第一部分作业

1.过点$(2,0)$做曲线$y=x^3$的切线，求所有切线与曲线$y=x^3$围成封闭区域的面积.

2.在$[0,1]$上给定$y=e^x$,对任意的$t\in[0,1]$,令A_1 为$x=0,y=e^x$及$y=e^t$围成的面积，A_2为$x=1,y=e^x$及$y=e^t$围成的面积，设$A(t)=A_1+A_2$,求$A(t)$的最大值和最小值.

3.设xOy平面上有正方形$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$及直线$l:x+y=t(t\geqslant 0)$,若$S(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积，求$\int_0^x S(t)dt(x\geqslant 0)$

4.设$k>0,y=kx^2$与$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$在$x=t$处相交，记$S_1$为$y=kx^2$ 与$y=\sin x$围成的面积，S_2为$y=\sin x,y=\sin t$与$x=\frac{\pi}{2}$围成的面积，证明：$S(t)=S_1+S_2$在$(0,\frac{\pi}{2})$内必有最小值。

5.求由$y=x^2,x=y^2$围成的区域绕x轴旋转一周生成的旋转体的体积。

‘

6.设$y=f(x)$在$[0,+\infty)$上连续单调增加且非负，又$f(0)=0$,区域$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$绕$x=t$轴旋转一周生成的旋转体体积为$V(t)$,证明：$V(t)$二阶可导，并求$V''$

7.设平面光滑曲线由极坐标方程$r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta([\alpha,\beta]\subset[0,\pi],r(\theta)\geqslant 0)$给出，求其绕极轴旋转所得旋转曲面的面积。

8. 求悬链线$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$从$x=0$到$x=a>0$那一段的弧长.

9.求心脏线$r=a(1+\cos\theta)(a>0)$的周长.

10.由实验知道，弹簧在伸拉过程中，需要的力F（单位：N）与伸长量，s（单位：cm)成正比，即$F=ks$ (k是比例常数）如果把弹簧由原长拉伸6cm,计算所作的功.

‘

11.直径为20cm，高为80cm的圆柱体内充满压强为$10N/cm^2$的蒸汽，设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功？

12.证明：把质量为m的物体从地球表面升高到h处，所作的功为$W=k\frac{mMh}{R(R+h)}$,其中k是引力常数，M是地球的质量，R是地球的半径.

13.用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击打第一次时，将铁钉击入木板1cm，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问锤击第二次时，铁钉又击入多少？

14.设一锥形贮水池，深15 cm,口径20cm,盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

'

15.棍长为线密度为常数,以等角速度绕轴旋转,求棍的动能.

16.一金属棒长$3m$,离棒左端xm处的线密度为$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}(kg/m)$,问$x$为何值时,$[0,x]$一段的质量为全棒质量的一半.

17.求抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$被圆周$x^2+y^2=3$所截得的有限部分的弧长.

第二部分作业

一、选择题1.曲线$y=\arctan x$与x轴及直线$x=-\frac{\pi}{3},x=\frac{\pi}{4}$所围区域面积的定积分表达式为(　　　)

$A.\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\arctan xdx, B.\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\arctan xdx\right|$

$C.-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\arctan xdx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\arctan xdx, D.-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\arctan xdx-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\arctan xdx$

2.曲线$y=\ln x$ 与y 轴及直线$y=-1,y=1$所围图形面积的定积分表达式为(　　　)

$A.\int_{-1}^{1} e^{y}dy,\qquad B.\frac{2}{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln xdx$

$C.2e-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln xdx,\quad D.\int_{1}^{e}\ln xdx$

3.曲线$y=x^2$与$y^2=x$所围图形绕x 轴旋转所成的旋转体的体积的定积分表达式为(　　　)

$A.\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)^2dx,\quad B.\pi\int_0^1(x-x^4)dx$

$C.2\pi\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx,\quad D.\pi\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$

4.曲线$y=\sin x$与直线$y=1,x=0,x=\pi$所围图形绕直线$y=1$旋转所成立体体积的定积分表达式为(　　　)

