第十一章多元函数微分学

我们常常面临的对象，可能与多个变量有某种依存关系，所以我们需要研究多元函数.而一元函数微积分中许多概念、性质和方法可以推广到多元函数中.在下面的讨论中我们将会发现，利用一元函数的定义、性质和运算类似地可以得到二元函数相应的定义、性质和运算，但也会有一些差异.而多元函数相应的定义、性质和运算与二元函数几乎雷同，因此我们主要研究二元函数.

第一节多元函数的极限与连续

一、多元函数的概念

在研究一元函数中我们知道，如果$\forall x \in A, A \subseteq \mathbb{R}$,通过某种对应关系$f$，都有唯一确定的数值$y \in \mathbb{R}$ 与之对应，即变量y 随着变量x 的变化而变化，我们记作$y = f(x)$,这里的因变量y依赖于一个自变量x.但在实际问题中我们常常会遇到某个变量依赖于两个或两个以上变量的变化. 例如矩形的面积$A_{矩形}$就依赖于它的两条边长x 和y, 即$A_{矩形} = xy$; 圆柱体的体积$V_{圆柱}$依赖于底面半径r和圆柱体的高h ,即$V_{圆柱} = \pi r^2 h$; 又如电流通过导体产生的热量Q与电压E、电流强度I以及时间t 满足关系式：$Q = EIt$.这些关系式中的自变量之间没有互相的依存关系，我们称其独立地变化.前两个关系式中独立变量的个数为2，最后一个关系式中独立变量的个数为3个，所以称前两个为二元函数，最后一个称为三元函数.

1.平面或空间上点集的简单描述

一元函数的定义域是实数集中的点集,它们分布在实直线$\mathbb{R}$上，二元函数的定义域是复平面:$\mathbb{R}^2$上某些点的集合，三元函数的定义域是三维空间: $\mathbb{R}^3$上某些点的集合，n 元函数的定义域是n 维空间:$\mathbb{R}^n$上某些点的集合.由于二维空间上点的集合特征与更高维空间上点的集合特征几乎类似，所以我们不妨详细介绍二维空间上点的集合特征.

平面上的点我们一般用点的坐标表示，例如集合$D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 1\}$表示平面上的单位圆盘，其中点$P$ 也记作$P(x, y)$.

邻域：集合$U(P_0, \delta) = \{(x, y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \delta^2\}$ 称为点$P_0(x_0, y_0)$ 的δ 邻域,特别我们用$U(P_0)$表示点P_0 的某邻域.

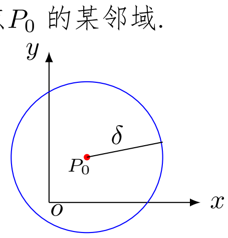

图11.1.1

去心邻域： 集合$\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y)|0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$ 称为点$P_0(x_0, y_0)$ 的去心邻域，这些邻域也称为点的圆形邻域.我们称集合.

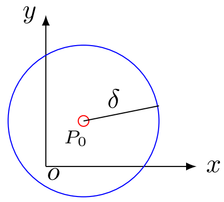

图11.1.2

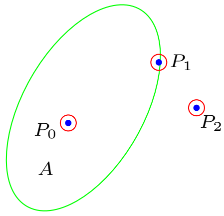

图11.1.3

$\{(x,y)||x-x_0|<a,|y-y_0|<b\}$为点$P_0(x_0,y_0)$ 的方形邻域，注意到

$|x-x_0|,|y-y_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le 2\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}$

所以圆形邻域和方形邻域在一定条件下可以互相包含，所以通称为点P_0的邻域.

内点: 设A 为平面点集，P_0是平面上一点，若存在$\delta>0$,使得$U(P_0,\delta)\subset A$,则称点P_0为集合A的内点.例如集合

$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$中的任意一点都是其内点.

边界点: 设A 为平面点集，P_1是平面上一点.若对于任意$\delta>0$,邻域$U(P_0,\delta)$中既有A的点，又有不属于A 的点，则称P_1 是A 的边界点.例如满足关系式: $x^2+y^2=1$的点就是单位圆盘$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$的边界点. 若$A=(2,3)\bigcup D$, 点$(2,3)$ 也是A 的边界点.

注: P_2不是A的内点也不是边界点，这样的点称为A的外点.

边界: 集合A的边界点的全体叫做集合A的边界，例如$x^2+y^2=1$上的点就是单位圆盘$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 的边界.

显然边界点不是集合的内点，同样内点也不是集合的边界点.

聚点: 设A 为平面点集，P_0是平面上一点，若对于任意的$\delta>0$,去心邻域$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$中都有集合$A$的点，或$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)\bigcap A\neq\emptyset$,则称点$P_0$ 是集合A 的聚点，显然集合的内点一定是集合的聚点，反之不然.边界点可能是其聚点，但孤立的边界点就不是集合的聚点. 例如集合$A=(2,3)\bigcup D$中的点$(2,3)$ 是A 的边界点，但不是其聚点.

导集: 集合A 的全体聚点组成的集合称为集合A的导集，习惯上记作A'

闭集: 若$A'\subset A$,则称A为闭集，例如上述集合D就是闭集.

开集: 若集合A中任意点都是其内点，则称A为开集.例如上述集合D_1是开集而非闭集.

连通集: 若集合A 中任意两点可以用含于A 的折线段连接起来，这样的集合叫做连通集，而集合$B=\{(x,y)|xy>0\}$就不是连通集.

区域: 连通的开集叫做区域.

有界集: 设P_0 是平面上一点，若存在$\delta>0$，使得$A\subset U(P_0,\delta)$，则称A是有界集.

有界闭区域: 若A是有界闭集同时还是区域，则称A是有界闭区域.而平面闭区域$C=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0\}$就不是有界闭区域.

集合$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$称为三维空间的球形邻域，同样我们可以仿照上面对三维空间的点集给出相应的概念.

集合$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)|\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta\}$称为$n$维空间的球形邻域，同样我们可以仿照上面对$n$维空间的点集给出相应的概念.

为了叙述的一致性，我们不妨称区间$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$,分别为一维空间$\mathbb{R}$ 的一个邻域和去心邻域.

2.二元函数的定义

定义11.1.1　设D是平面点集，若对于D 中任意点$P(x,y)\in D$,按照某种对应法则f 有唯一确定的值$z\in\mathbb{R}$ 与之对应，则称变量z是变量x 与y的二元函数，记做$z=f(x,y)$, 其中变量x,y叫做自变量，变量z称为因变量，自变量x,y的变化范围D叫做函数的定义域，因变量z的取值范围叫做函数的值域.

如果将(x,y)看成一个点，则函数$z=f(x,y)$可以看成是点P的函数，记做$z=f(P)$.

同样对于n 维空间$\mathbb{R}^n$ 上的集合D 我们可以定义n元函数$z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,其中$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$

注:多元函数和一元函数一样，要特别注意函数的两要素，即对应法则和定义域.一般来讲，使得函数表达式有意义的自变量的全体称为函数的定义域. 函数的对应关系与变量的符号无关,即$z=f(x,y),(x,y)\in D$ 与$s=f(u,v),(u,v)\in D$表达同样的函数.在实际问题中要注意变量所代表的实际意义，例如尽管函数$v=\pi r^2h$的定义域可以是整个复平面，但如果r代表圆柱体的底面半径，h代表其高度，则定义域是平面点集$D=\{(r,h)|r>0,h>0\}$.

例11.1.1. 函数$z=\ln(x+y)$仅在$x+y>0$时有定义，它的定义域就是位于直线$y=-x$上方而不包括这条直线的半平面.

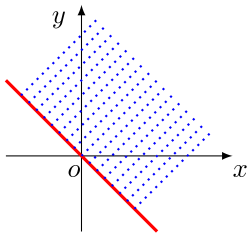

图11.1.4

例11.1.2 函数$u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域是单位圆盘：$x^2+y^2\leq 1$.

注:和一元函数一样，我们主要研究幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反函数，以及这些函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所得到的初等函数，这里一定要注意基本初等函数的含义.例

如$z=x^y$ 就不能简单地称为幂函数或指数函数，因为x,y 在定义域内独立的变化，所以我们仿照一元函数称它为幂指函数.

3.二元函数的几何表示

仿照一元函数的几何表示，我们将定义域D置于xOy坐标平面上.于是，根据函数的定义，在D内任一点$M(x,y)$有唯一的数值z与之对应，于是当x,y在D 内连续变动时，动点(x,y,z) 的轨迹满足方程$z=f(x,y)$, 恰是空间的一张曲面，该曲面在xOy平面的投影恰是函数的定义域D,见图11.1.5.

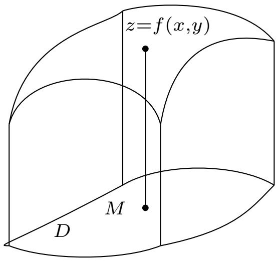

图11.1.5

例11.1.3 函数$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$表示半径为a 的上半球面.

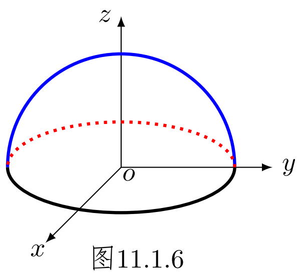

图11.1.6

注: 三元及更多元的函数我们无法用直观的几何图形给予解释.

二、二元函数的极限与连续

一元函数极限的回忆：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$是指函数$f(x)$ 定义在以x_0为聚点的邻域内,若对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,可以找到一个确定的邻域$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$,当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.如果将函数$z=f(x,y)$看成点$P(x,y)$ 的函数,于是我们同样可以考虑在聚点P_0的某邻域内函数$z=f(P)$ 的变化趋势，即对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，是否可以找到一个正数$\delta>0$，当$P\in U(P_0,\delta)$时,对于常数A , 是否恒有

$|f(P)-A|<\varepsilon$,

即当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，不等式

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$

恒成立.如果满足上述条件，我们称二元函数有极限，且极限值为A.

1.二元函数极限的定义

定义11.1.2 设函数$z = f(x,y)$ 在聚点$P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义(在P_0 处可以没有定义)，A 是一个常数.若对于任意给定的正数$\varepsilon > 0$,存在正数$\delta > 0$,当$P(x,y) \in \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，,即

$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$时，

恒有不等式$|f(x,y)-A| < \varepsilon$成立，我们称当$P \to P_0$或$x \to x_0, y \to y_0$时，函数$f(x,y)$以常数A为极限，记作$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$或记作$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, f(P) \to A(P \to P_0)$

例11.1.4 设$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, (x^2+y^2 \neq 0)$,证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$

证明: 因为$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| \le x^2+y^2$,于是对于任意给定的正数$\varepsilon > 0$,只需取$\delta = \sqrt{\varepsilon}$,则当

$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$时，总有

$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$,由定义，有

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

由于二元函数的自变量x 与y 彼此独立，$(x,y) \to (x_0,y_0)$的方式可以是任意的.例如先让$x \to x_0$然后再让$y \to y_0$, 这样的极限我们称为累次极限，记作$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 或者$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$,于是我们称定义2的极限为函数的二重极限.与一元函数极限不同的是，由于点P在圆盘$|PP_0| < \delta$内趋于点P_0,所以趋近的方式是无穷的.

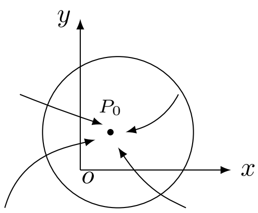

图11.1.8

例11.1.5 讨论函数$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$在原点$(0,0)$处的各种极限.

解：当动点(x,y)沿着直线$y = kx$ 趋于原点$(0,0)$,由于此时$f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}$, 那么

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$

这意味着沿着斜率不同的直线趋于原点时，函数的极限是不同的，这与极限的唯一性是矛盾的，因此二重极限不存在.

而$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ 所以累次极限存在.

例11.1.6讨论函数$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}, & x \cdot y \neq 0, \\ 0, & x \cdot y = 0. \end{cases}$的各种极限.

解：注意到$|f(x,y)-0| \le |x|+|y| \le 2\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$,只要取$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$,恒

有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$,但是累次极限$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都不存在.

例11.1.7求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin 2x^2y}{x^2}$.

解：原式$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin 2x^2y}{2x^2y}2y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin 2x^2y}{2x^2y}\cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2y=1\cdot 0=0$

由此例可以看到：求二元函数的极限往往借助于一元函数极限的结果.

注意到多元函数的极限$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$,从本质上看与一元函数的极限是相同的，因此我们可以从极限的定义、极限存在的两个准则、极限存在的三个局部性质、极限的四则运算和极限存在的特征来讨论函数的极限.

经常用到的是夹逼准则：若$h(x,y)\le f(x,y)\le g(x,y)$,且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=A$, 则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

(1)若函数的极限存在，则极限是唯一的；

(2) 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$,则在$P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(P_0,\delta)$内$f(x,y)$有界，即$(x,y)\in U(P_0,\delta)$,存在$M>0$使得$|f(x,y)|\le M$;

(3)若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A>0(<0)$,则在$P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(P_0,\delta)$内，$f(x,y)>0(<0)$

极限的四则运算:若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$,则

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x,y)\pm g(x,y))=A\pm B$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x,y)\cdot g(x,y))=A\cdot B$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B}(B\ne 0)$

这里介绍两个极限存在的特征:（1）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 的充分必要条件是在$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0,\delta)$内有$f(x,y)=A+\alpha$,其中α是$P\to P_0$ 时的无穷小.

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$的充分必要条件是对于任意数列$\{x_n\},\{y_n\},(x_n,y_n)\in D_f$,当$x_n\to x_0, y_n\to y_0(n\to\infty)$时,数列$\{f(x_n,y_n)\}\to A(n\to\infty)$

定理11.1.1 若$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)存在二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$和一个累次极限，例如$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$,则另一个累次极限也存在,而且全部相等.

证明略.

推论11.1.1 若累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$,与$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在但不相等，则二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在.

