第九章微分方程

第一节微分方程的基本概念

引例1. 一曲线通过点$(1,2)$,且该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求该曲线的方程.

解：设所求曲线的方程为$y=y(x)$,于是有$\frac{dy}{dx}=2x, y(1)=2$.

那么所求曲线为$y=x^2+C$, 代入条件$y(1)=2$得$C=1$,于是所求曲线的方程为$y=x^2+1$.

引例2. 列车以$20m/s$的速度在平直线路上行驶,当制动时列车获得$-0.4m/s^2$的加速度，问开始制动后多少时间列车才能停住,在这段时间内列车行驶了多少路程？

解：设列车在开始制动后ts可以停住，列车在这段时间内驶过的路程为$x=x(t)m$,由题意得

$\frac{d^2x}{dt^2}=-0.4, x(0)=0, x'(0)=20$.

于是$v=x'(t)=-0.4t+C_1, x=x(t)=-0.2t^2+C_1t+C_2$,代入初始条件得$C_2=0, C_1=20$,于是列车的运动方程为$x=-0.2t^2+20t$,列车停住意味着速度$x'(t)=-0.4t+20=0$,那么$t=50(s)$ 将刹车所用的时间$50s$ 代入运动方程，则走过的路程为$x(50)=-0.2\times(50)^2+20\times50=500(m)$.

从以上两个例子可以看到方程中含有未知函数的导数，于是我们称含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程，习惯上记作

$F(x,y',y'')=0$等.

注：微分方程中可以不出现未知函数或未知函数的自变量，但一定要出现未知函数的微分或导数.

微分方程中出现的未知函数的导数或微分的最高阶数，称为微分方程的阶数，微分方程中,未知函数及其导数或微分所在项的最高幂次叫作微分方程的次数.例如方程$y'-2xy+5=0$,是一个一阶线性方程. $y''+ky'-by-\sin y=0$是二阶非线性方程，$y'y=x^2$是非线性方程.

一般n阶微分方程我们写成$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$或$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$.

注意到上述微分方程中未知函数是一元函数，我们称这样的方程为常微分方程，若微分方程中的未知函数是多元函数，则称这样的微分方程为偏微分方程，例如$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$.

满足微分方程的未知函数叫作微分方程的解.例如$y = x^2 + C$就是引例1的解.若函数$y = \varphi(x)$在区间I上满足$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$,则称$y = \varphi(x)$是$n$阶微分方程的解.若微分方程的解中含有独立的任意常数的个数恰好与微分方程的阶数相同，则称该解为微分方程的通解. 例如$x = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$就是引例2 的通解.

一般来讲，微分方程解的存在性、唯一性和稳定性可能有待进一步确定，例如微分方程的通解就不唯一.为了确定研究对象的变化规律，我们总希望解是唯一确定的，这就需要附加一定的条件，对于微分方程，我们这里只介绍一种附加条件，就是初值条件或称为Cauchy初值条件，通常的记法为

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0\end{cases}, \begin{cases}\frac{d^2y}{dx^2} &= f(x,y,y') \\ y(x_0) &= y_0, y'(x_0) = y_1\end{cases},$$

$$\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) &= 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) &= y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\end{cases}.$$

通过初值条件确定了任意常数的解叫满足初值问题的解.例如$y = x^2 + 1, x = -0.2t^2 + 20t$ 分别是引例1和引例2满足初值问题的解.

注：初值问题中初值条件的个数恰是微分方程的阶数.

习题9.1

1.匹配微分方程与它的解：

(a)	$x\frac{dy}{dx} = y$______	$(1) y = x^2 + C$
(b)	$y'' = 4y$______	$(2) y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$
(c)	$\frac{dy}{dx} = 2x$______	$(3) y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
(d)	$\frac{d^2y}{dx^2} = -4y$______	$(4) y = Cx$

2.验证下列函数分别是相应方程的解：

$(1) y = 3e^{x^3}, y' = 3x^2 y, y(0) = 3;$

$(2) y = \frac{1}{4}x^4 + 2\cos x + 1, y' = x^3 - 2, y(0) = 3;$

$(3) y'' + y = 0, y = C_1 \sin t + C_2 \cos t;$

$(4) 2\frac{dy}{dx} + y = x - 1, y = Ce^{-\frac{x}{2}} + x - 3.$

3.用隐函数求导验证微分方程的隐式解

(1) $\ln y = xy^2 + C, \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1-2xy^2}$;

(2)$x^2 + xy^2 = 0, 2x + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$.

4.证明：若曲线上任意点的切线的斜率与该点的横坐标成比例，则曲线一定是抛物线$y = ax^2 + C$.

第二节可分离变量的微分方程

形如$g(y)dy = f(x)dx$的微分方程叫变量可分离方程，顾名思义就是作为未知函数的因变量和与其伴随的自变量可以分离，假定$g(y), f(x)$ 连续，则在等式两端求不定积分得$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$.

若$\int g(y)dy = G(y) + C, \int f(x)dx = F(x) + C$,则$G(y) = F(x) + C$称为变量可分离方程的隐式通解，上述$C$为任意常数.

例9.2.1求微分方程$\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解.

解：显然$y = 0$ 是该方程的一个解，若$y \neq 0$,则对等式两端积分得$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$.

于是有$\ln|y| = x^2 + C, y = \pm e^{x^2+C} = \pm e^C e^{x^2}$,即$y = C_1e^{x^2}$是该方程的通解,其中$C_1 = \pm e^C$.

注: 在表示微分方程的通解时，我们对互相不独立的任意常数往往不加区别，例如例1中的任意常数我们也可以用C来代替C_1,于是微分方程的通解可以表示成$y = Ce^{x^2}$.

例9.2.2放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而蜕变成其它元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变，由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量M成正比，已知$t = 0$时铀的含量为M_0,求在衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t 的变化规律.

解:$\frac{dM}{dt} = -\lambda M, M(0) = M_0$,其中$\lambda > 0$,显然这是因为$\frac{dM}{dt} < 0$.

$\frac{dM}{M} = -\lambda dt$,两端积分得$\ln M = -\lambda t + C, M = Ce^{-\lambda t}$.

代入初始条件，解得衰变规律为$M = M_0e^{-\lambda t}$.

例9.2.3设降落伞从伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解：如图9.2.1所示；设降落伞下落速度为$v(t)$,降落伞在下降过程中要受到重力$P = mg$和阻力$R =$

$kv, k > 0$的作用

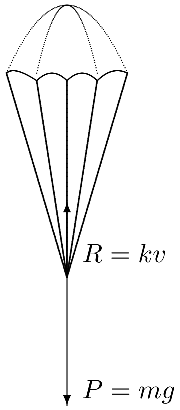

图9.2.1

由Newton第二定律$mg-kv = ma$,其中$a = \frac{dv}{dt}$,于是运动速度满足微分方程: $mg-kv = m\frac{dv}{dt}, v(0) = 0$那么$\frac{dv}{mg-kv} = \frac{dt}{m}$ ，等式两端积分得

$\displaystyle\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m}$注意到$mg - kv > 0$,我们有$mg - kv = Ce^{-\frac{k}{m}t}, v = \frac{mg}{k} - Ce^{-\frac{k}{m}t}$

将初始条件代入得$C = \frac{mg}{k}$,于是满足初始条件的解为$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

例9.2.4 设$f(x)$ 在$[0, +\infty)$上具有连续导数，且单调递增$f(0) = 1, \forall t \in [0, +\infty)$,直线$x = 0, x = t$及曲线$y = f(x)$以及$x$轴围成的曲边梯形绕$x$ 轴旋转一周生成的旋转体的侧表面积在数值上等于其体积的2倍，求函数$f(x)$的表达式.

