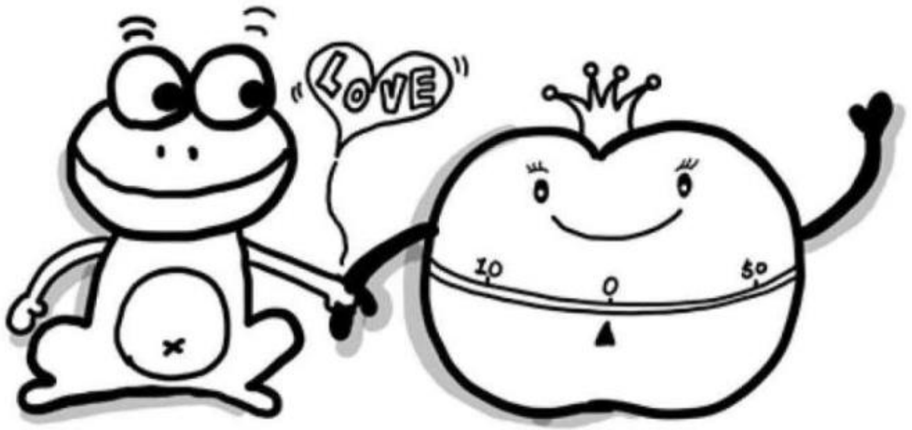
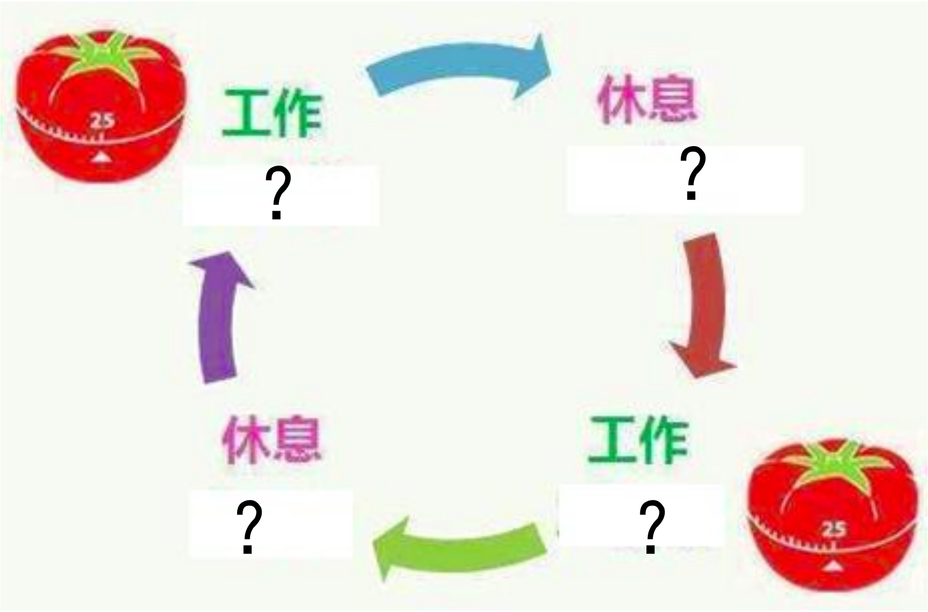


