第二节 对坐标的曲线积分

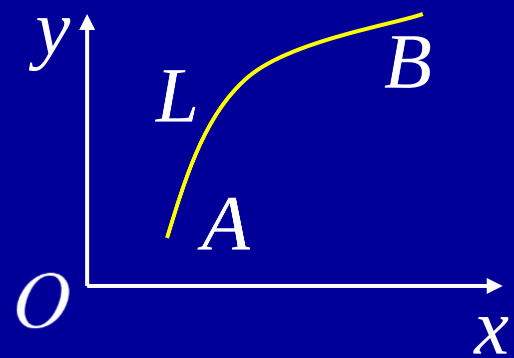
一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、 对坐标的曲线积分的计算法

三、两类曲线积分之间的联系

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 例: 变力(大小,方向变）沿曲线作功.

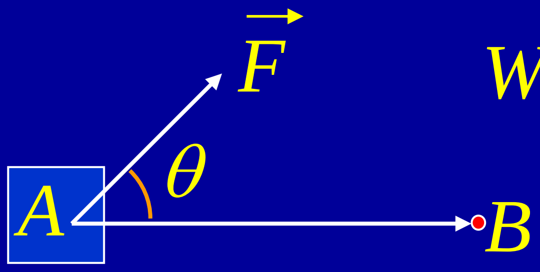


设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

在 xOy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B, 求移动过程中变力所作的功 W.

恒力沿直线所作的功



$$W = F\left|AB\right|\cos\theta$$

$$= \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

定积分

变力(大小变，方向不变)沿直线所作的功

解决办法:

“大化小”

“匀代变”

“近似和”

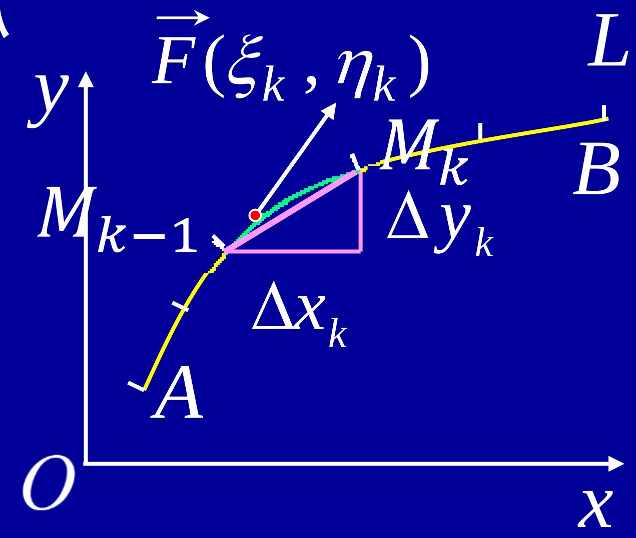
“取极限”

1) **“大化小”**

把L分成 n 个有向小弧段, $\vec{F}$ 沿有向弧

$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$所做的功为$\Delta W_k$, 则

$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$



2) **“常代变”**

有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$

近似代替, 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点(ξ_k,η_k),则有

$$\overrightarrow{\Delta W_k}\approx\vec{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x_k&=x_k-x_{k-1}\\ \Delta y_k&=y_k-y_{k-1}\end{aligned}}$$

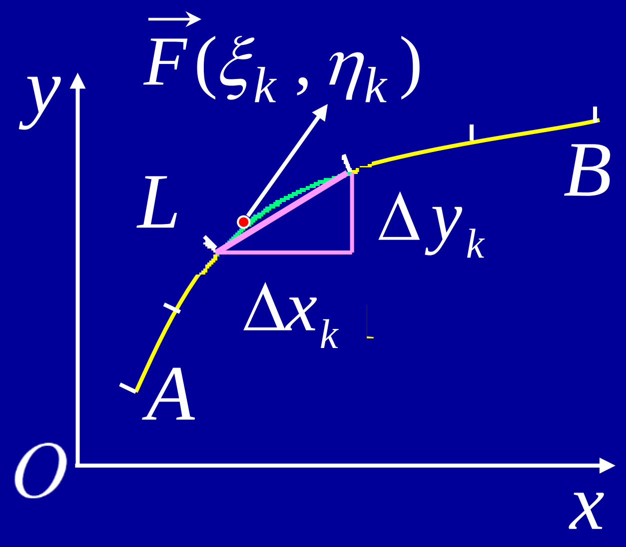
3) “**近似和**”

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

4) “**取极限**”

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

(其中λ为 n 个小弧段的最大长度)



2. 定义： 设 L 为xOy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑**曲线弧, 在L 上定义了一个向量函数

$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 其中P,Q为L上有界函数.