2.二元函数的连续性

像讨论一元函数一样，我们考虑二元函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内，函数的改变量，

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ (习惯上称为函数在点P_0处的全增量)，若当

$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$时，有$\Delta z\to 0$,则称函数$z=f(x,y)$在点$P_0$处连续.

定义11.1.3 设函数$z = f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0,\delta)$ 内有定义，若$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0$, 则称函数$z = f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续.

若令$x_0+\Delta x = x, y_0+\Delta y = y$,函数在点$P_0$ 处连续必须满足三条：第一函数在点$P_0(x_0,y_0)$处有定义；第二函数在该点有极限；第三极限值必须等于函数值，即$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.只要三条中有一条不满足，则称函数在该点间断.

如果函数在平面区域D 内任意点都连续，则称函数在区域D上连续.

如果用函数极限的定义来定义函数的连续，即，设函数$z = f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0,\delta_1)$内有定义，对于任意的正数$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$P(x,y)\in U(P_0,\delta)$, 恒有$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$,则称函数$z = f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$处连续.

例11.1.8 证明：函数$z = x^2+y^2$ 在xOy平面上连续.

证明: 对于平面上任意点$P(x,y)$,

$\Delta z = (x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-x^2-y^2 = 2x\Delta x+2y\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$

于是$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0$，由定义和点$P$的任意性，知函数在整个复平面上连续.

同一元函数一样，若函数$f(x,y),g(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则函数

$f(x,y)\pm g(x,y), f(x,y)\cdot g(x,y), \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}(g(x_0,y_0)\neq 0)$

分别在$P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

若函数$z = f(u,v)$在点(u_0,v_0) 处连续，且$u = u(x,y), v = v(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，则复合函数$z = f(u(x,y),v(x,y))$在点(x_0,y_0) 处连续.

初等函数在其定义区域内连续，由于函数$f(x,y) = \begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2 = 0\end{cases}$在所定义的区域内不连续，所以不是初等函数.

例11.1.9 求$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{\sin\ln(x^2+y)}{\tan x^2}$.

解: 因为函数$\dfrac{\sin\ln(x^2+y)}{\tan x^2}$是初等函数所以，极限值等于函数值，即$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{\sin\ln(x^2+y)}{\tan x^2} = \dfrac{\sin\ln 3}{\tan 1}$

同一元函数一样，对于有界闭区域上连续的函数，最大值和最小值可以达到，介值定理成立.

定理11.1.2 若函数$z = f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则在D上可以达到最大值和最小值，即至少存在两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$,满足：$\forall(x,y)\in D$,恒有不等式$f(x_1,y_1)\le f(x,y)\le f(x_2,y_2)$ 成立.

推论11.1.2 若函数$z = f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则在D上有界,即存在$M > 0$使得,$\forall(x,y)\in D$恒有$|f(x,y)|\le M$.

定理11.1.3 若函数$z = f(x,y)$在有界闭区域D上连续，函数的值域为$[A,B]$,则$\forall C\in[A,B]$ 至少存在一

点$(x_1,y_1),\in D$,**满足：**$f(x_1,y_1)=C$

推论11.1.3 **若函数**$z=f(x,y)$**在有界闭区域**D**上连续，且存在两点**$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$**满足**$f(x_1,y_1)<0,f(x_2,y_2)>0$,**则至少存在一点**$(\xi,\eta)\in D$**使得**$f(\xi,\eta)=0$.

以上的概念、定义、性质和运算几乎可以平行推广到n维空间，只需注意自变量所在的空间即可.

习题11.1

1.用不等式表示下列各平面区域：

（1）顶点在原点，边长为a而且一边位于x轴的正半轴上的正三角形开区域；

（2）以$(O(0,0),A(1,0),B(1,2),C(0,1)$为顶点的梯形闭区域.

2.指出并图示下列各函数的定义域：

(1)$z=x+\sqrt{x}$;(2)$z=\arctan\frac{y}{x}$;

(3)$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;(4)$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}(R>r>0)$.

3. 已知函数$f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$,试求$f(tx,ty)$.

4.试证函数$F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$满足关系式

$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(x,v)$.

5.已知函数$f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求$f(x+y,x-y,xy)$.

6.求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{2y}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+\cos xy}{1+x\sin xy+\ln(2+x\cos xy)}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

(4) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (5) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\tan^{-1}\left[\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right]$

7.指出下列函数的间断点：

(1)$z=\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;(2)$z=\dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y+1}}$.

第二节偏导数及其几何意义

我们知道函数的变化快与慢是由函数的变化率决定的，如何知道函数在一点处的变化率，我们在研究一元函数时曾经讨论过.这就是用函数在这一点附近的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 考察其变化趋势，如果极限值$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称该极限值为函数在点$x_0$ 处的变化率.对于二元函数我们同样来讨论函数的变化率.注意到二元函数在点$P_0(x_0,y_0)$处函数的改变量分别为

$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$,称为函数关于变量$x$ 的偏增量；

$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,称为函数关于变量$y$ 的偏增量；

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,称为函数的全增量.

于是二元函数的平均变化率有三个，分别是$\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}, \dfrac{\Delta z_y}{\Delta y}, \dfrac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,以下我们分别讨论.

一、偏导数的定义

定义11.2.1 设函数$z=f(x,y)$ 在包含点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，将y 固定到y_0，给x_0 以增量，得到函数的偏增量$\Delta z_x = f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$ ，若极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$**存在,则称该极限值为函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对x 的偏导数，记作**

$f'_x(x_0,y_0), z'_x\big|_{(x_0,y_0)}$, $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$ **或**$\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$

同理若$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim\limits_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$存在, 则称此极限值为函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对y 的偏导数，记作

$f'_y(x_0,y_0), z'_y\big|_{(x_0,y_0)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(x_0,y_0)}$ 或$\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x_0,y_0)}$

注:在偏导数的定义中，f在点(x_0,y_0)存在关于x (或y)的偏导数，f 至少在$\{(x,y)|y=y_0, |x-x_0|<\delta\}$(或$\{(x,y)|x=x_0, |y-y_0|<\delta\}$)上必须有定义.

若函数$z=f(x,y)$在区域D上每一点(x,y)都存在对x (或对y)的偏导数，则得到函数$z=f(x,y)$ 在区域D上对x(或对y)的偏导(函)数（简称偏导数），记作$f'_x(x,y), z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\left(f'_y(x,y), z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}\right.$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

注:从本节定义1可以看出对函数$z=f(x,y)$关于x 求导，只需要将另一个变量y 看成常数，其余与一元函数的求导方法一样，反之亦然.

偏导数的概念还可以推广到多元函数，例如三元函数$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处对x的偏导数定义为：$f'_x(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$.同理可以定义对其它自变量的偏导数.

注:对于具有偏导数的函数，在某一点的偏导数，就是其偏导数在该点的函数值，如果是分段函数，在分段点的偏导数一般要用定义来确定.

二、偏导数的计算

例11.2.1. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,求$f'_x(0,0)$及$f'_y(0,0)$.

解：$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y^3}{y^3}=-1$

例11.2.2设$z=(1+xy)^{x+y}$,求$z'_y(2,1)$

解：$z(2,y)=(1+2y)^{2+y}=e^{(2+y)\ln(1+2y)}$

$z_y(2,y)=e^{(2+y)\ln(1+2y)}(\ln(1+2y)+\frac{2(2+y)}{1+2y})$

于是$z'_y(2,1)=3^3(\ln 3+2)$

例11.2.3 求$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+xyz$的偏导数.

解: 对x 求导，把y,z看成常数，则$u'_x(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+yz$,注意到三个变量形式上的对称性，于是$u'_y(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+xz, u'_z(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+xy$

例11.2.4 已知理想气体的状态方程$pV=RT$(R为常量),证明：

$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$

证明: 因为$p=\frac{RT}{V},\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$;

$V=\frac{RT}{p},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$;

$T=\frac{pV}{R},\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$;

于是$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1$

注:像一元函数的求导算符$\frac{d}{dx}$一样，多元函数的偏导数记号$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ 分别表示对自变量x与y的偏导数算符.而一元函数的导数符号$\frac{dy}{dx}$还表示函数$y=f(x)$ 的微分与自变量x微分的商，而多元函数的偏导数没有微分商的含意，也就是$\frac{\partial z}{\partial x}$的分子分母没有商的关系，是不能拆分的符号.

三、偏导数的几何意义

我们知道一元函数$y=f(x)$在x_0处的导数就是曲线$y=f(x)$ 上过点$(x_0,f(x_0))$ 的切线的斜率.而二元函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0) 处的两个偏导数$f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$，分别是曲面$z=f(x,y)$ 与平面$x=x_0$和$y=y_0$的交线$C_1:\begin{cases}z&=f(x,y)\\x&=x_0\end{cases},C_2:\begin{cases}z&=f(x,y)\\y&=y_0\end{cases}$,在点$(x_0,y_0,z_0)$处切线$T_x,T_y$的斜率，如图11.2.1与图11.2.2.

注: 切线T_x,T_y对应于x和y轴正向的夹角分别是α,β,于是$\tan\alpha=f'_x(x_0,y_0),\tan\beta=f'_y(x_0,y_0)$

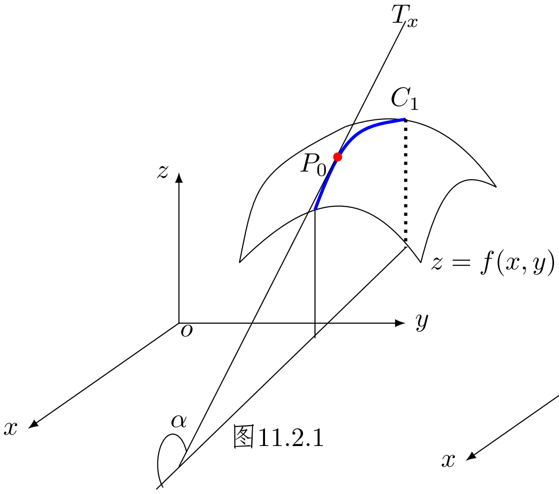

图11.2.1

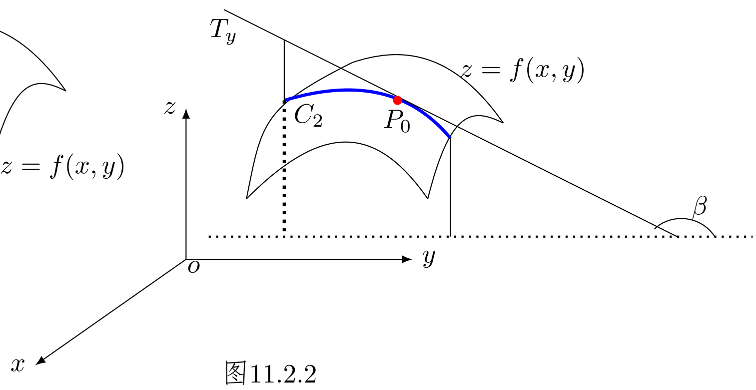

图11.2.2

四、偏导数与连续的关系

我们知道，若一元函数$y=f(x)$ 在x_0 点可导，则$y=f(x)$ 在x_0 处连续，但是，二元函数$f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$即便存在关于x和y 的两个偏导数，函数$f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$处却不一定连续，例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在点$(0,0)$处的偏导数

$$f'_x(0,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, f'_y(0,0)=\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

而函数在点$(0,0)$处没有极限，当然不连续. 注意到二元函数的特殊情况是一元函数，所以二元函数在某点处连续，但未必可导.例如连续函数$f(x,y)=|x|$,在$x=0$ 处不可导.

如果偏导数有界，则函数连续.

定理11.2.1 若函数$f(x,y)$ 在区域D上，偏导数$f_x(x,y),f_y(x,y)$有界，则$f(x,y)$在D 上连续.

证明：$\forall P_0(x_0,y_0)\in D$,我们分别对变量$x,y$使用Largrange中值定理得

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

注意到存在正数M_1,M_2使得$|f'_x(x,y)|\le M_1,|f'_y(x,y)|\le M_2$，于是

$|\Delta f|\le M_1|\Delta x|+M_2|\Delta y|$,这样$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f=0$,由连续的定义知，$f(x,y)\in C(D)$

五、高阶偏导数与求导的次序

二元函数$z=f(x,y)$ 的两个（一阶）偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$仍然是$x,y$ 的二元函数，若它们还存在关于x和y 的偏导数，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

称它们是二元函数$z=f(x,y)$ 的二阶偏导（函）数，二元函数的二阶偏导数至多有2^2 个，通常记作：

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ 写成$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$或$f''_{xx}(x,y)$或$f_{xx}(x,y),z_{xx},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ 写成$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$或$f''_{xy}(x,y)$或$f_{xy}(x,y),z_{xy},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$,也称为混合偏导数.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 写成$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$或$f''_{yx}(x,y)$或$f_{yx}(x,y),z_{yx},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$,也称为混合偏导数.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 写成$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$或$f''_{yy}(x,y)$或$f_{yy}(x,y),z_{yy},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

一般地，二元函数$z=f(x,y)$的n 阶偏导数至多有2^n个，二元函数$z=f(x,y)$ 的n阶偏导数的符号与二阶偏导数类似.例如符号$\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}$或$f^{(n)}_{x^{n-k},y^k}(x,y)$ 表示二元函数$z=f(x,y)$的n 阶偏导数，首先对x求$n-k$阶偏导数，然后对y求k 阶偏导数.

二阶或二阶以上的偏导数称为高阶导数.

类似我们可以定义三元函数或n元函数的高阶偏导数.

例11.2.5求函数$z=x^3y^3-3x^2y+xy^2+3$的二阶偏导数.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^3-6xy+y^2,\frac{\partial z}{\partial y}=3x^3y^2-3x^2+2xy$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2y^2 - 6x + 2y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2y^2 - 6x + 2y$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3y + 2x$

例11.2.6求函数$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$在原点$(0,0)$处的两个二阶混合偏导数$f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$

解: $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$

$f'_x(0,y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}}{h} = -y.$

$f'_y(x,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{xh\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2}}{h} = x.$

$f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1.$

$f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$

比较以上两例，我们发现前者在任意点处二阶混合偏导数相等，后者在点$(0,0)$处二阶混合偏导数不相等，那么多元函数具备怎样的条件，它的混合偏导数与求导顺序无关？我们看如下定理.

