第十章

重 积 分

一元函数积分学

$$\downarrow$$

多元函数积分学 $\begin{cases} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{cases}$

引入：

一元函数积分学：

不定积分：已知函数原函数问题

定积分： 研究曲边梯形面积问题引入，解决非均匀分布在某区间上的量的总量问题.

如：(1) 变速直线运动的路程

(2) 平面直线段上分布着不均匀密度的物质线段的质量

牛顿莱布尼兹公式

实际中还会遇到:

问：(1) 平面上密度分布不均匀物质薄片的质量?

(2) 空间中一个由有界闭区域所围成的空间物体，其上密度分布不均匀，求其质量?

(3) 一条曲线段(空间或平面)上或一块曲面上，分布着不均匀的密度时，质量如何求?

—— 探讨新方法

定积分：某种特定和式的极限.

被积函数与积分区间是定积分两个因素.

要将这种特定和式的极限推广到：定义在平面或空间内的闭区域、曲线及曲面上多元函数的情形.

多元函数积分学：

二重、三重积分、第一型曲线、曲面积分

第二型曲线、曲面积分 （与方向有关）

第一节 二重积分的概念与性质

一、引例

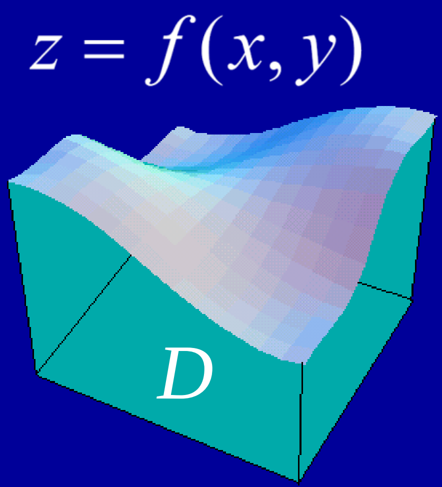
二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

一、引例

1. 曲顶柱体的体积



给定曲顶柱体，求体积:

底： xOy 面上的有界闭区域 D

顶： 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面： 以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面

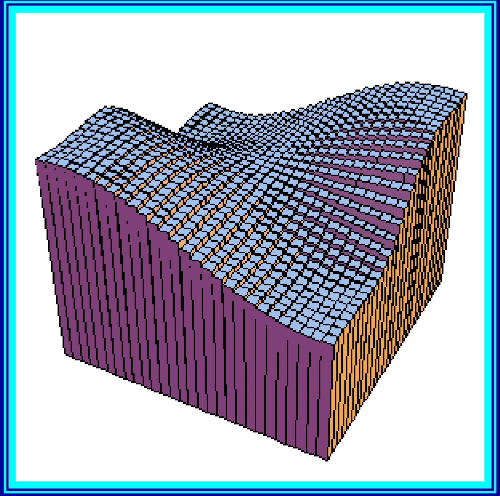
解法： 类似定积分解决问题的思想:

分割 (以大化小)

局部近似 (以匀代变)

近似求和

取极限

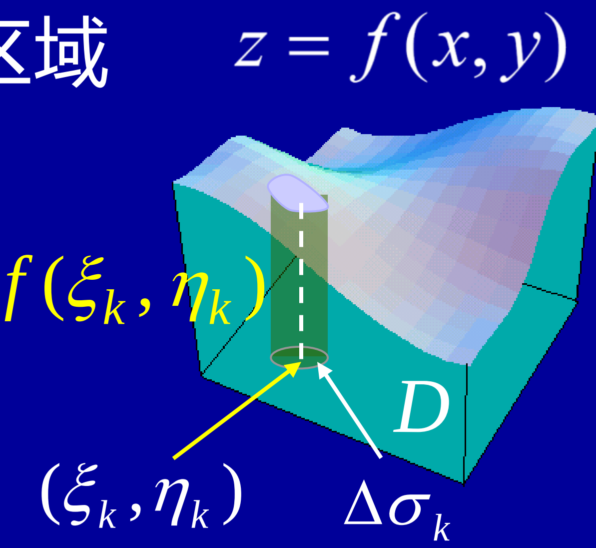


1)“分割”