青蛙和番茄

番茄工作法的原理是人为地打造「**心流**」状态

心流出现时，一个人可以投入全部的注意力，以求达成目标。
-----米哈里 ▪希斯赞特米哈伊



时间管理

https://www.zhihu.com/question/19705539

http://blog.sciencenet.cn/home.php?mod=space&uid=352862&do=blog&id=1194195

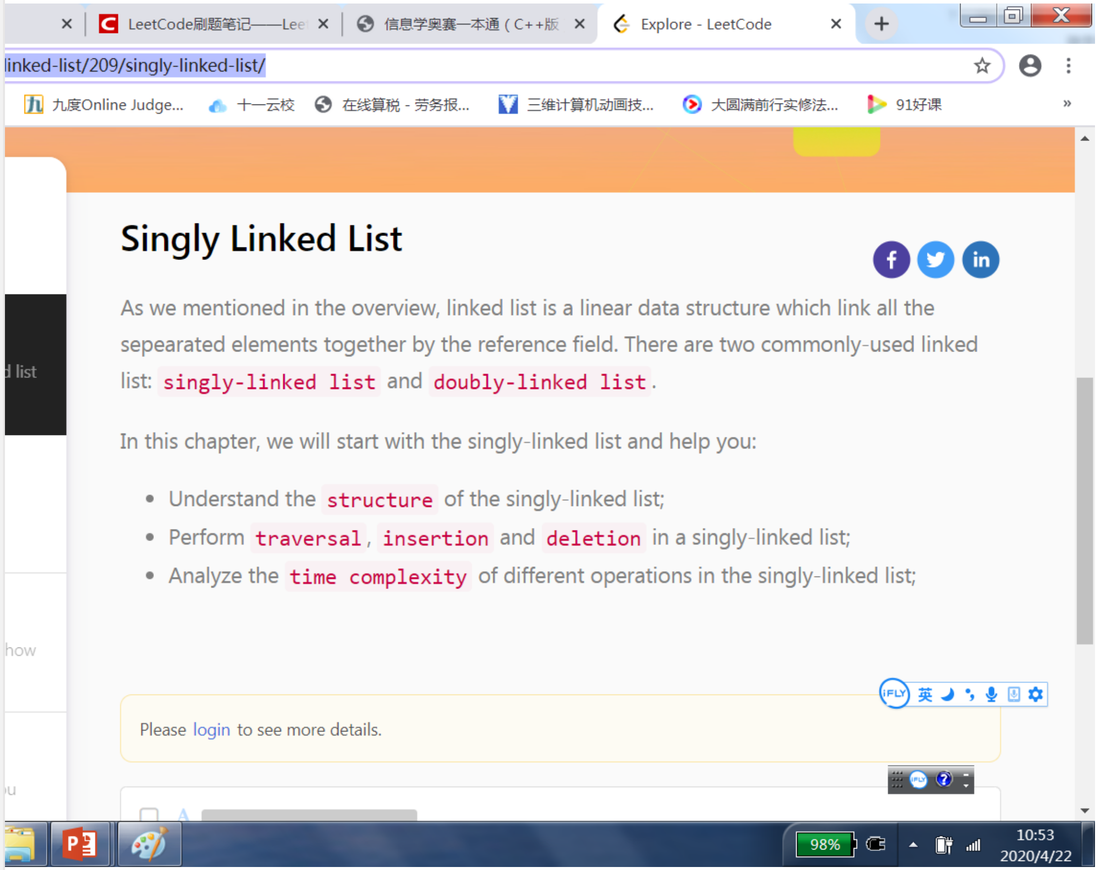
刷题网站

http://acm.zju.edu.cn/onlinejudge/