$A.\int_0^{\pi}\pi(1-\sin^2x)dx,\qquad B.\pi\int_0^{\pi}\sin^2xdx$

$C.\pi-\pi\int_0^{\pi}(1-\sin x)^2dx,\quad D.\pi\int_0^{\pi}(1-\sin x)^2dx$

5.曲线$\begin{cases}x&=a(\cos t+t\sin t)\\ y&=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$从$t=0$到$t=\pi$的一段弧长可表示成定积分(　　　)

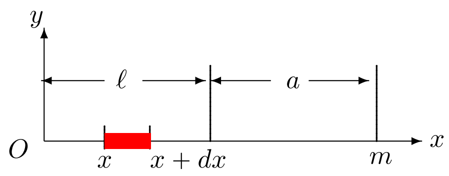
$A.\int_0^{\pi}\sqrt{1+(at\sin t)^2}dt, B.\int_0^{\pi}\sqrt{1+[a(\sin t-t\cos t)]^2}dt$

$C.\int_0^{\pi}atdt, D.\int_0^{\pi}\sqrt{1+(at\sin t)^2}at\cos tdt$

6.如图所示x轴上有一线密度为常数μ，长度为ℓ的细杆，有一质量为m的质点到杆右端的距离为a，已知引力系数为k，则质点与细杆之间引力的大小为(　　　)

$A.\int_{-\ell}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx,\quad B.\int_0^{\ell}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx$

$C.2\int_{-\frac{\ell}{2}}^{0}\frac{km\mu}{(a+x)^2}dx,\quad D.2\int_0^{\frac{\ell}{2}}\frac{km\mu}{(a+x)^2}dx$



7.曲线$y=|\ln x|$与直线$x=\frac{1}{e},x=e$及$u=0$所围成的区域的面积$S=(\quad)$

$A.2(1-\frac{1}{e}),B.e-\frac{1}{e},C.e+\frac{1}{e},D.\frac{1}{e}+1$

8.曲线$y=x(x-1)(2-x)$与x轴所围成图形的面积为$(\quad)$

$A.-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx,B.\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

$C.-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx,D.\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

9.曲线$y=x^2-2x+4$上点$M_0(0,4)$处的切线M_0T与曲线$y^2=2(x-1)$所围图形的面积$S=(\quad)$

$A.\frac{9}{4},B.\frac{4}{9},C.\frac{13}{12},D.\frac{21}{4}$

10.设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续且$g(x)<f(x)<m$，则由曲线$y=f(x),y=g(x)$与直线$x=a,x=b$围成的平面图形绕直线$y=m$ 旋转而成的旋转体的体积$V=(\quad)$

$A.\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx,B.\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

$C.\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx,D.\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

二、解答题1.求由下列曲线所围成的平面图形的面积

(1)$y=\frac{1}{x}$与直线$y=x$及$x=2$

(2)$y=\ln x, y$轴与直线$y=\ln a, y=\ln b(b>a>0)$

2.求所给曲线围成的平面图形的面积

(1) 求位于曲线$y=e^x$下方，该曲线过原点的切线的左方及x轴上方之间的图形的面积

（2）抛物线$5x^2=32y$与直线$16y-5x=20$

（3）曲线$y=e^x, y=e^{2x}$与直线$y=2$

‘

（4）曲线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$与$x=a\cos t, y=a\sin t(a>0)$

3.求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积

(1)$\rho=3\cos\theta$及$\rho=1+\cos\theta$;

(2)$\rho=a\sin\theta, \rho=a(\cos\theta+\sin\theta)(a>0)$

(3)求由曲线$\rho=2, \rho=2\cos\theta, \rho=2\sin\theta$所围成公共部分图形的面积

4.求下列各题中给出的平面图形绕指定的轴或直线旋转所形成的旋转体的体积

（1）$x^2+(y-5)^2=16$绕x轴

（2）在第一象限中，等轴双曲线$xy=9$与直线$x+y=10$之间的平面图形，绕y轴

（3）在第一象限中，由抛物线$4y=x^2$，直线$x=0,y=1$所围成的平面图形，绕直线$x=2$

5.试证曲线$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的弧长等于椭圆$x^2+2y^2=2$的周长