解：由定积分的元素分析法，设上述旋转体的表面积为A,体积为V,则$dA_{\text{表}} = 2\pi f(x)ds$,其中$ds$ 为旋转体微元小圆台的母线长.于是$A = 2\pi \displaystyle\int_0^t f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

而$V = \displaystyle\int_0^t \pi f^2(x)dx$.

由题意知$2\pi \displaystyle\int_0^t f^2(x)dx = 2\pi \int_0^t f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$,

两端关于t求导得$f^2(t) = f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}$

那么$f(t)[f(t) - \sqrt{1 + (f'(t))^2}] = 0$,令$y = f(t)$于是有$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}$

分离变量求积分得$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x + C$,注意到$y(0) = 1$,于是$C = 0$,

考虑到$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x, y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{-x}$，于是$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx$(双曲余弦).

例9.2.5.一个高为$1m$的半球型容器，水从它的底部小孔流出，小孔的横截面积为$1cm^2$,开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h(水面与孔口中心间的距离)随时间t的变化规律，并求水流完所需的时间.

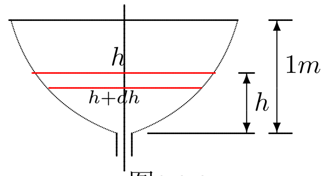

图9.2.2

解：由实验验证孔口的流量由如下公式计算$Q=\frac{dV}{dt}=kS\sqrt{2gh}$

其中V是将要流出的水的体积，S为孔的横截面面积，$k=0.62,g$为重力加速度，在$[t,t+dt]$时间段，水面的高度由h 降到$h+dh(dh<0)$,$\Longrightarrow dV=-\pi r^2dh$,注意到$dV>0$,于是我们在等式中加上负号

设t时刻水面高度为h时，水面的半径为r，于是$r^2=1-(1-h)^2$

$\Longrightarrow dV=-\pi(1-(1-h)^2)dh$由公式得

$-\pi(2h-h^2)dh=kS\sqrt{2gh}dt,h(0)=1$,这是满足初始条件的一阶变量可分离方程，分离变量得到

$dt=-\frac{\pi}{kS\sqrt{2g}}(2(h)^{\frac{1}{2}}-(h)^{\frac{3}{2}})dh$

两端积分得到

$t=-\frac{\pi}{kS\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}+C\right)$

代入初始条件得$C=-\frac{14}{15}$,于是

$t=\frac{14\pi}{15kS\sqrt{2g}}\left(1-\frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}}\right)$

将$k=0.62,S=10^{-4}m^2,g=9.8m/s^2$统一量纲，代入计算得到

$t=1.068\times10^4\left(1-\frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}}\right)(s)$

$h=0$时水流完，$t=1.068\times10^4 s=2h58min$

习题9.2

1.求解以下方程

(1)$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$,　　(2)$\frac{dy}{dx}=2(1+y^2)x$

(3)$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+y}\frac{dy}{dx}=-x$,　　(4)$(1+x^4)\frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{y}$

(5)$(2+2y^2)y'=e^x y$,　　(6)$y'-(1+x)(1+y^2)=0$

(7)$\frac{dy}{dx}-\frac{y^2-y}{\sin x}=0$,　　(8)$y-\frac{dy}{dx}\sec x=0$

2.求解以下方程：

(1)$\frac{dy}{dx}-2xy=2x, y(0)=3$,　　(2)$\frac{dy}{dt}+y=2, y(0)=1$

(3)$y'=\frac{3x^2}{2y+\cos y}, y(0)=\pi$,　　(4)$y'-xe^y=2e^y, y(0)=0$.

3.由牛顿冷却定律：物体在空气中的冷却速度与物体温度与空气温度的差成比例.如果空气的温度为$20°C$ 在20分钟内被冷却的物体从$100°C$下降到$60°C$,若温度下降到$30°C$需要多长时间？

第三节齐次方程

对于任意数值λ,若函数$f(x,y)$满足：$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$,则称函数$f(x,y)$为$n$次齐次函数，例如函数$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 满足$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y)$是1次齐次函数，而$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$满足：

$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$，则$f(x,y)$是0次齐次函数.

一、齐次方程：形如$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$的微分方程称为齐次方程.

此类方程的求解是利用变量替换，设法将其转化成变量可分离方程. 我们令$y/x=u$,那么$y'=u+x\frac{du}{dx}$将其代入原方程得$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$,即$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$,显然当$\varphi(u)=u$，则方程是变量可分离方程，即$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$,那么$\ln|y|=\ln|Cx|$即$y=Cx$是原方程的解.

若$\varphi(u)\neq u$分离变量后积分得$\displaystyle\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$于是可以得到隐式通解.

例9.3.1求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

解：将原方程变形为$\frac{dy}{dx}=\frac{y/x}{1-(y/x)^2}$,令$y/x=u$,则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入得

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}$,即$x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}$ 分离变量得

$\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\frac{dx}{x}$两端积分得

$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|$,代回原变量$u=\frac{y}{x}$, 得到方程的隐式通解

$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|$.

例9.3.2解方程$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

解:显然$y=0$ 是方程的一个解，若$y\neq 0$,原方程可以转化成

$1+\frac{x^2}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$,即$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$ 令$y=xu$ 代入得$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$分离变量积分得通解为$\ln|y|=\frac{y}{x}+C$.

例9.3.3探照灯的聚光镜是一张旋转抛物面，它的形状由xOy坐标面上的一条曲线L绕x 轴旋转而成，按聚光性能的要求，在其旋转轴上一点O处发出的一切光线经它反射后都与旋转轴平行，求曲线L的方程.

解：以光源为坐标原点建立坐标系，曲线上任意点记为$M(x,y)$由光学原理入射角等于反射角得到

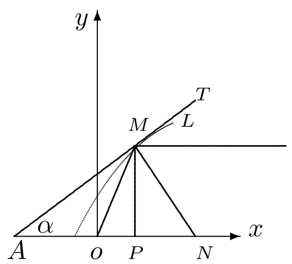

图9.3.1

令P为曲线L 上任意点$M(x,y)$在x 轴上的投影，α 为过M 点的切线与x轴的夹角，于是

$AP-OP=PM\cot\alpha-OP=\frac{y}{y'}-x$, 注意到$AO=OM=\sqrt{x^2+y^2}$得到微分方程$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}$,为了便于讨论我们不妨将$y$看作自变量，当$y>0$时,上式为$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$，这是一个齐次方程.令$\frac{x}{y}=v$, 于是$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$, 代入上式，得$y\frac{dv}{dy}=\sqrt{v^2+1}$, 分离变量并积分得

$\ln(v+\sqrt{v^2+1})=\ln y-\ln C$,即$v+\sqrt{v^2+1}=\frac{y}{C}$代回变量$v=\frac{x}{y}$整理得$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$于是曲线$L$是对称轴为$x$轴，焦点在原点的抛物线.

*二、可化为齐次方程的方程

微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$若满足：$c=c_1=0$, 则方程为齐次方程，若$c\neq c_1$,我们通过变量变换$x=$

$x_1+h, y=y_1+k$，选择适当的h,k将其化解成齐次方程.具体步骤如下：

将变量变换及$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$,代入原方程得

$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}$

令$ah+bk+c=0, a_1h+b_1k+c_1=0$, 若$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$,可以解得唯一的$h,k$,于是方程转化成齐次方程$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$.

若$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$，令$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$,于是原方程为

$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$,令$z=ax+by$，于是$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, 即$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}$,那么我们有

$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1}$, 这是一个变量可分离方程.

例9.3.4 求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$ 的通解.

解：作平移变换$x=x_1+h, y=y_1+k$, 于是方程转化成

$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}$

令$h+k-3=0, h-k-1=0$,得$h=2, k=1$.