http://ybt.ssoier.cn:8088/

*https://leetcode.com/

https://leetcode.com/explore/learn/card/linked-list/209/singly-linked-list/

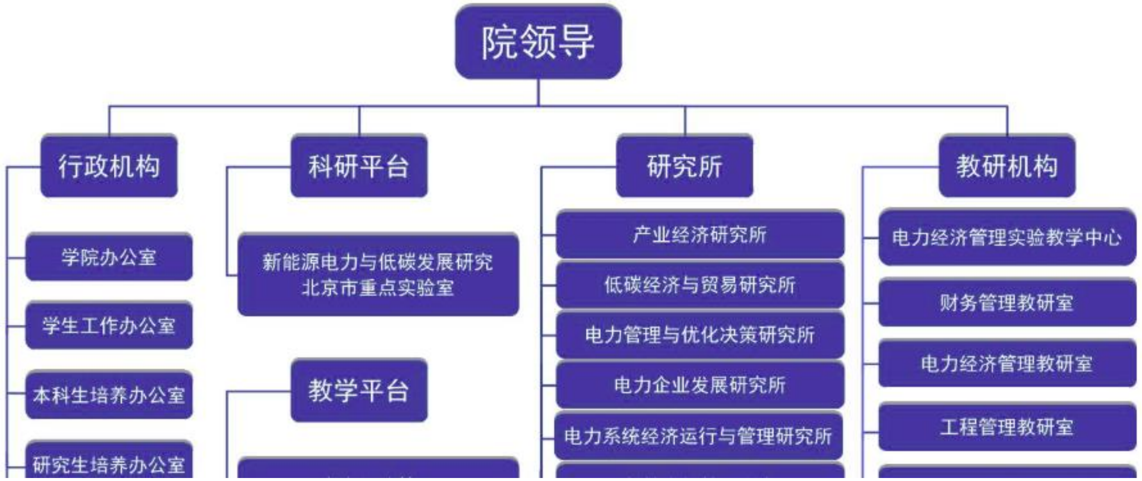


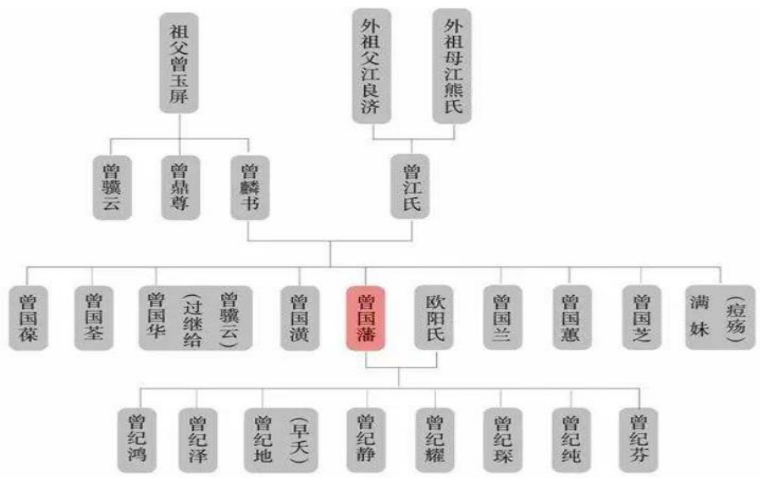
预习要点

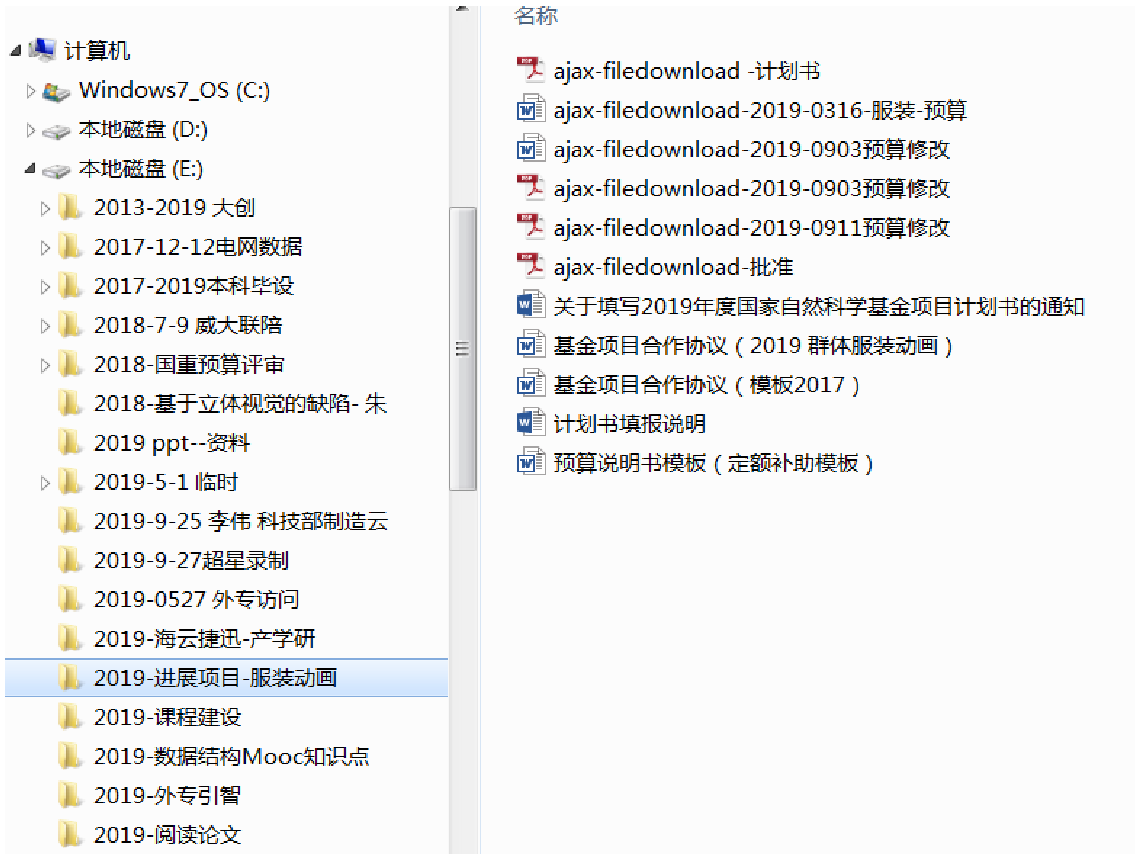
- 什么是树
- 什么是二叉树
- 树和二叉树的不同
- 二叉树的5个基本性质
- 二叉树的两种存储结构