用任意一组曲线网分D为 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底(作柱面)把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2) “局部近似”　(小平顶柱体)

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点(ξ_k, η_k), 则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) “近似求和”

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

目录 上页 下页 返回 结束

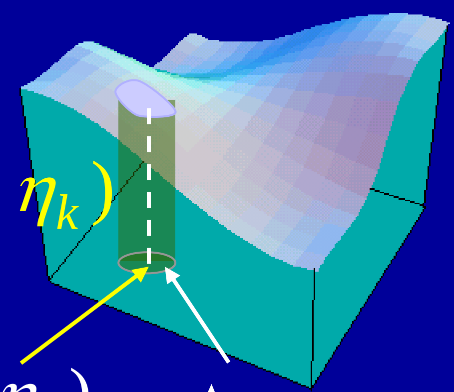
4) “取极限”

定义 $\Delta\sigma_k$ 的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k) = \max\left\{ \left| P_1P_2 \right| \middle| P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k \right\}$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\left\{ \lambda(\Delta\sigma_k) \right\}$

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

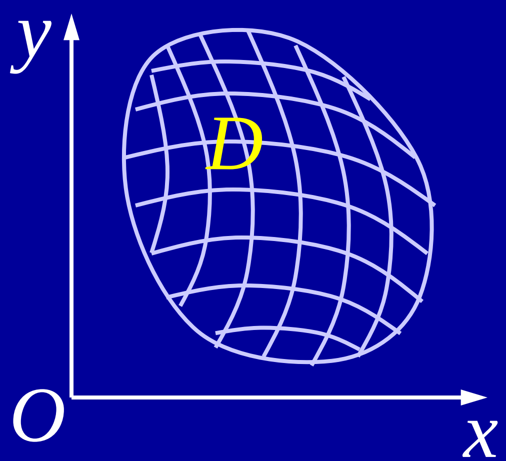


2. 平面薄片的质量

一块平面物质薄片(不计厚度), 在 xOy 面占有闭区域 D，面密度为 $\mu(x,y)(>0)$ 为D上连续函数.求该薄片质量 M .

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数), 设D 的面积为σ, 则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$非常数，仍可用

"大化小, 常代变,近似和, 求极限"

解决.

1)"大化小"

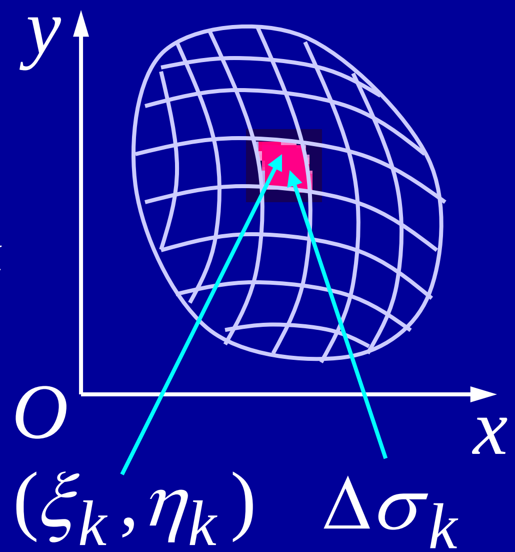
用任意曲线网分D 为 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，

相应把薄片也分为小块 .

2)"匀代变"　(看成均匀小薄片)

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k,η_k),则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$



3)"近似和"

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4)"取极限"

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的**共性**:

(1) 解决问题的步骤相同

"大化小, 匀代变, 近似和,取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

解决问题的思想方法和定积分完全一样：

用来解决非均匀分布在几何形体Ω上可通过加量求和来求总量的问题.