例11.2.7 设函数$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$验证函数满足Laplace方程：$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

解：$u_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = -\frac{x}{r^3}$,其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$u_y = -\frac{y}{r^3}, u_z = -\frac{z}{r^3}$

$u_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, u_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, f_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$

$\Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{3}{r^3} + \frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 0$

定理11.2.1 若函数$f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(P_0)$ 内存在二阶混合偏导数$f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$,并且它们在点$P_0(x_0,y_0)$处连续，则$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$

证明：令$F(\Delta x, \Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0)$

$\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x,y_0), \psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y)$

于是$F(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) \\ \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0) \end{cases}$

那么

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x \\ &= [f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x \\ &= f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \end{aligned}$$

$\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y$

$=[f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)-f'_y(x_0,y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y$

$=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y$

于是$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)$

等式两端取极限得到所需的结果.

这个定理的结果可以推广到n元函数的高阶混合偏导数上去.例如三元函数$f(x,y,z)$关于x,y,z 的三阶偏导数按照不同顺序共有六个：$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z\partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z\partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z}$

若它们在点(x,y,z)都连续，则它们相等.若二元函数$f(x,y)$所有的混合高阶偏导数都连续，则偏导数（亦称一阶偏导数）有二个，二阶偏导数只有三个（$f''_{xy}=f''_{yx}$),三阶偏导数只有四个，一般情况，n阶偏导数只有$n+1$ 个.

习题11.2

1.求下列各函数的偏导数：

(1)$z=xy+\frac{x}{y}$; (2)$z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (3)$z=x^3\sqrt{3}y+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

(4)$z=\arctan(t-\theta^2)$; (5)$u=\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2.设$f(x,y)=x+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$,求$f'_x(1,1),f''_{xy}(1,1)$.

3.设$z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$,证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

4. 验证：$u=e^t\cos\theta$满足：方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$.

5. $f(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z$,验证方程$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$

6.曲线$\begin{cases} z &= \frac{x^2+y^2}{4}, \\ y &= 4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$ 处的切线对于x轴的倾角是多少？

7.设$f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$,求$f_{xx}(0,0,1),f_{xz}(1,0,2),f_{yz}(0,-1,0)$及$f_{zzx}(2,0,1)$.

8.验证：

(1)$y=e^{-kn^2t}\sin nx$满足$\frac{\partial}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

(2)$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,满足$r_{xx}+r_{yy}+r_{zz}=\frac{2}{r}$.

第三节全微分

在一元函数的研究中，函数$y=f(x)$的改变量$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 的表示是十分重要的，如果函数可导我们发现函数的改变量$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\circ(\Delta x)$,其中等式右端的主要部分$f'(x_0)\Delta x$称为函数在$x_0$处的微分，记作$dy|_{x=x_0}$.为了表示二元函数或多元函数的改变量，我们将函数微分dy的概念推广到多元函数.

一、全微分的概念

定义11.3.1 **设函数**$z=f(x,y)$ **在点**$P_0(x_0,y_0)$**的某邻域**$U(P_0)$ **内有定义，若函数在该点处的全增量**Δz**可以表示成**$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\circ(\rho)$,**其中**$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,$A$ **与**B**是与**Δx **和**Δy**无关的常数，则称函**

数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微.等式中关于$\Delta x,\Delta y$的线性主要部分$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$f(x,y)$在点P_0处的全微分，记作$dz\,|_{(x_0,y_0)}$或者简单记作dz，于是$dz=A\Delta x+B\Delta y$

由定义不难看出，若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，则函数在该点连续，且偏导数存在.

定理11.3.1（可微的必要条件）若函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则函数在点P_0 处两个偏导数存在，且全微分中的常数A,B 满足：$A=f'_x(x_0,y_0),B=f'_y(x_0,y_0)$

证明: 因为函数可微，所以

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\circ(\rho),\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

于是$\Delta z_x=A\Delta x+\circ(|\Delta x|),\Delta z_y=B\Delta y+\circ(|\Delta y|)$

$$\begin{aligned} f'_x(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{\Delta z_x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(A+\tfrac{\circ(|\Delta x|)}{\Delta x})=A \\ f'_y(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\tfrac{\Delta z_y}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(B+\tfrac{\circ(|\Delta y|)}{\Delta y})=B \end{aligned}$$

与一元函数相同，自变量的改变量等于自变量的微分，即$\Delta x=dx,\Delta y=dy$,于是函数在点$P_0(x_0,y_0)$处的全微分可以表示成

$dz\,|_{P=P_0}=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$

一般地，若函数$z=f(x,y)$在平面区域D上任意点$P(x,y)\in D$ 处可微，则全微分记作：

$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

注: 函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微的充分必要条件是$\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}=\circ(1)$,其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,所以如果上式不成立，不能将$f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在$(x,y)$点处的全微分.

同样我们可以定义多元函数的微分，例如n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其全微分$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

注:一元函数可微与可导是等价的，但多元函数有偏导数仅是函数可微的必要条件，而非充分条件.

例如函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在$(0,0)$点的偏导数为

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$,

同理$f'_y(0,0)=0$ 而,

$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\Delta y|},\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 于是,

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f-df}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\rho}$

如果我们取路径$\Delta x=\Delta y$, 于是

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f-df}{\rho}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\sqrt{2}|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$

即,$\Delta f-df$ 不是比ρ高阶的无穷小，所以$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点$(0,0)$处不可微.

定理11.3.2（**可微的充分条件**）**若函数**$z=f(x,y)$ **在点**$P_0(x_0,y_0)$ **的某邻域**$U(P_0)$**有偏导数，且偏导数在点**P_0**处连续，则函数**$z=f(x,y)$**在点**P_0 **处可微**.

证明: 设$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,于是$\circ(\rho)=\dfrac{\circ(\rho)}{\rho}\dfrac{\Delta x}{\rho}\Delta x+\dfrac{\circ(\rho)}{\rho}\dfrac{\Delta y}{\rho}\Delta y$

令$\dfrac{\circ(\rho)}{\rho}\dfrac{\Delta x}{\rho}=\alpha,\dfrac{\circ(\rho)}{\rho}\dfrac{\Delta x}{\rho}=\beta$

则α,β 是无穷小(当$\rho\to 0$), 反之若α,β是当$\rho\to 0$时的无穷小，则$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\circ(\rho)$,事实上，$\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\to 0(\rho\to 0)$

注意到

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

利用一元函数Lagrange中值定理得到

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x$

$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$，其中$0<\theta_j<1,j=1,2$

由一阶偏导数连续得$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)+\alpha_1,(\alpha_1\to 0)$

$f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f'_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\alpha_2\to 0)$

于是得到

$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$

$=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\circ(\rho)$.

由微分的定义得函数在点$P_0(x_0,y_0)$处可微.

一阶偏导数连续是函数可微的充分条件，而非必要条件.例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点$(0,0)$处$f'_x(0,0)=0,f'_y(0,0)=0$

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\\&=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\tfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\ ,\\&=\rho^2\sin\tfrac{1}{\rho^2}\end{aligned}$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

于是

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-df}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=0$

所以函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$处可微.而偏导数

$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

特别当$y=x$时极限

$\lim\limits_{x\to 0}f'_x(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right)$

不存在，即$f'_x(x,y)$在原点$(0,0)$ 不连续，同理可得$f'_y(x,y)$在原点也不连续.

例11.3.1 求函数$z=x^2\sin xy$ 在点$(1,1)$处的全微分.

解: $z(x,1)=x^2\sin x, z(1,y)=\sin y$,所以$z'_x(1,1)=2x\sin x+x^2\cos x\,|_{x=1}=2\sin 1+\cos 1$

$z'_y(1,1)=\cos y\,|_{y=1}=\cos 1$. 容易验证其一阶偏导数连续. 于是,

$dz=z'_x(1,1)\Delta x+z'_y(1,1)\Delta y=(2\sin 1+\cos 1)\Delta x+\cos 1\Delta y$

例11.3.2 求函数$z=e^{xy}\sin(x^2+y^2)$的全微分.

解:$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\sin(x^2+y^2)+2xe^{xy}\cos(x^2+y^2)$,注意到两个自变量的对称性，

$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\sin(x^2+y^2)+2ye^{xy}\cos(x^2+y^2)$

于是

$$\begin{aligned} dz &= \tfrac{\partial z}{\partial x}dx+\tfrac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= (ye^{xy}\sin(x^2+y^2)+2xe^{xy}\cos(x^2+y^2))dx+(xe^{xy}\sin(x^2+y^2)+2ye^{xy}\cos(x^2+y^2))dy \end{aligned}$$

二、全微分在近似计算中的应用

如果函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，即

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\circ(\rho)$,

当$|\Delta x|,|\Delta y|$比较小时，

$\Delta z\approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$,即

$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$,

其中$x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y$.利用微分可以在点$P_0$附近近似表示函数$f(x,y)$.这与一元函数微分的应用是一脉相承的.

例11.3.3 求$1.08^{3.96}$的近似值.

解: 设$f(x,y)=x^y$,令$x_0=1,y_0=4,\Delta x=0.08,\Delta y=-0.04$

$$\begin{aligned} 1.08^{3.96} &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) \\ &\approx f(1,4)+f_x(1,4)\Delta x+f_y(1,4)\Delta y \\ &= 1+4\cdot 0.08+1^4\cdot\ln 1\cdot(-0.04) \\ &= 1+0.32=1.32 \end{aligned}$$

例11.3.4 应用公式$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算某三角形面积，现测得$a=12.50,b=8.30,C=30^\circ$若测量$a,b$ 的误差为± 0.01, C 的误差为$\pm 0.1^\circ$,求用此公式计算三角形面积时的绝对误差限与相对误差限.

解: 测量a,b,C 的绝对误差限分别为

$|\Delta a| = 0.01, |\Delta b| = 0.01, |\Delta C| = 0.1^\circ = \frac{\pi}{1800}$,于是

$$\begin{aligned}|\Delta S| \approx |dS| &= \left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial S}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial S}{\partial C}\Delta C\right| \\ &\le \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right| \cdot |\Delta a| + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right| \cdot |\Delta b| + \left|\frac{\partial S}{\partial C}\right| \cdot |\Delta C| \\ &= \frac{1}{2}|b\sin C||\Delta a| + \frac{1}{2}|a\sin C||\Delta b| + \frac{1}{2}|ab\cos C||\Delta C|,\end{aligned}$$

将各数据代入上式，得到S的绝对误差限为

$|\Delta S| \le 0.13$

注意到$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\cdot 12.50 \cdot 8.30 \cdot \frac{1}{2} \approx 25.94$

所以S 的相对误差限为$\left|\dfrac{\Delta S}{S}\right| \approx \dfrac{0.13}{25.94} \approx 0.5\%.$

习题11.3

1.求当$x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$时，函数$z = \frac{xy}{x^2-y^2}$的全增量和全微分.

2.求下列函数的全微分：

(1)$z = \sqrt{x^2-y^2}$; (2)$y = x^2 \arcsin\frac{x}{t}$; (3)$u = \arctan\frac{z}{x} + e^{\frac{x}{y}}$;

(4)$z = (st)^a$(a 为常数); (5) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.求$(1.002)^{2.001}$的近似值，使相对误差小于1%.

第四节多元复合函数微分法

在一元函数的学习中,当函数$y = f(u)$在点u处可微，若$u = \varphi(x)$的值域与$y = f(u)$ 的定义域的交非空，且在点x处可微，于是复合函数$y = f(\varphi(x))$在点x 处可微，且

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$,那么复合函数求导的锁链法则在多元复合函数中是否成立？以下我们以二元函数为例来讨论这一问题.

若二元函数$z = f(u,v), u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$满足：对于函数$u = \varphi(x,y)$与$v = \psi(x,y)$，若集合$D(u,v)$ 与函数$z = f(u,v)$的定义域的交非空，于是$z = f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$称为二元复合函数.

定理11.4.1　若函数$z = f(u,v)$在(u,v)处可微，$u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$在$(x,y)$处可微，则复合函数$z = f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$在$(x,y)$处可微，且$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

证明: 由函数$z = f(u,v), u = \varphi(x,y)$和$v = \psi(x,y)$可微, 分别得到

$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$,其中$\alpha, \beta$是无穷小量$(\Delta u \to 0, \Delta v \to 0)$.

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y$,其中$\alpha_1, \beta_1$是无穷小量$(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$

$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta y$,其中$\alpha_2, \beta_2$是无穷小量$(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$

将以上后两式代入第一式得

$\Delta z = [\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}]\Delta x + [\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]\Delta y + \alpha_3\Delta x + \beta_3\Delta y$

其中$\alpha_3 = \frac{\partial z}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial v}\alpha_2 + \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2$

$\beta_3 = \frac{\partial z}{\partial u}\beta_1 + \frac{\partial z}{\partial v}\beta_2 + \alpha\beta_1 + \beta\beta_2$

注意到当$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$时，$\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$,则$\alpha_3, \beta_3$是无穷小($\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$),于是复合函数$z(x,y)$可微，且由全微分的定义得

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

推论11.4.1 若函数$z = f(u,v)$可微，$u = \varphi(t), v = \psi(t)$ 可微，则复合函数$z = f(\varphi(t), \psi(t))$ 可微，且

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$

我们习惯上称这样的导数$\frac{dz}{dt}$为全导数.

以上锁链法则可以推广到n元函数,例如若$u = f(x,y,z)$在(x,y,z)处可微,而$x = x(t,s), y = y(t,s), z = z(t,s)$在$(t,s)$处有偏导数，则

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$

在一元函数微分的学习中，我们指出若$y = f(u)$可微，$u = \varphi(x)$可微，于是$du = f'(u)du$,如果利用复合函数，则

$du = (f(\varphi(x))'dx = f'(u)\varphi'(x)dx = f'(u)du$这种性质称为一阶微分的形式不变性.