第5章 树与二叉树

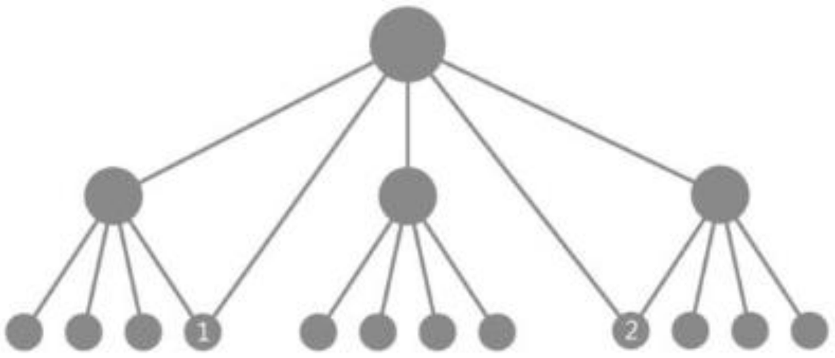
思考以下问题

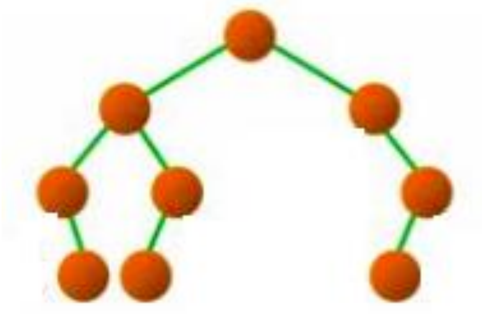

院领导
行政机构
科研平台
研究所
教研机构
学院办公室
学生工作办公室
本科生培养办公室
研究生培养办公室
新能源电力与低碳发展研究北京市重点实验室
教学平台
产业经济研究所
低碳经济与贸易研究所
电力管理与优化决策研究所
电力企业发展研究所
电力系统经济运行与管理研究所
电力经济管理实验教学中心
财务管理教研室
电力经济管理教研室
工程管理教研室

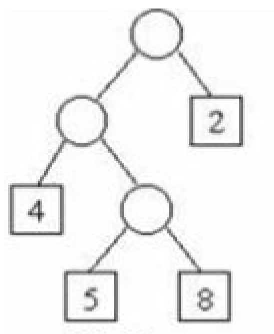

祖父曾玉屏
外祖父江良济
外祖母江熊氏
曾骥云
曾鼎尊
曾麟书
曾江氏
曾国葆
曾国荃
曾国华（过继给曾骥云）
曾国潢
曾国藩
欧阳氏
曾国兰
曾国蕙
曾国芝
满妹（痘殇）
曾纪鸿
曾纪泽
曾纪地（早夭）
曾纪静
曾纪耀
曾纪琛
曾纪纯
曾纪芬


计算机
Windows7_OS (C:)
本地磁盘 (D:)
本地磁盘 (E:)
2013-2019 大创
2017-12-12电网数据
2017-2019本科毕设
2018-7-9 威大联陪
2018-国重预算评审
2018-基于立体视觉的缺陷- 朱
2019 ppt--资料
2019-5-1 临时
2019-9-25 李伟 科技部制造云
2019-9-27超星录制
2019-0527 外专访问
2019-海云捷迅-产学研
2019-进展项目-服装动画
2019-课程建设
2019-数据结构Mooc知识点
2019-外专引智
2019-阅读论文
名称
ajax-filedownload -计划书
ajax-filedownload-2019-0316-服装-预算
ajax-filedownload-2019-0903预算修改
ajax-filedownload-2019-0903预算修改
ajax-filedownload-2019-0911预算修改
ajax-filedownload-批准
关于填写2019年度国家自然科学基金项目计划书的通知
基金项目合作协议（2019 群体服装动画）
基金项目合作协议（模板2017）
计划书填报说明
预算说明书模板（定额补助模板）