一元函数：定积分，Ω是区间，即直线段

上两例（二元函数）：Ω是平面有界闭区域

实际中，还有许多问题归结为此形式极限.

现数学上进行一般性研究，抽象出二重积分的概念.

二、二重积分的定义

定义: 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上有界函数 ,将 D 任意 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$, (记号同时表示面积) 在每个$\Delta\sigma_k$上 任取一点(ξ_k, η_k), 作乘积 $f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$, 并作和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$ 如果当各个小闭区域的直径中的最大值$\lambda \to 0$时，此和式的极限总存在，且与闭区域D的分法及界点(ξ_k, η_k)的选取无关，则称此极限为函数

$f(x, y)$在闭区域D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$

即

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \underline{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k}$$

积分和

$$\iint\limits_D \boxed{\underline{f(x, y)}\, \underline{d\sigma}}$$

被积表达式

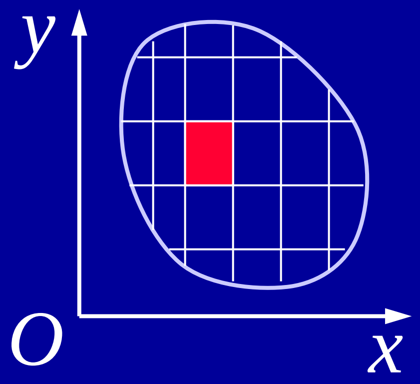
积分域

被积函数

x, y 称为积分变量

面积元素

如果 $f(x,y)$ 在D上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D , 这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$,因此面积元素$\mathrm{d}\sigma$也常记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 二重积分记作



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

三、二重积分几何意义

若$f(x,y)\geq 0$, $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ 几何上表示：以D为底,

以曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积.

若$f(x,y)<0$, 柱体在xOy面的下方，二重积分的值是

负的，绝对值等于柱体体积.

若$f(x,y)$在D上有正有负，二重积分是xOy上方柱体

体积减去下方柱体

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ **几何意义**：以D为底,

曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积的代数和.

四、可积性

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D上连续, 则 $f(x,y)$ 在D上**可积**.

定理2. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D上可积, 则f在D上有界.（但反过来不成立）

例： D: $[0,1]\times[0,1]$

$f(x,y) = 1,$ 当x和y都是有理数时

$f(x,y) = -1,$ 当x和y中至少有一个是无理数

此例：$|f(P)|$可积，但$f(P)$不一定可积.

五、二重积分的性质

1. 若在D上$f(x,y)\equiv 1$, σ为D 的面积, 则

$$\iint_D 1\cdot \mathrm{d}\,\sigma = \iint_D \mathrm{d}\,\sigma = \sigma$$

2. (线性性质) 设α,β为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}\,\sigma$$
$$= \alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma$$

3. （积分区域可加性）$(D = D_1\cup D_2$，D_1，D_2无公共内点)

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

4. (比较性质) 若在D上 $f(x,y)\le\varphi(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别, 由于 $-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|$

$$\therefore\quad \left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{(绝对可积性)}$$

f 可积 $\Rightarrow$ $|f|$ 可积 (反过来不成立)

5. (估值不等式) 设 $M=\max\limits_D f(x,y),\ m=\min\limits_D f(x,y)$, D 的面积为σ, 则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

6. (二重积分中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域D上连续, σ为D 的面积 , 则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质5 可知,

$$\min_D f(x,y) \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \max_D f(x,y)$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