于是解齐次方程$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$, 作代换$\frac{y_1}{x_1}=u$,于是方程转化成

$u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u}$,即$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}$,分离变量并积分得

$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|Cx_1|$,即

$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\arctan u}$，代回原变量得

$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\arctan\frac{y-1}{x-2}}$.

例9.3.5求微分方程$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ 的通解.

解：因为$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$,于是令$2x+y=z$,则$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2$代入原方程得

$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5}$,分离变量积分得

$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+C$代回原变量整理得

$10y-5x+7\ln|10x+5y+9|=C_1$($C_1$ 是任意常数)为原方程的隐式通解.

习题9.3

1.求解下列方程的通解：

(1) $(y-x)dx+(y+x)dy=0,$ (2)$(x+y)dx+xdy=0;$

(3) $(x+y)dx+(y-x)dy=0,$ (4)$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx;$

(5) $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0,$ (6)$(2\sqrt{st}-s)dt+tds=0;$

(7) $xy^2dy=(x^3+y^3)dx,$ (8)$x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx).$

2.求下列方程满足初始条件的解：

$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},y(1)=2;$

3^*. 求下列可化为齐次方程的方程的解：

(1)$(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0.$

(2)$(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0.$

(3)$(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0.$

第四节一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的微分方程叫做一阶线性微分方程，其中$P(x),Q(x)$是给定的连续函数. 当$Q(x)=0$ 方程称为齐次方程，当$Q(x)\neq 0$方程称为非齐次方程，显然齐次线性方程是变量可分离方程，它的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

注意到非齐次方程的解一定是x的函数，且当$Q(x)=0$时，其解的表达式是$y=Ce^{-\int P(x)dx}$ ，于是将上述解中的C 设为待定函数$C(x)$，不妨设非齐次方程有形如$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$这样形式的解，我们来确定$C(x)$.这种求解微分方程的方法，习惯上称为常数变易法.将上述待定解代入方程得$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}\equiv Q(x)$ 于是$C'=Q(x)e^{\int P(x)dx}$，那么待定的函数$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$

于是，一阶线性微分方程的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$

若令$y^*=e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$,则$y=Ce^{-\int P(x)dx}+y^*$

注：一阶线性非齐次方程的通解为相应齐次方程的通解加上非齐次方程的一个解.

例9.4.1求方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

解：$P(x)=-\frac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$代入公式解得

$$\begin{aligned} y &= Ce^{\int\frac{2}{x+1}dx}+e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx \\ &= (x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right] \end{aligned}.$$

例9.4.2有一个电路其中电源电动势为$E=E_m\sin\omega t(E_m,\omega$都是常数),电阻为$R$,电感为$L$均为常数，求电流强度$i(t)$.

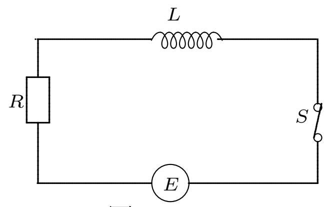

图9.4.1

解：由回路电压定律：回路电压的代数和为零，即$E-L\frac{di}{dt}-iR=0$,其中$-L\frac{di}{dt}$为感应电动势，即$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t,i(0)=0$，令$P(t)=\frac{R}{L},Q(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$ 代入公式得

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\frac{E_m}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega tdt+C\right).$$

利用分部积分法得$\displaystyle\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega tdt=\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2+\omega^2L^2}(RL\sin\omega t-\omega L^2\cos\omega t)$, 代入化简得

$$i(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

代入初始条件$i(0)=0$,得

$$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$$

注：令$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\sin\varphi=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$,

于是$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)$,其中$\varphi=\arctan\frac{\omega L}{R}$.

当t增大时，上式右端第一项（叫做暂态电流）逐渐衰减趋于零；第二项（叫做稳态电流）是正弦函数，它的周期和电动势的周期相同，而相角落后φ.

例9.4.3 $y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x &= 2t+t^2, \\ y &= \psi(t). \end{cases}$ $(t>-1)$确定，其中$\psi(t)$具有二阶导数，且$\psi(1)=\frac{5}{2},\psi'(1)=6$,已知$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求$\psi(t)$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{2t+2},\frac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^3}$.

于是$\dfrac{3}{4(1+t)}=\dfrac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^3}$,

$\dfrac{\psi''(t)}{(t+1)^2}-\dfrac{\psi'(t)}{(t+1)^3}=\dfrac{3}{1+t}$,

令$\psi'(t)=u$, 于是有$u'(t)-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$,这是关于$u$ 的一阶线性非齐次方程,代入一阶线性非齐次方程的求解公式得

$u(t)=C_1e^{\int\frac{1}{t+1}dt}+e^{\int\frac{1}{t+1}dt}\displaystyle\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt$,

那么$u(t)=C_1(t+1)+3t(t+1)$,注意到$u=\psi'(t)$

所以$\psi(t)=\frac{C_1}{2}t^2+C_1t+t^3+\frac{3}{2}t^2+C_2$,

利用初始条件得$C_1=0,C_2=0$,于是$\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2$.

* 二、伯努利方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$的方程叫做伯努利（Bernoulli）方程，显然$n=0,1$分别是变量可分离方程和一阶线性方程. 当$n\neq 0,1$方程变形为$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,于是令$z=y^{1-n}$,那么$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, 这样我们得到关于$z$ 的一阶线性方程$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,解出$z$后将$z=y^{1-n}$代入即得伯努利方程的解.

例9.4.4求方程$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$.

解：$y=0$,显然是该方程的一个解，当$y\neq 0$,在方程两端除以y^3 得

$y^{-3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3$,令$z=y^{-2}$,则方程化解为$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$.

代入一阶线性非齐次方程的求解公式得方程的通解为$z=Ce^{x^2}+x^2+1$ 将$y^{-2}=z$ 代入得原方程的通解为$y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$.

习题9.4

1.求下列线性方程的解

(1)$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$,(2)$y'-a\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$

$(3)(x-x^3)y'+(2x^2-1)y-ax^3=0, (4)\frac{ds}{dt}\cos t+s\sin t=1,$

$(5)\frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t, (6)y'-\frac{n}{x}y=e^x x^n$

$(7)y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}, (8)y'+y=\frac{1}{e^x}$

2.* 求解下列伯努利方程

$(1)y'+xy=x^3y^3, (2)(1-x^2)y'-xy-axy^2=0$

$(3)3y^2y'-ay^3-x-1=0, (4)y'(x^2y^3+xy)=1$

第五节可降阶的高阶微分方程

前面我们已经讨论过一阶线性微分方程一定有解，而且我们还给出了求解公式，但对于高阶方程，相应的结论就未必成立，以下我们就三类方程进行讨论.

一、$y^{(n)}=f(x)$型方程

此类方程我们注意到

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x)dx+C_1 \\ y^{(n-2)} &= \int\left[\int f(x)dx+C_1\right]dx+C_2 \\ &= \int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2 \\ &= \cdots \\ y &= \overbrace{\int\cdots\int} f(x)dx\cdots dx+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots C_n \end{aligned}$$

其中$C_j(j=1,2,\ldots,n)$为任意常数.

例9.5.1 求解微分方程$y''=\sin(kx), y'(0)=1, y(0)=0.$

解：$y'=\displaystyle\int\sin kxdx+C_1=-\frac{\cos kx}{k}+C_1,$

$y=-\frac{1}{k}\displaystyle\int\cos kxdx+C_1x=-\frac{1}{k^2}\sin kx+C_1x+C_2.$代入初始条件得$C_2=0, C_1=1+\frac{1}{k}$

$y=-\frac{1}{k^2}\sin kx+(1+\frac{1}{k})x.$

例9.5.2 求微分方程$y'''=e^{2x}-\cos x$的通解.

