第四节 重积分的应用

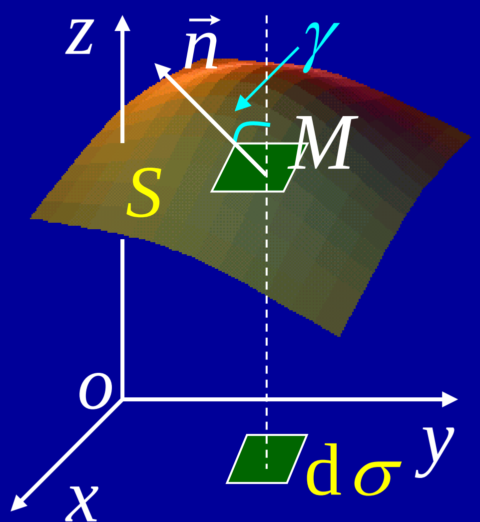
一、曲面的面积

二、物体的质心

三、转动惯量

四、引力

一、曲面的面积



1. 曲面方程为$z=f(x,y)$的情形

设**单值曲面**S的方程为$z=f(x,y)$，

$(x,y)\in D$, D为其xOy面上的投影区域.

函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数,

求曲面S的面积.

微元法：（1）在闭区域D上任取一直径很小的闭区域

$d\sigma$（同时表示面积）

（2）在$d\sigma$上任取一点$P(x,y)$, 对应的曲面S上有

一点$M\left(x,y,f(x,y)\right)$. 点M处曲面S的切平面设为T.

(3) 以$d\sigma$为准线作母线平行于z轴的柱面.

此柱面在曲面S上截出一小片曲面，在切平面上截下一小片平面，面积为dS.

(4) 近似： $d\sigma$直径很小，用切平面上的小平面面积dS近似代替小曲面片的面积.

dS 称为曲面S的面积元素. 求 dS ?

设点M处曲面S的法线(指向朝上)与z轴所成的角为 γ,

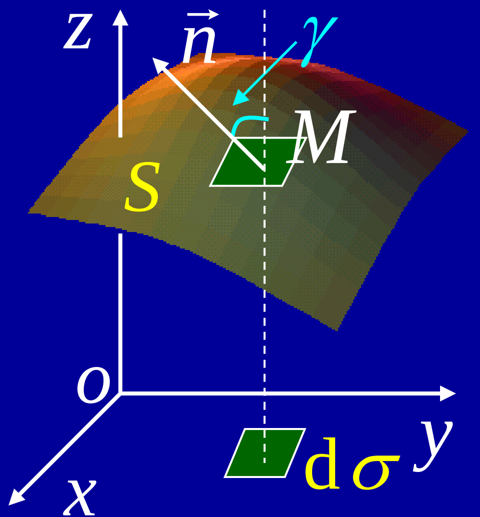
$d\sigma$是dS在xOy面上的投影，则

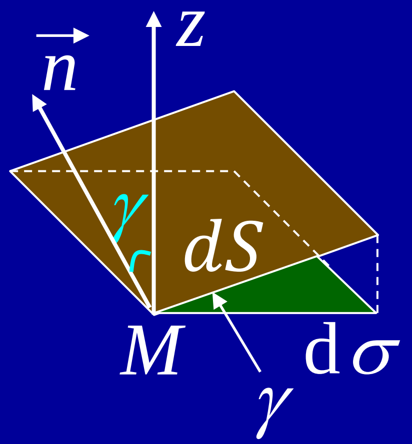
$$d\sigma = \cos\gamma \cdot dS$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$

$$dS = \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma$$

(称为**曲面面积元素**)





(面积 S 可看成曲面上各点$M(x,y,z)$处小切平面的面积 dS 无限积累而成.)

故**曲面面积公式**

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

即

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若光滑单值曲面方程为 $x=g(y,z)\,,(y,z)\in D_{yz}$,则有

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑单值曲面方程为 $y=h(z,x)\,,(z,x)\in D_{zx}$，则有

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

若光滑单值曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$，且 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

$$\therefore\quad A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2+F_z{}^2}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例1. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