本章内容







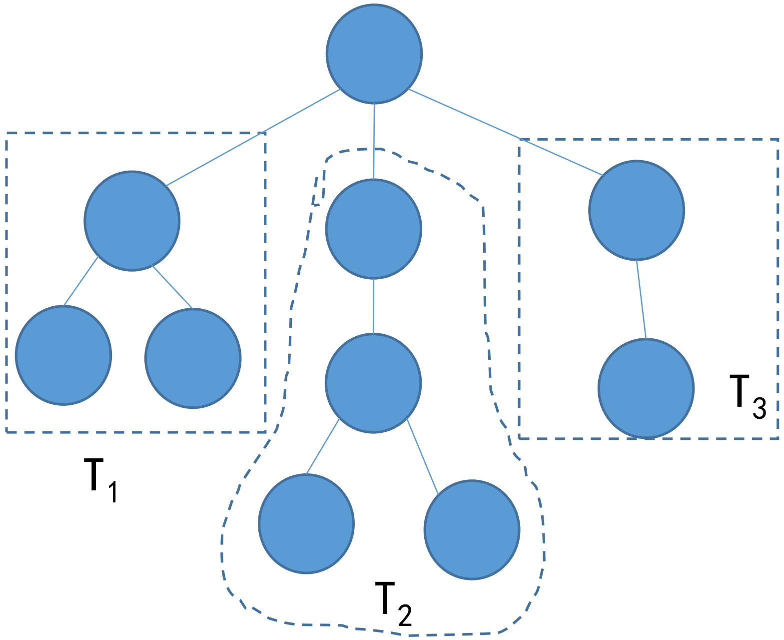
5.1　树的定义和基本术语

（1）树：是n个结点的有限集合。

非空树

- 根结点
- m个互不相交的有限集：T_1，T_2，…，T_m，

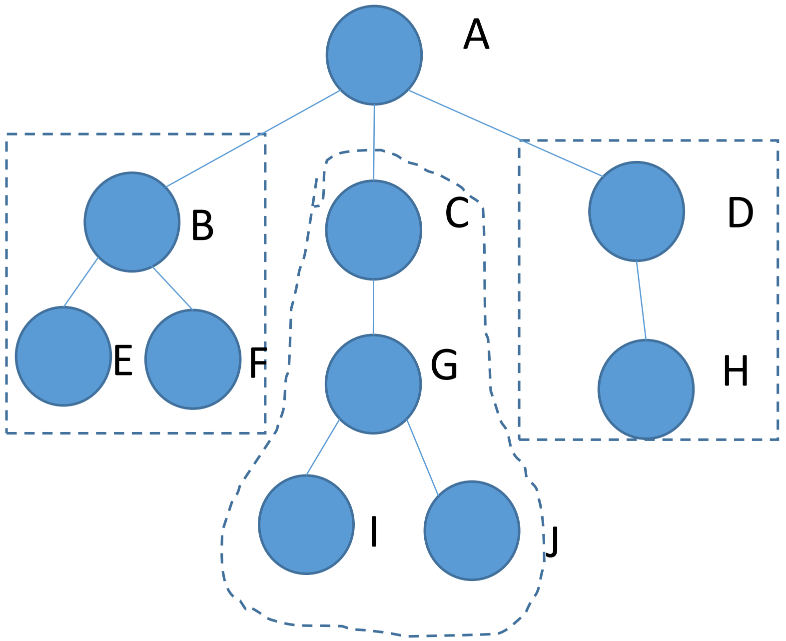
其中每一个集合本身又是一棵树，并且称为根的子树。



树的定义是递归的。

（2）树的表示

第一种表示：结点连线。隐含：上方结点是下方结点的前驱。



A是根

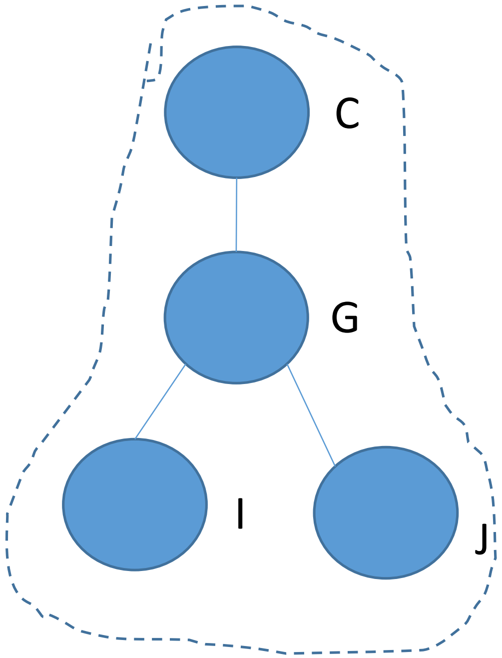
T1 = {B,E,F}

T2 = {C,G,I,J}

T3 = {D,H}

在树中，每个结点被定义为它的子树的根结点的前驱。

