班级:____________________ 姓名:____________________

习题五

1. 设$a=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,$b=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$,$c$与$a$正交,且$b=\lambda a+c$,求$\lambda$和$c$

2.试把下列向量组施密特正交化,然后再单位化

(1) $(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$;(2) $(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$;

3.下列矩阵是不是正交矩阵？ 并说明理由:

(1) $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$;(2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$

4. (1)设x为n维向量，$x^Tx=1$,令$H=E-2xx^T$,证明H是对称的正交矩阵

(2)设A,B都是正交矩阵，证明AB也是正交矩阵

5.设a_1,a_2,a_3为两两正交的单位向量组，$b_1=-\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{3}a_3,b_2=\frac{2}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2-\frac{1}{3}a_3,b_3=-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2-\frac{2}{3}a_3$,证明$b_1,b_2,b_3$也是两两相交的单位向量组

6.求下列矩阵的特征值和特征向量

(1) $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$(3) $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

班级:____________________　　　　姓名:____________________

7. 设A为n阶矩阵,证明A^T与A的特征值相同.

8. 设n阶矩阵A、B满足 $R(A)+R(B)<n$,证明A、B有公共的特征值和公共的特征向量

9. 设$A^2-3A+2E=O$,证明A的特征值只能取 1 或 2.

10. 设A为正交矩阵，且$|A|=-1$，证明$\lambda=-1$是A的特征值.

11. 设$\lambda\neq 0$是m阶矩阵$A_{m\times n}B_{m\times n}$的特征值，证明$\lambda$也是$n$阶矩阵$BA$的特征值

12. 已知 3 阶矩阵A的特征值为 1,2,3，求$|A^3-5A^2+7A|$

13. 已知 3 阶矩阵A的特征值为 1,2,-3，求$|A^*-3A+2E|$

14. 设A,B为n阶矩阵，且A可逆，证明AB与BA相似

15. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$可相似对角化，求$x$

16. 已知$p=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量

(1) 求参数a,b及参数向量p所对应的特征值

(2) 问A能不能相似对角化?并说明理由

17. 设$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$,求$A^{100}$

班级:____________________　　　　姓名:____________________

18. 在某国，每年有比例为p的农村居民移居城镇，有比例为q的城镇居民移居农村.假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变. 把n年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为x_n和$y_n(x_n+y_n=1)$

(1)求关系式$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$中的矩阵$A$;

(2)设目前农村人口与城镇人口相等，即$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$，求$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

19. 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称矩阵化为对角矩阵：

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}(2)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

20. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$与$A=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$相似,求$x,y$;并求一个正交矩阵$P$，使$P^{-1}AP=A$

21. 设 3 阶矩阵A的特性值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2,\lambda_3=1$,对应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求A

22. 设 3 阶矩阵A的特性值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1,\lambda_3=0$,对应λ_1,λ_2的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

求A

23. 设3阶矩阵A的特性值$\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$,特征值$\lambda_1=6$对应的特征向量为$p_1=(1,1,1)^T$,求A

24. 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$，$a_1\neq 0,A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$

(1)证明$\lambda=0$是A的$n-1$重特征值;

(2)求A的非零特征值及n个线性无关的特征向量

25. (1)设$A=\begin{Bmatrix}3&-2\\-2&3\end{Bmatrix}$，求$\varphi(A)=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9$;

(2)设 $A=\begin{Bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{Bmatrix}$，求$\varphi(A)=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8$;

26. 用矩阵记号表示下列二次型：

(1)$f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$

(3) $f=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+6x_2x_3$

班级:____________________ 姓名:____________________

27.写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ (2)) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

28.求一个正交变换化下列二次型成标准形:

(1) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ (2) $f = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

29.求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz = 1$$

化成标准方程

30.证明:二次型$f = x^TAx$在$\|x\| = 1$时的最大值为矩阵A的最大特征值

31.用配方法化下列二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵;

(1) $f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(3) $f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;

班级:____________ 姓名:____________

32. 设$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型，求$a$

33. 判定下列二次型的正定型

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$

34. 证明对称矩阵A为正定的充分必要条件是:存在可逆矩阵U,使$U=U^TU$,即A与单位矩阵E合同