第一部分作业

1.下列各题中均假定$f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出A表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,其中$f(0)=0$, 且$f'(0)$存在；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$

解：(1)$A=-f'(x_0)$, (2)$A=f'(0)$, (3)$A=2f'(x_0)$

以下两题中，选择给出的四个结论中一个正确的结论：

2.设$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$,则$f(x)$在$x=1$处的(　　)

(A),左右导数都存在(B),左导数存在，右导数不存在，

(C)左导数不存在，右导数存在, (D)左右导数都不存在；

解：$f'_-(1)=2$,$f'_+(1)$ $\not\exists$,B正确

3.设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则$f(0)=0$是$F(x)$ 在$x=0$处可导的

(A),充分必要条件，(B),充分条件但非必要条件，

(C)必要条件但非充分条件, (D)既非充分条件又非必要条件；

解：若$f(0)=0$, 则

$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}(1+|\sin x|)=f'(0)$

若$f(0)\ne 0$,

注意到$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(f(x)-f(0)+f(0))(1+|\sin x|)-f(0)}{x}$

$=f'(0)+f(0)\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$

于是$F'(0)$ $\not\exists$

于是A正确

4 .当物体温度高于室内温度时，物体就会逐渐冷却，设物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$, 求物体在时刻t的冷却速率.

解：$T'(t)$

5.设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le x_0 \\ ax+b, & x>x_0 \end{cases}$,若$f(x)$在$x_0$处可导，求$a,b$的值.

解：$x_0^2=ax_0+b$

$f'_-(x_0)=2x_0, f'_+(x_0)=a$

$a=2x_0, b=x_0^2-ax_0=x_0^2-2x_0^2=-x_0^2$

6.如果$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，证明：$f'(0)=0$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}(-1)=-f'(0)$

$\Longrightarrow f'(0)=0$

7.设$f(x)$定义在实数轴上，若$\forall x,y\in\mathbb{R} f(x+y)=f(x)\cdot f(y), f'(0)=1$, ,证明：函数在实数轴上可导，且$f'(x)=f(x)$

证明：$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)\Longrightarrow f(0)=1$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$

$=f(x)f'(0)=f(x)$

事实上，由课堂讲解可知$f(x)=e^x$

8. 设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(a)=f(b)=k, f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$,证明：存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=k$

证明：不妨设$f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$

令$g(x)=f(x)-k$ 问题转变成存在一点$\xi\in[a,b]$使得$g(\xi)=0$

显然从零点存在定理入手，这就需要寻求恰当的区间使其在端点处异号

注意到$\frac{g(x)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{g(x)}{x-a}=f'_+(a)>0$

由保号性存在$\delta_1>0$ 使得$g(a+\delta_1)>0$

$\frac{g(x)}{x-b} = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$

$\lim\limits_{x \to b^-} \frac{g(x)}{x-b} = f'_-(b) > 0$

由保号性存在$\delta_2 > 0$,使得$g(b-\delta_2) < 0$

由于$g(x) \in C[a+\delta_1, b-\delta_2]$

由零点存在定理，至少存在一点$\xi \in (a+\delta_1, a+\delta_2) \subset (a,b)$

使得$g(\xi) = 0$

9.证明：双曲线$xy = a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积等于$2a^2$.

证明：过曲线上任一点(x,y)的切线之斜率y'由下式确定

$y + xy' = 0$,于是切线的方程为

$Y - y = -\frac{y}{x}(X - x)$

令$X = 0$得切线与Y轴的交点为$(0, 2y)$,令$Y = 0$

得切线与X轴的交点为$(2x, 0)$

于是切线与坐标轴围成的三角形面积

$A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y = 2xy = 2a^2$

10.设函数$f(x)$在$x = 0$处连续，且$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = A$(有限),证明：$f(x)$在$x =$ 0 处可导；

证明：注意到$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

事实上，若$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq 0$与题设$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 矛盾

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = A$

11.以初速度v_0竖直上抛的物体，其上升高度s与时间t的关系是：$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$,求：