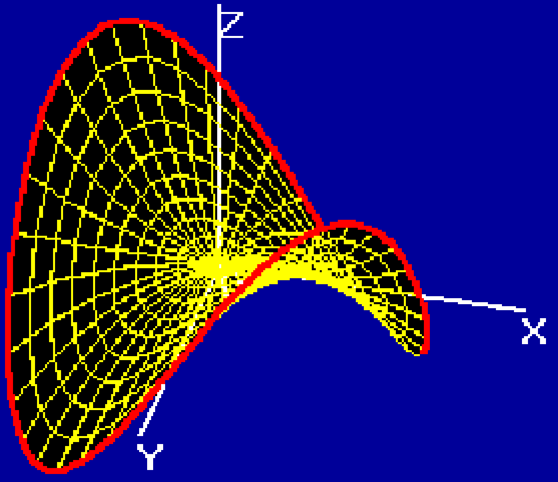
解: 曲面在 xoy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(1 + R^2)^{3/2} - 1)]$$

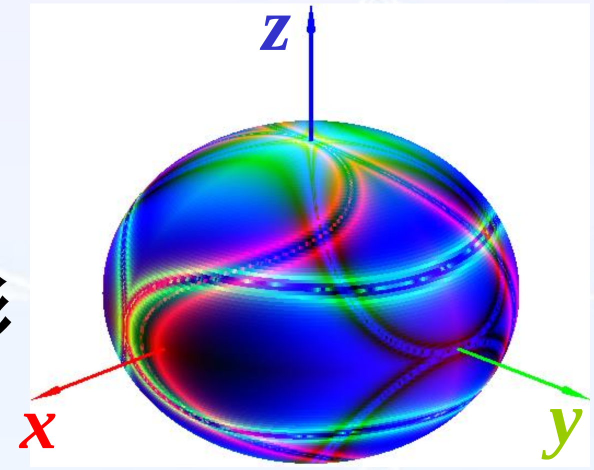


例2 求半径为 R 的球的表面积.

解法二 用直角坐标方程

上半球面的直角坐标方程为

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，它在 xOy 面上的投影



区域 D：$x^2+y^2\le R^2$.

由 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

得 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$ 在闭区域D上无界，

不能直接用曲面面积公式. 先取积分区域

$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le b^2\}(0<b<R)$ **算出相应于** $\boldsymbol{D_1}$

上的球面面积 $\boldsymbol{A_1}$, 再求 $\lim\limits_{b\to R}A_1$，得到半球面面积.

所以表面积为

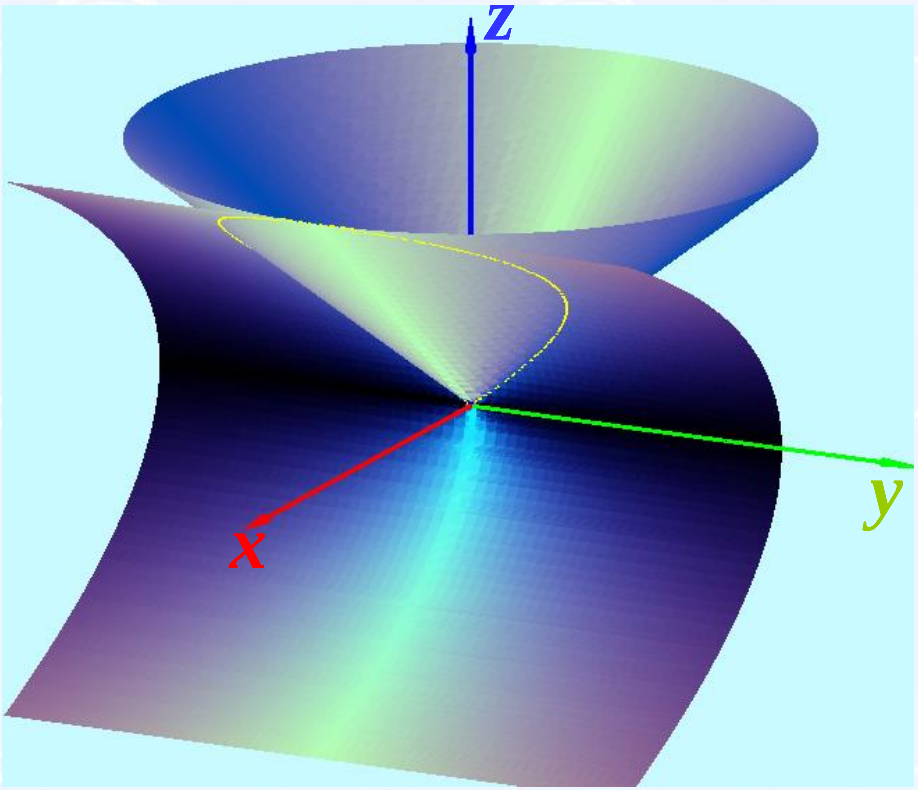
$$A_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