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

总存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对**坐标的曲线积分**, 或**第二型曲线积分**. 其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为**被积函数** , L 称为**积分弧段** 或 **积分曲线** .

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k ,$$

称为$P(x,y)$在L上对坐标 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k ,$$

称为Q(x,y)在L上对坐标 y 的曲线积分.

若记 $\overrightarrow{\mathrm{d}\,r} = (\mathrm{d}\,x,\ \mathrm{d}\,y)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\,r} = \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

类似地, 若 Γ为空间曲线弧 , 记 $\overrightarrow{\mathrm{d}\,r} = (\mathrm{d}\,x,\ \mathrm{d}\,y,\ \mathrm{d}\,z)$

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\,r} = \int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z$$

3. 性质 (被积函数连续，曲线光滑(或按段光滑)

(1) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i=1,\cdots,k)$,

则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$ (路径可加性)

(2) (方向性) 用 L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(3) 线性性质.

说明: • 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的**方向**！

• 定积分是第二类曲线积分的特例.

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理： 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，当参数 t **单调地**由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, 若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在以 α，β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且其导数不同时为0，即 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分存在, 且有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

证明: 先证 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

在L 上取一列点

$$A = M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$$

它们对应于一列单调变化的参数值

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$$

由定义

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

设分点(x_i, y_i)对应参数 t_i，点(ξ_i, η_i)对应参数 τ_i，即

$\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, 这里τ_i 在t_{i-1}与t_i之间.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

同理 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$

两式相加，即得结论.

特别是, 如果 L 的方程为 $y=\psi(x),\ x: a \to b$, 则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \{ P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)]\,\psi'(x) \}\,\mathrm{d}x$$

对空间光滑曲线弧 $\Gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $t: \alpha \to \beta$, 类似有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta \{ P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\,\varphi'(t)$$

$$+ Q[\phi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]\,\psi'(t)$$

$$+ R[\phi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]\,\omega'(t) \}\,\mathrm{d}t$$

说明:

(1) 下限α对应L的起点，上限β对应L的终点.

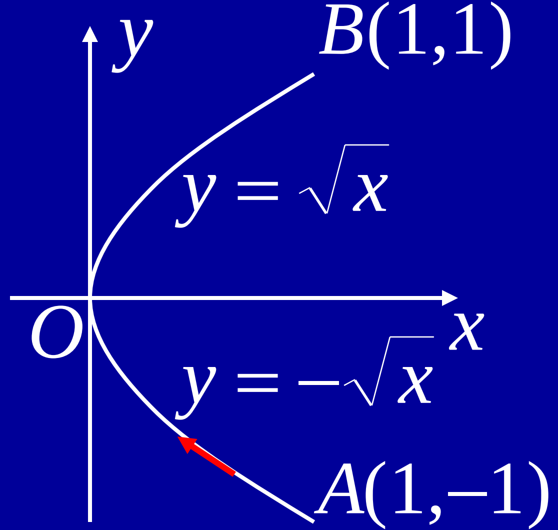
对α，β的大小没有要求.

(2) 从起点A到终点B, 参数t **单调地**（单增或单减）从α变到β.

(3) "**变量参数化，起点在下，终点在上**"

(4) 由于被积函数定义在积分曲线上（无论第一、第二型曲线积分），故可将曲线方程代入被积函数化简其形式.

例1. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中 L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段.