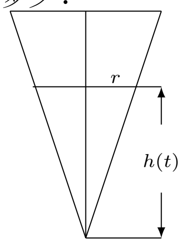
(1)该物体的速度$v(t)$, (2)该物体达到最高点的时刻

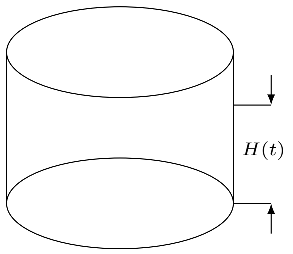
解：(1)$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$

(2)$v(t) = 0$即为最高点，即$t = \frac{v_0}{g}$

12.溶液自深18cm顶直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的

圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深12cm时，其表面下降的速率为1cm/min ,问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率是多少？





解：设流入的液体的体积为$V_{出}$,流进的液体的体积为$V_{进}$

t时刻圆锥液面的深度为$h(t)$,半径为r,圆柱体液面的深度为$H(t)$

于是$\frac{r}{6} = \frac{h(t)}{18} \Longrightarrow r = \frac{1}{3}h(t)$

$V_{出} = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 18 - \frac{1}{3}\pi r^2 h(t) = C - \pi\frac{1}{27}h^3(t)$

$V_{出} = V_{进} = \pi \times 25 \times H(t)$

等式两端对t求导得

$-\frac{1}{9}h^2(t)h'(t) = 25H'(t)$

注意到$h'(t) < 0$代入得

$H'(t_1) = \frac{144}{9\times25} = 0.64(cm/min)$

13.设$y = y(x)$由方程$x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$确定，求 $\frac{dy}{dx}$;

解：对等式$e^{y^2 \ln x} + y^2 \ln x + 4 = 0$两端关于$x$求导得

$e^{y^2 \ln x}(2yy' \ln x + y^2\frac{1}{x}) + 2yy' \ln x + \frac{y^2}{x} = 0$

整理得$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x \ln x}$

14.设曲线方程$x = 1 - t^2, y = t - t^2$,求它在下列点处的切线方程与法线方程:

$1)t=1$;　　　$2)t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2t}{-2t}$

(1)切线方程:$Y=\frac{1}{2}x$

法线方程：$Y=-2x$

(2)切线方程$Y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{2})$

法线方程$Y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}(x-\frac{1}{2})$

15.设$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin x^{\beta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$,问

1) 在什么情况下$f(x)$ 不是连续函数？

2) 在什么情况下$f(x)$连续但不可导？

3) 在什么情况下$f(x)$ 可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$ 上无界？

4) 在什么情况下$f(x)$可微，且$f'(x)$在$[-1,1]$上有界，但$f'(x)$不连续？

5) 在什么情况下$f(x)$连续可微？

解：注意到$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sin x^{\beta}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha+\beta-1}$

只要$\alpha+\beta>1$ $f'(0)$存在，$\alpha+\beta<1$ 时$f(x)$ 在$x=0$处不可导

当$\alpha<0,\beta<0$时不连续，当$\beta>0,\alpha$ 任意值时函数连续.$\alpha>0,\beta>0$任意时亦然.

注意到$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin x^{\beta}+x^{\alpha}\cos x^{\beta}\cdot\beta x^{\beta-1}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$\alpha<1$或$\beta<1$时$f'(x)$ 在$[-1,1]$上无界,$\alpha=1,\beta=1$时$f'(x)$在$[-1,1]$ 上有界，但不连续，

$\alpha>1,\beta>1$时$f'(x)$ 连续.

