}$$

记 Σ,Σ_1 所围区域为 Ω, 则

$\boxed{\text{在 } \Sigma_1 \text{ 上 } \alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\ \gamma=0}$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

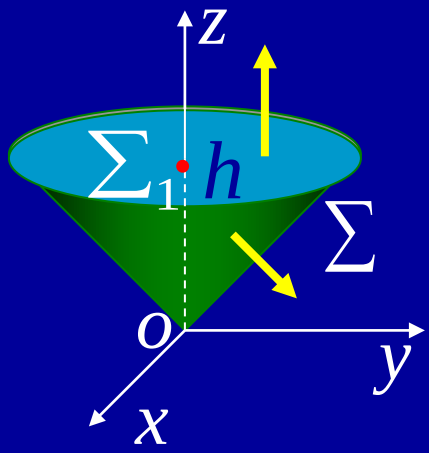
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用重心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z\cdot \pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$

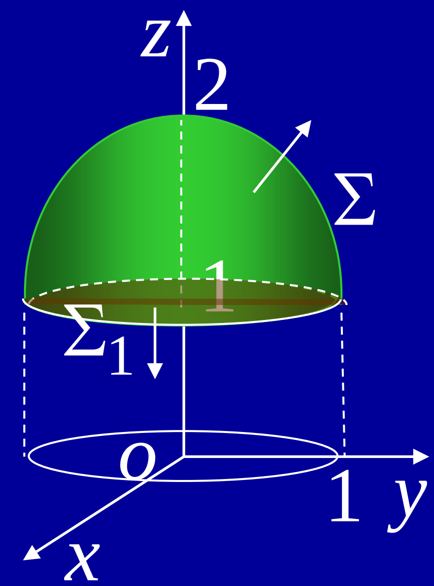


例6. 设Σ为曲面$z=2-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2$取上侧, 求

$$I=\iint_\Sigma (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1: z=1\quad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$



$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{13\pi}{12}$$

例 7. 求 $I=\iint\limits_{S}\frac{x\,dy\,dz+(z+1)dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

S: $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧.

解:（“先代后补”）$I=\iint\limits_{S}\frac{x\,dy\,dz+(z+1)\,dx\,dy}{a^3}$ “先代”

补充 S_1: $z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$ 方向向下. “后补”

$S+S_1$所围成区域为Ω，则

$$I=\iint_{S+S_1}\frac{x\,dy\,dz+(z+1)\,dx\,dy}{a^3}-\iint_{S_1}\frac{x\,dy\,dz+(z+1)\,dx\,dy}{a^3}$$

$$= -\iiint_{\Omega} \frac{2}{a^3} dx\mathrm{dydz} - \iint_{S_1} \frac{x\,dy\,dz + dx\,dy}{a^3}$$

$$= -\frac{4}{3}\pi + \iint_{x^2+y^2\le a^2} \frac{1}{a^3} dx\,dy = -\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{a}$$

例 8. 求 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Σ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 外侧.

解: $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 在Σ所围区域内不连续

取一球面Σ_1: $x^2+y^2+z^2=R^2,\ 0<R<min\{a,b,c\}$.

其方向为内法线方向, 将介于Σ与Σ_1之间的区域记为Ω.

注意到: $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

$$I=\left(\ \oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\oiint_{\Sigma_1}\right)\frac{xdydz+ydzdx+z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\iiint_{\Omega}0\,dx\,dy\,dz-\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+z\,dx\,dy}{R^3}$$

$$=\frac{3}{R^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}dV\ =4\pi$$

例9. 设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$\iiint_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x}\qquad Q=u\frac{\partial v}{\partial y}\qquad R=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

其中 Σ 是整个 Ω 边界面的外侧.

分析: 高斯公式 $\displaystyle\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证: 令 $P=u\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $Q=u\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $R=u\dfrac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\iiint_{\Omega}[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oint\!\!\oint_{\Sigma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\oint\!\!\oint_{\Sigma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

移项即得所证公式.