解：$y''=\displaystyle\int(e^{2x}-\cos x)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1;$

$y'=\displaystyle\int(\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2;$

$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$, 其中$C_j(j=1,2,3)$ 是独立的任意常数.

例9.5.3质量为m 的质点受力F的作用沿Ox轴作直线运动，设力$F=F(t)$在开始时刻$t=0$时，$F(0)=F_0$, 随着时间t的增大，力F均匀地减小，直到$t=T$时，$F(T)=0$. 如果开始时质点位于原点，且初速度为零，求这个质点的运动规律.

解：设质点的运动规律为$x=x(t)$,由Newton第二定律有$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t)$注意到F随时间t的增加而减小，即$F=F_0-kt$，当$t=T$ 时$F=0$ ，即$k=\frac{F_0}{T}$,所以$F(t)=F_0(1-\frac{t}{T})$问题转化成如下初值问题：$x''=\frac{F_0}{m}(1-\frac{t}{T}),x(0)=0,x'(0)=0$，求积分得$x'(t)=\frac{F_0}{m}t-\frac{F_0}{2mT}t^2+C_1$由初值条件得$C_1=0$.

$x(t)=\frac{F_0}{2m}t^2-\frac{F_0}{6mT}t^3+C_2$,由初值条件得$C_2=0$,于是运动规律为$x(t)=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{F_0}{6T}t^3\right),0\le t\le T$.

二、$y''=f(x,y')$型微分方程

此类方程不含未知函数y，我们通过降阶来将其转化为一阶方程. 令$y'=p$, 则$y''=\frac{dp}{dx}$代入原方程转化成关于p的一阶方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$依据一阶方程的求解方法得到$p=\varphi(x,C_1)$然后积分得到$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

例9.5.4 求微分方程$(1+x^2)y''=2xy'$满足初始条件$y(0)=1,y'(0)=3$ 的解.

解：令$p=y'$于是有$(1+x^2)\frac{dp}{dx}=2xp$ 那么$\frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{1+x^2}$两边积分得到$\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln C_1$,那么$p=C_1(1+x^2)$, 于是$y=C_1(x+\frac{1}{3}x^3)+C_2$代入初始条件得到$C_1=3,C_2=1$,故所求微分方程的解为$y=x^3+3x+1$.

例9.5.5 求方程$y''\cdot(x+(y')^2)=y'$, 满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的解

解：令$y'=p$,则$\frac{dp}{dx}(x+p^2)=p$

于是有$\frac{dx}{dp}=\frac{x+p^2}{p}$ 这是一阶线性微分方程，即$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$, 那么

$x=Ce^{\int\frac{1}{p}dp}+e^{\int\frac{1}{p}dp}\int e^{-\int\frac{1}{p}dp}pdp=C_1p+p^2$,

由初始条件$1=C_1+1,\Longrightarrow C_1=0$

由于$p^2=x$,于是$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{x}$, 由$y'(1)=1>0$,那么$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$, 由初始条件推得，$C_2=\frac{1}{3}$,所

以$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$

例9.5.6设有一均匀、柔软的绳索，两端固定，绳索仅受重力的作用而下垂，试问该绳索在平衡状态时是怎样的曲线.

解：记绳索的最低点为A,建立坐标系其中y轴过A点，不妨设A点距离x轴的距离为OA要想绳索处于平衡状态，在绳索上任意点处需有一个张力T,其中张力沿曲线的切向，设绳索从点A 到M处的曲线弧长为$\widehat{AM}$,欲使系统平衡，需要$T\cos\theta=H,T\sin\theta=\rho gs$

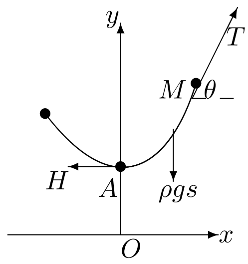

图9.5.1

其中H 为点A处沿切线方向的水平张力，s为弧长，θ为张力与x轴正向的夹角，ρ为绳索的线密度，g为重力加速度。两式相除得$\tan\theta=\frac{\rho g}{H}s$,记$\frac{\rho g}{H}=\frac{1}{a}$,注意到$\tan\theta=y',s=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$

代入得微分方程$y'=\frac{1}{a}\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$ 两端关于x求导，得到$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$.

这个方程属于$y''=f(x,y')$类型，于是令$y'=p$,则$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$.

分离变量，并积分得

$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1$,将初始条件$y'(0)=0$，代入得$C_1=0$,于是

$p=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$.将$p=y'$代入并积分得

$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})+C_2$,为了简化不妨设$OA=a$,将初始条件$y(0)=a$代入得$C_2=0$,于是所求曲线方程为$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$,该曲线称为悬链线.

三、$y''=f(y,y')$型方程

令$y'=p$那么$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}p$于是方程转化成$\frac{dp}{dy}p=f(y,p)$这是一个一阶微分方程，然后利用一阶微分方程的求解方法得到关于p 的解为$p=\varphi(y,C_1)$，最后通过积分得到通解$x+C_2=\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}$.

例9.5.7求微分方程$yy''-y'^2=0$的通解.

解：令$y'=p,y''=\frac{dp}{dy}p$代入得$yp\frac{dp}{dy}=p^2$,那么$y\frac{dp}{dy}=p$或$p=0$.显然$p=0$,则$y=C$是原方程的解；当$p\neq 0$ 时，$y=C_2e^{C_1x}$为其通解.

例9.5.8 一个距离地面很高的物体，受地球引力的作用由静止开始落向地面，求它落到地面时的速度和所需的时间(不计空气阻力).

解：设地球的半径为R,

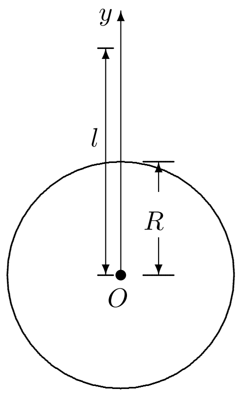

图9.5.2

物体的质量为m,物体开始下落时与地球中心相距为$l(l>R)$,在时刻t 物体所在的位置为$y=y(t)$,于是物体的速度为

$v(t)=\frac{dy}{dt}$ 由万有引力得到$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{kmM}{y^2}$, 即$y''=-\frac{kM}{y^2}$其中$k$为引力常数，$M$为地球的质量，当$y=R$时,$y''=-g$(这里的负号是由于物体运动的方向与$y$轴的正向相反的缘故),所以$g=\frac{kM}{R^2}$

这样所求微分方程转化成$y''=-\frac{gR^2}{y^2},y(0)=l,y'(0)=0$

令$y'=v,y''=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}v$,于是原方程转化成$vdv=-\frac{gR^2}{y^2}dy$,两端积分得到$v^2=\frac{2gR^2}{y}+C_1$代入初始条件得到$C_1=-\frac{2gR^2}{l}$,那么$v=-R\sqrt{2g(\frac{1}{y}-\frac{1}{l})}$

取$-$号是由于运动方向与y轴方向相反.

当$y=R$时，即物体到达地面时的速度$v=-\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}$

注意到$\frac{dy}{dt}=v=-R\sqrt{2g(\frac{l-y}{yl})}$ 于是

$dt=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\sqrt{\frac{y}{l-y}}dy$两端积分并注意到$y=l\cos^2 u$ 得

$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right)+C_2$ 代入初始条件$y(0)=l$ 得$C_2=0$

令$y=R$得到物体到达地面所需的时间为$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\right)$.