16.求下列函数的导数:

1) $\begin{cases}x &=\sin^2 t\\ y &=\cos^2 t\end{cases}$;　　　2) $\begin{cases}x &=a(t-\sin t)\\ y &=a(1-\cos t)\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x &=\frac{3at}{1+t^3}\\ y &=\frac{3at^3}{1+t^3}\end{cases}$;　　　4) $\begin{cases}x &=3t^2+2t\\ e^y & \sin t-y+1=0\end{cases}$;

解(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos t(-\sin t)dt}{2\sin t\cos tdt}=-1$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$

(3) $dy=\frac{9at^2}{(1+t^3)^2}dt, dx=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{1-2t^3}$

(3) $dx=(6t+2)dt, d(e^y\sin t)-dy=0$

$e^y\sin tdy+e^y\cos tdt-dy=0$

$dy=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}dt$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{(6t+2)(1-e^y\sin t)}$

17.落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径的增大速率总是$6m/s$,问在$2s$末扰动水面面积增大的速率为多少？

解：水波的覆盖面积为$A(t)=\pi r^2(t)$

$A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$

$t=2s$ 时的半径为$r(2)=2\times 6=12m$

$A'(2)=2\pi\times 12\times 6=144\pi(m/s)$

18.注水入深$8m$上顶直径$8m$的正圆锥形容器中，其速率为$4m^3/min$,当水深为$5m$时，其表面上升的速率为多少？

解：设t 时刻水深为$h=h(t)$,此时水面半径为r,入水量为V

于是$\Longrightarrow r=\frac{1}{2}h$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{12}\pi h^3$

$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{4}\pi h^2h'$

代入得

$4=\frac{1}{4}\pi\times 25h'$

$h'=\frac{16}{25\pi}(m/min)$

19.已知$f(x)$是周期为5的连续函数，它在$x=0$的某邻域内满足关系式：

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\circ(x)$

且$f(x)$在$x=1$ 处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线

方程.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=8+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\circ(x)}{x}$

$$\begin{aligned} 8 &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{x}+3\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}+3\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)\\ &= 4f'(1) \end{aligned}$$

注意到$f(x+T)=f(x)$,则$f'(x)=f'(x+T)$

$f'(1)=f'(6)$

注意到$f(1)-3f(1)=0\Longrightarrow f(1)=f(6)=0$

切线方程$Y=2(x-6)$

20.当正在高度为H水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时，如图1所示从飞机到机场的水平地面距离为L.假设飞机下降的路径为三次函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$的图形，其中$y(-L)=H,y(0)=0$,试确定飞机的降落路径.

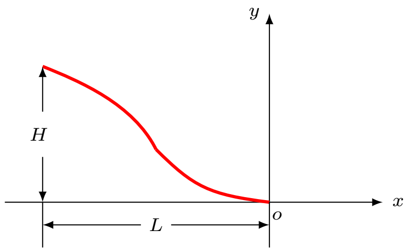


图1

解：$y(0)=0\Longrightarrow d=0$

$y'(0)=0\Longrightarrow c=0$

$y(-L)=H\Longrightarrow -L^3a+L^2b=H$

$y'(-L)=0\Longrightarrow 3L^2a-2Lb=0$

解关于a,b的线性方程组得$a=\frac{2H}{L},b=\frac{3H}{L^2}$

于是路径为$y=H\left(2(\frac{x}{L})^3+3(\frac{x}{L})^2\right)$

第二部分作业

一、选择题

1.函数$f(x)$在$x=x_0$处(　　　)

$A.$ 连续，则$f(x)$在该点一定可导，$B.$不可导，则$f(x)$在该点一

定不连续

$C.$可导，则$f(x)$ 在该点一定可微，反之亦然，$D.$可导，则曲线在点$(x_0, f(x_0))$处一定没有切线存在

解析：因为一元函数可导与可微是等价的，于是C正确

2.若$f(x)$在$x=0$处连续且可导，则$f(|x|)$在$x=0$处(　　　)

$A.$ 不一定连续，$B.$连续但不一定可导，$C.$连续且可导，$D.$连续但一定不可导

解析：B是正确的

3. 设$f(x)$ 是可导函数，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x-\Delta x)}{\Delta x}$ 的值为(　　　)