解法1 取 x 为参数, 则 $L: \overset{\frown}{AO} \cup \overset{\frown}{OB}$

$$\overset{\frown}{AO}:\ y = -\sqrt{x},\ \ x: 1 \to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}:\ y = \sqrt{x},\quad x: 0 \to 1$$

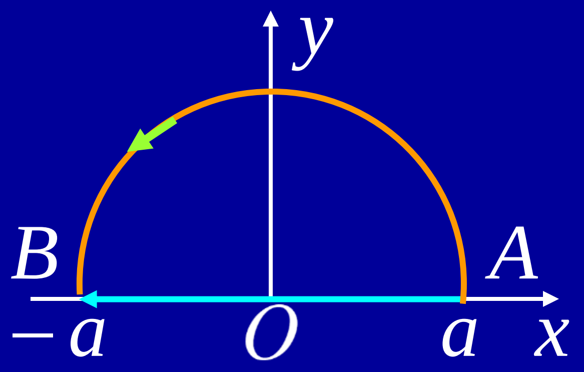
$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

解法2 取 y 为参数, 则 $L: x = y^2,\ \ y: -1 \to 1$

$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 y^2 y(y^2)'\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^1 y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$

例2. 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为



(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a,0)$沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.

解: (1) 取L的参数方程为 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t:0\to\pi$

则 $$\int_L y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}a^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=-2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=-\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为$y=0,\ x:a\to -a$,则

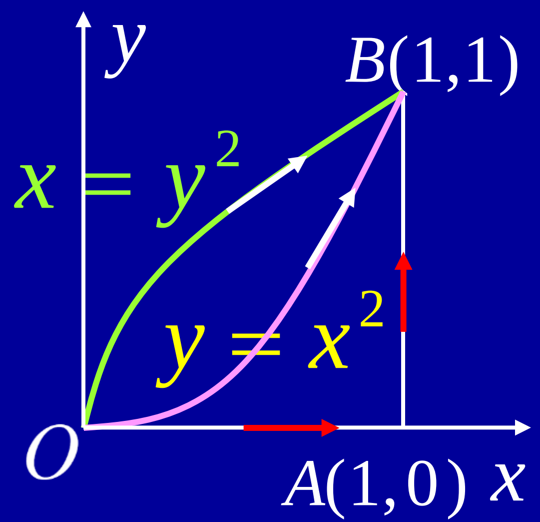
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x=\int_a^{-a}0\,\mathrm{d}x=0$$

例3. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

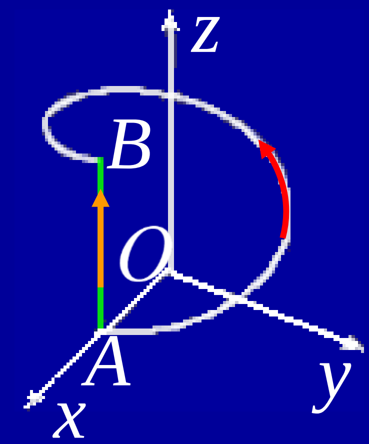
$= 0 + \int_0^1 \mathrm{d}y = 1$

例4. 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿 Γ 移动到 $B(R,0,2\pi k)$, 其中 Γ 为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



解: (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}t=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

(2) Γ 的参数方程为 $x=R,\ y=0,\ z=t,\ \ t:0\to 2\pi k$

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi k}t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi^2k^2$$

例5. 求 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 其中

$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程

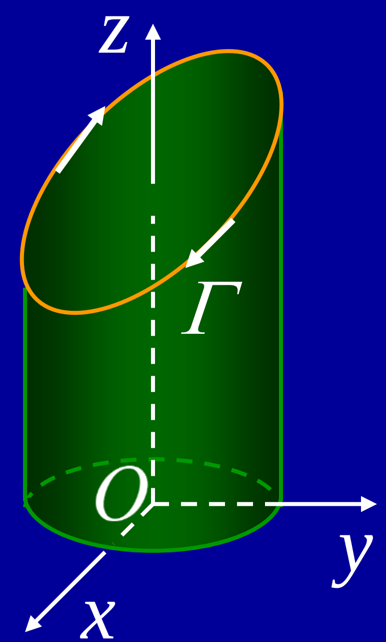
$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t\quad(t:2\pi\to 0)$$

$$\therefore\quad I=-\int_0^{2\pi}[\,(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

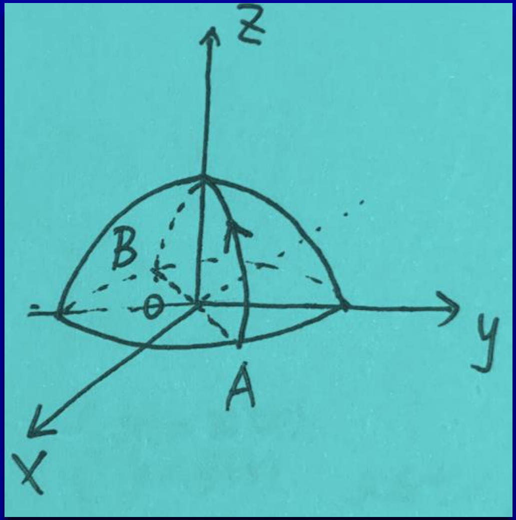
$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)\,]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=-2\pi$$



例6. 求$\int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz$, L: $\begin{cases} x = y \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$

由$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$到$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.