习题9.5

1.求解下列微分方程

(1)$xy'''=2,y(1)=1,y'(1)=1,y''(1)=3,$

(2)$y^{(n)}=x^m,$(3)$y''=a^2y$

(4)$y''=\frac{a}{y^3}$

2.求下列满足初值条件的方程的解

(1)$xy''-y'=x^2e^x,y(0)=-1,y'(0)=0.$

(2)$yy''-(y')^2+(y')^3=0,y(0)=-1,y'(0)=0.$

(3)$y''+y'\tan x=\sin 2x,y(0)=-1,y'(0)=0.$

(4)$(y'')^2+(y')^2=a^2,y(0)=-1,y'(0)=0.$

3.试求$y''=x$的经过点$M(0,1)$且在此点与直线$y=\frac{x}{2}+1$相切的积分曲线.

4.设一质量为m的物体，在空气中由静止开始下落，如果空气阻力为$R=cv$ (其中c为常数，v 为物体运动的速度)，试求物体下落的距离s与时间t的函数关系.

第六节高阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程举例

例9.6.1. 设有一个弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为m 的物体，当物体处于静止状态时，作用在物体上的重力与弹力大小相等、方向相反，这个位置就是物体的平衡位置，取x轴铅直向下，并取物体的平衡位置为坐标原点，如果使物体具有一个初速度$v_0\neq 0$并在平衡位置附近上下振动，在振动过程中，物体的位置x 随时间t变化，求运动规律$x=x(t)$.

解：物体所受的力为弹性恢复力f（它不包括在平衡位置时和重力mg相平衡的那部分弹性力）和物体离开平衡位置的位移x成正比：$f=-cx$,其中负号表示弹性恢复力的方向和物体位移的方向相反。另外物体还受到阻尼介质（如空气、液体）的阻力。由实验可知阻力R与速度成正比方向与运动方向相反，于是由Newton第二定律有$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}$. 令$2n=\frac{\mu}{m},k^2=\frac{c}{m}$,则方程转化成$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0$这个方程称为有阻尼的自由振动方程，如果在物体振动过程中，还受到铅直干扰力$F=H\sin pt$的作用，则有$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=h\sin pt,h=\frac{H}{m}$称为强迫振动方程.

例9.6.2 设有一个由电阻R、自感L、电容C和电源E串联组成的电路，其中R,L及C为常数，$E=E_m\sin\omega t$,这里E_m及ω也是常数，设电路中电流为$i(t)$,电容器极板上的电荷量为$q(t)$,两极板间的电压为u_c,自感电动势为E_L.

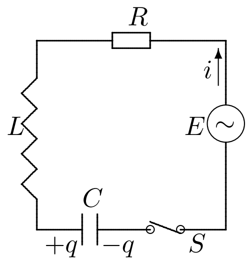

图9.6.1

由电学知道$i=\frac{dq}{dt},u_c=\frac{q}{C},E_L=-L\frac{di}{dt}$.由回路电压定律(压降的代数和为零)得

$E-L\frac{di}{dt}-\frac{q}{C}-Ri=0,$

代入得$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=E_m\sin\omega t$

或者写成$\frac{d^2u_c}{dt^2}+2\beta\frac{du_c}{dt}+\omega_0^2u_c=\frac{E_m}{LC}\sin\omega t$ 其中$\beta=\frac{R}{2L},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$这个方程就是串联电路的振荡方程.

这样的方程一般可以写成$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$,这是二阶线性微分方程，其中$f(x)\equiv 0$时称为齐次线性方程，$f(x)\neq 0$ 称为非齐次线性方程.

一般地，形如$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的方程称为n阶线性微分方程.

二、线性微分方程解的结构

对于二阶线性齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

定理9.6.1若函数y_1, y_2是二阶线性齐次方程的解，则$y = C_1y_1 + C_2y_2$也是方程的解，其中C_1, C_2为任意常数.

容易验证y是方程的解，尽管含有两个任意常数，但不能保证y 是方程的通解，为了求得方程的通解，我们需要C_1, C_2是独立的任意常数.这就需要介绍函数序列的线性相关性.

设$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$是定义在某区间上的函数，如果存在不全为零的常数$k_1, k_2, \ldots, k_n$,使得$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$,则称该函数列线性相关，否则称为线性无关.例如函数列$1, \cos^2 x, \sin^2 x$就是线性相关的，因为在实数轴上有$1 - \sin^2 x - \cos^2 x \equiv 0$ 而$1, x, x^2$在实数轴上是线性无关的，因为要使$k_1 + k_2x + k_3x^2 \equiv 0$只有$k_j = 0 (j = 1, 2, 3)$.

定理9.6.2若函数y_1, y_2是二阶齐次线性方程的两个线性无关的解，则$y = C_1y_1 + C_2y_2$是该方程的通解.

推论9.6.1 若$y_1, y_2, \ldots, y_n$是n阶线性齐次方程$\sum\limits_{j=0}^{n} a_j(x)y^{(n-j)} = 0$的$n$个线性无关的解，其中$a_0(x) = 1, y^{(0)} = y$,则$y = \sum\limits_{j=1}^{n} k_jy_j$是其通解.

定理9.6.3 设$y^*(x)$是二阶线性非齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个解,$Y(x)$是相应齐次方程的通解，则$Y(x) + y^*$是非齐次方程的通解.

推论9.6.2 非齐次线性微分方程的任意两个解的差是相应齐次线性方程的解.

定理9.6.4设二阶非齐次线性方程右端的非齐次项$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,y_1^*, y_2^*分别是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$,与$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$的两个解，则$y_1^* + y_2^*$是原方程的解.

习题9.6

1.验证函数组在其定义区间上的线性相关性

(1)$1, x, x^2$;	(2) $\cos^2 x, \sin^2 x, 1$
(3)e^x, xe^x;	(4)$e^{2x}, 3e^x, 2e^x$.
(4) $\sin 2x, \sin x, \cos x$;	(5)$e^x \cos x, e^x \sin x$

2.匹配方程与其通解

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$, $\quad xy'' + 2y' - xy = e^x$

$y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$, $\quad y^{(4)} - y = x^2$

$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x^2$, $\quad x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

$y = C_1x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{9}\ln x$, $\quad x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2\ln x$

$y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x}) + \frac{e^x}{2}, y'' + 9y = x\cos x$

3.已知y_1, y_2 是非齐次方程$y'' + py' + qy = f(x)$ 的两个解，$x^2(y_1 - y_2)$是齐次方程的一个解，求非齐次方程的通解.

4.已知齐次方程$y'' + y = 0$的通解为$Y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$,求非齐次方程$y'' + y = \sec x$的通解.

第七节常系数线性方程

形如$y'' + py' + qy = f(x)$，其中p, q是常数，则称该方程为常系数非齐次线性方程. 根据线性微分方程解的结构，我们只需要求出相应齐次方程的通解，然后求得非齐次方程的一个解，那么就可以得到非齐次方程的通解.二阶常系数线性齐次方程的通解应是什么模样？我们有如下定理：

一、常系数二阶线性齐次方程

定理9.7.1 λ 是代数方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$的根的充要条件是$e^{\lambda x}$是微分方程$y'' + py' + qy = 0$ 的解

证明:“$\Longrightarrow$”若λ 是代数方程的根，则$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$,而$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$

$0 = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = (e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x}$ 这表明$e^{\lambda x}$是方程$y'' + py' + qy = 0$的解.

“$\Longleftarrow$”若$e^{\lambda x}$ 是方程$y'' + py' + qy = 0$的解，则$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$,即$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

于是我们称代数方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$为二阶常系数线性齐次方程的特征方程,特征方程的根称为特征值.

若$p^2 - 4q > 0$,则存在两个不同的实特征值λ_1, λ_2注意到$e^{\lambda_1 x}$与$e^{\lambda_2 x}$ 线性无关，所以此时方程的通解为$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

若$p^2 - 4q = 0$，则方程两个特征值相同，记作λ,于是$e^{\lambda x}$是齐次方程的一个解,注意到要求的另一个解与其线性无关，所以不妨设为$y = u(x)e^{\lambda x}$,将其代入方程得$e^{\lambda x}[(u'' + 2\lambda u' + \lambda^2u) + p(u' + \lambda u) + qu] \equiv 0$

化简得$u'' + (2\lambda + p)u' + (\lambda^2 + p\lambda + q)u = 0$,注意到$2\lambda + p = 0, \lambda^2 + p\lambda + q = 0$,于是待定函数满

足$u''=0$.不妨取$u=x$,于是通解为$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$.