$A.0, B.2f(x), C.2f(x)f'(x), D.4f(x)f'(x)$

解析：D是正确的

4.设$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{(x-1)^a}\cos\frac{1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ (a 为实数)，若$f(x)$在$x=1$处可导，则必有

$A.a<-1, B.-1<a<0, C.-1\le a<1, D.a\ge 1$

解析：A正确

5.已知$f(x)=\begin{cases} \ln(1-x), & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$ 处

$A.$ 间断，$B.$导数不存在，$C.f'(x)=-1, D.f'(x)=1$

解析：B正确

6. 下列给出的求导运算正确的是

$A.\frac{d}{dx}(x^x)=x\cdot x^{x-1}=x^x$

$B.$设$f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$ 在$x=a$处连续，则$f'(a)=[\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)]_{x=a}=\varphi(a)$

$C.$设$y=f(x)$单调连续可导且$f'(x)\neq 0$,则它的反函数$x=\varphi(y)$的二阶导数$\varphi''(y)=(\varphi(y))'=\left(\frac{1}{f'(x)}\right)'=\dfrac{y''}{(y')^2}$

$D.$ 设$f(x)=t\cdot\ln\left(\frac{x}{t}+1\right)$,由于$f'(x)=t\cdot\frac{1}{\frac{x}{t}+1}\cdot\frac{1}{t}=\frac{t}{x+t}$. 从而

有$f'(t)=\frac{t}{t+t}=\frac{1}{2}$.

$\boxed{解析：D正确}$

7. 曲线$y=x\cdot\ln x$ 上平行于直线$x-y+1=0$的切线方程是

$A.y-x+1=0, B.y-x-3e^{-2}=0, C.y-x+3e^{2}=0, D.y+x-3e^{-2}=0$

$\boxed{解析: A正确}$

8. 设$y=f(e^x)e^{f(x)}$,且$f'(x)$存在，则$y'=$

$A.f'(e^x)e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}, B.f'(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

$C.f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x), D.f'(e^x)e^{f(x)}$

$\boxed{解析：C正确}$

9. 设$f(x)=x(x-1)(x+2)(x-3((x+4)\cdots(x+100)$,则$f'(1)=$

$A.-101!, B.-\frac{100!}{100}, C.-100!, D.\frac{100!}{99}$

$\boxed{解析：B正确}$

10. 若函数$y=f(x)$,有$f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则当$\Delta x\to 0$时，该函数在$x=x_0$处的微分dy是

$A.$与Δx等价的无穷小，$B.$与Δx同阶的无穷小，但不是等价的无穷小

$C.$比Δx低阶的无穷小，$D.$比Δx高阶的无穷小

$\boxed{解析：B正确}$

11.设$f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{-x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则$f'(0)$为(　　　)

$A.0, B.\frac{1}{2}, C.1, D.-1$

$\boxed{解析：e^u-1\sim u(u\to 0)\Longrightarrow C正确}$

12.设$f(x)$可导，且满足条件$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,

则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线斜率为

$A.2, B.-2, C.\frac{1}{2}, D.-1$

解析：$f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}\cdot 2=-2$

13.设$f(x),g(x)$定义在$(-1,1)$,且都在$x=0$处连续，

若$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$,则

$A.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0,$且$g'(0)=0,\quad B.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$且$g'(0)=1$

$C.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1,$且$g'(0)=0,\quad D.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$且$g'(0)=2$

解析：D正确

14.设$f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x}, & x>0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$在$x=0$处可导，则

$A.a=1,b=\frac{\pi}{2},\qquad B.a=1,b=0$

$C.a=-1,b=-\frac{\pi}{2},\qquad D.a=-1,b=\frac{\pi}{2}$

解析：$f(0)=f(0^+)=\frac{\pi}{2}=f(0^-)=b$

$f'(0)=f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{x}=a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}=-1$

15. 设$y=e^{\sin^2 x}$,且$f'(x)$存在，则$dy=$

$A.e^{\sin^2 x}, B.2e^{\sin^2 x}\sin xdx, C.2e^{\sin^2 x}\cos x, D.e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$

