第九章

多元函数微分法

及其应用

一元函数微分学

↓ 推广

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

引入

很多实际问题中，因事物牵涉多方面的因素，反映到数学上就是一个变量依赖于多个变量的情形，即多元函数，也就是含两个或两个以上自变量的函数. 下册主要多元函数微积分学.

本章多元函数微分法及其应用，是一元函数的推广，保留一元函数的许多性质，但因自变量的增加而产生新内容.

第一节 多元函数的基本概念

一、平面点集，n维空间

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

一元函数： 函数定义域，实数集，讨论过实数集在实数集合内定义了两点间距离，邻域，区间等.对于多元函数，首先给出定义域，将一元函数的距离，邻域等概念加以推广,作为研究函数的基本框架。

先研究二元函数，将上述相关概念推广.

再将这些概念推广到研究二元以上的情形.

一、 平面点集

建立坐标系，平面上一点$P \leftrightarrow$ 二元有序数组(x, y)

二元有序数组(x, y)的全体，即

$R^2 = R \times R = \{(x, y) | x, y \in R\}$表示坐标平面.

1. 平面点集：坐标平面上具有某种性质P的点的集合，

记作：$E = \{(x, y) | (x, y)\text{具有性质}P\}$

2. 距离：引入线性运算，加法，数乘，引入距离

$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 定义

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

有了距离, 就可以谈接近程度,进而谈极限, 谈连续,

谈微积分，整个理论是以极限作为工具。

在研究一元函数极限问题时，邻域是一个非常重要

的概念. 对多元函数来讲也很重要.

在R^2中有了距离，就可引入“邻域”概念

3. **邻域**

设$P_0(x_0, y_0)$是xOy面上的一个点，δ是某一个正数，与点P_0距离小于δ的点$P(x, y)$的全体，称为点P_0的δ邻域.

点集 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$, 称为点 P_0 的**δ邻域**.

也记作$U_\delta(P_0)$

点 P_0 的**去心邻域**, 记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

说明: 若不需要强调半径δ大小 ,也可写成 $U(P_0)$,

$\overset{\circ}{U}(P_0)$, 分别表示P_0的某个邻域, 某个去心邻域.

例如, 在平面上,

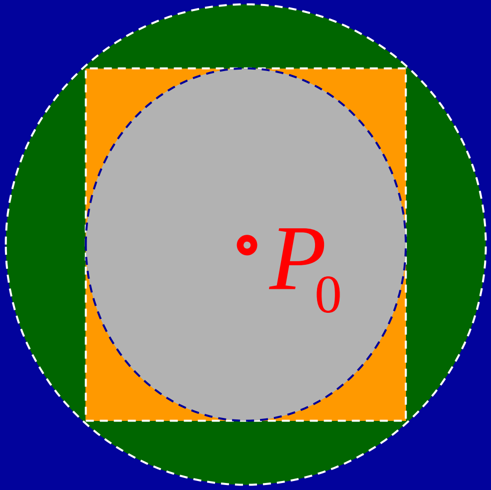
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

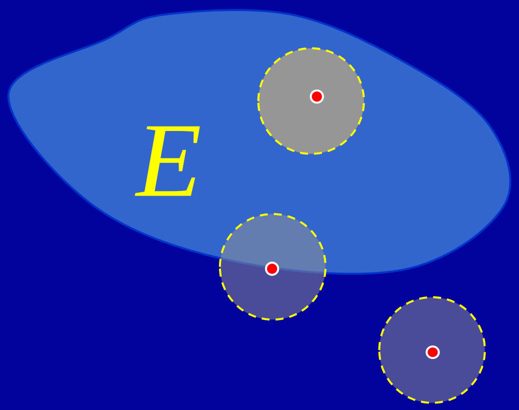
在讨论实际问题中也常使用方邻域, 因为方邻域与圆邻域可以互相包含.



平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$$

4. 利用邻域描述点和点集之间的关系



设任何点集 $E \subset R^2$，任意点 $P \in R^2$

(1) 内点，外点，边界点

(P和E之间必有这三种关系之一)

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P) \subset E$,则称 P 为 E 的**内点**;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P) \cap E = \varnothing$,
  则称 P 为 E 的**外点**;
- 若点 P 的**任一**邻域 $U(P)$ 内既含有属于 E 的点，
  又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点** .