* 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

定义：对空间区域G，如果G内任一闭曲面所围成的区域全属于G，则称G是**空间二维单连通区域；**如果G内任一闭曲线总可以张成一片完全属于G的曲面，则称G为**空间一维单连通区域.**

球面所围成的区域 ——既是空间二维单连通，又是空间一维单连通

环面所围成的区域 ——二维单连通，不是一维单连通

两个同心球面之间的区域 ——空间一维单连通，不是空间二维单连通

***定理：** 设G是空间二维单连通区域,P, Q, R在G内具有一阶连续偏导数，则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

在G内与所取曲面Σ无关而只取决于Σ的边界曲线（或沿G内任一闭曲面的曲面积分为零）的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

在G内恒成立.

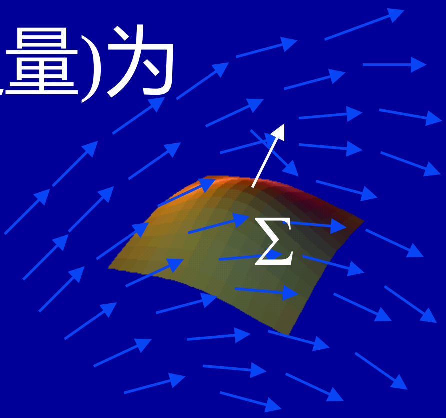
三、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ 为场中任一有向曲面, 由对坐标曲面积分物理意义知:

单位时间通过曲面Σ向着指定侧的流量(或通量)为



$$\Phi=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

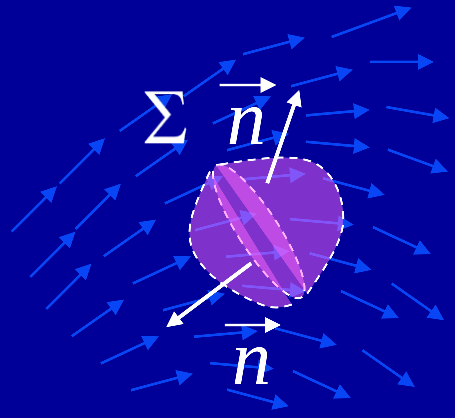
由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

若Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过Σ 的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$\Phi > 0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量少于流出的, 表明Σ 内有泉;

当$\Phi < 0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量多于流出的, 表明Σ 内有洞 ;

当$\Phi = 0$ 时, 说明流入与流出Σ 的流体质量相等 .

根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad ③$$

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{A}$ 通过有向曲面 Σ 的通量(流量) .

在场中点 $M(x,y,z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\ \operatorname{div}\vec{A}$$

divergence

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

高斯公式物理意义：

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}\, dV \quad (\Sigma\text{是}\Omega\text{取外侧})$$

表明：向量场$\vec{A}$通过封闭曲面Σ外侧的通量等于$\vec{A}$的散度在Σ所围区域Ω上的三重积分.

***例5.** 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z)\qquad(\vec{r}\neq\vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解:
$$\operatorname{div}\vec{E}=q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]$$

$$=q\left[\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right]$$

$$=0\qquad(r\neq 0)$$

作 业

P239　1;　2: (1);　3: (1)

思考与练习 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧, Ω 为Σ所围立体, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,判断下列演算是否正确?

$$\iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v \cancel{=} \frac{3}{R}\iiint_\Omega \mathrm{d}v=4\pi R^2$$

备用题 设 Σ 是一光滑闭曲面,所围立体 Ω 的体积为V, θ 是 Σ 外法线向量与点(x, y, z)的向径 $\vec{r}$ 的夹角, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 试证 $\frac{1}{3}\oiint_\Sigma r\cos\theta\,\mathrm{d}S=V.$

证: 设 Σ 的单位外法向量为 $\vec{n}^0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

$\vec{r}^{\,0}=\left\{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\}$, 则

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}^0\cdot\vec{r}^{\,0}}{|\vec{n}^0|\cdot|\vec{r}^{\,0}|}=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}\oiint_\Sigma r\cos\theta\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}v=V$$