解析：$dy=e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$

16.设函数$f(x)=3x^2+x^2|x|$,则$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数$n=$

$A.0, B.1, C.2, D.3$

解析：$n=2$

二、解答题

1.求下列函数的导数

(1) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

$$\begin{aligned}(1)\quad y'&=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}})\\ &=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\end{aligned}$$

(2) $y=\frac{a^x\sin x}{1+x}$

(2)$y'=\frac{(a^x\ln a\sin x+a^x\cos x)(1+x)-a^x\sin x}{(1+x)^2}$

(3)$y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$

$$\begin{aligned}(3)\quad y'&=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a a x^{a-1}+a^{a^x}\ln a a^x\ln a\\ &=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a\end{aligned}$$

(4)$y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$

(4) $y' = \arcsin\frac{x}{2} + x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \arcsin\frac{x}{2}$

2.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f\left(t+\frac{x}{a}\right) - f\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]$,其中$t,a$与$x$无关，且$a\neq 0$,而$f(x)$是可导函数

解：原式 $$= \lim_{x\to 0}\frac{f(t+\frac{x}{a}) - f(t) - f(t-\frac{x}{a}) + f(t)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(t+\frac{x}{a}) - f(t)}{\frac{x}{a}} + \frac{f(t-\frac{x}{a}) - f(t)}{-\frac{x}{a}}\right]\frac{1}{a}$$
$$= \frac{2}{a}f'(t)$$

3.设$f(x) = \begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ x^2+ax+b, & x>0 \end{cases}$，问$a,b$ 取何值时，该函数在$x=0$处可导

解：注意到$b = f(0+) = f(0-) = f(0) = 1$

而$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+ax+1-1}{x} = a$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = 1$

于是$a=1$

4.设$y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$,求$dy$

解：$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right)$

等式两端对变量x求导，记住$y=y(x)$

于是$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \cot x - \frac{1}{2}\frac{e^x}{1-e^x}\right)$

那么$dy = y'(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x} + \cot x - \frac{1}{2}\frac{e^x}{1-e^x}\right)dx$

5.设$y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$, $f(u)$可导，求$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{d(\cos^2 x)}$, $\frac{dy}{d(\cos x)}$.

解：$\frac{dy}{dx} = f'(\sin^2 x)\sin 2x - f'(\cos^2 x)\sin 2x$

$$\frac{dy}{d(\cos^2 x)} = \frac{f'(\sin^2 x)\sin 2x - f'(\cos^2 x)\sin 2x}{-\sin 2x}$$
$$= f'(\cos^2 x) - f'(\sin^2 x)$$

$$\frac{dy}{d(\cos x)} = \frac{f'(\sin^2 x)\sin 2x - f'(\cos^2 x)\sin 2x}{-\sin x}$$
$$= 2\cos x(f'(\cos^2 x) - f'(\sin^2 x))$$

6.求对数螺线$\rho = e^\theta$在$(\rho,\theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程

解：$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, 于是

$dx = e^\theta(\cos\theta - \sin\theta)d\theta, dy = e^\theta(\sin\theta + \cos\theta)d\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$,

于是过$(0, \frac{\pi}{2})$ 的直角坐标方程为

$Y+x=e^{\frac{\pi}{2}}$

7.试求由参数方程$\begin{cases} x &= \ln\sqrt{1+t^2} \\ y &= \arctan t \end{cases}$确定的函数的导数

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$dy=\frac{1}{1+t^2}dt, dx=\frac{t}{1+t^2}dt$,于是

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$,而

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\frac{1}{t}) \\ &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{t})\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1+t^2}{t} \\ &= -\frac{1+t^2}{t^3} \end{aligned}$$

8. 求由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$所确定的隐函数的导数

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解：等式两端关于x 求导，记住$y=y(x)$!于是

$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}\Longrightarrow, x+yy'=xy'-y,$

于是$y'=\frac{x+y}{x-y}$

注意到$1+y'^2+yy''=xy''$

经整理得$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

9. 设$f(x)$具有任意阶的导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$,求$f^{(n)}(x)$.