6.例用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击打第一次时，将铁钉击入木板1cm，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问锤击第二次时，铁钉又击入多少？

7.设底为a高为h的三角形平板铅直沉没在水中，试比较下列两种情况该平板每侧所受的压力

（1）底a与水面平齐；

（2）底a在水中与水面平行,a对的顶点恰在水面上.

8.设$\ell_1: y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$,$x$轴,$y$轴所围成的区域被$\ell_2: y=ax^2$分成面积相等的两部分$(a>0)$,求$a$

9.求抛物线$y=2x-x^2$与x轴所围图形分别绕x 轴和y轴旋转所成的旋转体的体积

10.求下列已知曲线所围成的图形按指定的轴旋转所形成旋转体的体积

(1)$y=\arcsin x, x=1, y=0$,绕x轴

(2)摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱$0\leqslant t\leqslant 2\pi, y=0$,绕直线$y=2a$

11.设某潜水艇的观察窗的形状为长、短半轴依次为a,b的半椭圆，短轴为其上沿，上沿与水面平行，且位于水下c处，试求观察窗所受的水压力.

三、选做题

1.设$\rho=\rho(x)$是抛物线$y=\sqrt{x}$上任一点$M(x,y)(x\geqslant 1)$处的曲率半径,$s=s(x)$是该抛物线上介于点$A(1,1)$与M之间的弧长，计算$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$的值

2.设抛物线$y=ax^2+bx+c$通过点$(0,0)$,且当$x\in[0,1]$时，$y\geqslant 0$,试确定a,b,c的值，使抛物线$y=ax^2+bx+c$与直线$x=1,y=0$所围图形的面积为$\frac{4}{9}$,且使该图形绕x轴旋转而成的旋转体体积最小.

2.设直线$y=ax$与抛物线$y=x^2$所围成图形的面积为S_1，它们与直线$x=1$所围成的图形面积为S_2，并且$a<1$

（1）试确定a的值，使S_1+S_2达到最小，并求出最小值

（2）求该最小值所对应的平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积

3.一抛物线的轴平行于x轴，开口向左且通过原点与点$(2,1)$，求当它与y轴所围的面积最小时的方程

4.半径为R的半球形水池充满水，将水从池中抽出，当抽出的水所作的功为将水全部抽空所作的功的一半时，试问水面下降的深度H为多少？

补充题

1. 某建筑工地在夯实地基时，需要用气锤将桩打进土层，气锤每次击打都克服土层对桩的阻力做功，设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数设为$k > 0$）气锤第一次击打将桩打入地下$a(m)$,根据设计方案要求气锤每次击打桩时所作的功与前一次击打所作的功之比为常数$r \in (0,1)$问

（1）气锤击打桩3次后，可将桩打进地下多深？

（2）若击打次数不限，气锤至多能将桩打进地下多深？

.

2.试证曲线$y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$的弧长等于椭圆$x^2 + 2y^2 = 2$的周长

3.设曲线方程为$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$，求由该曲线绕$x$ 轴旋转产生的旋转体的侧表面积

4.求心脏线$r = a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转产生的旋转体的表面积

5. 半径为r的球体沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，下部与水面相切，求所作的功.

6.试证曲线$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的弧长等于椭圆$x^2+2y^2=2$的周长

7.在纯电阻电路中，已知交流电压为$V=V_m\sin\omega t$,求在一个周期$[0,T](T=\frac{2\pi}{\omega})$ 内消耗在电阻上的能量，并求与之相当的直流电压；

8.边长为a和b的矩形薄板，与液面成$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$角，斜沉于液体中，设$a>b$,长边平行于液面，上沿位于深$h$处，液体的比重为$\mu$,试求薄板每侧承受的静压力。