第二种表示：二元组表示。   如上面的T2可表示为：



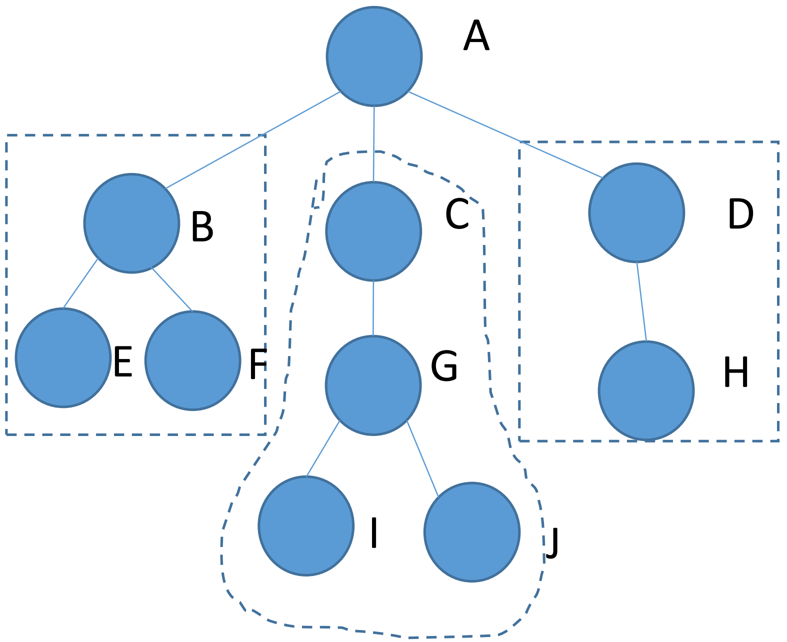
K={C,G,I,J}

R={<C,G>,<G,I>,<G,J>}

关系r应满足以下关系：

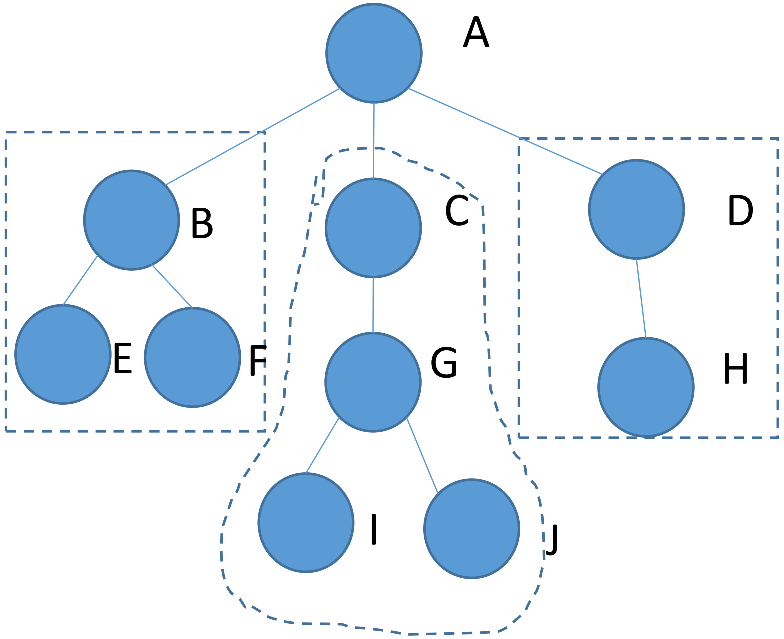
- 根结点没有前驱；
- 其余每个结点只有一个前驱结点
- 任何结点可以有0到多个后继

第三种：广义表表示



$$\underset{\text{树根}}{A}(\ \underbrace{B(E, F),}_{T_1}\ \underbrace{C(G(I, J)),}_{T_2}\ \underbrace{D(H)}_{T_3}\ )$$