E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E ;

显然, E 的内点必属于 E ,E 的外点必不属于 E , E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E .

以上点与点集关系是按照点在集合内外来分的.

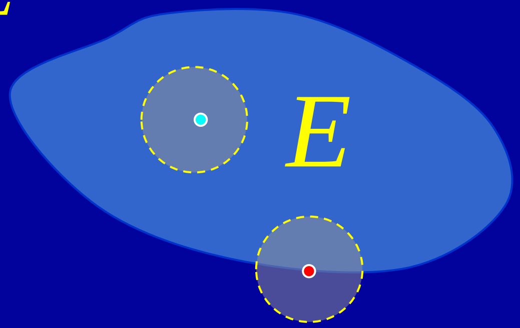
点与点集除上述三种关系，还有另一种关系：

（2）聚点

定义：若点P的任何邻域中都有无穷多个点属于E, 称P为点集E的一个聚点.

等价说法： 在点P的任何去心邻域内都含有E中的点.

- E的聚点可以属于 E , 也可以不属于 E
  (因为聚点可以为E 的边界点)
  所有聚点所成的点集成为 E 的**导集** .



例: (0,1) 的聚点是 [0,1]

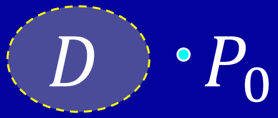
$$D = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$$

D 的内点连同它的边界点都是 D的聚点，即

D的聚点：$\{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

- 集合E的内点必是E的聚点，边界点可能是聚点也

可能不是. 例：$E = \{P_0\} \cup D$, P_0不是E的聚点,但是边界点.



5. 根据点集所属点特征，定义一些重要点集

- 若点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集；
- 若点集 E 的边界 $\partial E \subset E$，则称 E 为闭集；

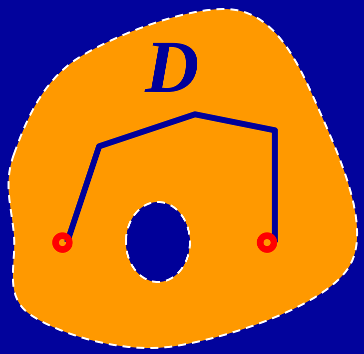
例：$\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$　开集

$\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$　闭集

$\{(x,y)|1<x^2+y^2\le 2\}$　既非开集，也非闭集

约定：空集$\emptyset$及整个R^2既是开集又是闭集.

- 若点集 D 中任意两点都可用一条完全属于 D 的折线，相连，则称 D 是连通集；
- 连通的开集称为开区域，简称区域；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

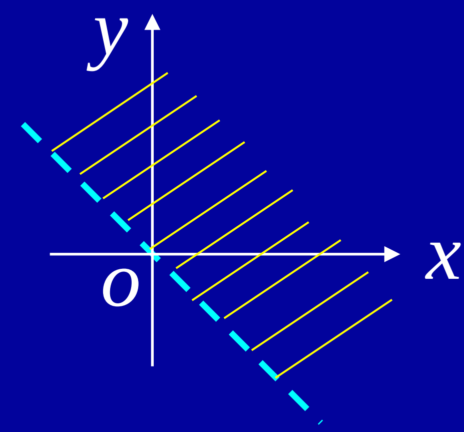


- 有界集：对点集E，如果存在某一正数 r，使得 $E \subset U(O,r)$，其中O是坐标原点，则称E为有界集.
- 无界集：一个集合不是有界集，就称为无界集.