解：$f''(x)=2f(x)f'(x)=2(f(x))^3$

$f'''(x)=3!(f(x))^4$

假定$f^{(n-1)}(x)=(n-1)!\,(f(x))^n$

$f^{(n)}(x)=n!\,(f(x))^{n+1}$

11. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(x+2)}\right]^n$,求$y''$

$$\begin{aligned} \text{解：} f(x) &= \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(x+2)}\right)^n \\ &= \ln e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= \frac{1}{x+2} \\ &\Longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2} \\ & f''(x)=2(x+2)^{-3} \end{aligned}$$

12.设$f(x)=e^x(x^2+2x+3)$,求$f^{(20)}(x)$

$$\begin{aligned} f^{(20)}(x) &= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(e^x)^{(n-k)}(x^2+2x+3)^{(k)} \\ &= (x^2+2x+3)e^x+20(2x+2)e^x+190\cdot 2e^x \\ &= e^x(x^2+42x+423) \end{aligned}$$

13.证明：曲线$\begin{cases} x &= a(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t) \\ y &= a\sin t \end{cases}$ $(a>0, 0<t<\pi)$ 上任一点处的切线与x轴的交点到切点的距离（称为切线长）恒为常数

证明：$dy = a\cos t dt$

$dx = a(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\sec^2\frac{t}{2} - \sin t)dt = a(\frac{1}{\sin t} - \sin t)dt$

则$y' = \tan t$,于是过点(x,y) 的切线方程为

$Y - y = \tan t(X - x)$,切线与x轴的交点为$(x - y\cot t, 0)$,

于是切点(x,y)到该交点的距离为d,那么

$d^2 = y^2\cot^2 t + y^2 = y^2\csc^2 t = a^2\sin^2 t\csc^2 t = a^2$

于是切线长恒为常数a

注意不宜全部转化成关于参数求切线方程，尽可能利用直角坐标来分析，另外切线的纵横坐标要与曲线上点的纵横坐标区分开来

14.设$f(t) = \lim\limits_{x\to\infty} t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$,求$f'(t)$

解：$f(t) = t\lim x \to \infty[(1+\frac{1}{x})^x]^{2t} = te^{2t}$

$f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t}$

15.设$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \ln(1-x), & x<0 \end{cases}$,该函数在$x=0$处是否可导？为什么？

解：$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x} = -1$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\Longrightarrow f'(0)$不存在

16.试求由参数方程$\begin{cases} x &= 1+t^2 \\ y &= \cos t \end{cases}$确定的函数的导数$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

解：$dx = 2tdt, dy = -\sin t dt \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{2t}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(-\frac{\sin t}{2t})\frac{dt}{dx} = -\frac{2t\cos t - 2\sin t}{8t^3}$

17. 试求由参数方程$\begin{cases} x & = \arctan t \\ 2 & y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$确定的函数的导数$\frac{dy}{dx}$

解：$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

$2dy - y^2dt - 2ytdy + e^tdt = 0 \Longrightarrow (2-2yt)dy = (y^2 - e^t)dt$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2-e^t}{2-2yt}}{\frac{1}{1+t^2}}=\frac{(1+t^2)(y^2-e^t)}{2-2yt}$

18.设$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$,求$y^{(n)}(3)$

解：$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (\frac{1}{x-2})^{(n)}-(\frac{1}{x-1})^{(n)} \\ &= (-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

$y^{(n)}(3)=(-1)^n n!(1-\frac{1}{2^{n+1}})$

19.设$y=f(x+y)$,其中f 有二阶导数，且其一阶导数不等于1，求y''

解：$y'=f'(x+y)(1+y')$

$y''=f''(x+y)(1+y')^2+f'(x+y)y''$

$y''=\frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}$

$y'(1-f'(x+y))=f'(x+y)\Longrightarrow y'=\frac{1}{1-f'}-1$

$y''=-(1-f'(x+y))^{-2}(f''(x+y)(1+y'))=-(1-f')^{-2}(f''(x+y)(\frac{1}{1-f'})=-\frac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3}$