多元函数同样具有一阶微分的形式不变性：例如，设$z = f(u,v)$可微，$u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$可微，$du = f'_u du + f'_v dv$

如果将$z = f(u,v)$看成x,y的函数，于是

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= [\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}]dx + [\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy] + \frac{\partial z}{\partial v}[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy] \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \end{aligned}$$

例11.4.1 设$z = e^{xy}\sin(x+y)$,求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 我们利用一阶微分的形式不变性来解此题，令$u = xy, v = x + y$,

注意到$d(st) = tds + sdt, d(s+t) = ds + dt$

$dz = d(e^u \sin v) = e^u \sin v du + e^u \cos v dv$

$du = d(xy) = ydx + xdy, dv = d(x+y) = dx + dy$,代入上式得

$$\begin{aligned} dz &= e^u \sin v(ydx + xdy) + e^u \cos v(dx + dy) \\ &= e^u(y\sin v + \cos v)dx + e^u(x\sin v + \cos v)dy \end{aligned}$$

即$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = e^{xy}(y\sin(x+y) + \cos(x+y))dx + e^{xy}(x\sin(x+y) + \cos(x+y))dy$

于是$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}(y\sin(x+y) + \cos(x+y))$

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}(x\sin(x+y) + \cos(x+y))$

例11.4.2设函数$z=x^y(x>0)$,而$x=\sin t,y=\cos t$,求$\frac{dz}{dt}$.

解: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$= yx^{y-1}\cos t + x^y \ln x \cdot (-\sin t)$

$= yx^{y-1}\cos t - x^y \sin t \cdot \ln x$

$= \cos^2 t(\sin t)^{\cos t-1} - (\sin t)^{\cos t+1}\ln \sin t$

例11.4.3 设函数$z=\ln(x^2+y),x=e^{t+s^2},y=t^2+s$,求$\frac{\partial z}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial s}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

$= \frac{2x}{x^2+y}e^{t+s^2} + \frac{1}{x^2+y}2t$

$= \frac{2}{x^2+y}(xe^{t+s^2}+t)$

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

$= \frac{2x}{x^2+y}e^{t+s^2}2s + \frac{1}{x^2+y}$

$= \frac{1}{x^2+y}(4xse^{t+s^2}+1)$

例11.4.4 设函数$u=f(x,xy,xyz)$ 可微,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解: 设$x=u,xy=v,xyz=w$, 我们用f_1',f_2',f_3'分别代替f_u',f_v',f_w',于是

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$

$= f_1' + f_2'\cdot y + f_3'\cdot yz$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$

$= f_2'\cdot x + f_3'\cdot xz$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$

$= f_3'\cdot xy$

例11.4.5 设$\omega=f(x,x+y,xyz)$ f具有二阶连续的偏导数，求$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}$.

解: $\frac{\partial\omega}{\partial x} = f_1'+f_2'+f_3'\cdot yz$

$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = f_{11}''+f_{12}''+f_{13}''\cdot yz$

$+f_{21}''+f_{22}''+f_{23}''\cdot yz$

$+yz(f_{31}''+f_{32}''+f_{33}''\cdot yz)$

$= f_{11}''+2f_{12}''+2f_{13}''\cdot yz+f_{22}''+2f_{23}''\cdot yz+f_{33}''\cdot y^2z^2$

$\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} = f_{12}''+xzf_{13}''+f_{22}''+zf_3'+(x+y)zf_{23}''+xyz^2f_{33}''$

例11.4.6 设$u=f(x,y)$的所有二阶偏导数连续，把下列表达式转换成极坐标系中的形式.

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

解: 在极坐标下$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\frac{y}{x}$* [1] 在极坐标变换下$u=f(x,y)=F(r,\theta)$,于是

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{y}{r^2}$

$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{x}{r^2}$

$= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$

[1]*当点$P(x,y)$位于第一、四象限时，规定：$\theta\in(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}),\theta=\arctan\frac{y}{x}$;
当点$P(x,y)$位于第二、三象限时，规定：$\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$,则$\theta=\arctan\frac{y}{x}+\pi$

两式平方后相加，得

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\cos\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}\end{aligned}$$

同理可得

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}$

两式相加，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

习题11.4

1. 求下列函数的一阶偏导数：

(1)$z=u^2v-uv^2,u=x\cos y,v=x\sin y$;(2)$z=x^2\ln y,x=\frac{u}{v},y=3v-2u$;

(3)$z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$;(4)$z=\frac{xy\arctan(x+y+xy)}{x+y}$.

2. 设$z=\arctan\frac{x}{y},x=u+v,y=u-v$,验证$z'_u+z'_v=\frac{u+v}{u^2+v^2}$.

3.设$u=\frac{1}{x}f(\frac{y}{x})$,验证$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$.

4.求下列函数的导数：

(1)$u=\arctan(xy),y=e^x$;(2)$z=uv+\sin t,u=e^t,v=\cos t$.

5. 设$u=f(x,y,t),x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t)$,求$\frac{\partial u}{\partial s}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$.

6.设$u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{x})$,求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

7.设$u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$,而$y=a\sin x,z=\cos x$,求$\frac{du}{dx}$

8.设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中$f(u)$为可导函数，验证

$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

9.设$u=f(x,y)$的所有二阶偏导数连续，而

$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$

证明：$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$

及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

第五节隐函数的求导方法

一般来讲，一个关于多个变量的方程，可以确定其中一个变量被其余变量表示，这时这个被表示的变量称为其余变量的函数，例如$x^2+y^2=R^2$,对于任意$x\in[-R,+R]$,$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$,这样由方程确定的函数称为由方程确定的隐函数.

一、一个方程的情形

定理11.5.1 (隐函数存在定理1) 设函数$F(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$ 内具有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0)=0, F_y(x_0,y_0)\neq 0$,则方程$F(x,y)=0$在点$x_0$ 的某邻域内存在唯一确定，且具有连续导数的函数$y=f(x)$,它满足：$y_0=f(x_0), F(x,f(x))\equiv 0$,且$\frac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

这个定理的证明超出教学大纲的范围，但由上式确定的隐函数的导数容易求出.事实上，注意到$F(x,f(x))\equiv 0$,于是对该等式两端关于x求导,得到

$F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$,于是$\frac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

例11.5.1 验证二元方程$F(x,y)=xy+2^x-2^y=0$在点0的某邻域确定唯一一个具有连续导数的隐函数$y=\varphi(x)$, 并求$\varphi'(x)$

解: 函数$F'_x(x,y)=y+2^x\ln 2$与$F'_y(x,y)=x-2^y\ln 2$在点$(0,0)$的邻域上连续，且$F(0,0)=0, F'_y(0,0)=-\ln 2\neq 0$.由定理11.5.1在点0的某邻域$(-\delta,\delta)$内存在唯一一个具有连续导数的隐函数$y=\varphi(x)$,使得$F(x,\varphi(x))\equiv 0$,且$\varphi(0)=0$, $\varphi'(x)=-\frac{y+2^x\ln 2}{x-2^y\ln 2}$

定理11.5.2 (隐函数存在定理2) 设函数$F(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)$ 内具有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0, F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程$F(x,y,z)=0$在点$(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在唯一确定且具有连续导数的函数$z=f(x,y)$,它满足：$z_0=f(x_0,y_0), F(x,y,f(x,y))\equiv 0$,且$\frac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

同定理1一样，我们不证明这个定理，但是隐函数的偏导数容易求出，事实上，由$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$对等式两端关于自变量x,y分别求导得

$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0, F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$

于是$\frac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

例11.5.2 求由三元方程$xy+\sin z+y=2z$确定的隐函数$z=f(x,y)$的偏导数

解: 习惯上不必套用公式，可直接对复合函数求导，即等式两端分别对自变量x,y求导，注意：z是x,y的函数，于是

$y+\cos z\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial x}$

$x+\cos z\frac{\partial z}{\partial y}+1=2\frac{\partial z}{\partial y}$

于是$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2-\cos z}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+x}{2-\cos z}$

二*、方程组确定的隐函数

对于方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v) &=0, \\ G(x,y,u,v) &=0. \end{cases}$一般来讲，只有两个变量是独立变化的，于是该方程组可能确定两个二元隐函数.

定理11.5.3(隐函数存在定理3) 设函数$F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某邻域$U(P_0)$ 内满足下列条件：

1）四元函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$在$U(P_0)$内具有连续的偏导数；

2）$\begin{cases} F(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0, \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0. \end{cases}$；

3)Jacobi行列式$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$

在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$处不等于零，则方程组在点$Q_0(x_0,y_0)$的某邻域内存在唯一一组具有连续偏导数的隐函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$,使得$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) &\equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) &\equiv 0. \end{cases}$且$u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$

同前面的定理一样，我们仅求解关于隐函数的偏导数，因为

$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) &\equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) &\equiv 0 \end{cases}$,对等式两端关于$x$求导数得

$$\begin{cases} F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{cases}$$

这是关于$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$的二元一次线性方程组.注意到系数行列式$J\neq 0$,所以可以解得$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

同理可得$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

例11.5.3 验证方程组$\begin{cases} x^2+y^2-uv &= 0, \\ xy-u^2+v^2 &= 0. \end{cases}$在点$(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$的邻域满足定理3的条件，从而在点$(1,0)$的邻域存在唯一一组有连续偏导数的(隐)函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$,并求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$

解：设$\begin{cases} F(x,y,u,v) &= x^2+y^2-uv, \\ G(x,y,u,v) &= xy-u^2+v^2 \end{cases}$.

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\frac{\partial F}{\partial y}=2y,\frac{\partial F}{\partial u}=-v,\frac{\partial F}{\partial v}=-u,$

$\frac{\partial G}{\partial x}=y,\frac{\partial G}{\partial y}=x,\frac{\partial G}{\partial u}=-2u,\frac{\partial G}{\partial v}=2v,$

在点$(1,0,1,1)$的邻域都连续，且$\begin{cases} F(1,0,1,1) &= 0, \\ G(1,0,1,1) &= 0. \end{cases}$.

$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix}=-2v^2-2u^2=-2(u^2+v^2)$

在点$(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$有$J=-4\neq 0$于是,由定理11.5.3 存在唯一一组有连续偏导数的(隐) 函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$,为了求偏导数对方程组分别关于x求偏导数，其中u,v是x,y的函数，于是

$\begin{cases} 2x-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x} & =0, \\ y-2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x} & =0 \end{cases}.$

解得$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -2x & -u \\ -y & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix}}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -v & -2x \\ -2u & -y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix}}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}$.

同样方法，可求得关于y偏导数或利用变量的对称性得

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} -2y & -u \\ -x & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix}}=\frac{4yv+xu}{2(u^2+v^2)}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} -v & -2y \\ -2u & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix}}=\frac{4yu-xv}{2(u^2+v^2)}$.

例11.5.4 设函数组$x=x(u,v),y=y(u,v)$的所有偏导数在点$P(u_0,v_0)$的邻域连续，且$x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0)$,在点$P(u_0,v_0)$，行列式

$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}_P\neq 0$,证明在点$Q(x_0,y_0)$的某邻域存在有连续偏导数的反函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$

证明: 对于函数组$\begin{cases} F(x,y,u,v) & =x-x(u,v)=0, \\ G(x,y,u,v) & =y-y(u,v)=0 \end{cases}$.函数$F,G$的所有偏导数在点$M(x_0,y_0,u_0,v_0)$的邻域连续，且

$\begin{cases} F(x_0,y_0,u_0,v_0) & =x_0-x(u_0,v_0)=0, \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0) & =y_0-y(u_0,v_0)=0 \end{cases}$.又

$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix} -\frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{\partial y}{\partial u} & -\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_P=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}_P\neq 0$

由定理11 .5.3，在点$Q(x_0,y_0)$的某邻域存在具有连续偏导数的反函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$

习题11.5

1.求由方程$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$在点$(1,2,-1)$处的偏导数.

2.设方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$确定了隐函数$z=f(x,y)$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

3.设方程$z^5-xz^4+yz^3=1$确定了隐函数$z=z(x,y)$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4.求由方程组$\begin{cases} z & =x^2+y^2 \\ x^2 & +2y^2+3z^2=20 \end{cases}$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$

5.设$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$

6.设$x=x(y,z),y=y(x,z),z=z(x,y)$都是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的具有连续偏导数的函数，证明：

$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$

7.求下列函数组所确定函数的导数或偏导数

(1)设$\begin{cases} z &= x^2+y^2, \\ & x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$,求$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$

(2)设$\begin{cases} u &= f(ux,v+y), \\ v &= g(u-x,v^2y). \end{cases}$,其中$f,g$具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial u|}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$

(3)设$\begin{cases} x &= e^u+u\sin v, \\ y &= e^u-u\cos v. \end{cases}$,求$u_x,u_y,v_x,v_y$

第六节多元函数微分学在几何中的应用

一、向量值函数及其导数

定义11.6.1 设数集$D\subset\mathbb{R}$,映射$\mathbf{f}$是D到$\mathbb{R}^n$的映射，满足$\forall t\in D$存在唯一确定的向量$\mathbf{r}=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\in\mathbb{R}^n$与之对应，则称$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$为一元向量值函数，其中$D$为定义域，$t$为自变量，$\mathbf{r}$为因变量.

显然当$n=1$向量值函数就是通常的一元函数，相对于向量值函数习惯上称通常的函数为数量函数，注意到向量函数是一个向量，特别三维向量值函数，习惯写成分量表示如下：

$\mathbf{r}=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k},t\in D$

或坐标表示$\mathbf{r}=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)),t\in D$

对于向量值函数，我们同样可以研究其极限，导数，微分和积分问题，这里我们仅研究极限和导数.