解: L的参数方程: $\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = \sqrt{1 - 2x^2} \end{cases}$

$$\int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} x\,dx + x\,dx + \sqrt{1 - 2x^2}\,d\left(\sqrt{1 - 2x^2}\right)$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (2x - 2x)\,dx = 0$$

例7. 求 $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, 其中$C$为圆周: $x^2+y^2=a^2$

方向为逆时针.

分析：对封闭曲线，只要方向不变, 曲线积分的值与起点位置无关，可取闭路上任一点作为起点，积分值不变.

解： 圆参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0,2\pi]$

由于是封闭曲线， 不妨取圆周与x轴正向的交点$A(a,0)$为起点，A沿C逆时针环行一周回到A点.从而t: $0 \to 2\pi$.

原式=

$$\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a(\cot+\sin t)(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)a\cos t]\,dt$$

$$=-2\pi$$

例8. 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，求$\oint_L z\,dx+y\,dz$.

解： L参数方程：$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=-\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

原式= $\int_0^{2\pi}[-\sin t(-\sin t)-\sin t\cos t]\,dt$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt-\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt=\pi$$

(2014研)

三、两类曲线积分之间的联系　(可以互相转化)

设有向曲线弧Γ: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$　起点对应 $t = \alpha$　终点对应 $t = \beta$

(参数t单调地从α变到β, 点(x, y, z)沿Γ从起点移到终点.)

设$x(t), y(t), z(t)$在以α，β为端点的区间上具有连续导数，

且不同时为0，即$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0.$

Γ上t的对应点$M(x(t), y(t), z(t))$处的一个切向量

$\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$是与t的增加方向一致的切向量.

(即方向与t增大时，动点M移动的走向一致.)

定义： 指向与有向曲线弧的走向一致的切向量为

有向曲线弧的切向量.

在t的对应点$M(x(t),y(t),z(t))$处有向曲线弧Γ的切向量的方向余弦为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}\big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\big)$$

当Γ的走向与t增加的方向一致时，取正号;

当Γ的走向与t增加的方向相反时，取负号.

考虑 $\int_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\,dt \text{ ——— } (*)$$

(1) 当$\alpha<\beta$时，即Γ的走向与t增加的方向一致.

$$(*)=\int_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t),y(t),z(t)\big)cos\alpha\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} P\,(x(t),y(t),z(t))\cos\alpha \mathrm{ds}$$

$$=\int_{\Gamma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{ds}$$

目录 上页 下页 返回 结束

(2) 当$\alpha > \beta$时，即Γ的走向与t增加的方向相反.

$$(*)=$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t),y(t),z(t)\big)cos\alpha\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

$$=\int_{\beta}^{\alpha} P\,(x(t),y(t),z(t))\cos\alpha \mathrm{ds}$$

$$=\int_{\Gamma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{ds}$$

于是 $\int_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx = \int_{\Gamma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{ds}$

其中 $\cos\alpha$ 为有向曲线弧Γ的切向量的方向余弦.

同理 $$\int_\Gamma Q(x,y,z)\,dy = \int_\Gamma Q(x,y,z)\cos\beta\,ds$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)\,dz = \int_\Gamma R(x,y,z)\cos\gamma\,ds$$

从而

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\\ &= \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{ds}\end{aligned}}$$

其中$\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z)$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的切向量的方向角. $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的单位切向量.

平面有向光滑弧 L时，两类曲线积分联系：

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_L \{\, P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta \,\}\mathrm{d}s$$

其中$\alpha(x,y)$与$\beta(x,y)$为有向曲线弧L在点(x,y)处的切向量的方向角. $(\cos\alpha, \cos\beta)$为有向曲线弧L在点(x,y)处的单位切向量.