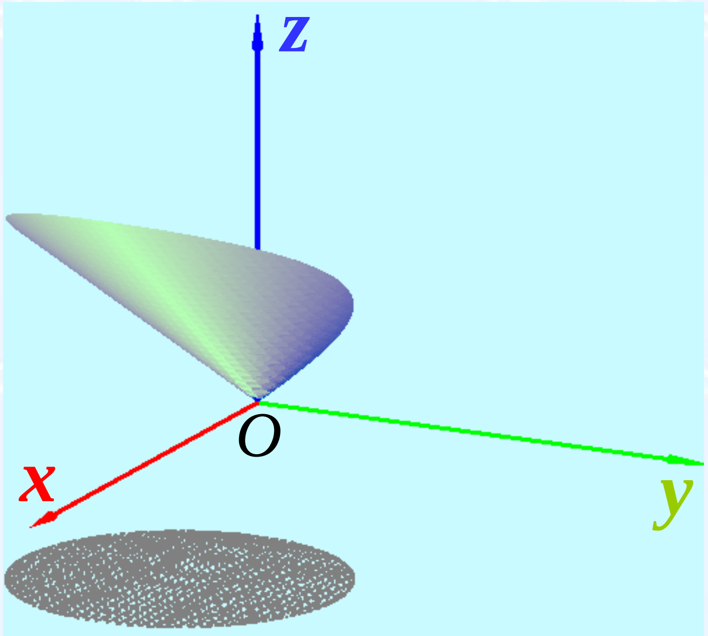
$$=\iint\limits_{D_1}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi R\left(R-\sqrt{R^2-b^2}\right)$$

所以，$\lim\limits_{b\to R}A_1=2\pi R^2$. **故整个球面面积为** $4\pi R^2$.

例3 计算锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 截下部分的面积.

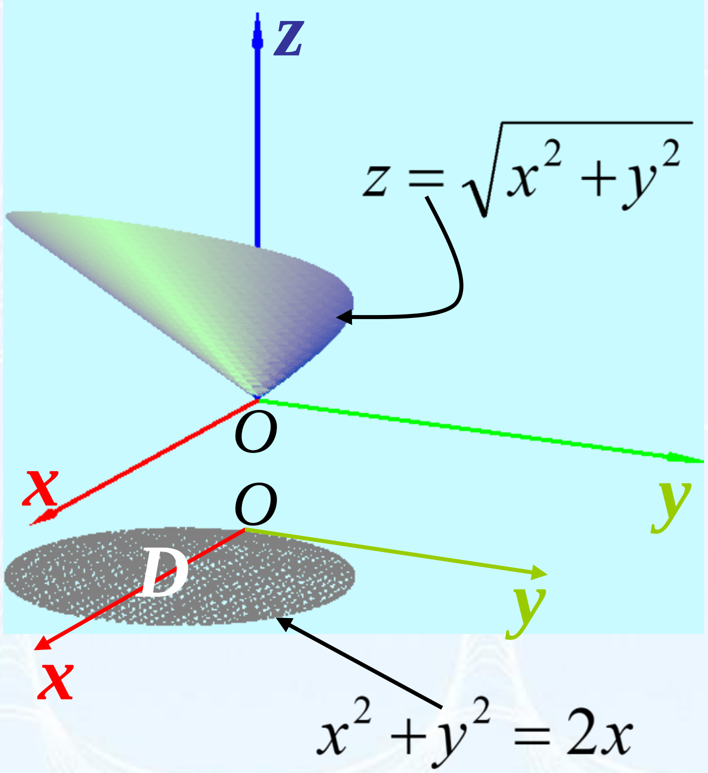




曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，**它在** xOy**面上的投影区域为**

$D: x^2+y^2 \le 2x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$



所以，所求面积为

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi .$$

二、物体的质心

设空间有n个质点, 分别位于(x_k, y_k, z_k), 其质量分别为$m_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, 由力学知, 该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}$$

设物体占有空间域Ω, 有连续密度函数$\rho(x,y,z)$, 则采用 "大化小, 常代变, 近似和, 取极限" 可导出其质心公式, 即:

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k, η_k, ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k, η_k, ζ_k) 的质点, 此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$,即得

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $$\bar{y} = \frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时, 则得形心坐标:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$$ ($V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为$\Omega$的体积)

若物体为占有xoy面上区域D的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,则它的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{M_x}{M}$$