若$p^2-4q<0$,则特征方程有两个共轭的复根$\lambda=\alpha\pm i\beta$, 于是$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$是齐次方程的两个线性无关的解. 由于$y_1+y_2=e^{\alpha x}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})=2e^{\alpha x}\cos\beta x$是方程的一个解,当然$e^{\alpha x}\cos\beta x$也是方程的解.又$y_1-y_2=e^{\alpha x}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})=2ie^{\alpha x}\sin\beta x$是方程的解，当然$e^{\alpha x}\sin\beta x$也是方程的解.由于这两个解是线性无关的，所以原方程的通解为$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x,+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

例9.7.1.求微分方程$y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解：特征方程为$\lambda^2-2\lambda-3=0$,所以特征值分别为$\lambda_1=-1,\lambda_2=3$,

因此两个线性无关的解为$y_1=e^{-x},y_2=e^{3x}$，于是通解为$C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

例9.7.2求方程$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0,s(0)=4,s'(0)=-2$的特解.

解：特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$,于是特征值为二重根$\lambda=-1$.

所以方程的通解为$s=(C_1+C_2t)e^{-t}$,代入初值,解得$C_1=4,C_2=2$所以特解为$s=(4+2t)e^{-t}$.

例9.7.3求微分方程$y''-2y'+5y=0$的通解.

解：特征方程为$\lambda^2-2\lambda+5=0$,特征根为$\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm 2i$因此所求方程的通解为$C_1e^x\sin 2x+C_2e^x\cos 2x$.

例9.7.4在第六节例1中，设物体只受弹性恢复力f 的作用，且在初时刻$t=0$ 时的位置为$x=x_0$ 初始速度为$x'(0)=v_0$,求反映物体运动规律的函数$x=x(t)$.

解：在不计空气阻力的情况下方程为$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$,(此时方程称为无阻尼自由振动方程),注意到此时运动满足初始条件$x(0)=x_0,x'(0)=v_0$,方程的特征方程为$\lambda^2+k^2=0$，其根为$\lambda=\pm ik$, 所以通解为$C_1\cos kt+C_2\sin kt$.代入初始条件得$C_1=x_0,C_2=\frac{v_0}{k}$ 于是运动规律为$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt$.为了便于说明特解所反映的振动现象, 我们令$x_0=A\sin\varphi,\frac{v_0}{k}=A\cos\varphi(0\le\varphi<2\pi)$,

于是运动规律转化成$x=A\sin(kt+\varphi)$,其中$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}},\tan\varphi=\frac{kx_0}{v_0}$.

此函数反映的运动是简谐振动，其中A为振幅，φ为初相位，周期为$T=\frac{2\pi}{k}$,角频率为k. 注意到$k=$

$\sqrt{\frac{c}{m}}$,它与初始条件无关，而完全由振动系统确定.因此，k又称为该系统的固有频率.

例9.7.5如果第六节例1中的运动既受弹簧恢复力f的作用，又受阻力R 的作用，且满足初始条件$x(0)=x_0, x'(0)=v_0$,求反映物体运动规律的函数$x=x(t)$.

解：这时系统满足的微分方程为$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0$.

特征方程为$\lambda^2+2n\lambda+k^2=0$,其根为$\lambda=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$.

以下按$n<k, n>k$ 和$n=k$三种情况来分别讨论

(1)小阻尼情形：$n<k$

令$\omega=\sqrt{k^2-n^2}$,于是特征根为$-n\pm i\omega$，于是方程的通解为

$x=e^{-nt}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)$,令$x_0=A\sin\varphi, \frac{v_0+nx_0}{\omega}=A\cos\varphi(0\le\varphi<2\pi)$

我们得$x=Ae^{-nt}\sin(\omega t+\varphi)$,其中

$\omega=\sqrt{k^2-n^2}, A=\sqrt{x_0^2+\frac{(v_0+nx_0)^2}{\omega^2}}, \tan\varphi=\frac{x_0\omega}{v0+nx_0}$.

此时运动为周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$的振动，其振幅为Ae^{-nt},随着时间t的增大而逐渐减小，因此，物体随时间t的增大而趋于平衡位置.

(2)大阻尼情形：$n>k$

特征方程有两个互异的实根$\lambda_1=-n+\sqrt{n^2-k^2}, \lambda_2=-n-\sqrt{n^2-k^2}$,于是方程的通解为

$x=C_1e^{-(n-\sqrt{n^2-k^2})t}+C_2e^{-(n+\sqrt{n^2-k^2})t}$,其中$C_1, C_2$可以由初始条件来确定. 注意到使得$x=0$的$t$ 值最多只有一个，即物体最多越过平衡位置一次，于是所反映的运动不是振动.又当$t\to+\infty$时，$x\to 0$.因此，物体随时间t的增大而趋于平衡位置.

(3)临界阻尼情形：$n=k$

由于特征方程的根为$\lambda=-n$,于是方程的通解为$x=e^{-nt}(C_1+C_2t)$,其中C_1, C_2 可由初始条件确定.注意到临界情形使$x=0$的t值也最多只有一个，因此物体也不再有振动现象.又注意到$\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-nt}=0$,从而可以看出当$t\to+\infty$时，$x\to 0$,即在临界阻尼情形，物体也随时间$t$的增大而趋于平衡位置.

二、二阶常系数非齐次线性方程

对于二阶常系数非齐次线性方程$y''+py'+qy=f(x)$ 根据解的结构，我们只要根据$f(x)$的具体形式求出非齐次方程的一个解.

I.$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$,其中$P_n(x)$是一个n次多项式

我们选择待定多项式的方法求解，设原方程有形如

$y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$的解，代入原方程得

$Q''_n(x)+(2\alpha+p)Q'_n(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_n(x)\equiv P_n(x)$

(a) 若α不是特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$的根，

通过比较同幂次项的系数确定待定多项式$Q_n(x)$的系数$a_j(j=0,1,2\ldots,n)$.

(b)若α是特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$的单根，注意到恒等式中左端$Q_n(x)$的系数$\alpha^2+p\alpha+q=0$此时我们需要选择待定多项式为$\overline{Q}_n(x)=xQ_n(x)$将$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}$代入原方程，得到待定多项式的系数.

(c)若α是特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$的重根，注意到恒等式中左端$Q_n(x)$的系数$\alpha^2+p\alpha+q=0,Q'_n(x)$的系数$2\alpha+p=0$此时我们需要选择待定多项式为$\overline{Q}_n(x)=x^2Q_n(x)$将$y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$代入原方程，得到待定多项式的系数.

例9.7.6 求方程$y''+4y'+3y=x$的解.

解：对应齐次方程的通解为$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$

注意到非齐次项为xe^{0x},于是设原方程有形如$y^*=ax+b$的解.代入得

$4a+3(ax+b)\equiv x$, 比较同次幂的系数得$a=\frac{1}{3},b=-\frac{4}{9}$,于是原方程的通解为

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$.

例9.4.7 求方程$y''+9y=(x^2+1)e^{3x}$的通解.

解：相应齐次方程的通解为$\overline{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$,注意到非齐次项为$(x^2+1)e^{3x}$ 因此$\alpha=2$不是特征方程的根，于是设原方程有形如$y^*=(ax^2+bx+c)e^{3x}$的解，代入原方程得

$[9(ax^2+bx+c)+6(2ax+b)+2a+9(ax^2+bx+c)]e^{3x}\equiv(x^2+1)e^{3x}$

比较同次幂的系数，得$18a=1,12a+18b=0,2a+6b+18c=1$,于是$a=\frac{1}{18},b=-\frac{1}{27},c=\frac{5}{81}$,因此原方程的通解为$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}$.