定义11.6.2 设向量值函数$\mathbf{f}(t)$在t_0的某去心邻域有定义，$\mathbf{r}_0$是一个常向量，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|t-t_0|<\delta$时恒有$|\mathbf{f}(t)-\mathbf{r}_0|<\varepsilon$,则称向量值函数$\mathbf{f}(t)$以常向量$\mathbf{r}_0$为极限，记作$\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0$ 或$\mathbf{r}(t)\to\mathbf{r}_0(t\to t_0)$.

若$\mathbf{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$,则

$\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{r}_0\Longleftrightarrow\lim\limits_{t\to t_0}f_j(t)=r_j$,其中$\mathbf{r}_0=(r_1,r_2,r_3)$

定义11.6.3 设向量值函数$\mathbf{f}(t)$在t_0的某邻域有定义，$\Delta\mathbf{f}=\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)$,若$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\mathbf{f}=0$,则称向量值函数$\mathbf{f}(t)$在$t_0$处连续.

命题11.6.1 向量值函数$\mathbf{f}(t)$连续的充分必要条件是$\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}(t_0)$

命题11.6.2 向量值函数$\mathbf{f}(t)$连续的充分必要条件是$\lim\limits_{t\to t_0}f_j(t)=f_j(t_0)\ (j=1,2,3),\mathbf{f}(t)=\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\}$

.

若向量值函数$\mathbf{f}(t)$ 在D上任意点都连续，则称其在D上连续.若向量函数$\mathbf{f}_j(t)(j=1,2,\ldots,m)$ 连续,则$\sum\limits_{j=1}^{m}c_j\mathbf{f}_j$连续.

定义11.6.4 设向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$在t_0的某邻域有定义，且$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{f}(t_0+\Delta t)-\mathbf{f}(t_0)}{\Delta t}$存在，则称该极限值为向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$在$t_0$处的导数或导向量，记作$\mathbf{f}'(t_0)$或$\frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{t=t_0}$.

若向量值函数在D上处处可导，则其导数记作$\mathbf{f}'(t)$,或$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$

命题11.6.3 向量值函数$\mathbf{f}(t)$可导的充分必要条件是$f_j(t)(j=1,2,3)$可导，且$\mathbf{f}'(t)=\{f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t)\}$

.

若向量值函数$\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t)$可导，则有以下运算律：

(1)$\frac{d\mathbf{C}}{dt}=0,\mathbf{C}$是常值向量；

(2)$\frac{d}{dt}(C\mathbf{u}(t))=C\frac{d\mathbf{u}}{dt}$

(3)$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t)\pm\mathbf{v}(t)\right]=\frac{d\mathbf{u}}{dt}\pm\frac{d\mathbf{v}}{dt}$;

(4)$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\mathbf{u}(t))=\varphi'\mathbf{u}(t)+\varphi(t)\mathbf{u}'(t)$;

(5)$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$;

(6)$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}'$;

(7)$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\varphi(t))=\varphi'(t)\mathbf{u}'(t)$.

我们来证明(6)式：

设$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3),\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$,则

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\\&=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\u_1'&u_2\prime&u_3'\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1'&v_2'&v_3'\end{vmatrix}\\&=\mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}'\end{aligned}$$

向量值函数导数的几何意义：设空间曲线Γ是向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t),t\in D$,在$t_0$和$t_0+\Delta t$处的函数值分别为$\overrightarrow{OM}=\mathbf{f}(t_0),\overrightarrow{ON}=\mathbf{f}(t_0+\Delta t)$,

当$\Delta t>0$时，向量$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{f}(t_0+\Delta t)-\mathbf{f}(t_0)$的指向与$t$增大的方向一致；当$\Delta t<0$时，向量$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{f}(t_0+\Delta t)-\mathbf{f}(t_0)$的指向与$t$的增长方向相反，但不论$\Delta t$为正负，向量$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\Delta\mathbf{r}$的指向总与$t$ 的增长方向一致，导向量$\mathbf{f}'(t_0)$是向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$的终端曲线Γ在点M处的切向量，其指向与t的增长方向一致.

设向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$是沿空间光滑曲线运动的质点M的位置向量，则$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{v}(t)$ 是质点M 的速度向量，其方向与曲线相切；$\mathbf{r}''(t)=\mathbf{a}(t)$为质点$M$的加速度.

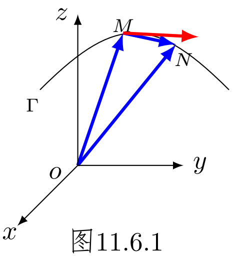

图11.6.1

例11.6.1 设质点M的运动位置方程为$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)=(t^2+1,4t-3,2t^2-6t),t\in\mathbb{R}^+$,求$t$时刻$M$ 的速度.

解：$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=(2t,4,4t-6)$

例11.6.2一个人在悬挂式滑翔机上由于快速上升气流而沿位置向量$\mathbf{r}=(3\cos t,3\sin t,t^2)$的路径螺旋式向上，求.

(1)滑翔机在任意时刻t的速度和加速度；

(2)滑翔机在任意时刻t的速率；

(3)滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

解：(1)$\mathbf{v}(t)=(-3\sin t,3\cos t,2t)$

$\mathbf{a}(t)=(-3\cos t,-3\sin t,2)$

(2)速率即速度的大小$|\mathbf{v}|=\sqrt{9+4t^2}$

这表明上升时，运动的越来越快.

(3)由$0=\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$得

$0=9\sin t\cos t-9\sin t\cos t+4t\Longrightarrow t=0$,即$t=0$时刻正交.

二、空间曲线的切线与法平面

1.设空间曲线C的参数方程为$x=x(t),y=y(t),z=z(t),t\in I$(区间)，它们在区间$I$上可导，且

$\forall t\in I,x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0,$

给定$t_0\in I$,对应曲线C上一点$P_0(x_0,y_0,z_0)=P_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$,对于

$\Delta t\neq 0,t_0+\Delta t\in I$,在曲线$C$上任取一点

$P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$，

$x(t_0+\Delta t)=x_0+\Delta x,y(t_0+\Delta t)=y_0+\Delta y,z(t_0+\Delta t)=z_0+\Delta z$，

作割线P_0P_1,于是割线的方向向量为$\{\Delta x,\Delta y,\Delta z\}$,其方程为

$\frac{X-x_0}{\Delta x}=\frac{Y-y_0}{\Delta y}=\frac{Z-z_0}{\Delta z}$

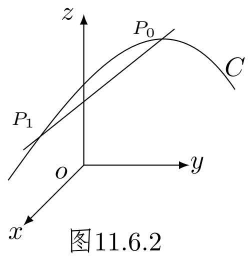

图11.6.2

注:这里X,Y,Z是割线上的动点坐标，不必在曲线上.

割线的方程为$\dfrac{X-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\dfrac{Y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\dfrac{Z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$.

若曲线上的动点P_1沿曲线C趋于定点P_0,必有$\Delta t\to 0$，于是割线P_1P_0的极限位置就是曲线C过点P_0的切线，于是切线的方程是

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

注:这里x,y,z是切线上的流动坐标，切线的方向向量$\mathbf{T}\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$称为曲线$C$在点$P_0$的切向量.

过空间曲线C上一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$,且以曲线C在点P_0的切向量为法向量的平面称为空间曲线C 在点P_0的法平面.设(x,y,z)为法平面上任意一点，于是过点P_0的法平面的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

例11.6.3 求螺旋线$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$,在$t_0=\frac{\pi}{3}$处的切线方程与法平面方程.

解: $x'=-a\sin t,y'=a\cos t,z'=b$，切线方程是

$$\frac{x-a\cos\frac{\pi}{3}}{-a\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{y-a\sin\frac{\pi}{3}}{a\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{z-b\frac{\pi}{3}}{b},$$

即$\dfrac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\dfrac{z-\frac{\pi}{3}b}{b}$.

法平面方程是

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+b\left(z-\frac{\pi}{3}b\right)=0$$

2.设空间曲线C由曲面方程$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$所确定，在C上任取一点$P(x_0,y_0,z_0)$,即$F(x_0,y_0,z_0)=0,G(x_0,y_0,z_0)=0$. 设$F(x,y,z),G(x,y,z)$对x,y,z的偏导数在点P 的某邻域内连续，且

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P$

, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_P$, 不同时为零，不妨设

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P\neq 0$,

由隐函数组存在定理在点x_0的某邻域，空间曲线C可以表示成参数方程$x=x,y=y(x),z=z(x)$，于是，空间曲线C在点P 处的切向量为$\mathbf{T}=\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\}$,根据隐函数求导公式，我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} & = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} & = 0 \end{cases}$$

解得$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$.

于是过点P 的切线方程为$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P} = \frac{y-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_P} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P}$

过点P的法平面方程为$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P\ (x-x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_P\ (y-y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P\ (z-z_0) = 0$.

例11.6.4 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = 6 \\ x+y+z & = 0 \end{cases}$ 在点$P(1,-2,1)$的切线方程与法平面方程.

解: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6, G(x,y,z) = x+y+z, F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z, G_x = 1, G_y = 1, G_z = 1$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P = -6, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_P = 0, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P = 6.$

于是过点$P(1,-2,1)$ 的切线方程和法平面方程分别为

$\begin{cases} x+z & = 2 \\ y & = -2 \end{cases}$ 与$x = z$

三、曲面的切平面与法线

设曲面$\sum: F(x,y,z) = 0$,点$P(x_0,y_0,z_0)$在曲面$\sum$上,$F(x,y,z)$在点P处有连续的偏导数且不同时为零,设Γ 是过点P 且在$\sum$上的任意曲线,假定其参数方程为$x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \le t \le \beta), t = t_0$对应于点$P(x_0,y_0,z_0)$.我们有

$F(x(t),y(t),z(t)) \equiv 0$,因为在点$P(x_0,y_0,z_0)$有连续的偏导数,对等式两端关于$t$求导得

$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t)|_{t=t_0} = 0$,于是在点$P$处我们有

$\{F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)\} \cdot \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\} = 0$

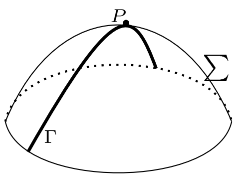

图11.6.3

注意到向量$\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$是过点$P$ 任意曲线Γ的切向量.这就说明过点P的任意曲线的切向量都与向量$\{F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)\}$正交,于是过上述曲线$\Gamma$上点$P$ 的所有切线都在同一平面上,我们称该平面为过点P的切平面,其方程为

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-x_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-x_0) = 0$

过点P且垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线,于是法线的方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

若曲面的方程为$z=f(x,y)$, 令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$,那么$F_x(x,y,z)=f_x(x,y), F_y(x,y,z)=f_y(x,y), F_z=-1$

于是当偏导数F_x, F_y在点(x_0,y_0,z_0)处连续时，切平面的方程为

$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$, 法线的方程为$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

注意到这时切平面的方程$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ 的右端恰是二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的全微分，对应一元函数微分的几何意义(微分是切线纵坐标的改变量)，我们可以说二元函数的全微分是其切平面竖坐标的改变量.

例11.6.5 求球面$x^2+y^2+z^2=14$在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程

解: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14, \{F_x,F_y,F_z\}=\{2x,2y,2z\}$过点$P(1,2,3)$的切平面的法向量为$\{F_x,F_y,F_z\}_P=\{2,4,6\}$

于是切平面的方程为$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$,即$x+2y+3z-14=0$.

法线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$或$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

例11.6.6求旋转抛物面$z=x^2+y^2-1$ 在点$(2,1,4)$处的切平面及法线方程

解:$f(x,y)=x^2+y^2-1$,切平面的法向量为$\{f_x,f_y,-1\}|_P=\{4,2-1\}$

于是过点$(2,1,4)$的切平面方程为$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$，即$4x+2y-z-6=0$,法线方程为$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$

关于切平面的注释:

一元函数可微，在几何上反映了曲线存在不平行于y轴的切线，对于二元函数来说，可微性也反映了曲面与其切平面之间存在类似的关系，于是我们从切线的定义中获得切平面的定义.

所谓平面曲线L上某点$P(x_0,y_0)$的切线PT是过点P的割线PQ,当动点Q沿曲线L趋于点P时的极限（如果存在的话）这时PQ与PT的夹角φ随着Q 趋于P,$\varphi\to 0$,注意到$\sin\varphi=\frac{h}{d}$,其中h和d分别表示点Q到直线PT的距离和Q到点P的距离，因此当$Q\to P$ 时，$\varphi\to 0$等价于$\frac{h}{d}\to 0$,仿照这个想法，我们引入曲面$\sum$在点P处切平面的定义.

定义11.6.5 设点P是曲面$\sum$上一点，Π为通过点P的一个平面，曲面$\sum$上的动点Q到点P 和平面Π的距离分别为d和h,若当Q在$\sum$上沿任意方式趋于P时，恒有$\frac{h}{d}\to 0$,则称平面Π为曲面$\sum$过点P的切平面，P称为切点.

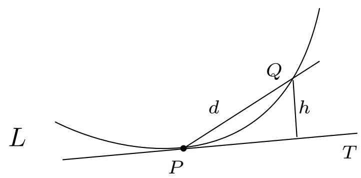

图11.6.4

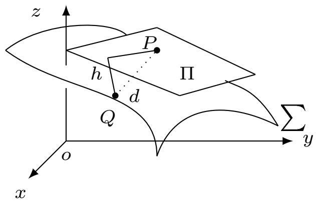

图11.6.5

定理11.6.1 曲面$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在不平行于z轴的切平面Π的充分必要条件是函数f在点$P_0(x_0,y_0)$处可微.

证明：($\Longleftarrow$) 若函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$处可微，则

$\Delta z=z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\circ(\rho)$

其中$z_0=f(x_0,y_0),\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,而过点$P(x_0,y_0,z_0)$的平面为

$Z-z_0=f_x(x_0,y_0)(X-x_0)+f_y(x_0,y_0)(Y-y_0)$

这里(X,Y,Z)为平面Π上的流动坐标，我们证明Π就是曲面过点P的切平面，设曲面上任意点$Q(x,y,z)$到平面Π的距离为h,则由点到平面的距离得

$$\begin{aligned} h &= \frac{|z-z_0-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}} \\ &= \frac{|\circ(\rho)|}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}} \end{aligned}$$

而点P到Q的距离为

$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}\geq\rho$

于是由$\frac{h}{d}\geq 0$及

$\frac{h}{d}<\frac{h}{\rho}=\frac{|\circ(\rho)|}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}\to 0(\rho\to 0)$

由定义Π是曲面$z=f(x,y)$过点$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面.