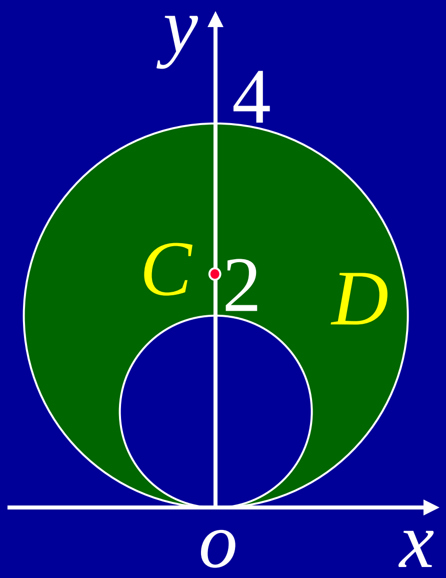
M_x — 对x轴的静矩

M_y — 对y轴的静矩

$\rho =$常数时, 得D的形心坐标:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$$ (A为D的面积)

例4. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.



解: 利用对称性可知 $\bar{x}=0$

而

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

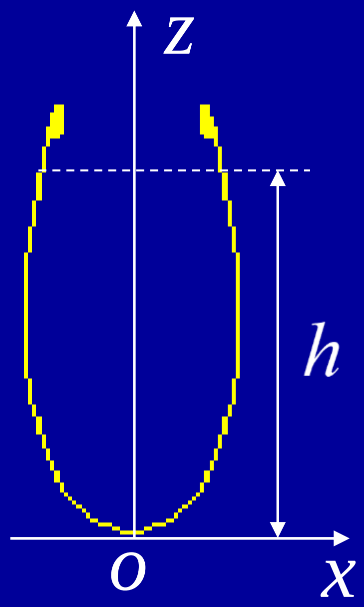
$$=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{7}{3}$$

质心为$(0,\frac{7}{3})$

例5. 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2, 0 \le z < 3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液, 不计炉体的自重, 求它的质心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上, 故其坐标为

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

采用柱坐标, 则炉壁方程为 $9r^2 = z(3-z)^2$, 因此

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9} z(3-z)^2 \mathrm{d}z$$

$$V=\frac{\pi}{9}h^3\left(\frac{9}{2}-2h+\frac{1}{4}h^2\right)$$

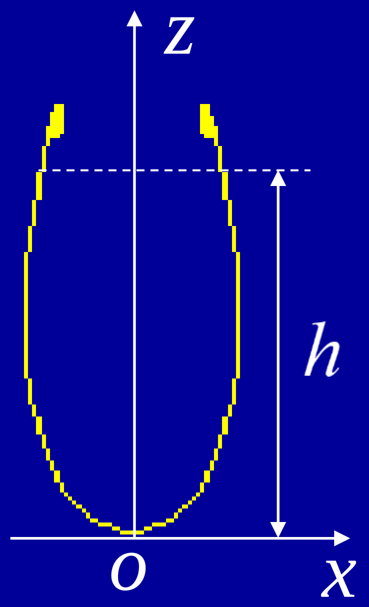
$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^h \frac{\pi}{9}z^2(3-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{9}h^3\left(3-\frac{3}{2}h+\frac{1}{5}h^2\right)$$

$$\therefore\quad \bar{z}=h\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$

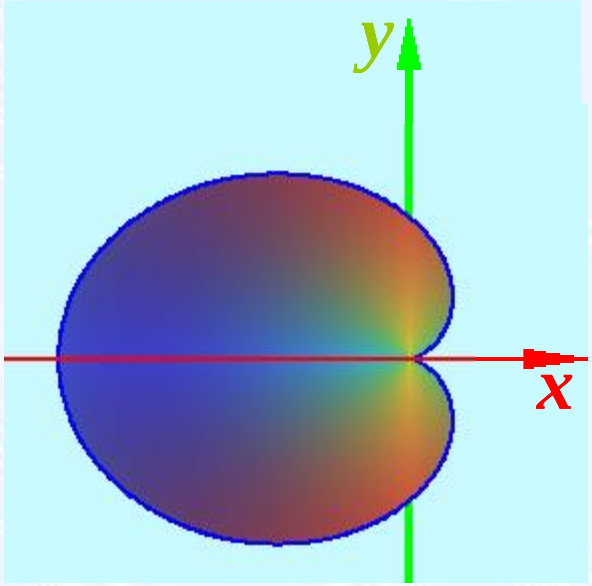


例6. 求心脏线 $\rho = 1-\cos\theta$ 所围区域的形心.