例9.7.8求方程$y''-7y'+6y=(x-2)e^x$的通解.

解：相应齐次方程的通解为$y^*=C_1e^x+C_2e^{6x}$,注意到非齐次项$(x-2)e^x$中$\alpha=1$是特征方程的根，于是设原方程有形如$\overline{y}=x(ax+b)e^x$的解，代入方程得

$[(ax^2+bx)+(4ax+2b)+2a-7(ax^2+bx)-7(2ax+b)+6(ax^2+bx)]e^x\equiv(x-2)e^x$,比较同次幂的系数得$-10a=1,-5b+2a=-2$,那么原方程的通解$y=C_1e^x+C_2e^{6x}+x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x$

II.$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,其中$P_n(x)$是一个$n$次多项式,$Q_m(x)$是一个$m$次多项式.

对于这种形式非齐次方程的求解，我们仍然借助于类型**I**来处理,利用欧拉公式将$f(x)$变形为

$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\frac{1}{2}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})+Q_m(x)e^{\alpha x}\frac{1}{2i}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})$

于是$f(x)=\left[\frac{1}{2}P_n(x)+\frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x}+\left[\frac{1}{2}P_n(x)-\frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}$

令$P(x)=\frac{1}{2}(P_n(x)-iQ_m(x))$,则$f(x)=P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{P(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}$

这样非齐次项类似可归结为**I**型，$P(x)e^{\lambda x}$,其中$\lambda=\alpha+i\beta$

(a)若λ不是特征方程的根，则设方程有形如$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$的解，其中$Q(x)=$是一个形如$P(x)$的l次待定多项式，即$Q(x)=R(x)-iK(x)$其中$l=\max\{m,n\}$.代入原方程通过比较同次幂的系数，最终确定$Q(x)$.

(b)若λ是特征方程的根，于是$\overline{\lambda}$必然也是特征方程的根，因此方程有形如$y_1^*=xQ(x)e^{\lambda x}$，及$y_2^*=x\overline{Q(x)}e^{\overline{\lambda}x}$的解，其中$Q(x)$ 同上.代入原方程通过比较同次幂的系数，最终确定$Q(x)$.

注意到第六节定理4关于非齐次方程解的结构，$y^*=y_1^*+y_2^*$必是原方程的解，于是

$$\begin{aligned}y^* &= x^ke^{\alpha x}[Q(x)e^{i\beta x}+\overline{Q}(x)e^{-i\beta x}]\\ &= x^ke^{\alpha x}[R_l^{(1)}(x)\cos\beta x+R_l^{(2)}(x)\sin\beta x]\end{aligned}$$

其中$R_l^{(j)}(x),j=1,2$是待定的l次多项式，而k按$\lambda=\alpha+i\beta$ 是不是特征方程的根来确定，若λ是特征方程的根取值为1，若λ不是特征方程的根取值为0.

注：这里$R_l^{(1)}, R_l^{(2)}$ 独立地取为l 次实的待定多项式.

例9.7.9求方程$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$的通解.

解：特征值为$\lambda = -1 \pm 2i$,于是相应的齐次方程的通解为$y^* = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$

设原方程有形如$\overline{y} = a\cos x + b\sin x$的解，代入原方程得

$-a\cos x - b\sin x + 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) \equiv 2\cos x$

通过比较$\sin x, \cos x$的系数得，$-a + 2b + 5a = 2, -b - 2a + 5b = 0$,即$a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$

于是方程的通解为$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

例9.7.10求方程$y'' + 4y = \cos 2x$的通解.

解：方程的特征值为$\lambda = \pm 2i$,于是相应的齐次方程的通解为$y^* = C_1\cos 2x + C_1\sin 2x$,设方程有形如$\overline{y} = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$的解，注意到$\overline{y}' = 2x(-a\sin 2x + b\cos 2x) + (a\cos 2x + b\sin 2x)$

$\overline{y}'' = -4x(-a\cos 2x - b\sin 2x) + 4(-a\sin 2x + b\sin 2x)$

通过比较方程两端$\sin 2x, \cos 2x$的系数得到$4b = 1, -4a = 0$, 即$a = 0, b = \frac{1}{4}$

于是方程的通解为$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$.

例9.7.11求方程$y'' - y = 3e^{2x}\cos x$的通解.

解：方程的特征值为$\lambda = \pm 1$,因此相应的齐次方程的通解为$y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$,注意到$2 \pm i$不是特征方程的根，因此方程有形如$\overline{y} = ae^{2x}\cos x + be^{2x}\sin x$的解，代入方程得

$(2a + 4b)e^{2x}\cos x + (-4a + 2b)e^{2x}\sin x \equiv 3e^{2x}\cos x$, 通过比较$\sin x, \cos x$ 的系数得到$2a + 4b = 3, -4a + 2b = 0$,于是$a = \frac{3}{10}, b = \frac{3}{5}$ ，于是方程的通解为$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$

注：以上的讨论对于常系数一阶线性微分方程$y' + ay = b$,其中a, b是常数也成立.

事实上，注意到特征方程为$\lambda + a = 0$,于是相应的齐次方程的通解为$y^* = Ce^{-ax}$,设方程有形如$\overline{y} = B$的解，代入方程得$B = \frac{b}{a}$,于是方程的通解为$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$

对于上述二阶线性非齐次方程，我们也可以采用常数变易法来求解，若y_1, y_2是齐次方程$y'' + py' + qy =$

0的两个线性无关的解，我们可以设$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$是非齐次方程$y'' + py' + qy = f(x)$的解，其中$C_j(x), j = 1, 2$为待定函数，于是$y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'$，不妨设

$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

于是$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$将$y, y', y''$代入方程得

$C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$

注意到$y_j(j = 1, 2)$是齐次方程的解，于是我们得到关于$C_j'(j = 1, 2)$的线性方程组

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

系数行列式$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

$C_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W}, C_2' = \frac{y_1 f(x)}{W}$, 积分得

$C_1(x) = -\displaystyle\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx, C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$,这样我们就可以得到非齐次的一个解.

例9.7.12$y = y(x)$是$(-\pi, \pi)$内过点$(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$的光滑曲线当$-\pi < x < 0$时，曲线上任一点处的法线都过原点；当$0 \le x < \pi$时，函数$y(x)$满足：$y'' + y + x = 0$ 求$y(x)$的表达式

解：当$-\pi < x < 0$时，法线方程为$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x)$, 由于法线过原点，即$X == Y = 0$,所以$-y = \frac{1}{y'}x$,即$xdx + ydy = 0$, 即$d(x^2 + y^2) = 0, \Longrightarrow x^2 + y^2 = C$注意到曲线过点$(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$代入得$C = \pi^2$ $\Longrightarrow y = \sqrt{\pi^2 - x^2}(-\pi < x \le 0), (y = -\sqrt{\pi^2 - x^2}$ 不过点$(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}))$

当$0 \le x < \pi$时$y'' + y = -x$

齐次方程的特征方程为$\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$,于是齐次方程的通解为$C_1 \cos x + C_2 \sin x$,而非齐次方程由观察得知有解$y = -x$,故方程的通解为$C_1 \cos x + C_2 \sin x - x$

由初始条件$y(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{\pi^2 - x^2} = \pi$

$y'(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} y'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$, 代入初始条件得$C_1 = \pi, C_2 = 1$,于是

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

三、常系数高阶线性微分方程

形如$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$的方程，称为$n$阶常系数线性微分方程，其中$a_j=a_j(x),(j=1,2,\ldots,n)$, $f(x)$为连续函数.像第六节一样，高阶微分方程解的结构与二阶线性方程有相同的结果，即若$y_1,y_2,\ldots,y_n$是相应齐次方程的n个线性无关的解，则$y^*=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$是齐次方程的通解，若$\overline{y}$是非齐次方程的一个解，则$y=y^*+\overline{y}$是非齐次方程的通解.