例9. 设 L 是光滑的弧长为s的有向曲线段,$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L上连续, $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$, 证明

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\le Ms$$

分析：没有第二型曲线积分的估值定理，结果中又涉及曲线L的弧长，用两类曲线积分关系.

证:

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|=\left|\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s\right|$$

$$\le\int_L \left|P\cos\alpha+Q\cos\beta\right|\mathrm{d}s$$

$$|P\cos\alpha+Q\cos\beta| = |(P,Q)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)|$$

$$\leq |(P,Q)|\,|(\cos\alpha,\cos\beta)|$$

$$=\sqrt{P^2+Q^2}$$

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right| \leq \int_L \left|P\cos\alpha+Q\cos\beta\right|\mathrm{d}s$$

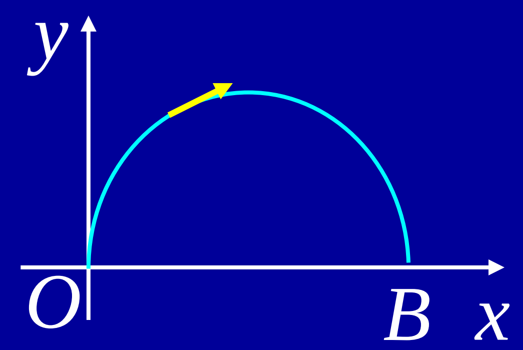
$$\leq \int_L \sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \mathrm{M}\int_L \mathrm{d}s = Ms.$$

说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.

例10. 将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分, 其中L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到$B(2,0)$.

解: L参数方程为: $\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$



有向曲线弧L的切向量

$$(1, y'(x)) = \left(1, \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right).$$

$\cos\alpha = \sqrt{2x-x^2},$

$\cos\beta = 1-x$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_L \left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

例11. 化 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 为对弧长的曲线积分

L 为沿抛物线 $y=x^2$ 从(1,1)到(0,0)点.

解：L 的参数方程为：$\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$

有向曲线弧L的切向量 $\big(-1,-y'(x)\big)=(-1,-2x)$.

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2}} \qquad \cos\beta=\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L \big(P(x,y)+2xQ(x,y)\big)\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2}}\,ds$$

例12. 设 L 是圆周$x^2+y^2=2$从点(1,1)到(-1,1)的一段劣弧，$P(x,y),Q(x,y)$在L上连续. 证明：

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_L (xQ-yP)\,ds$$

证明： $y=\sqrt{2-x^2}$， $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}=-\dfrac{x}{y}$

有向曲线弧L的切向量： $(-1,\dfrac{x}{y})$

$$\cos\alpha=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{2}},\qquad \cos\beta=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

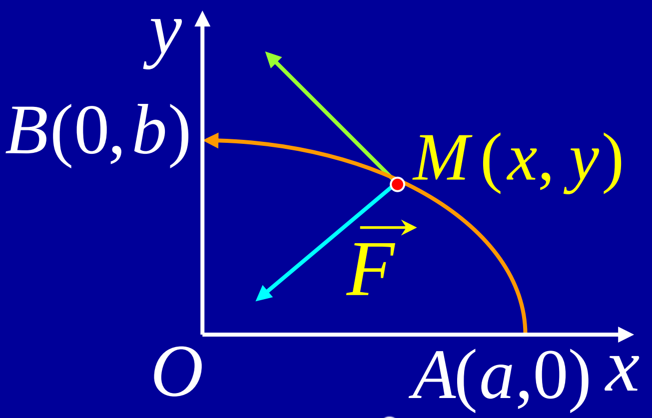
$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,dy = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,\mathrm{ds}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_L (xQ-yP)\,ds$$

作业

P203　3: (2)(6)(8),　4, 5, 8

思考与练习



1. 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\vec{F}$ 的作用, $\vec{F}$ 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比, $\vec{F}$ 的方向恒指向原点, 此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针移动到 $B(0,b)$, 求力 $\vec{F}$ 所作的功.