20.设质点抛射的运动轨迹由方程组$\begin{cases} x & =\sqrt{3}t-1 \\ te^y & -y=0 \end{cases}$确定，试求开始抛射时$(t=0)$质点运动的速度大小及方向。

解：$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3},e^y+te^yy'-y'=0,y(0)=0,x(0)=-1$

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3},\frac{dy}{dt}=\frac{e^y}{1-te^y}$

$x'(0)=\sqrt{3},y'(0)=1$

速度大小为2 方向沿斜率为$\frac{1}{\sqrt{3}}$的直线方向

三、选做题

1.设函数$y=f(x)$ 与$y=\psi(x)$在点x_0处可导，试证曲线$y=f(x)$与$y=\psi(x)$在点x_0处相切的充要条件是：当$x\to x_0$时$f(x)-\psi(x)$是$x-x_0$的高阶无穷小

证明$(\Longrightarrow)$ 因为$f(x_0)=\psi(x_0),f'(x_0)=\psi'(x_0)$,于是

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\psi(x)}{x-x_0} \\ &=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} \\ &=f'(x_0)-\psi'(x_0)=0 \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ 显然$f(x_0)=\psi(x_0)$,又

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\psi(x)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(x_0)-\psi'(x_0) \end{aligned}$$

于是$f'(x_0)=\psi'(x_0)$

2.设函数$f(x)$处处可导，且有$f'(0)=1$,并对任意实数x,h,有

$f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx$,求$f'(x)$,

解：$f(h)=f(0)+f(h)$于是$f(0)=0$,那么

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(h)}{h}+2x \\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(h)-f(0)}{h}+2x \\ &= 1+2x \end{aligned}$$

3.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处有定义，且对任意的实数x,y,有$f(x+y)=f(x)f(y)$, 又$f(x)=1+xg(x)$,其中$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$,试证$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处可导.

证明：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+xg(x))=1$,又

$f(x)-f(0)=f(0)f(x)-f(0)=f(0)(f(x)-1)$,于是

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=0$, 即$f(0)=1$,那么

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} \\ &= f'(0)f(x) \end{aligned}$$

注意到$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$,于是命题得证.

4. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义，且对于任意$x>0,y>0$都有$f(xy)=f(x)+f(y)$,又$f'(1)=1$,求$f'(x)$,及$f(x)$

解：$f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)\Longrightarrow f(1)=0$，则$\forall x\in(0,+\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(x(1+\frac{\Delta x}{x}))-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(1+\frac{\Delta}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\tfrac{1}{x} \\ &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(x)=\ln x+C$,注意到$f(1)=0$,于是$f(x)=\ln x$

5.已知函数$y=y(x)$二阶可导，并满足方程

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay^2=0$,

求证：若$x=\sin t$，则此方程可以变换为$\frac{d^2y}{dt^2}+ay^2=0$

解：$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}\cos t$

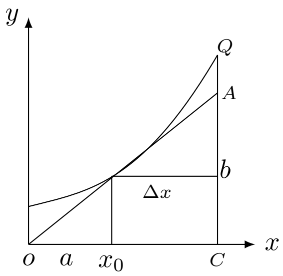
$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dx^2}\cos^2 t-\sin t\frac{dy}{dx}$
$\Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2}+ay^2$
$=\frac{d^2y}{dx^2}\cos^2 t-\sin t\frac{dy}{dx}+ay^2$
$=(1-\sin^2 t)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay^2$
$=(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay^2=0$

6.设曲线$y=f(x)$,在原点与曲线$y=\sin x$相切，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$

解：$f(0)=0,f'(0)=1$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2}$
$=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}$

补充题目

1.已知直角三角形的两直角边分别为a和b且直角边a与x轴重合斜边C与曲线$y=e^x$相切，求切点坐标，取切点到直角边b距离作为自变量的增量Δx,求出函数$y=e^x$在点x_0处相应于Δx的增量Δy与微分dy