若$a_j(j=1,2,\ldots,n)$ 是常数，则常系数线性齐次方程$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$有形如$y=e^{\lambda x}$的解的充分必要条件是：$\lambda$是方程$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根.

若λ是特征方程$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的k重实根，则对应于该特征值的k个线性无关的解为$e^{\lambda x},xe^{\lambda x},x^2e^{\lambda x},\ldots,x^{k-1}e^{\lambda x}$. 照此我们可以求出$n$阶常系数线性齐次方程的通解.

若$\lambda=\alpha+i\beta$是特征方程$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的k重根，则

$x^je^{\alpha x}\cos\beta x,x^je^{\alpha x}\sin\beta x,(j=0,1,\ldots,k-1)$是方程的$2k$个线性无关的解.

对于n阶常系数线性非齐次方程，我们首先求出相应的n阶齐次方程的通解，然后根据非齐次项的形式采用待定解的方法求出非齐次方程的一个解.

I当$f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$,其中$P_n(x)$是n次多项式，设方程有形如$\overline{y}=x^{\mu}Q_n(x)e^{\lambda x}$的解，其中$Q_n(x)$是$n$次待定多项式.代入方程后,根据$\lambda$是否是特征方程的根，我们有如下结果.

若λ是特征方程的k重实根，则设方程有形如$\overline{y}=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}$ 的解.代入方程确定$Q_n(x)$.

若$\lambda=\alpha+i\beta$是特征方程的k重根，则设方程有形如$\overline{y}=x^ke^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x)$的解，其中$T_n(x)$也是$n$ 次待定多项式.

II当$f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,其中$P_m(x),Q_n(x)$分别为$n,m$次多项式.

(a)若$\alpha+i\beta$不是特征方程的根，则设方程有形如$\overline{y}=U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$的解，其中$U(x),V(x)$是$l$次待定多项式，其中$l=\max\{m,n\}$.

(b)若$\alpha+i\beta$是特征方程的k重根，则设方程有形如$\overline{y}=x^k[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]$的解，其中$U(x),V(x)$同上.

习题9.7

1.求下列齐次方程的通解

(1)$y''=9y$; (2)$y''+y=0$

(3)$y''-y'=0,$; (4)$y''+12y=7y'$

(5)$y''-4y'+4y=0$; (6)$y''+2y'+10y=0$

(7)$y''+3y'-2y=0$; (8)$4y''-12y'+9y=0$

2.求下列非齐次方程的通解

(1)$y''-7y'+12y=x$; (2)$s''-a^2s=t+1$

(3)$y''+y'-2y=8\sin 2x$; (4)$y''-y=5x+2$

(5)$s''-2as'+a^2s=e^t(a\neq 1)$; (6)$y''+6y'+5y=e^{2x}$

(7)$y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$; (8)$y''+4y=2\sin 2x$

3.求下列方程的特解

(1) $y''+2hy'+n^2y=0, y(0)=a, y'(0)=C$

(2)$y''+n^2y=h\sin\rho x(\rho\neq n), y(0)=a, y'(0)=C$

4.在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任意一点$P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段PQ长度的倒数(Q是法线与x轴的交点),且曲线在点$(1,1)$处的切线与x 轴平行.

5.设$\varphi(x)$具有二阶连续的导数且满足$\varphi(x)=e^x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)du$,求$\varphi(x)$.

6.设函数$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$,且该函数的图形在点$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点的切线重合，求函数$y=y(x)$.

第九章练习题

一、选择题

1.如果y_1,y_2是一阶非齐次线性方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个不同的特解，则$y=cy_1+(1-c)y_2$

A 不是微分方程的解，$B.$ 是微分方程的解，$C.$是微分方程的特解，D选择适当的c可以是方程的解

2.通解为$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$,(c_1,c_2 为任意常数）的微分方程是

$A.y''-3y'+2y=0, B.y''-4y'+2y=0,$

$C.y''-6y'+2y=0, D.y''-4y'+8y=0,$

3.微分方程$y''-5y'+6y=x^2e^{3x}$ 的一个特解y^*可设为

$A.(ax^2+bx+c)e^{3x}, B.x(ax^2+bx+c)e^{3x}, C.x^2(ax^2+bx+c)e^{3x}, D.x(ax^2+bx)e^{3x}$

4.已知$y=1, y=x, y=x^2$是某二阶非齐次线性方程的解，则该方程的通解是

$A.y=c_1x+c_2x^2+1, B.y=c_1(x-1)+c_2(x^2-1)+1$

$C.y=c_1x+c_2x^2+c_3, D.y=c_1(x+1)+c_2(x^2+1)+1$

5.$y'=\frac{y(1-x)}{x}$的通解是

$A.y=cxe^x.B.y=cx^2e^x, C.y=c\frac{x}{e^x}, D.y=c\frac{x^2}{e^x}$

二、计算题

1.求下列微分方程的通解

(1)$y'-xy'=a(y^2+y')$

(2) $\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$

(3) $x\ln xdy+(y-\ln x)dx=0$满足条件$y(e)=1$

(4) $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$

2.一曲线通过点$(2,3)$，它在两坐标轴间的任意切线线段均被切点所平分，求这条曲线方程

3.求齐次方程的通解

(1)$x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$

(2)$(1-2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

4.求下列微分方程的通解

(1)$xy'+y=x^2+3x+2$

(2)$y'+y\tan x=\sin 2x$

5.求下列微分方程满足所给初始条件的特解

(1) $\begin{cases}\frac{dy}{dx}-y\tan x & =\sec x\\ y(0)=0\end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + y\cot x &= 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$

6. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量方程，然后求出通解

(1‘) $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$

(2)$xy' + y = y(\ln x + \ln y)$

7.求下列各微分方程的通解

(1) $xy'' + y' = 0$

(2) $y^3 y'' - 1 = 0$

(3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

8. 求下列各微分方程的通解

(1)$y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$

(2) $y'' + 4y = x\cos x$

8.设函数$y = y(x)$满足微分方程$y'' - 3y' + 2y = 2e^x$,且该函数的图形在点$(0,1)$处的切线与曲线$y = x^2 - x + 1$在该点的切线重合，求函数$y = y(x)$.

9. 设函数$\varphi(x)$连续，且满足：$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$, 求$\varphi(x)$

10. 设可导函数$\varphi(x)$满足：$\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t dt = x + 1$, 求$\varphi(x)$

11. 设光滑曲线$y = \varphi(x)$ 过原点，且当$x > 0$时$\varphi(x) > 0$,对应于$[0, x]$一段曲线的弧长为$e^x - 1$,求$\varphi(x)$

12. 已知某曲线经过$(1,1)$,它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程。

13.已知$xy'' + y' = 4x$的一个特解为x^2, 又对应的齐次方程$xy'' + y' = 0$有一个特解为$\ln x$,试求方程$xy'' + y' = 4x$ 的通解.

14.试求一个以$y_1 = xe^x$和$y_2 = \cos x$ 为特解的线性常系数齐次方程

15.设$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,其中$f(x)$ 和$g(x)$满足：$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 0$, $g(x) \neq 0$,试求$F(x)$.

16.质量为m千克的物体，从水面上方高为h米处自由落入水中（不计空气阻力），若物体在水中下沉所受的阻力与速度成正比（比例系数为k), 试求物体在水中下沉的深度与时间的关系.