提示: $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\vec{F}=-k(x,y)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} -kx\,\mathrm{d}x-ky\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad t:0\to\frac{\pi}{2}$$

(解见 P196 例5)

思考: 若题中 $\vec{F}$ 的方向改为与 $\overrightarrow{OM}$ 垂直且与 y 轴夹锐角,则

$\vec{F}=$ $\underline{k(-y,x)}$

目录 上页 下页 返回 结束

2. 已知 Γ 为折线 $ABCOA$(如图), 计算

$$I=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$$

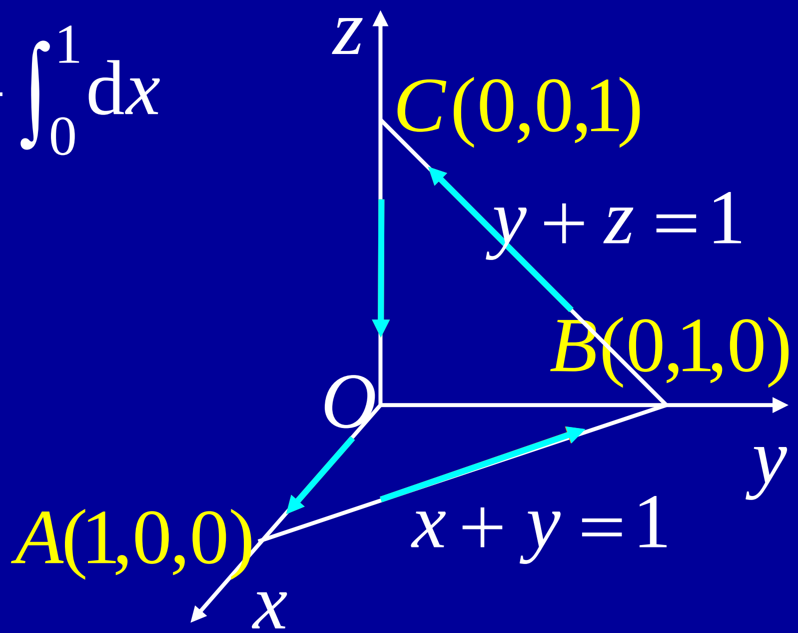
提示:

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z+0+\int_{\overrightarrow{OA}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x$$

$$=-2+(1+\frac{1}{2})+1$$

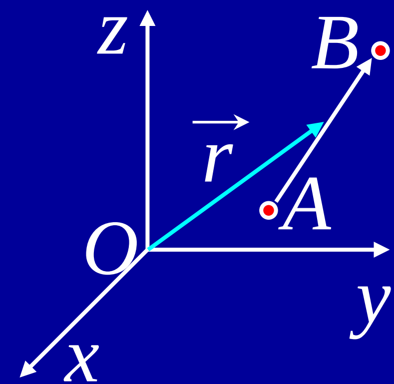
$$=\frac{1}{2}$$



目录 上页 下页 返回 结束

3. 一质点在力场$\vec{F}$作用下由点 $A(2,2,1)$ 沿直线移动到$B(4,4,2)$, 求$\vec{F}$所作的功 W. 已知$\vec{F}$的方向指向坐标原点, 其大小与作用点到 xOy 面的距离成反比.

解: $\vec{F} = \dfrac{k}{|z|}(-\vec{r}^{\,0}) = -\dfrac{k}{|z|}\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



$$W = \int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -k\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$L: \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2t+2 \quad (t:\ 0 \to 1) \\ z = t+1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$

$$= -k\int_0^1 \frac{3\,\mathrm{d}t}{t+1} = -3k\ln 2$$

4. 设曲线C为曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$与曲面$x^2+y^2=ax$ $(z\ge 0, a>0)$的交线，从 Ox 轴正向看去为逆时针方向，

(1) 写出曲线 C 的参数方程；

(2) 计算曲线积分 $\int_C y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$.

解: (1) $\begin{cases}(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2\\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ y=\frac{a}{2}\sin t \qquad\qquad t:0\to 2\pi\\ z=a\sin\frac{t}{2}\end{cases}$$

(2) 原式 $= \int_0^{2\pi}[-\frac{a^3}{8}\sin^3 t + \frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t$

$+\frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}\,]\mathrm{d}\,t$

令 $u = \pi - t$

$= \int_{-\pi}^{\pi}[\,-\cancel{\frac{a^3}{8}\sin^3 u} - \frac{a^3}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u$

$+\frac{a^3}{8}(1-\cos u)^2\cancel{\sin\frac{u}{2}}\,]\mathrm{d}\,u$

$= -2\cdot\frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos u}{2}\cos u\,\mathrm{d}\,u$ $\boxed{\text{利用“偶倍奇零”}}$

$= -\frac{\pi}{4}a^3$