例如，在平面上

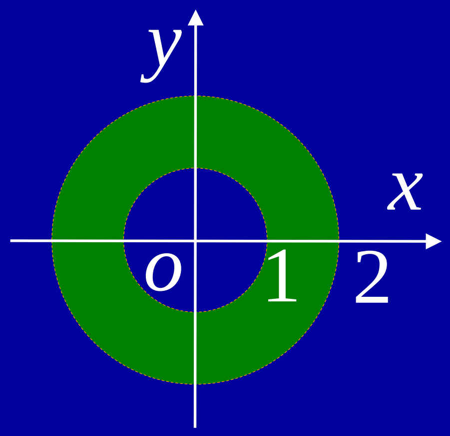
- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

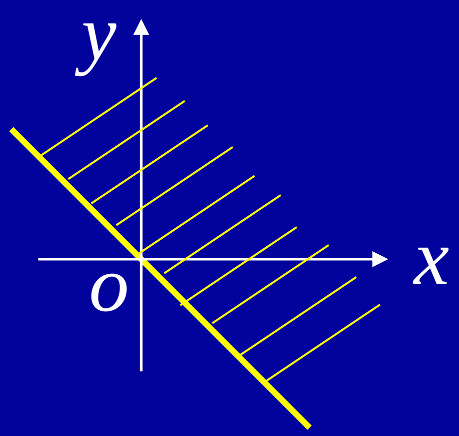
开区域

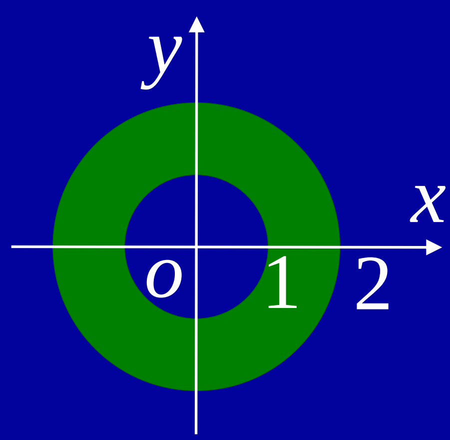


- $\{(x,y) \mid x+y\ge 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$

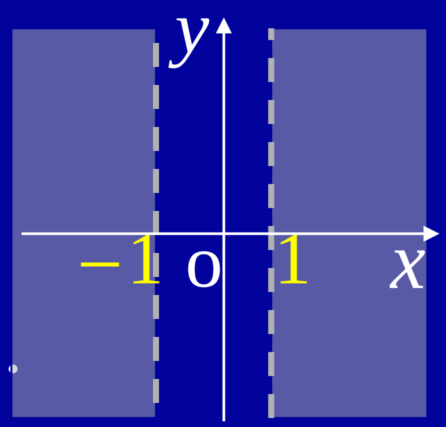
闭区域







- 整个平面R^2是最大的开区域，
  也是最大的闭区域；
- 点集 $\{(x,y)\,|\,|x|>1\}$ 是开集，但非区域 .



- 点集$\{(x,y)|xy>0\}$ 是开集，但不是开域.

例：$\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 有界(开)区域

$\{(x,y,z)|2\le x^2+y^2+z^2\le 3\}$ 有界闭区域

$\{(x,y)|x+y>0\}$ 无界(开)区域

$\{(x,y)|x+y\ge 0\}$ 无界闭区域

“闭区间”是有界的；但闭区域可能无界.

二、n 维空间

$n(n \geq 3)$元函数，定义域是n元有序数组构成的集合.

1. n 元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体构成的集合

记作 R^n，即 $\mathrm{R}^n = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}$

$$= \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n \}$$

2. R^n中的元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$也称为$\mathrm{R}^n$中的一个**点.**

数 x_k 称为该点的第 k 个**坐标**.

3. 称$(0,0\cdots,0)$为 R^n 中的零元,或零向量，记作 O.

集合R^n元素之间建立联系,定义线性运算，加法与数乘.

4. 定义了线性运算的集合R^n, 称为 ***n* 维空间.**

5. R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的**距离**记作 $\rho(x,y)$ 或 $\|x-y\|$, 规定为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 O 的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当 $n=1,2,3$ 时, $\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

R^n中点 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的 **δ邻域**为

$$U(a,\delta)=\{\,x\mid x\in\mathrm{R}^n,\rho(x,a)<\delta\,\}$$

(有了距离，就可定义极限)

R^n 中的变元 x 与定元 a 满足 $\|x-a\|\to 0$ 记作 $x\to a.$

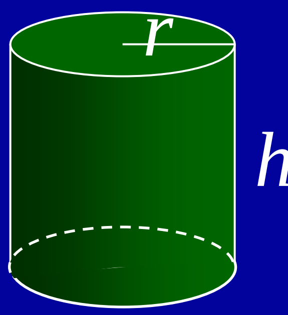
以邻域为基础，就可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点以及开集、闭集、区域、闭区域等一系列概念.