解 由对称性可知 $\bar{y}=0$.

心脏线所围区域的面积 A 为

$$A = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{1-\cos\theta} \rho \mathrm{d}\rho = \frac{3}{2}\pi .$$



$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{A}\iint_D \rho\cos\theta \mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{1-\cos\theta} \rho^2 \cos\theta \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{1}{3A}\int_0^{2\pi} \cos\theta (1-\cos\theta)^3 \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3A}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1-\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3A}\int_0^{2\pi}(\cos\theta-3\cos^2\theta+3\cos^3\theta-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{\theta=\varphi+\pi}{=}\quad\frac{1}{3A}\int_{-\pi}^{\pi}(-\cos\varphi-3\cos^2\varphi-3\cos^3\varphi-\cos^4\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{2}{3A}\int_0^{\pi}(\cos\varphi+3\cos^2\varphi+3\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$\overset{\varphi=t+\frac{\pi}{2}}{=}\quad-\frac{2}{3A}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin t+3\sin^2 t-3\sin^3 t+\sin^4 t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{4}{3A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2 t+\sin^4 t)\mathrm{d}t\quad=-\frac{5}{6}.$$

三、转动惯量

讨论平面薄片的转动惯量

（1）质点系转动惯量

设在xOy平面上有n个质点，分别位于点(x_i, y_i) $(i = 1,2 \ldots, n)$处，质量分别为$m_1, m_2, \ldots, m_n$.

该质点系对x与y轴的转动惯量分别为：

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$$

(2) 物体是平面薄片

占有xOy平面闭区域D，连续面密度函数

$\mu(x,y),(x,y)\in D$，求该薄片对x与y轴的转动惯量.

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和,

故连续体的转动惯量可用积分计算.

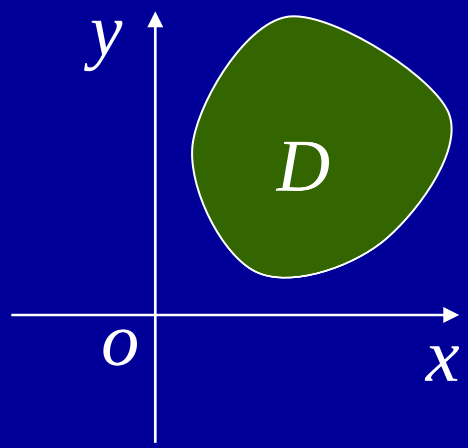
微元法： 在闭区域D上任取一直径很小的闭区域$d\sigma$（同时表示面积），(x,y)是$d\sigma$上的一个点，$d\sigma$质量可认为集中在(x,y), 近似为 $\mu(x,y)\,d\sigma$

故薄片对x轴及y轴的转动惯量元素：

$$dI_x = y^2\mu(x,y)\,d\sigma \qquad dI_y = x^2\mu(x,y)\,d\sigma$$

薄片对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对原点的转动惯量

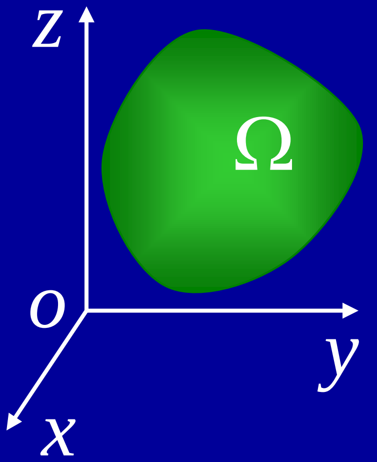
$$I_o = \iint_D (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设物体占有空间区域 Ω , 有连续分布的密度函数

$\rho(x, y, z)$. 该物体位于(x, y, z) 处的微元

对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}v$$



因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

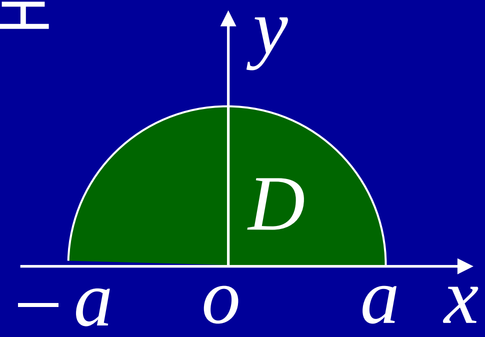
对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_o = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例7. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x=\iint_D \mu\, y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