($\Longrightarrow$) 设曲面$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$有不平行于z轴的切平面：

$Z-z_0=A(X-x_0)+B(Y-y_0)$,设$Q(x,y,z)$为曲面$\sum$上任意点，则Q到切平面的距离为

$h=\frac{|z-z_0-A(x-x_0)-B(y-y_0)|}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$

令$z-z_0=\Delta z,x-x_0=\Delta x,y-y_0=\Delta y,\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,由切平面的定义，当$Q$沿任意方向趋于$P$时，有$\frac{h}{d}\to 0$,于是

$\frac{h}{d}=\frac{|z-z_0-A(x-x_0)-B(y-y_0)|}{d\sqrt{1+A^2+B^2}}<\frac{1}{2\sqrt{1+A^2+B^2}}$

$\Longrightarrow|\Delta z-A\Delta x-B\Delta y|<\frac{d}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}$

借助于不等式$|a|-|b|\leq|a-b|$得

$|\Delta z|-|A||\Delta x|-|B||\Delta y|<\frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}<\frac{1}{2}(\rho+|\Delta z|)$

$\Longrightarrow\frac{1}{2}|\Delta z|<|A||\Delta x|+|B||\Delta y|+\frac{1}{2}\rho$

$\frac{|\Delta z|}{\rho} < 2(|A|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |B|\frac{|\Delta y|}{\rho}) + 1 < 2(|A| + |B|) + 1$又

$$\begin{aligned} \frac{d}{\rho} &= \frac{\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}}{\rho} \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\rho}\right)^2} \\ &\leq 1 + \frac{|\Delta z|}{\rho} < 2(|A| + |B| + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{|\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)|}{\rho} \\ &= \frac{|\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)|}{\sqrt{1+A^2+B^2}d}\left(\frac{d}{\rho}\right)\sqrt{1+A^2+B^2} \\ &= \left(\frac{h}{d}\right)\left(\frac{d}{\rho}\right)\sqrt{1+A^2+B^2} \to 0(\rho \to 0), \end{aligned}$$

即$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \circ(\rho)$,即函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处可微.

设曲面由方程$F(x, y, z) = 0$给出，它在$P_0(x_0, y_0, z_0)$的某邻域满足隐函数存在定理(这里不妨假设$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$),则在$(x_0, y_0)$的某邻域存在唯一确定的隐函数$z = f(x, y)$使得$z_0 = f(x_0, y_0)$,且

$z_x = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, z_y = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$,由于在$P_0$附近$z = f(x, y)$与方程$F(x, y, z) = 0$表示了同一张曲面，从而该曲面在$P_0$处的切平面与法线的方程分别为

$$z - z_0 = -\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) - \frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0)$$

与

$$\frac{x-x_0}{\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y-y_0}{\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z-z_0}{1}$$

整理得

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

和

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$$

这与我们利用曲面上的曲线在公共切点处的切线共面，推导的结果是一致的.

习题11.6

1. 求曲线$\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= -t^2 \\ z &= t^3 \end{cases}$过点$(1, -1, 1)$的切线方程与法平面方程.

2.求曲线$\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= -t^2 \\ z &= t^3 \end{cases}$与平面$x + 2y + z = 4$平行的切线方程.

3. 求过曲面$z = 6 - x^2 - y^2$上一点$(1, 2, 1)$的切平面方程与过该点的法线方程.

4. 求过直线$\ell: \begin{cases} 3x - 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$且与曲面$2x^2 - 2y^2 + 2z = \frac{5}{8}$相切的切平面方程.

5.设直线$l: \begin{cases} x + y + b &= 0 \\ x + ay - z &= 3 \end{cases}$在平面$\pi$上，而平面$\pi$ 与曲面$z = x^2 + y^2$相切与点$(1, -2, 5)$,求a, b的值.

6.设f 为可微函数，证明：曲面$z=xf(\frac{y}{x})$上任一点处的切平面都过某一固定点.

7.设$\mathbf{f}(t)=\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\},\mathbf{g}(t)=\{g_1(t),g_2(t),g_3(t)\}$

$\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{u},\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)=\mathbf{v}$

证明：$\lim\limits_{t\to t_0}[\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)]=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

8. 下列各题中，$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$是空间中的质点M 的位置，求质点M在时刻t_0的速度向量和加速度向量以及在任意时刻的速率

(1)$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)=\{t+1,t^2-1,2t\},t_0=1;$

(2)$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)=\{2\cos t,3\sin t,4t\},t_0=\frac{\pi}{2};$

(3)$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)=\{2\ln(t+1),t^2,\frac{1}{2}t^2\},t_0=1;$

9.求椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面$x-y+2z=0$ 的切平面方程.

10.设$\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t)$ 是可导的向量值函数，证明：

(1)$\frac{d}{dt}\mathbf{u}\pm\mathbf{v}=\mathbf{u}'(t)\pm\mathbf{v}'(t)$

(2)$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

(3)$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

第七节方向导数与梯度

我们知道函数的变化率反映了函数变化的快慢程度，对于二元函数或多元函数其偏导数反映了函数在某点沿坐标轴方向的变化率. 以下我们用二元函数来引入方向导数的概念.

一、方向导数

定义11.7.1 设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域的全增量为

$\Delta z=f(P)-f(P_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$

令$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,连接点$P_0,P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$的直线$\ell$ 的方向向量为$\{\Delta x,\Delta y\}$,我们称极限值

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}$为函数在点$P_0$沿直线$\ell$ 的方向导数,记作

$\frac{\partial f}{\partial \ell}|_{P_0}$.

如果写出ℓ 的参数方程$x=x_0+t\cos\alpha,y=y_0+t\cos\beta$,其中$\cos\alpha,\cos\beta$ 是直线ℓ 的方向余弦，于是在P_0处沿ℓ 方向的方向导数可以写成

$\frac{\partial f}{\partial \ell}|_{P_0}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

从方向导数的定义可知，方向导数$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数$f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$处沿方向ℓ 的变化率，若函数$f(x,y)$在点P_0的偏导数存在，ℓ的方向向量为$\{1,0\}$,则

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)$$

若ℓ的方向向量为$\{0,1\}$,则

$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=f_y(x_0,y_0)$

反之，若ℓ的方向为$\{1,0\}$, $\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0)}$ 存在，则$\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$ 未必存在.例如，$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$O(0,0)$处沿$\ell:\{1,0\}$的方向导数$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=1$ 而偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(0,0)}$却不存在.

关于方向导数存在的充分条件，我们给出如下定理

定理11.7.1 若函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，则在P_0处，沿过该点任意方向ℓ的方向导数存在，且

$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$, **其中$\cos\alpha,\cos\beta$是$\ell$的方向余弦.**

证明: 因为函数可微，于是

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\circ(\rho)\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\end{aligned}$$

于是$\frac{\Delta z}{\rho}=f_x(x_0,y_0)\frac{\Delta x}{\rho}+f_y(x_0,y_0)\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\circ(\rho)}{\rho}$

注意到$\frac{\Delta x}{\rho}=\cos\alpha,\frac{\Delta y}{\rho}=\cos\beta$,且当$\rho\to 0$时，$\overleftarrow{l}$ 的方向余弦值不变，于是对上述等式两端取极限得

$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

函数可微是函数有方向导数的充分条件而非必要条件.例如，$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点由于偏导数不存在，所以不可微，但过原点沿任意方向的方向导数都存在.

例11.7.1 设$f(x,y)=xy$,求在点$(1,2)$ 处沿方向为$\overleftarrow{l}=\{\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\}$的方向导数.

解: 由于函数具有连续的偏导数于是可微，则方向导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=f'_x(1,2)\tfrac{\sqrt{3}}{2}+f'_y(1,2)\tfrac{1}{2}\\&=\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

注:对于三元函数$u=f(x,y,z)$,过空间一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$沿方向$\overleftarrow{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$的方向导数为

$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\overline{\rho}}$

其中$\overline{\rho}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$

或者$\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$

同样当函数$u=f(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$处可微，则沿方向

$\overleftarrow{\ell}$的方向导数

$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$,其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为$\ell$的方向余弦.

例11.7.2 求函数$f(x,y,z)=xy+yz+zx$在点$(1,1,2)$沿方向角分别为$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$的方向导数

解：$\overleftarrow{\ell}=\{\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\}=\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\}$

f可微分，且$f_x(1,1,2)=(y+z)\big|_{(1,1,2)}=3$

$f_y(1,1,2)=(x+z)\big|_{(1,1,2)}=3$

$f_z(1,1,2)=(y+x)\big|_{(1,1,2)}=2$

于是$\frac{\partial f}{\partial \ell}\big|_{(1,1,2)}=3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(5+3\sqrt{2})$

注:特别注意的是函数的方向导数不是向量，而是在某一点沿过该点的直线的变化率.

二、梯度

对于多元函数，前面我们讨论了函数沿着某一方向的变化率，即过某一点沿着不同的方向，函数的变化快慢有变化，这与一元函数不同，于是，自然会想到是否存在一个确定的方向，使得函数在该点处沿着此方向变化最快或最慢呢？我们以二元函数为例来讨论这个问题.

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，我们称向量$\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}$为函数在点$P_0$处的梯度,记作$\mathbf{grad}f$,即$\mathbf{grad}f(x_0,y_0)=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}$或$\nabla f(x_0,y_0)$.符号$\nabla$读作Nabla, 注意到$\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$,于是我们称$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$为（二维）向量微分算子.

注意到沿方向向量为$\{\cos\alpha,\cos\beta\}$的方向导数为

$\frac{\partial f}{\partial \ell}|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}=|\mathbf{gradf}|\cdot\cos\theta$

其中θ为梯度与方向向量ℓ的夹角.于是我们发现：函数在一点处沿着其梯度的方向变化率最大，沿着梯度的相反方向变化率最小.沿着梯度方向的方向导数等于$|\mathbf{grad}|$.

注:对于三元函数或n元函数我们同样可以定义梯度.例如$u=f(x,y,z),\mathbf{grad}u=\{f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z)\}$

容易验证梯度有如下运算律

设$\mathbf{grad}f=\{f_x,f_y\},\mathbf{grad}g=\{g_x,g_y\}$

1.$\mathbf{grad}(f\pm g)=\mathbf{grad}f\pm\mathbf{grad}g$

2.$\mathbf{grad}(fg)=g\mathbf{grad}f+f\mathbf{grad}g$

3.$\mathbf{grad}\frac{f}{g}=\frac{1}{g}\mathbf{grad}f-\frac{f}{g^2}\mathbf{grad}g$

例11.7.3 设函数$f(x,y)=x^2e^y$. 求一个单位向量$\vec{u}$，使得函数在点$(-2,0)$处沿该单位向量的方向变化最快.

解:注意到函数在一点处沿着该点的梯度方向变化最快，于是

$\mathbf{grad}f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$，在点$(-2,0)$处的梯度为$\mathbf{grad}f(-2,0)=-4\vec{i}+4\vec{j}$

$|\mathbf{grad}f(-2,0)|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

所求的单位向量为$\vec{u}=\dfrac{\mathbf{grad}f(-2,0)}{|\mathbf{grad}f(-2,0)|}=\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

习题11.7

1.求在给定点处沿给定方向的方向导数

(1).$f(x,y)=(1+xy)^{\frac{3}{2}},;P(3,1);\vec{u}=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

(2).$f(x,y)=\ln(1+x^2+y);P(0,0);\vec{u}=\{-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\}$

(3).$f(x,y,z)=4x^5y^2z^3;P(2,-1,1);\vec{u}=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\}$

(4).$f(x,y,z)=\ln(x^2+2y^2+3z^2);P(-1,2,4);\vec{u}=\{-\frac{3}{13},-\frac{4}{13},-\frac{12}{13}\}$

2.求指定点函数的梯度

(1).$f(x,y)=(x^2+xy)^3;P(1,2)$

(2).$f(x,y,z)=y\ln(x+y+z);P(-3,4,0)$

3.求一个单位向量，使得函数在给定点处沿该方向变化最快

(1).$f(x,y)=4x^3y^2;P(-1,1)$

(2). $f(x,y,z)=x^3z^2+y^3z+z-1;P(1,1,-1)$

4.已知二元函数$f(x,y)=\begin{cases}x+y+\frac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$求$f(x,y)$在点$(0,0)$处沿方向$\{\cos\alpha,\cos\beta\}$的方向导数.

5.设直线l是直线$\begin{cases}2x-z-3 &=0,\\ y-2z+4 &=0\end{cases}$在平面$x+y-z=5$上的投影，试求函数$f(x,y,z)=\cos^2 xy+\frac{y}{z^2}$在点$P(0,-1,1)$处沿直线$l$ 的方向导数.

6.求函数$u=x+y+z$在球面$x^2+y^2+z^2=1$上点(x_0,y_0,z_0)处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

7.设函数$u(x,y,z),v(x,y,z)$的各个偏导数都存在且连续，证明：

(1)$\nabla(cu)=c\nabla u$ (其中c 为常数);

(2)$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$;

(3)$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$;

(4)$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

第八节多元函数的极值及泰勒公式

一、多元函数的极值

通过讨论一元函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内函数的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$的符号，我们讨论了一元函数的极值，即当$\Delta y\geq 0$ 函数在x_0处有极小值，反之有极大值.如果Δy的正负号不确定，则函数$y=f(x)$在x_0处无极值. 同理我们可以定义多元函数的极值.

定义11.8.1 设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处函数的改变量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,若$\Delta z\geq 0$，则称函数在$P_0$处有极小值$f(P_0)$，反之称在$P_0$处有极大值$f(P_0)$，点$P_0$称为函数的极值点，若$\Delta z$的正负

号不确定，则函数在点P_0处无极值.

