第一部分作业

1.若f,g在$[a,b]$上可积，证明：$\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}$也在$[a,b]$上可积.

2.求下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2/3}\frac{x^n}{1+x}dx$;　　2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\cos^n xdx$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx(p>0)$

3.设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递减，证明:$\forall a\in(0,1)$,有$\int_0^a f(x)dx\geqslant a\int_0^1 f(x)dx$

4. 设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(x)>0$,证明：存在唯一的$\xi\in(a,b)$,使得直线$x=\xi$将曲线$y=f(x)$和直线$x=a,x=b$及$y=0$所围成的平面图

形分成面积相等的两部分.

5.设$f(x) \in C[a,b]$,且$\int_a^b f(x)dx = 0, \int_a^b xf(x)dx = 0$,证明：至少存在两点$\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$,使得$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

6.设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加，且连续，证明：$\int_a^b xf(x)dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$;

7. 当$x \geqslant 0$时，$f(x)$连续，且满足$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$,求$f(2)$

8.设f连续可微，求$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f'(t)dt$

9.设f为$[0,2\pi]$上的单调递减函数，证明：对任意的正整数n恒有$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \geqslant 0$

10.设$f(x)\in C[0,\pi]$，且$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$,证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

11.设$f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$内可导，且满足$f(1)=k\int_0^{1/k} xe^{1-x}f(x)dx(k>1)$,证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

12. 设$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2}\arctan x^2$,已知$f(1)=1$,求$\int_1^2 f(x)dx$的值；

13. 证明：$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}$

14. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$$

15.设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加，非负，函数$g(x)$在$[a,b]$上可积，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

16.设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递减且非负连续,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx, n=1,2,\cdots,$

证明:数列$\{a_n\}$收敛;

17.已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,设$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$,证明：$I=\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x))dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

18.计算下列积分：

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}$;　　2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{x^2}$;　　4) $\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$;

5) $I_n = \int_0^1 x\ln^n x dx$;　　6) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$;

7) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$;

18.计算下极限：

1) $\lim_{n\to\infty} n^3\left[\frac{1}{n^4+1} + \frac{1}{n^4+2^4} + \cdots + \frac{1}{n^4+n^4}\right]$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}\sin t^2dt$

19.设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$,

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)},x\in[a,b]$

证明：

(1)$F'(x)\geqslant 2$;

(2)方程$F(x)=0$在区间(a,b)内有且仅有一个根.

第二部分作业

一、选择题

1.设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$,则(　　　)

$A.I_1>I_2>1,B.1>I_1>I_2,C.I_2>I_1>1,D.1>I_2>I_1$

2.下列积分中可直接用牛顿-莱布尼兹公式计算的是(　　　)

$A.\int_0^5\frac{x}{x^2+1}dx,B.\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx,C.\int_{\frac{1}{e}}^e\frac{1}{x\ln x}dx,D.\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$

3.设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,记$F(x)=\int_0^x f(t)dt,0\leqslant x\leqslant 2$,则

$A.F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

$B.F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

$C.F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

$D.F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

4.设$f(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$,欲使$f(x)$为连续函数，则$k=$(　　　)

$A.0, B.1, C\frac{1}{3}, D$不存在

5.设$f(x)$为连续函数，且$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)dt$,则$F'(x)=($　　　$)$

$A.\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x}), B.f(\ln x)+f(\frac{1}{x})$

$C.\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x}), D.f(\ln x)-f(\frac{1}{x})$

6.设$f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right]=($　　　$)$

$A.xf(x^2), B.-xf(x^2), C.2xf(x^2), D.-2xf(x^2).$

7.设$F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$, 则(　　　)

$A.F(x)\equiv 0, B.F(x)\equiv \frac{\pi}{2}, C.F(x)\equiv \arctan x, D.F(x)\equiv 2\arctan x$

8.设$f(x),\varphi(x)$在点$x=0$的某邻域内连续，且当$x\to 0$时，$f(x)$是$\varphi(x)$的高阶无穷小，则当$x\to 0$时，$\int_0^x f(t)\sin t dt$是$\int_0^x t\varphi(t)dt$的(　　　)

$A.$ 低阶无穷小，B.高阶无穷小，C.同阶但非等价无穷小，D.等价无穷小

9. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = ($ $\qquad)$

$A. \frac{2}{e}, B. -\frac{2}{e}, C. 2e, D. -2e$

10.设$y = f(x)$为$[a, b]$上的连续函数，则曲线$y = f(x), x = a, x = b$及x轴所围成的曲边梯形的面积为($\qquad$)

$A. \int_{a}^{b} f(x)dx, B. \left| \int_{a}^{b} f(x)dx \right|, C. \int_{a}^{b} |f(x)|dx, D.$不能表示出来

11.设$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$则($\qquad$)

$A. \frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B. \frac{2}{\pi} \leqslant I \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$
$C. I \leqslant 0, \qquad D. 0 \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{4}$

12.设在区间$[a, b]$上$f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$,令

$S_1 = \int_{a}^{b} f(x)dx, S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$,则($\qquad$)

$A. S_1 < S_2 < S_3, \quad B. S_2 < S_1 < S_3$
$C. S_3 < S_1 < S_2, \quad D. S_2 < S_3 < S_1$

13.设$f(x)$为已知连续函数，$I = t\int_{0}^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$,其中$s > 0, t > 0$,则$I$的值($\qquad$)

$A.$依赖于$s,t,x,B.$依赖于$s,t,C.$依赖于$t,x,$不依赖于$s,D.$依赖于$s,$不依赖于t,x

14.若$f(t)$是$(-\infty,+\infty)$内的连续函数，当$\int_1^{x^3} f(t)dt=\int_1^x \varphi(t)dt$

恒成立时，则$\varphi(t)=($　　　$)$

$A.f(t^3),B.t^3f(t),C.3t^2f(t^3),D.t^2f(t^3)$

15.设$\varphi(x)=(x-b)\int_a^x f(x)dx$,则在$(a,b)$内(　　　)

$A.\varphi(x)$不可导，$B.\varphi(x)$可导，但不存在点ξ,使$\varphi'(\xi)=0$

$C.\varphi(x)$可导，但只存在唯一点ξ,使$\varphi'(\xi)=0$

$D.\varphi(x)$可导，且至少存在一点ξ,使$\varphi'(\xi)=0$

16. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^{x^2}\sin tdt}{x^4}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$,欲使$f(x)$为连续函数，则$k=$
(　　　)

$A.0,B.1,C.\frac{1}{2},D.$不存在

17. 设$F(x)=\int_0^x \sin(t-x)dt$,则$F'(x)=($　　　$)$

$A.-\sin x, B.\cos x-1, C.\sin x, D.1-\sin x$

18. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上具有连续导数，且

$f(a)=f(b)=0, \int_a^b f^2(x)dx=1,$

则$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=(\qquad)$

$A.\frac{1}{2}, B.1, C.0, D.-\frac{1}{2}$

19.$\int_0^1 \frac{dx}{x^{q+1}}$收敛，则$(\qquad)$

$A.q\geqslant 0, B.q>0, C.q\leqslant 0, D.q<0$

二、解答题

1.求下列定积分与反常积分

(1) $\int_1^5 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\cos x|}{\cos^2 x+2\sin^2 x}dx$

(3) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}dx$

(6) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x^2-x|}}dx$

(7) 设$f(2x-1)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,求$\int_1^7 f(x)dx$

(8)设$f(x)=\begin{cases} x\sin x, & x>0 \\ -1, & x\leqslant 0 \end{cases}$求$\int_0^{2\pi} f(x-\pi)dx$

(9) $I=\int_1^4 |t^2-3t+2|dt$

‘

(10) $I = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

(11) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

(12) $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0)$

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$

(14)设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$,求$\int_0^2 f(x-1)dx$

(15)设$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$

2.求解下列各题

(1)设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

(2)已知$\int_0^{\ln a} e^x\cdot\sqrt{3-2e^x}dx=\dfrac{1}{3}$, 求$a$ 的值

‘

(3) 设$\int_0^y e^{t^2}dt = \int_0^{3x^2} \ln\sqrt{t+x^2}dt(x>0)$,求$\frac{dy}{dx}$

(4)$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$

(5)设$f(x)=\int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t}dt(x>0)$，求$f(x)+f(\frac{1}{x})$.

(6)$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{\sin x}^0 t^2dt}{\int_0^{x^3} e^t dt}$

(7)确定正常数a,b,使$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b-3t}}dt}{ax-\sin x}=2$

(8)求$\Phi(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值与极小值

(9)设$\begin{cases} x &= \displaystyle\int_t^1 (u\ln u)^2 du \\ y &= \displaystyle\int_0^{t^2} u\ln u du \end{cases}$ $(t>0)$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$

(10)求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(11)已知$f(x)$满足$f(x)=e^x+x\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$,求$f(x)$

(12) 已知$f(\pi)=1$,且有$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=3$,求$f(0)$

3.证明下列各题

（1）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\leqslant 0, F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, 证明：在$(a,b)$内，有$F'(x)\leqslant 0$

(2)设$f(x)$为连续函数，证明：$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt.$

(3)设$f'(x)$在$[0,a]$上连续，且$f(0)=0$,证明：$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}Ma^2$,

其中$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

(4)$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

(5)设n为自然数，证明：

$$\int_0^{2\pi}\sin^n xdx = \begin{cases} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx, & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

(6)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且为单调增加的奇函数，

$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$,证明：$F(x)$为奇函数且$F(x)$在$[0,+\infty)$上

单调减少

‘

(7)设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续且不变号，

证明至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

三、选做题

1. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且$f(0)=0$,其反函数为$g(x)$,若

$\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$,求$f(x)$

2. 设$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$为常数),求$\varphi'(x)$并

讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性

‘

3.设$f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx(n\geqslant 1)$,求证：

$f(n)+f(n-2)=\frac{1}{n-1}(n>2)$.

4.设$f'(x)=\arcsin(x-1)^2$,及$f(0)=0$,求$\int_0^1 f(x)dx$.

5.设$f''(x)$在区间$[a,b]$上连续，证明：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx.$$

6.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$

补充题目

1.设$f(x)\in C[0,1]$在$(0,1)$内可导，且满足$f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x-x^2}f(x)dx$,证明：在$(0,1)$内至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=(2\xi-1)f(\xi)$

2. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n xdx=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$

4.计算$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$,其中$f(x)$满足$f(x)=f(x-\pi)-\cos x$,且当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，$f(x)=x^2$