三、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

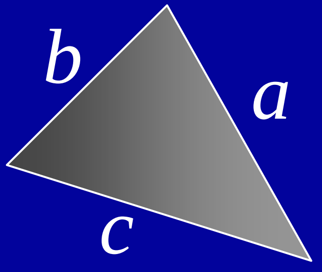
$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r,h) \mid r>0, h>0\}$$



- 定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \ (R\text{为常数}), \quad \{(V,T) \mid V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$

定义1. 设非空点集 $D \subset \mathbb{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbb{R}$ 称为定义在 D 上的 **n 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P),\ P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域**.

说明：映射 $f: D \mapsto R$, 是对应法则,使 D 中每个点 P 都有唯一实数 u 与之对应.

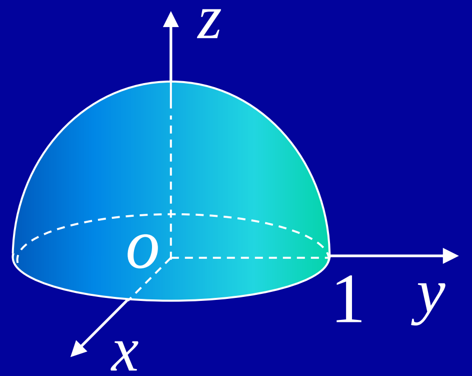
特别, 当 $n = 2$ 时, 有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$$

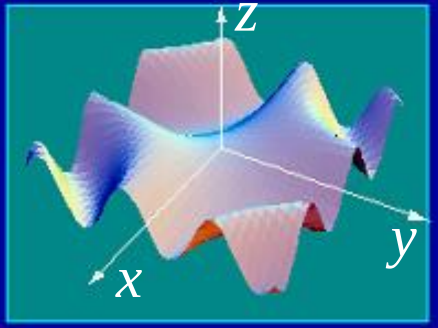
例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



定义域为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.

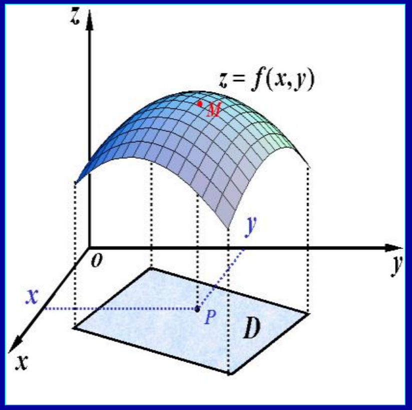
又如, $z=\sin(xy),\ (x,y)\in \mathrm{R}^2$



说明: 二元函数 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$

当(x,y)取遍D上的一切点时,得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$



称为函数$z=f(x,y)$的图形.

二元函数图形是三维空间中的一张曲面.

例：（函数关系式例子）

设 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解：设 $x+y=t,\ \frac{y}{x}=u.$

则 $x=\frac{t}{1+u},\quad y=\frac{tu}{1+u}.$

故 $f(t,u)=\left(\frac{t}{1+u}\right)^2-\left(\frac{tu}{1+u}\right)^2=\frac{t^2(1-u^2)}{1+u^2}$

所以 $f(x,y)=\frac{x^2(1-y^2)}{1+y^2}.$

类似于一元函数，多元函数有了距离，邻域等概念同样可以研究当函数自变量按照一定方式无限变化时，函数值的变化趋势.

先看简单二元函数情形，从一元到二元内容和方法上会出现一些重要差别，而多元函数之间差别不大，下面讨论极限，连续以二元函数为主.

四、二元函数的极限

$z = f(x,y)$, 当 $\mathrm{P}(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$时的极限.