解：设切点为$P(x_0,y_0)$，于是$y_0=e^{x_0},y'(x_0)=e^{x_0}=\frac{b}{a}$

$\Longrightarrow x_0=\ln\frac{b}{a},\Delta y=e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}=\frac{b}{a}(e^{\Delta x}-1)$

$e^{x_0+\Delta x}=\underline{\Delta y+e^{x_0}}=CA+AQ=\underline{b+\Delta y-dy}$

$\Longrightarrow \Delta y=b+\Delta y-dy-\frac{b}{a},\Longrightarrow dy=b-\frac{b}{a}$

$\underline{dy}=y'\Delta x=\underline{\frac{b}{a}\Delta x},\Longrightarrow \Delta x=\frac{a}{b}dy=\frac{a}{b}(b-\frac{b}{a})=a-1$

于是$\Delta y=\frac{b}{a}(e^{a-1}-1)$

2. 设$f(x)=(\arcsin x)^2$,求$f^{(n)}(0)$,

解：$f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,显然不能继续往下进行，将两端平方得到

$(1-x)^2f'^2(x)=4f(x)$ (1) 继续对等式两端求导得

$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$ (2)继续对该等式两端

求n阶导数，注意到用Leibnitz 公式

$(-xf'(x))^{(n)}+[(1-x^2)f''(x)]^{(n)}=0$

$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)$

$-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0$ (3),

在以上三式中取$x=0$得

$f'(0)=0,f''(0)=2$

$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0),$

于是$f^{(2k+1)}(0)=0,k=0,1,2\ldots)$

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= (2k-2)^2(2k-4)^2\cdots 2^2\cdot 2\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(2k-2i)^2\right)\cdot 2\\
&= 2^{2(k-1)}\cdot 2\prod_{i=1}^{k-1}(k-i)^2\\
&= 2^{2k-1}((k-1)!)^2 \quad (k=1,2,\ldots)
\end{aligned}$$

3. 设$F(x)=f(x)(1+|\sin x|),f(x)$可导，证明$F(x)$在$x=0$处可导的充分必要条件是$f(0)=0$

证明：$(\Longrightarrow)$因为$F(x)$在$x=0$处可导于是

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(x)|\sin x|}{x}\\
&= f'(0)+f(0)\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}
\end{aligned}$$

若$f(0)\neq 0$,则上式的第二项没有极限，与$F'(0)$存在矛盾

$(\Longleftarrow)$ 若$f(0)=0$,由上面推导可知，$F'(0)=f'(0)$

4.设$f(x)$ 在区间$[a,b]$上有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0,f'(a)\cdot f'(b)>0$,证明：存在$\xi\in(a,b),\eta\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0,f''(\eta)=0$

证明：从要证明的结论可见，需要利用零点存在定理和Rolle定理，于是我们需要寻找满足定理的条件，于是由条件$f'(a)\cdot f'(b)>0$入手，不妨设$f'(a)>0,f'(b)>0$.

注意到$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$,于是存在$\delta_1>0$ 当$x\in(a,a+\delta_1)$时，$f(x)>f(a)=0$,即存在$x_1\in(a,a+\delta_1)$ 使得$f(x_1)>0$

由$0<f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$,于是存在$\delta_2>0$当$x\in(b-\delta_2,b)$时，$f(x)<f(b)=0$,即存在$x_2\in(b-\delta_2,b)$ 使得$f(x_2)<0$

于是由零点存在定理，存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$使得$f(\xi)=0$,在$[a,\xi],[\xi,b]$上分别使用Rolle定理，则存在$\xi_1\in(a,\xi),\xi_2\in(\xi,b)$,使得$f'(\xi_j)=0,(j=1,2)$, 在$[\xi_1,\xi_2]$上对$f'(x)$继续使用Rolle定理，则存在$\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得$f''(\eta)=0$