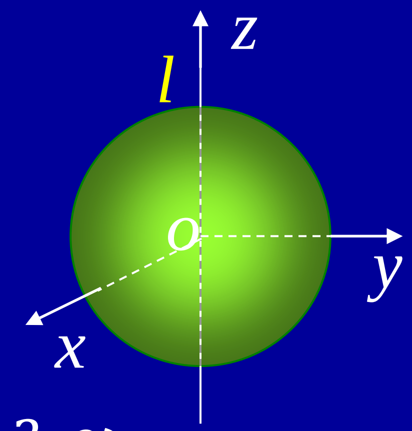
$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a} r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\mu\,a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi\,a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}M\,a^2$$

例8. 求均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2$, 则



$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{(用球坐标)}$$

$$= \rho \iiint_\Omega \underline{(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)} \cdot r^2\sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}a^2 M$$

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

四、引力

研究空间一物体对物体外一点$P_0(x_0, y_0, z_0)$处单位质量的质点的引力问题.

设物体占有空间有界闭区域Ω,其密度函数$\rho(x, y, z)$连续．在物体内任取一直径很小的闭区域dv (同时表示该小区域的体积)，设(x, y, z)为这一小块中的一点.把这一小块物体的质量$\rho(x, y, z)\, dv$近似看作集中在点(x, y, z)处．从而可得这一小块物体对位于P_0处的单位质量的质点的引力近似值：

引力元素$d\vec{F}=(dF_x, dF_y, dF_z)$在三个坐标轴上的分量为：

$$\mathrm{d}\,F_x = G\frac{\rho\ (x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}\,v\ ,$$

$$\mathrm{d}\,F_y = G\frac{\rho\ (x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}\,v\ ,$$

$$\mathrm{d}\,F_z = G\frac{\rho\ (x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}\,v\ ,$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\ ,$$

G 为引力常数.

物体对位于点P_0处的单位质量质点引力$\vec{F}=(F_x, F_y, F_z)$：

引力分量为

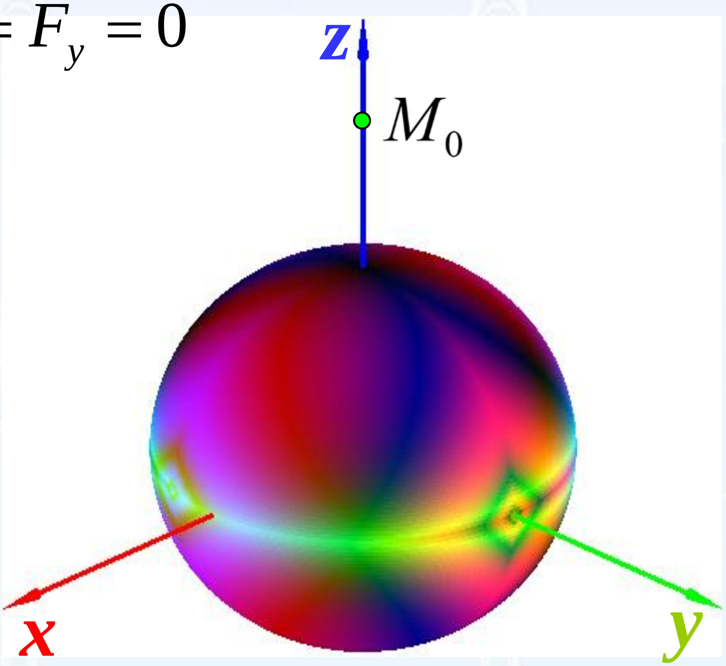
$$F_x = G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho\ (x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\,v\ ,$$

$$F_y = G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho\ (x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\,v\ ,$$

$$F_z = G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho\ (x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\,v\ .$$

例9 求半径为R的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$ 的单位质量质点的引力.

解 利用对称性知引力分量 $F_x=F_y=0$



$$F_z=\iiint_\Omega G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}v$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$F_z = G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=2\pi G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi G\rho\left[-2R+\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]$$

$$=2\pi G\rho\left[-2R+2R-\frac{2R^3}{3a^2}\right]=-G\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\rho\cdot\frac{1}{a^2}$$

$$=-G\frac{M}{a^2},\quad M=\frac{4\pi R^3}{3}\rho$$ **为球的质量.**

作 业

P177　1,　4: (2),　5,　9: (2)

作 业(总习题)

P185　1,　2,　3: (2),(4),　4: (3),

5,　7,　8,　9