定性分析： 在 $\mathrm{P} \to P_0$过程中 (表示点P以任何方式趋于点P_0，即 $|PP_0| \to 0$)，对应的函数值无限地接近于一个确定的常数A，则称 A为函数$f(x,y)$当$(x,y) \to (x_0,y_0)$时的极限.

定量分析： (“$\varepsilon - \delta$”语言) 设函数 $f(P) = f(x,y)$的定义域为D, $P_0(x_0,y_0)$是 D的聚点. 若存在常数A,对于任给的正数ε，总存在正数δ，使得当点$P \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$时

都有 $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称A为函数$f(x,y)$ 当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限(或叫二重极限).

记作:
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

或
$$f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(x_0,y_0))$$

或
$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

或
$$f(P)\to A \quad (P\to P_0)$$

注释： **(1)** P_0是D的聚点，它可以属于D,也可以不属于.

P_0是聚点, 保证P_0的去心邻域含有D中的点.

(2) 差别： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Leftrightarrow$左右极限存在且相等.

$x \longrightarrow x_0$, 只能沿两个方向$x \to x_0^+, x \to x_0^-$

二重极限存在$\Leftrightarrow$点P沿任何方向，任何路径趋于P_0时极限都存在且相等.

点P以几种方式趋于P_0时，$f(P)$趋于同一个数，不能判定$f(P)$有极限

(3) 只研究 $P \to P_0$时，函数值的变化趋势，不考虑P_0点.

(4) 若P沿某条曲线趋于P_0时，$f(x,y)$极限不存在，或当$P(x,y)$以不同方式趋于P_0时，$f(x,y)$趋于不同的值，则此函数极限不存在.

(5) 若极限存在，则可取一特殊路径来求极限值.

♣ 多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为$D\ (D\subseteq R^n)$, P_0 是D的聚点.若存在常数 A , 对任意正数 ε , 总存在正数δ , $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$,都有 $\left|f(P)-A\right|<\varepsilon$ ， 则称A为函数 $f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$ (也称为 n 重极限)

例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| \le x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

求证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证： $\because \left| f(x,y)-0 \right| \le \left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} \right|$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon/2$，当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有

$$\left| f(x,y)-0 \right| \le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

- 若当点$P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时, 函数趋于不同值或有的极限不存在, 则可以断定函数极限不存在 .

例3. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0) , 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同趋于不同的数 !

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .

求二元函数极限的例子：(用一元函数求极限的方法)

例1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt[5]{xy+1}-1}$

$\boxed{当x \to 0时,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\frac{xy}{5}}$ =5

例2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$

$\boxed{\text{无穷小与有界量乘积}}$

=0

例3.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{x+y+1}{x+y-1}\right)^{x+y}$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left[\left(1+\frac{2}{x+y-1}\right)^{\frac{x+y-1}{2}}\right]^{\frac{2(x+y)}{x+y-1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{2(x+y)}{x+y-1}}=e^{\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{2u}{u-1}}=e^{2}$$

经变量代换转化为一元函数的极限是常用方法.

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x , y 轴

解: 因 $x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2 = x^2+y^2$, 则

$$\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

$$1-\cos r^2 \sim \frac{r^2}{2}$$

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6} = \infty$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

引入极坐标

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$

例5. （夹挤准则求极限）

求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解：求 $x \to +\infty$， $y \to +\infty$的极限，不妨设$x > 0, y > 0$.

则有 $$0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$< \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})=0.$ 因此，原式极限为零.

例6. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{xy-\sin(xy)}{x^3y^3}$.

设$xy = t$

解：原式$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t-\sin t}{t^3}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{3t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}$$

注：一元函数极限中常用的洛必达法则在二重极限中不能使用，只有把二元函数转化为一元函数的极限问题才可用.

♣ 累次极限

二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

$(x,y)\to(x_0,y_0)$过程中，两个自变量x和y是作为点的坐标同时趋于x_0,y_0的，没有先后顺序，不能把它分开先后, 如 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ (先对y后对x的累次极限)

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ (先对x后对y)

这种极限叫累次极限，是接连求两次一元函数的极限.

- 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 两个完全不同概念，但也有联系.