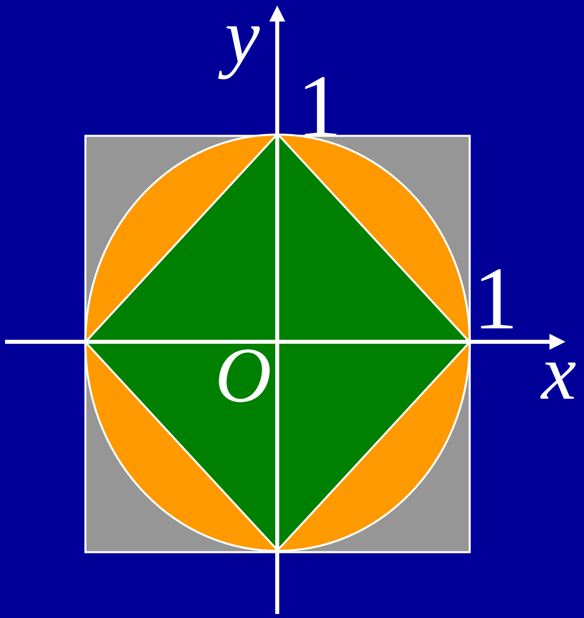
$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

例1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \iint\limits_{D} |xy|\,dx\,dy \qquad \mathrm{D}:\ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$$



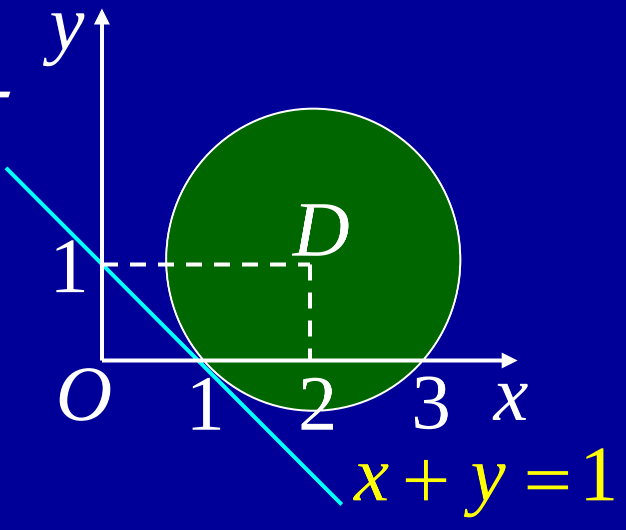
解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

例2. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\,,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$



其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$

解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

它在与 x 轴的交点 $(1,0)$ 处与直线 $x+y=1$ 相切.

而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le(x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例3. (2005研) 设 $I_1 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

$I_2 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,d\sigma \qquad I_3 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$

其中$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$, 则（ A ）

(A) $I_3 > I_2 > I_1$ (B) $I_1 > I_2 > I_3$

(C) $I_2 > I_1 > I_3$ (D) $I_3 > I_1 > I_2$

分析：在D上, $(x^2+y^2)^2 \le x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2}$

等号仅在D边界上成立. 从而

$$\cos(x^2+y^2)^2 \ge \cos(x^2+y^2) \ge \cos\sqrt{x^2+y^2}$$

且等号仅在D边界上成立，又三个被积函数在D上连续.

所以$I_3 > I_2 > I_1$

注： （1）若f在有界闭区域D上连续，$f(x,y) \geq 0$, 且

$f(x,y) \neq 0$，则 $\iint_D f\, d\sigma > 0$.

(用连续函数的局部保号性，二重积分的性质)

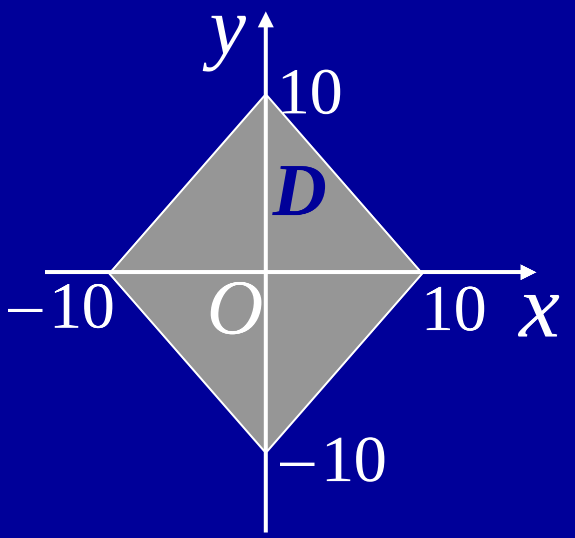
（2）设$f(x,y), g(x,y)$在有界闭区域D上连续，若

在D上 $f(x,y) \leq g(x,y)$，且$f(x,y) \neq g(x,y)$

则 $$\iint_D f(x,y)\, d\sigma < \iint_D g(x,y)\, d\sigma$$

例4. 估计积分值

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\qquad D: |x|+|y|\le 10$$



解: D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

积分性质5

$$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}$$

即: $1.96\le I\le 2$

例5．估计$I=\iint\limits_D (x^2+3y^2+1)\,d\sigma$ 其中$D: x^2+y^2\le 5$

解：$f(x,y)=x^2+3y^2+1.$ $\begin{cases} f_x'=2x=0 \\ f_y'=6y=0 \end{cases}$

得到f在D内唯一驻点$(0,0)$. $f(0,0)=1$

在D的边界上$f(x,y)=2y^2+6$ $\left(-\sqrt{5}\le y\le\sqrt{5}\right)$

在D的边界上f的最小值为6，最大值为16.

$$5\pi\le I\le 80\pi$$

例6． 求 $I=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dx\,dy$

其中$f(x,y)$为连续函数.

分析: （抽象函数无法计算, 将对积分的极限转化为对被积函数求极限，利用积分中值定理.）

解：　由积分中值定理，在圆域$x^2+y^2\le r^2$上至少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dx\,dy=f(\xi,\eta)\sigma=f(\xi,\eta)\pi r^2$$

$$I=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}f(\xi,\eta)\pi r^2=f(0,0)$$

备用题

1. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0 < y < 1$, 则

$$I_1 = \iint_D y x^3 \,\mathrm{d}\sigma, \quad I_2 = \iint_D y^2 x^3 \,\mathrm{d}\sigma, \quad I_3 = \iint_D y^{1/2} x^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (D)

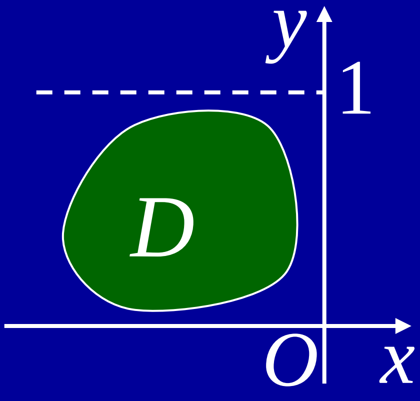
$(A)\ I_1 \le I_2 \le I_3$; $(B)\ I_2 \le I_1 \le I_3$;

$(C)\ I_3 \le I_2 \le I_1$; $(D)\ I_3 \le I_1 \le I_2$.

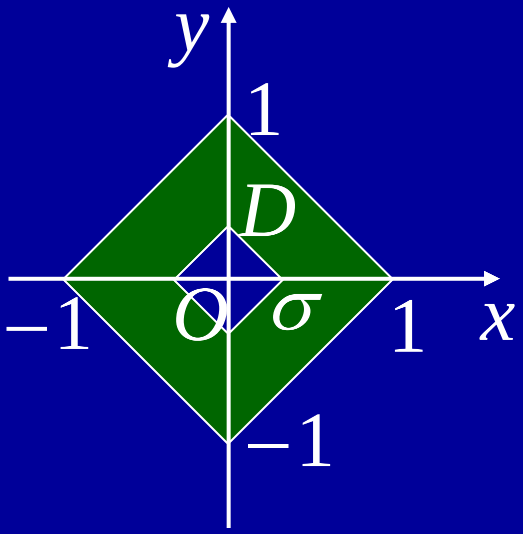
提示: 因 $0 < y < 1$, 故 $y^2 \le y \le y^{1/2}$;

又因 $x^3 < 0$, 故在D上有

$$y^{1/2} x^3 \le y x^3 \le y^2 x^3$$



2. 判断 $\iint\limits_{\sigma \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (0<\sigma<1)$ 的正负.



解: 当 $\sigma \le |x|+|y| \le 1$ 时,

$$0 < x^2+y^2 \le (|x|+|y|)^2 \le 1$$

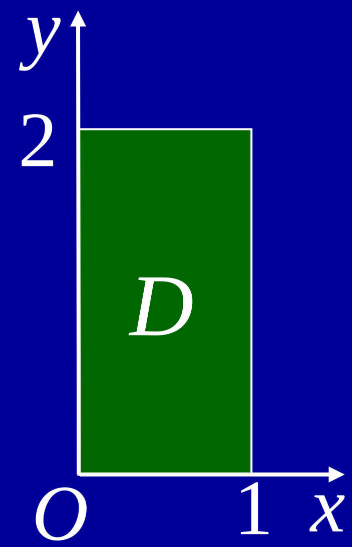
故 $\quad \ln(x^2+y^2) \le 0$

又当 $|x|+|y|<1$ 时, $\ln(x^2+y^2)<0$

于是 $\quad \iint\limits_{\sigma \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 0$

3. 估计 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 D 为

$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2.$



解: 被积函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$

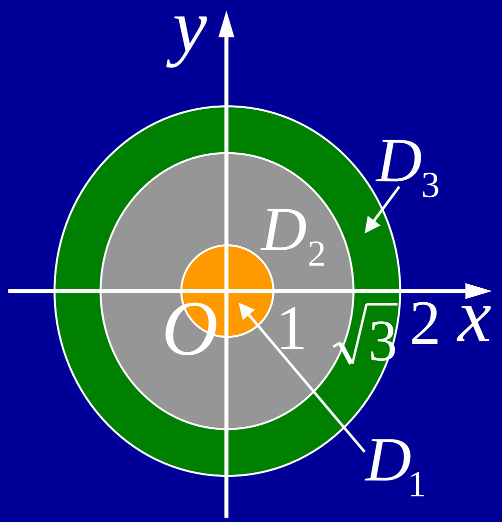
D 的面积 $\sigma=2$

在D上 $f(x,y)$ 的最大值 $M=f(0,0)=\dfrac{1}{4}$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=f(1,2)=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}$, 即 $0.4\le I\le 0.5$

4. 判断积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的正负号.



解: 分积分域为 D_1, D_2, D_3, 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = {} & \iint_{D_1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
& -\iint_{D_2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
& -\iint_{D_3}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

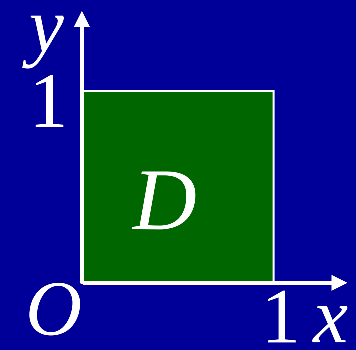
舍去此项

猜想结果为负

$$
< \iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3}\sqrt[3]{3-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

$$
= \pi - \sqrt[3]{2}\,\pi(4-3) = \pi(1-\sqrt[3]{2}) < 0
$$

5. 证明: $1 \le \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \sqrt{2}$, 其中 D 为 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.



解: 利用题中 x , y 位置的对称性, 有

$$\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma\Big]$$

$$= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D \sin(x^2 + \tfrac{\pi}{4})\,\mathrm{d}\sigma$$

$\because\ 0 \le x^2 \le 1$, $\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \le 1$, 又 D 的面积为 1 , 故结论成立 .

作 业

P140　4， 5: (1),(3),　6: (1),(2)