接下来的问题就是如何确定函数的极值点，从而确定极大值或极小值.

定理11.8.1,（极值存在的必要条件）设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有偏导数，且函数在该点处有极值，则$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$

证明: 因为函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处有极值，所以一元函数$z=f(x,y_0)$在点x_0处有极值.由一元函数极值存在的必要条件，$f_x(x_0,y_0)=0$,同理$f_y(x_0,y_0)=0$.

同一元函数一样，使得导数为零的点称为稳定点，于是求函数的极值点，首先要求出其稳定点和偏导数不存在的点，对于二元函数而言，方程组$\begin{cases} f_x(x,y) &=0 \\ f_y(x,y) &=0 \end{cases}$的解就是函数的稳定点，究竟稳定点是不是极值点，还要进一步判断.例如函数（双曲抛物面）$f(x,y)=x^2-y^2,f_x(x,y)=2x,f_y(x,y)=-2y$.显然$(0,0)$点是函数的稳定点，但点$(0,0)$却不是极值点.事实上，在点$(0,0)$的任意邻域，存在点$(x,0)(x\neq 0)$,使$f(x,0)=x^2>f(0,0)=0$; 也存在点$(0,y)(y\neq 0)$,使$f(0,y)=-y^2<f(0,0)=0$,即在$(0,0)$处函数改变量$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)$的符号不确定.那么什么样的稳定点才是极值点？即$P_0(x_0,y_0)$是函数$z=f(x,y)$的极值点的充分条件是什么？

定理11.8.2 设$P_0(x_0,y_0)$ 是函数$z=f(x,y)$的稳定点，且在点P_0的邻域内存在二阶连续偏导数.令$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0),\Delta=AC-B^2$

1)若$\Delta>0$,则$P_0(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$ 的极值点：

(i)$A>0$(或$C>0$) $P_0(x_0,y_0)$是极小值点.

(ii)$A<0$(或$C<0$) $P_0(x_0,y_0)$是极大值点.

2）若$\Delta<0$,则$P_0(x_0,y_0)$不是函数$f(x,y)$的极值点.

3)若$\Delta=0$该判别法不能判定，需要用其它方法判别.

例11.8.1 求函数$z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-3y &=0 \\ f_y(x,y)=3y^2-3x &=0. \end{cases}$

解得两个稳定点$(0,0)$与$(1,1)$,求二阶偏导数$f_{xx}=6x,f_{xy}=-3,f_{yy}=6y,[f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2=36xy-9$

在$(0,0)$点，$\Delta=-9<0$,所以无极值;

在$(1,1)$点，$\Delta=27>0$,且$A=6>0$,所以$(1,1)$是极小值点，且极小值为$f(1,1)=-1$

二、函数的最大值与最小值及其应用

同讨论一元函数一样，极值是一个局部概念，也就是说函数的极小值未必小于函数的极大值，对于多元连续函数如果在有界闭区域D上连续，一定有最大值和最小值，那么这个最大值和最小值如何确定

呢？我们首先求出函数$f(x,y)$在D 上的所有的极大值和极小值，还要求出函数$f(x,y)$在D的边界上的最大值和最小值，将它们放在一起进行比较，其中最大（小）者为$f(x,y)$在D 上的最大（小）值.一般来讲，求函数$f(x,y)$在D的边界上的最大（小）值是很困难的.但是，有很多实际问题，根据问题的实际意义，函数$f(x,y)$ 的最大（小）值必在区域D (D可以是无界区域)内某点P取到，又函数$f(x,y)$在D上有最大（小）值且稳定点在区域D 内部，那么函数$f(x,y)$必在这个稳定点P处取到最大（小）值.

例11.8.2求函数$f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ 在以$(0,0),(3,0)$和$(0,5)$为顶点的三角形区域D上的最大值与最小值.

解: $f'_x(x,y)=3y-6, f'_y(x,y)=3x-3$于是有唯一的稳定点$(1,2)$，且该点位于区域$D$的内部，而边界有三段

其一是直线$y=0$上从$(0,0)$到$(3,0)$ 的一段，将$y=0$代入函数得$f(x,0)=-6x+7, 0\leq x\leq 3$,因为$f'_x(x,0)=-6$，所以极值只能在点$(0,0)$ 和$(3,0)$处.

其二是直线$x=0$ 上从$(0,0)$到$(0,5)$ 的一段，将$x=0$ 代入函数得$f(0,y)=-3y+7, 0\leq y\leq 5$,同上函数也只能在点$(0,0)$和$(0,5)$处取得极值.

其三是连接$(3,0)$和$(0,5)$的线段$y=-\frac{5}{3}x+5, 0\leq x\leq 3$,代入函数得$\omega(x)=f(x,-\frac{5}{3}x+5)=-5x^2+14x-8, 0\leq x\leq 3$

因为$\omega'(x)=-10x+14$稳定点为$x=\frac{7}{5}$,则函数$f(x,y)$ 的极值点为$(\frac{7}{5},\frac{8}{3})$ 注意到$f_{xx}=f_{yy}=0, f_{xy}=3$该点不是极值点, 比较函数值$f(0,0)=7, f(3,0)=-11, f(0,5)=-8, f(\frac{7}{5},\frac{8}{3})=\frac{9}{5}$ 和$f(1,2)=1$, 则函数的最大值为$f(0,0)=7$,最小值为$f(3,0)=-11$.

例11.8.3 用钢板制造容积为V的无盖长方形水箱，问怎样选择水箱的长、宽、高才最省钢板.

解: 设水箱长、宽、高分别是x,y,z.所以$V=xyz$,于是$z=\frac{V}{xy}$.而水箱的表面积

$S=xy+\frac{V}{xy}(2x+2y)=xy+2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

S的定义域为$D=\{(x,y)|0<x<+\infty, 0<y<+\infty\}$

于是$S_x=y+2V\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$S_y=x+2V\left(-\frac{1}{y^2}\right)$

解方程组$\begin{cases} y-\frac{2V}{x^2} & =0, \\ x-\frac{2V}{y^2} & =0 \end{cases}$得区域$D$内唯一稳定点$(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$

二阶偏导数$S_{xx}=\frac{4V}{x^3}, S_{xy}=1, S_{yy}=\frac{4V}{y^3}, S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2=\frac{16V^2}{x^3y^3}-1$

$\Delta=\frac{4V}{2V}\frac{4V}{2V}-1=3>0, A=2>0$于是稳定点$(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$是极小值点，也是最小值点，于是当长、宽、高分别为$x=\sqrt[3]{2V}, y=\sqrt[3]{2V}, z=\frac{V}{\sqrt[3]{2V}\sqrt[3]{2V}}=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$ 所需钢板最省.

例11.8.4 在已知周长为$2p$的一切三角形中，求出面积为最大的三角形.

解: 设三角形的三边分别为x,y,z，面积为S.由海伦(Heron)公式$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, x+y+z=2p$

若令$X=p-x, Y=p-y, Z=p-z$于是，所讨论的问题可以转化成求三个正数$X\cdot Y\cdot Z$，在其和为常数p时，各取何值时乘积的值为最大，于是我们令$U=XY(p-X-Y)$,$U_X=pY-2XY-Y^2, U_Y=pX-2XY-X^2$解方程组$\begin{cases} pY-2XY-Y^2 &=0\\ pY-2XY-X^2 &=0\end{cases}$, 注意到$X,Y$为正数，所以稳定点$X=\frac{p}{3}, Y=\frac{p}{3}$,于是$Z=\frac{p}{3}$,那么所求的三角形为等边三角形，即边长$x=y=z=\frac{2}{3}p$时三角形的面积最大.

三*、泰勒公式

对于在某区间I上具有$n+1$ 阶导数的一元函数$y=f(x)$,我们可以将函数$f(x)$ 用多项式表示，其误差我们也可以用简单的形式表示出来，即$\forall x,x_0\in I, f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 其中$\xi$介于$x$与$x_0$ 之间.自然地想到多元函数是否可以有相应的表示形式？以下我们以二元函数为例来讨论这个问题.

定理11.8.3 设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(P_0)$内具有直到$n+1$阶连续偏导数,对于$U(P_0)$内任意一点(x_0+h,y_0+k),则有

$$\begin{aligned}
& f(x_0+h,y_0+k)\\
= & f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\\
& \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\\
& \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\quad (0<\theta<1)
\end{aligned}$$

其中记号$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$ **表示**$hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$.

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$ 表示$h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0,y_0)$,

一般的, $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)=\sum\limits_{j=0}^{n}C_n^jh^jk^{n-j}\frac{\partial^n f}{\partial x^j\partial y^{n-j}}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

证明: 我们引入函数$\Phi(t)=f(x_0+ht,y_0+kt)(0\le t\le 1)$ 在$[0,1]$ 区间上对一元函数$\Phi(t)$利用泰勒公式.

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= hf_x(x_0+ht,y_0+kt)+kf_y(x_0+ht,y_0+kt)\\
&= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+ht,y_0+kt),\\
\Phi''(t) &= h^2f_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)+\\
& k^2f_{yy}(x_0+ht,y_0+kt)\\
&= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+ht,y_0+kt),\\
\cdots&\cdots\cdots\\
\Phi^{(n+1)}(t) &= \sum_{j=0}^{n+1}C_{n+1}^jh^jk^{n+1-j}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^j\partial y^{n+1-j}}\Big|_{(x_0+ht,y_0+kt)}\\
&= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+ht,y_0+kt).
\end{aligned}$$

利用一元函数的麦克劳林公式，得

$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta)(0<\theta<1).$

将$\Phi(0)=f(x_0,y_0),\Phi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$及上面求得的$\Phi(t)$直到$n$阶导数在$t=0$的值，以及$\Phi^{(n+1)}(t)$在$t=\theta$ 的值代入上式，即得二元函数的泰勒公式

$$\begin{aligned} & f(x_0+h,y_0+k) \\ = \quad & f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+ \\ & \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+ \\ & \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1) \end{aligned}$$

其中余项$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)(0<\theta<1)$称为拉格朗日余项，注意到直到$n+1$阶的各阶偏导数连续，所以在邻域$U(P_0)$内它们的绝对值都不超过正常数$M$.于是有如下余项估计，即，

$$\begin{aligned} |R_n| & \le \frac{M}{(n+1)!}(|h|+|k|)^{n+1}=\frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}\left(\frac{|h|}{\rho}+\frac{|k|}{\rho}\right)^{n+1} \\ & \le \frac{M}{(n+1)!}(\cos\alpha+\sin\alpha)^{n+1}\rho^{n+1} \\ & \le \frac{M}{(n+1)!}(\sqrt{2})^{n+1}\rho^{n+1} \end{aligned},$$

其中$\rho=\sqrt{h^2+k^2},\cos\alpha=\frac{|h|}{\rho},\sin\alpha=\frac{|k|}{\rho}$

当$\rho\to 0$时，$R_n=\circ(\rho^n)$

当$n=0$时，我们有二元函数的拉格朗日公式

$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

由此式可知当函数$f(x,y)$ 的偏导数$f_x(x,y),f_y(x,y)$在某一区域内都恒等于零，则函数$f(x,y)$在该区域内为一常数.

四*、极值充分条件的证明

以下证明定理11.8.2，注意到$P_0(x_0,y_0)$是稳定点所以在P_0的某邻域，由泰勒公式

$$\begin{aligned} \Delta z & =f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) \\ & =\frac{1}{2}[h^2f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+2hkf_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+ \\ & \quad k^2f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)](0<\theta<1). \end{aligned}$$

注意到二阶偏导数在$P_0(x_0,y_0)$处连续，当$h\to 0,k\to 0$时，有

$f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{xx}(x_0,y_0)+\alpha=A+\alpha,\alpha\to 0$

$f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{xy}(x_0,y_0)+\alpha=B+\beta,\beta\to 0$

$f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{yy}(x_0,y_0)+\gamma=C+\gamma,\gamma\to 0$

于是$\Delta z=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2)$,注意到

$\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2$是比$\rho^2$高阶的无穷小，所以$\Delta z$ 的正负号由第一项$Ah^2+2Bhk+Ck^2$的正负号确定，对于二次型

$Ah^2+2Bhk+Ck^2=(h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$，若$AC-B^2>0$，则该二次型是一个正定二次型或负定二次型，即

当$A<0$,我们有$\Delta z<0$，即$P_0(x_0,y_0)$ 是极大值点；

当$A>0$,我们有$\Delta>0$，即$P_0(x_0,y_0)$ 是极小值点；

当$AC-B^2<0$，该二次型是一个不定二次型，于是Δz 不能保持正负号，那么$P_0(x_0,y_0)$不是极值点.

五、条件极值

1.条件极值的概念

以上我们讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外并无其它约束条件，所以称为无条件极值.但在实际问题中，有时遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题.例如我们前面讨论的三个正数的和为常数$x+y+z=C,x>0,y>0,z>0$，则三个正数何时乘积最大$V=xyz$，就是一个条件极值问题.这样对自变量有附加条件的极值称为条件极值.在实际问题中，我们有时可以将条件极值化为无条件极值.例如我们前面讨论上述问题就采用了化条件极值为无条件极值$V=xy(C-x-y)$.

但在许多情况下，将条件极值化作无条件极值并不简单甚至可能出现错误，有一种直接寻求条件极值的方法，通常称为拉格朗日乘数法.

2.条件极值的必要条件

求函数$z=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值，若函数在$P_0(x_0,y_0)$处取得极值，则$\varphi(x_0,y_0)=0$,其次我们假定在P_0的某邻域具有一阶连续偏导数，且$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$.由隐函数存在定理，方程$\varphi(x,y)=0$可以确定一个具有连续导数的函数$y=\psi(x)$,使得$z=f(x,\psi(x))$,于是由极值存在的必要条件$z'(x_0)=0$,即

$\frac{dz}{dx}|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}=0$

由隐函数求导法则$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$

代入上式得$f_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)=0$即

$\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}\cdot\{\varphi_y(x_0,y_0),-\varphi_x(x_0,y_0)\}=0$

由此可见向量$\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}$与向量$\{\varphi_y(x_0,y_0),-\varphi_x(x_0,y_0)\}$ 正交，注意到向量$\{\varphi_x(x_0,y_0),\varphi_y(x_0,y_0)\}$也与向量$\{\varphi_y(x_0,y_0),-\varphi_x(x_0,y_0)\}$ 正交，即向量$\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}$与向量$\{\varphi_x(x_0,y_0),\varphi_y(x_0,y_0)\}$线性相关，即存在实数$\lambda$ 使得

$\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}+\lambda\{\varphi_x(x_0,y_0),\varphi_y(x_0,y_0)\}=0$

即$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0) & =0 \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0) & =0 \end{cases}$

3.拉格朗日乘数法

由以上讨论可见，函数$z=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的条件极值点满足方程组：

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y) &= 0, \\ \varphi(x,y) &= 0. \end{cases}$$

所谓拉格朗日乘数法求函数$z=f(x,y)$ 在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的条件极值步骤如下：先构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,对这样一个三元函数（其中$\lambda$ 称为参数)求无条件极值，即求三元方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y) &= 0, \\ \varphi(x,y) &= 0. \end{cases}$$的解得到极值点.

这种方法可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形.例如，要求函数$u=f(x,y,z,t)$在附加条件$\varphi(x,y,z,t)=0,\psi(x,y,z,t)=0$下的极值，可以先作拉格朗日函数

$L(x,y,z,t,\lambda,\mu)=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\psi(x,y,z,t)$,对这样一个六元函数求无条件极值，即对六元方程分别对每个变量求偏导数，并使之为零解得稳定点，然后求得可能的极值点.

例11.8.5 在椭圆$x^2+4y^2=4$上求一点，使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短.

解: 设$P(x,y)$为椭圆$x^2+4y^2=4$上任意一点，则点P到直线$2x+3y-6=0$的距离为

$d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$

因为函数d 的最小值点也是d^2的最小值点，于是求函数$(2x+3y-6)^2$ 的最小值点，这样所讨论的问题转化成目标函数$(2x+3y-6)^2$ 在约束条件$x^2+4y^2=4$ 下的最小值点.我们构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$,注意到$L_x=4(2x+3y-6)+2\lambda x, L_y=6(2x+3y-6)+8\lambda y, L_\lambda=x^2+4y^2-4$

由拉格朗日乘数法,令$L_x=0,L_y=0,L_\lambda=0$解方程组$\begin{cases} 4(2x+3y-6)+2\lambda x &= 0, \\ 6(2x+3y-6)+8\lambda y &= 0, \\ x^2+4y^2 &= 4. \end{cases}$ 解之得$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5};x_2=-\frac{8}{5},y_2=-\frac{3}{5}$于是$d\big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},d\big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}$

于是所求的点为$(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$

例11.8.6 求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内的切平面，使之与三坐标面所围成的四面体体积最小.

解: 设切点为$M(u,v,w)$,于是切平面的法向量为$\{\frac{u}{a^2},\frac{v}{b^2},\frac{w}{c^2}\}$

于是切平面方程为$\frac{u}{a^2}(x-u)+\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{w}{c^2}(z-w)=0$,即$\frac{u}{a^2}x+\frac{v}{b^2}y+\frac{w}{c^2}z=1$

注意到切点在第一卦限，所以$u>0,v>0,w>0$，于是切平面与坐标面所围立方体的体积$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{u}\cdot\frac{b^2}{v}\cdot\frac{c^2}{w}=\frac{a^2b^2c^2}{6uvw}$,注意到$V=\frac{a^2b^2c^2}{6uvw}$的极小值点与函数$R(u,v,w)=uvw$的极大值点相同,于是问题转化成求函数$R(u,v,w)=uvw$ 在约束条件$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$ 下的极值点. 构造拉格朗日函数$L(u,v,w,\lambda)=$

$uvw+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}-1\right)$ 注意到$L_u=vw+\lambda\frac{2u}{a^2},L_v=uw+\lambda\frac{2v}{b^2},L_w=uv+\lambda\frac{2w}{c^2},L_\lambda=\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}-1$

令$L_u=0,L_v=0,L_w=0,L_\lambda=0$,即解方程组$\begin{cases}vw+\lambda\frac{2u}{a^2} & =0,\\ uw+\lambda\frac{2v}{b^2} & =0,\\ uv+\lambda\frac{2w}{c^2} & =0,\\ \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}-1 & =0\end{cases}$ 得到$u=\frac{a}{\sqrt{3}},v=\frac{b}{\sqrt{3}},w=\frac{c}{\sqrt{3}}$这是唯一的极值点，注意到实际情况最小体积一定存在，所以最小值在这个可能的极值点达到.最小体积$V_{min}=\frac{a^2b^2c^2 3\sqrt{3}}{6abc}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$

例11.8.7求函数$f(x,y,z)=x^2y^2z^2$在约束条件$x^2+y^2+z^2=c^2$下的条件极值

建立目标函数$F(x,y,z,\lambda)=x^2y^2z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-c^2)$

$F_x=2xy^2z^2+2\lambda x,F_y=2yx^2z^2+2\lambda y,F_z=2zx^2y^2+2\lambda z,F_\lambda=x^2+y^2+z^2-c^2$

令$F_x=0,F_y=0,F_z=0,F_\lambda=0$

得稳定点：$x=y=z=0$显然这是$c=0$的极端情况

另稳定点满足$x^2=y^2=z^2,\lambda=-x^4,$

于是稳定点为$x=y=z=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}$

最大值为$f(\pm\frac{c}{\sqrt{3}},\pm\frac{c}{\sqrt{3}},\pm\frac{c}{\sqrt{3}})=\frac{c^6}{3^3}$

因此我们也得到$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\frac{c^2}{3}=\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$

这正是三个非负实数的几何平均值不大于其算数平均值.

注：利用此方法，我们可以n个非负实数的几何平均值不大于其算数平均值.

例11.8.8从定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到曲面$F(x,y,z)=0$，沿什么样的路径路程最短.

解：设定点到曲面上的距离为$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,

于是问题可以转化成函数$f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$在约束条件$F(x,y,z)=0$下的条件极值

目标函数为$L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda F(x,y,z)$

$L_x=2(x-x_0)+\lambda F_x,L_y=2(y-y_0)+\lambda F_y,F_z=2(z-z_0)+\lambda F_z,F(x,y,z)=0$

令$L_x=0,L_y=0,L_z=0,L_\lambda=0$得

$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$

即沿着曲面的法线法线到曲面的距离最短.

习题11.8

1.求函数$f(x,y)=x^2+xy-2y-2x+1$的极值点.

2.求函数$f(x,y)=xy+\frac{2}{x}+\frac{4}{y}$的极值.

3.求函数$f(x,y)=xy-x-3y$在以$(0,0),(0,4),(5,0)$ 为顶点的三角形区域上的最大值与最小值.

4.求函数$f(x,y)=xy^2$在第一象限的圆形区域$D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,x^2+y^2\leq 1\}$ 上的最大值与最小值.

5. 求函数$f(x,y)=xy$在圆周$x^2+y^2=1$ 上的最大值.

6.制作一个容积为32 立方米的无盖长方体盒子，如何设计长方体的三条棱长，才能使得用料最省.

7. 在平面$x+2y+z=1$上求距离原点最近的点及其距离.

第十一章总练习题

1. 设函数$f(x,y)=e^x\ln y$,求$f(\ln y,e^x),f(r+s,rs)$

2. 讨论函数$f(x,y)=\frac{x^4-x+y-x^3y}{x-y}$在原点处是否有极限.

3. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在原点是否连续.

4.设$z=f(x,y)$

(1) 用极限表示$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$

(2)解释偏导数$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 关于曲面$z=f(x,y)$ 的几何含义.

5. 分别求曲线$\begin{cases}z &=5-4x^2-y^2,\\ x &=1.\end{cases}$与$\begin{cases}z &=5-4x^2-y^2,\\ y &=-2.\end{cases}$在点$(1,-2,-3)$ 处切线的斜率.

6.验证下列式子

(1)$w=\tan(x^2+y^2)+x\sqrt{y}$, 则$w_{xy}=w_{yx}$

(2)$w=\ln(3x-3y)+\cos(x+y)$,则$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

(3)$F(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z$,则$F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}=0$

7. 设点$A(1,0),B(1.1,-0.1)$,求函数$w=x^2y-2xy+y^2x$ 从A 到B 函数的改变量Δw和函数在点A 处的全微分.

8.求函数$f(x,y)=\sin(xy)$在点$(\frac{1}{3},\pi)$的局部线性近似值.

9.设$z=f(x,y)$ 是可微函数，且$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=4,\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=2$ 如果$x=x(t),y=y(t)$是t 的可微函数，且$x(0)=1,y(0)=2,x'(0)=-\frac{1}{2},z'(0)=2$,求$y'(0)$

10.利用如下关系式求$\frac{dy}{dx}$

(1) $3x^2-5xy+\tan xy=0$,

(2)$x\ln y+\sin(x-y)=\pi$

11. 给定$f(x,y)=0$求$\frac{d^2y}{dx^2}$

12. 求以下函数的极值与极值点

(1)$f(x,y)=x^2+3xy+3y^2-6x+3y$

(2) $f(x,y)=4x^2-12xy+9y^2$

13. 在约束条件$4x^2+y^2=8$下求函数$z=x^2y^2$的条件极值.

自测题

一、填空题

1.设$f(x,y)=xy+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$,则$f_x'(x,1)=($ $)$

2.设$u=\sqrt[x]{\frac{y}{z}}$,则$du\left.\right|_{(1,1,1)}=($ $)$

3.已知$yz+zx+xy=1$,确定的$z=z(x,y)$，则$dz=$

4.设$f(x,y)=4x^2-12xy+9y^2$,则$\mathbf{grad}f=$

二、选择题

1.函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的解析性质，正确的命题是

（A) 连续是偏导数存在的必要条件

（B)偏导数存在时连续的充分条件

（C) 偏导数存在是可微的充分且必要条件

(D)可微是连续且偏导数存在的充分条件

2.设$u=u(x,y)$可微，且当$y=x^2$ 时，有$u(x,y)=1$ 及$\frac{\partial u}{\partial x}=x$,则当$y=x^2(x\neq 0)$时，$\frac{\partial u}{\partial y}=($ $)$,

$A.\frac{1}{2}$ $,B.-\frac{1}{2},$ $C.0$ $D.1$

3. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq 0\\ x, & xy=0\end{cases}$, 则$f_x'(0,1)=($ $)$

$A.0,$ $B.\surd 1,$ $C.$ $2D.$ 不存在

4.利用变量替换$u=x,v=\frac{y}{x}$ 可将方程$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为新的方程( )

$A\surd.u\frac{\partial z}{\partial u}=z,$ $B.v\frac{\partial z}{\partial v}=z,$ $C.u\frac{\partial z}{\partial v}=z,$ $D.v\frac{\partial z}{\partial u}=z$

5.设由方程$F(cx-az,cy-bz)=0$确定了函数$z=f(x,y),F(u,v)$具有连续偏导数，则$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$
( )

$A.a,$ $B.b,$ $C.c,$ $D.1$

6.空间曲线$\Gamma:\begin{cases}x & =a\sin^2 t\\ y & =a\sin t\cos t\\ z & =c\cos^2 t\end{cases}$在点$t=\frac{\pi}{4}$处的法平面必( )

$A.$平行于x 轴$B.$平行于y 轴,$C.$平行于z 轴,$D.$与三个坐标均相交

7.曲线$\Gamma:\begin{cases}x & =a\cos\tau\cos t\\ y & =a\sin\tau\cos t\\ z & =a\sin t\end{cases}$$(a,\tau)$为常数

$A.$一定过原点$B.$一定不通过原点,$C.$是否通过原点与t_0 有关,$D.$是否通过原点与τ值有关

8.设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域有定义，且$f_x(0,0)=3,f_y(0,0)=-1$，则有

$A.dz|_{(0,0)}=3dx-dy$

B 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的一个法向量为$(3,-1,1)$

C 曲线$\begin{cases} z &= f(x,y) \\ y &= 0 \end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(1,0,3)$

D 曲线$\begin{cases} z &= f(x,y) \\ y &= 0 \end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(3,0,1)$

三、

1.证明函数$f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$ 在$(0,0)$点极限不存在.

2.设$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$,求$f_x(0,0)$及$f_y(0,0)$

3.设$z=(1+xy)^{x+y}$,求$z_y(2,1)$

4.设$z=f(xy,e^x)$,其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

5.求由方程$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$所确定的函数$z=f(x,y)$的全微分$dz$.

6. 设函数$z=z(x,y)$ 由方程$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$所确定，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

7.求曲面$z=x^2+y^2$的切平面，使切平面平行于平面$x-y+2z=0$

8.求抛物线$y=x^2$与直线$x+y+2=0$之间的最短距离d

9.设$e_l=(\cos\theta,\sin\theta)$, 求函数$f(x,y)=x^2-xy+y^2$在点$(1,1)$ 沿方向l 的方向导数，并分别确定角θ,使这导数(1)有最大值,（2）有最小值,（3）等于0

10，在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小.求这切平面的切点，并求此最小体积.

11. 求$u=e^{xy^2z}$在点$(2,1,-1)$处沿着从点$(2,1,-1)$到点$(3,2,0)$的方向的方向导数

12. 设$\mu=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中f 具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial\mu}{\partial x},\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}$

13. 设$z=(1+x)^{2y+1}$, 求dz

14. 求过点$(1,-1,0)$且与直线$\begin{cases} x+y+3z &= 0 \\ x-y-z &= 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程

15. 在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点M, 使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\mathbf{l}\{1,-1,0\}$的方向导数最大

16. 设函数$f(x,y)$可微，$\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y),f(0,\frac{\pi}{2})=1$,且满足：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$ 求$f(x,y)$