对于这三个极限，如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在,推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

但由例3 知它在(0,0)点二重极限不存在 .

五、 多元函数的连续性

1. 二元函数连续性

定义： 设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为D, $P_0\ (x_0,y_0)$为D的聚点且$\boldsymbol{P_0\in D}$. 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$f(x,y)$在点$P_0\ (x_0,y_0)$连续.

注: (1) 若不连续，则称P_0为f的间断点.

(2) $P_0\in D, f(x,y)$ 需在P_0处有定义，极限值等于函数值.

(3) 若函数在 D 上各点处连续, 则称此函数在 D 上连续.

或称$f(P)$是D上的连续函数，记为$f(x,y)\in C(D)$.

(4) 等价定义：（用“增量”形式描述连续)

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$$

或 $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] = 0.$$

(5) 二元函数的间断点可组成平面中的一条曲线.

例如: 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0\quad\quad\ \ , & x^2+y^2=0 \end{cases}$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

函数 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x+y+z}$ 间断点平面：$x+y+z=0$.

(6) 在空间直角坐标系下，平面区域D上的连续函数 $z=f(x,y)$的图形是在D上张开的一张“无缝无孔”的连续曲面.

2. 多元函数的连续性

定义: 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 若 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ 则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 **连续**.

3. 多元连续函数性质 (一元区别：无反函数连续性)

(1) 多元连续函数的和、差、积、商仍连续;

(2) 多元连续函数的复合函数仍连续;

(3) 一切多元初等函数在定义区域内连续.

注1：**定义区域**，指包含在定义域内的区域或闭区域.

注2：多元初等函数，是指由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的由一个式子表示的函数.

例：$\sin(x+y)$, $\frac{1+x^2-y^2}{1+y^2}$, $e^{x^2+y^2+z^2}$

(4) 利用连续性可以求极限.

例: $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{xy} = f(1,2) = \frac{3}{2}$$

说明：是初等函数，定义域 $D=\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}$.

$P_0(1,2)$为D的内点，存在$U(P_0)\subset D$,任何邻域都是区域，

所以$U(P_0)$是$f(x,y)$的一个定义区域.

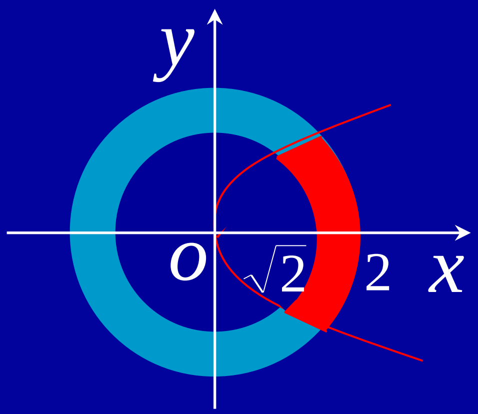
例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解: 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例6. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} \left|3-x^2-y^2\right| \le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$



4. 有界闭区域上多元连续函数性质

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则

(1) $\exists\, K>0$, 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m, M]$, $\exists\, Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$;

(介值定理)

(有界闭域上连续函数必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.)

作业

P65　4，5: (4)，6: (2)(3)(5)(6)

内容小结

1. 区域

- 邻域：$U(P_0,\delta),\ \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集
- $\mathbf{R}^n$ 空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$P\in D\subset \mathbf{R}^n$$

常用 $\begin{cases}\text{二元函数 (图形一般为空间曲面)}\\ \text{三元函数}\end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, 当 0<|PP_0|<\delta 时, 有 |f(P)-A|<\varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理； 最值定理； 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

备用题 **1.** 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

解法 令 $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y^2}{x} = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{uv} \\ x = \dfrac{u}{\sqrt[3]{uv}} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(u, v) = \frac{u^2}{(uv)^{2/3}} + (uv)^{2/3}$$

$$u = \frac{y^2}{x},\quad v = xy$$

$$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2} + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

解: 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$, 取 $y=x^{\alpha}-x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{x^2 y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.

3. 证明

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在全平面连续.

证: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数, 故连续.

又 $$0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2\ge 2|xy|}$$

由夹挤准则得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .