华北电力大学 2013-2014 学年第一学期 高等数学期中测试题

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n))=$ ______。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(a^1\cdot a^2\cdot\ldots\cdot a^n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(e^{lna1}\cdot e^{lna2}\cdot\ldots\cdot e^{lnan})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{lna+2lna+\cdots+nlna}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)lna}{2n^2}=\frac{lna}{2}$$

2. 设$f(x)=\begin{cases}x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, x>0\\ aln(1-x)+b, x\leq 0\end{cases}$ 在$x=0$ 可导，则$a=$ ______, $b=$ ______。

$1>x>0$ 时, $f(x)=x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}=3x$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}3x=0;$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}aln(1-x)+b=b,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x),\therefore b=0$$

$f'(0^+)=3, f'(0^-)=-a,$

$f'(0^+)=f'(0^-),\therefore a=-3$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtanx^3}{1-cosx^2}=$ ______。

$$\lim_{x\to 0}\frac{xtanx^3}{1-cosx^2}\xrightarrow{\text{等价无穷小替换}}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{1}{2}(x^2)^2}=2$$

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$ ______。

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}-e}{x}\xrightarrow{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)-xln(1+x)}{x^2}\xrightarrow{\text{泰勒展开}\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\sigma(x^2)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{1}{2}x^2+\sigma(x^2))-x(x-\frac{1}{2}x^2+\sigma(x^2))}{x^3}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{x - x + \frac{1}{2}x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \sigma(x^2))}{x^2} = -\frac{e}{2}$$

二、选择题（本题共 18 分，每小题 3 分）

5. 函数$f(x) = \begin{cases} xarctan\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \quad ,x = 0 \end{cases}$在点$x = 0$ 处 【 B 】

(A)不连续 (B)连续但不可导 (C)可导 (D)无法判定

$$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}|xarctan\frac{1}{x}| \xrightarrow{因为arctan\frac{1}{x}有界,\ \left|arctan\frac{1}{x}\right|<M} \lim_{x\to 0}|x|M = 0 = f(0)$$

$\therefore f(x)$在$x = 0$ 处连续

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{xarctan\frac{1}{x} - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{xarctan\frac{1}{x} - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-), f(x)$*在*$x = 0$ *处的左导数不等于右导数*,$f(x)$*在*$x = 0$ *处不可导。*

6. 设$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$,则$f(x)$在点$x = a$处 【 C 】

(A)可导且$f'(a) \neq 0$ (B)不可导 (C)取极大值 (D)取极小值

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{x - a} = -1,$$

分母$x - a$在$x \to a$时为 0, 分子$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$在$x \to a$时为 0, $\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 = f'(a)$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$，由极限的保号性知，存在 x = a 的一个邻域，

使得$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \leq 0$, *即*$f(x) - f(a) \leq 0, f(x) \leq f(a), f(a)$为极大值。

本题可取特殊函数$f(x) = f(a) + (x - a)^2$判定。

7. 设$x \to 0$ 时, 变量$\frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x}$是 【 D 】

(A)无穷小 (B)有界的，但不是无穷小

(C)无穷大 (D)无界的，但不是无穷大

$$取x = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, cos\frac{1}{x} = 0, \frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x} = 0, x \to 0, n \to \infty时，\frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x} \to 0$$

$$取x = \frac{1}{2n\pi}, cos\frac{1}{x} = 1, \frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, x \to 0, n \to \infty时，\frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x} \to \infty$$

8. 设函数$f(x) = x^3 - 3ax + 2b$, 其中$a > 0, b^2 < a^3$, 则方程$f(x) = 0$ 【 B 】

(A)有一个实根 (B)有三个实根，且至少有一个正实根

(C)有三个正实根 (D)有三个实根，且至少有两个正实根

$f'(x) = 3x^2 - 3a, f'(x) = 0, x = \pm\sqrt{a}$

$f(\sqrt{a})=-2a^{\frac{3}{2}}+2b<0,\left(b^2<a^3,|b|<a^{\frac{3}{2}}\right),f(-\sqrt{a})=2a^{\frac{3}{2}}+2b>0,$

$f(+\infty)>0,f(-\infty)<0,f(0)=2b可正可负,选B$

9. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=$ 【 A 】

(A)36 (B)6 (C)0 (D)+ ∞

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin6x+xf(x)}{x^3}\xrightarrow{泰勒展开}\lim_{x\to 0}\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+\sigma(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-36x^3+\sigma(x^3)+xf(x)}{x^3}=-36+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$$

10. 函数$y=2^x$的麦克劳林公式中x^n项的系数是 【 D 】

(A)$\frac{ln^2 2}{n}$ (B)$\frac{ln^2 2}{n!}$ (C)$\frac{(ln2)^{n-1}}{n!}$ (D)$\frac{(ln2)^n}{n!}$

$$y=2^x=e^{ln2x}=1+(ln2x)+\frac{(ln2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(ln2x)^n}{n!}+\cdots$$

三、求下列函数或数列的极限:(每小题 5 分,共 30 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsinx}-cosx}{sin^2\frac{x}{2}}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{(\sqrt{1+x}-1)(\ln(1+x)-1)}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(sin\frac{2}{x}+cos\frac{1}{x})^x$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^2+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x-\frac{1}{x^2}cosx]$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(arctan\frac{1}{n}-arctan\frac{1}{n+1})$

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsinx}-cosx}{sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}xsinx\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}xsinx+\frac{1}{2}x^2}{(\frac{x}{2})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2}{(\frac{x}{2})^2}=4$$

$$(2)\lim_{x\to 0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{(\sqrt{1+x}-1)(\ln(1+x)-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tanx}-e^{sinx}}{\frac{x}{2}(-\frac{x^2}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}(e^{tanx-sinx}-1)}{-\frac{x^3}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tanx-sinx}-1}{-\frac{x^3}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{-\frac{x^3}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{-\frac{x^3}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(\frac{1-cosx}{cosx})}{-\frac{x^3}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{-\frac{x^3}{4}cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{-\frac{x^3}{4}}=-2$$

$$(3)\lim_{x\to\infty}(sin\frac{2}{x}+cos\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}e^{ln(sin\frac{2}{x}+cos\frac{1}{x})x}=\lim_{x\to\infty}e^{(sin\frac{2}{x}+cos\frac{1}{x}-1)x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0}e^{(sin2t+cost-1)\frac{1}{t}}=e^2$$

(4) $\lim_{x\to\infty}[(x^2+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x-\frac{1}{x^2}cosx]$

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x^2+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[(x^2+x)(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2})-x\right]=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}cosx=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x^2+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x-\frac{1}{x^2}cosx\right]=\frac{1}{2}$$

(5) $\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}[3^n\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right)]^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}(3^n)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{n}}=3$

(6) $\lim_{n\to\infty}n^2\left(arctan\frac{1}{n}-arctan\frac{1}{n+1}\right)\xrightarrow{拉格朗日中值}\lim_{x\to\infty}n^2\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\xi\in(\frac{1}{n},\frac{1}{n+1})$

$n\to\infty$时，$\xi\to 0$, $\lim_{x\to\infty}n^2\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{x\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=1$

四、(6 分)求函数$y=\ln|secx+tanx|+x^x+arcran\sqrt{x^2-1}$的导数$\frac{dy}{dx}$和微分$dy|_{x=2}$。

$$\frac{dy}{dx}=secx+x^x(lnx+1)+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$dy|_{x=2}=\frac{dy}{dx}|_{x=2}dx=\left(sec2+4(ln2+1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)dx$$

五、(6 分)设$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^x}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$其中$g(x)$有二阶连续导数,$g(0)=1,g'(0)=1,$

$g''(0)=3$, (1)求$f'(x)$，(2)讨论$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性.

$$(1)x\neq 0,f'(x)=\frac{(g'(x)-e^x)x-g(x)+e^x}{x^2}=\frac{g'(x)x-g(x)-e^xx+e^x}{x^2}$$

$$x=0,f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^x}{x^2}\xrightarrow{洛必达}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-e^x}{2x}\xrightarrow{洛必达}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^x}{2}$$

$$f'(0)=\frac{g''(0)-1}{2}=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{g'(x)x-g(x)-e^xx+e^x}{x^2},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$$

$$(2)\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)x-g(x)-e^xx+e^x}{x^2}\xrightarrow{洛必达}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^x}{2}=1=f'(0)$$

$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

六、(8 分)已知$f(x)=\begin{cases}\frac{(a+b)sinx+2\ln(1-x)}{x},x>0\\ e^{ax}-1,x\leq 0\end{cases}$在$x=0$处可导,试求处$a$和$b$.

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(a+b)sinx+2\ln(1-x)}{x}=a+b-2$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^+}e^{ax}-1=0,$$

$f(0^+) = f(0^-), a + b - 2 = 0$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(a+b)sinx + 2\ln(1-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2sinx + 2\ln(1-x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2cosx - 2\frac{1}{1-x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-x)cosx - 2}{2x(1-x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2cosx - 2xcosx - 2}{2x} = -1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$$

$f'(0^+) = f'(0^-)$，$a = -1, b = 3$

七、证明题（10 分）

若函数$f(x)$在闭区间[0，1]上连续，在开区间(0，1)内可导，且$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，证明：

(1)存在$\xi \in (0,1)$, *使得*$f(\xi) = 1 - \xi$;

(2)存在两个不同的点$a, b \in (0,1)$, *使得*$f'(a)f'(b) = 1$.

证明：

(1) $F(x) = f(x) - 1 + x, F(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, F(1) = f(1) - 1 + 1 = 1 > 0,$

存在$\xi \in (0,1)$, *使得*$F(\xi) = 0$, *即*$f(\xi) = 1 - \xi$.

(2)根据(1),

存在$a \in (0, \xi)$上，由拉格朗日中值定理，$F'(a) = \dfrac{F(\xi) - F(0)}{\xi - 0} = \dfrac{1}{\xi}, F'(a) = f'(a) + 1$

$$f'(a) = \frac{1-\xi}{\xi}$$

存在$b \in (\xi, 1)$上，由拉格朗日中值定理，$F'(b) = \dfrac{F(\xi) - F(1)}{\xi - 1} = \dfrac{-1}{\xi - 1}, F'(b) = f'(b) + 1$

$$f'(b) = \frac{1-\xi}{\xi}$$

$\therefore f'(a)f'(b) = 1$

注：本试题答案由“寒雀秋虫”独立解答录入，旨在提高大家共同学习氛围，答案仅供参考，请勿用于其他活动，纠错反馈，请联系作者 QQ1114187185。