（3）基本术语



(1)树的结点：包含一个数据元素及若干指向其子树的分支

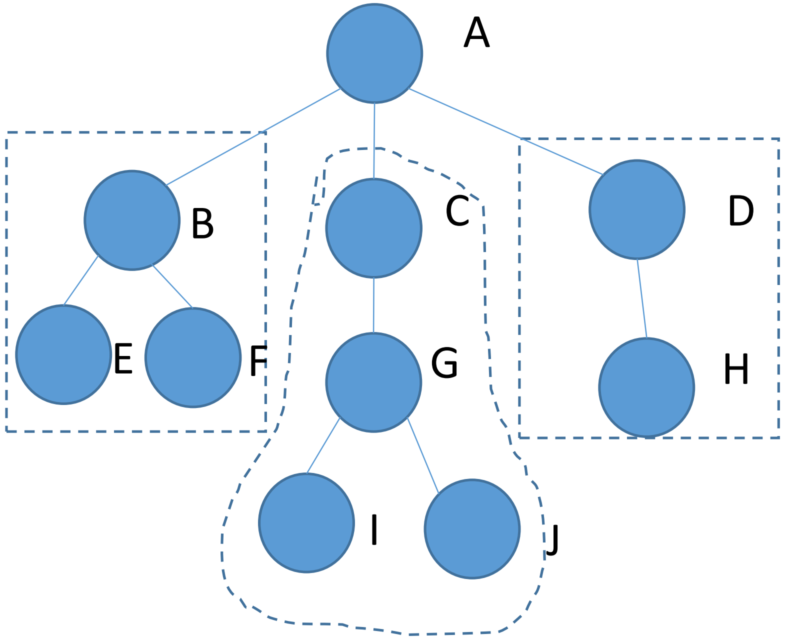
(2)结点的度（degree）：结点拥有的子树数。

(3)树的度：树内各结点的度的最大值。

(4)根结点：无前驱。

(5)叶子（终端结点）：度为零的结点。

(6)分支结点（非终端结点）：度不为零的结点。除根结点外，分支结点也称内部结点。



(7) 孩子结点、双亲结点、和兄弟结点：

(8) 堂兄弟：

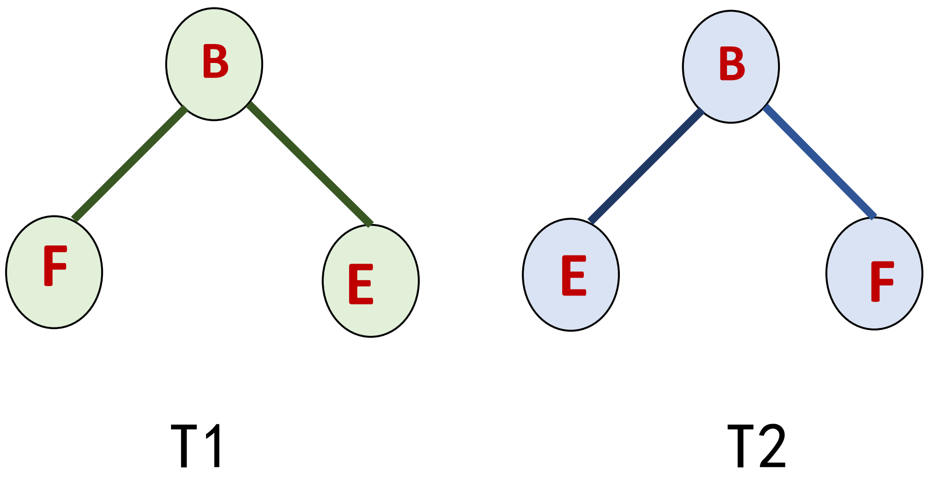
(9)祖先：结点的祖先是从根到该结点所经分支上的所有结点。

(10)子孙：以某结点为根的子树中的任一结点都称为该结点的子孙。

(11)结点的层次：根为第一层，根的孩子为第二层。

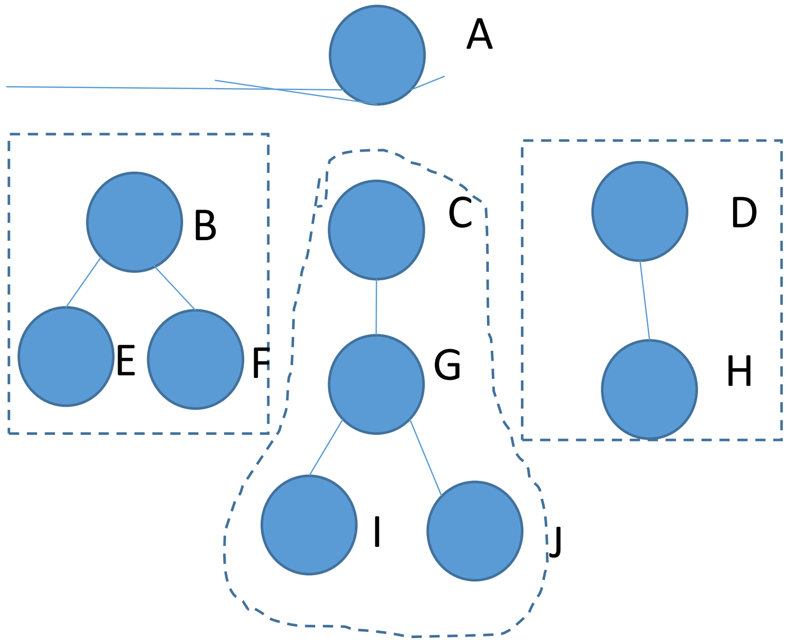
(12)树的深度（高度）：树中结点的最大层次。

(13) 有序树及无序树



家族树通常是有序树

（14）森林：M棵互不相交的树的集合



树结构与线性结构的比较

线性结构：

- 第一个数据元素 无前驱；
- 最后一个数据元素 无后继；
- 其它数据元素

  一个前驱、一个后继

树型结构：

- 根结点无前驱
- 多个叶子结无后继
- 其他数据元素一个前驱、多个后继

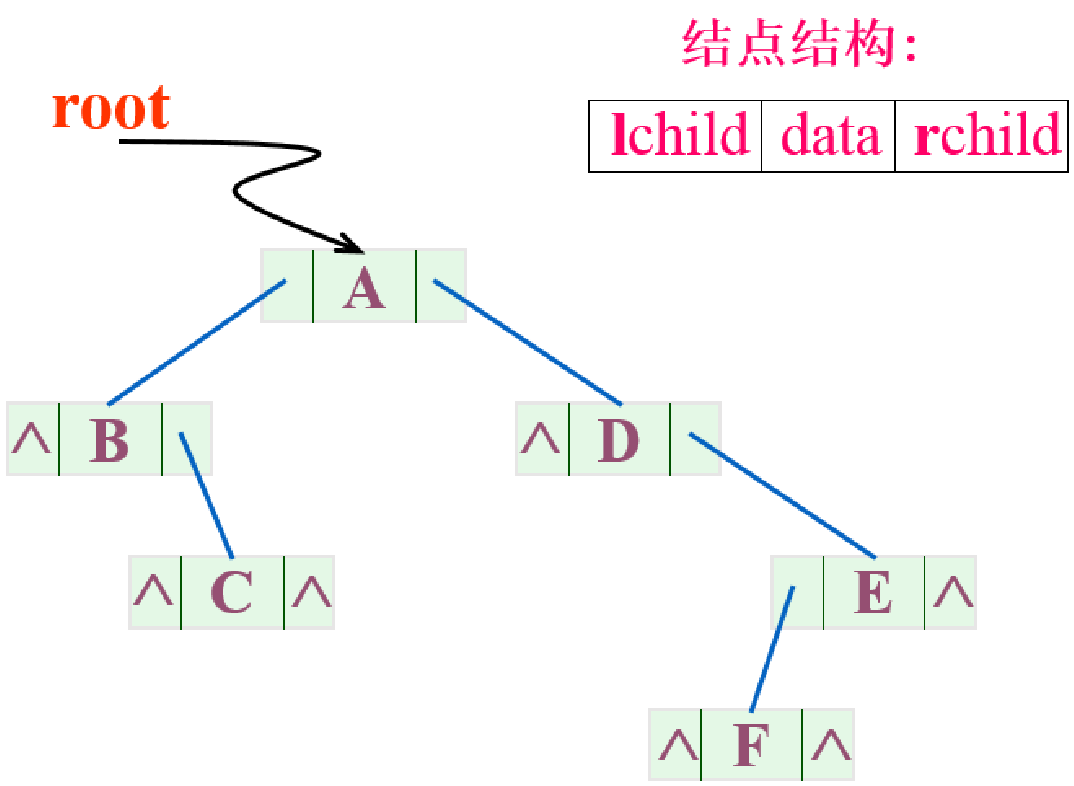
5.2　二叉树

5.2.1 二叉树的定义和性质

5.2.2 二叉树的存储结构

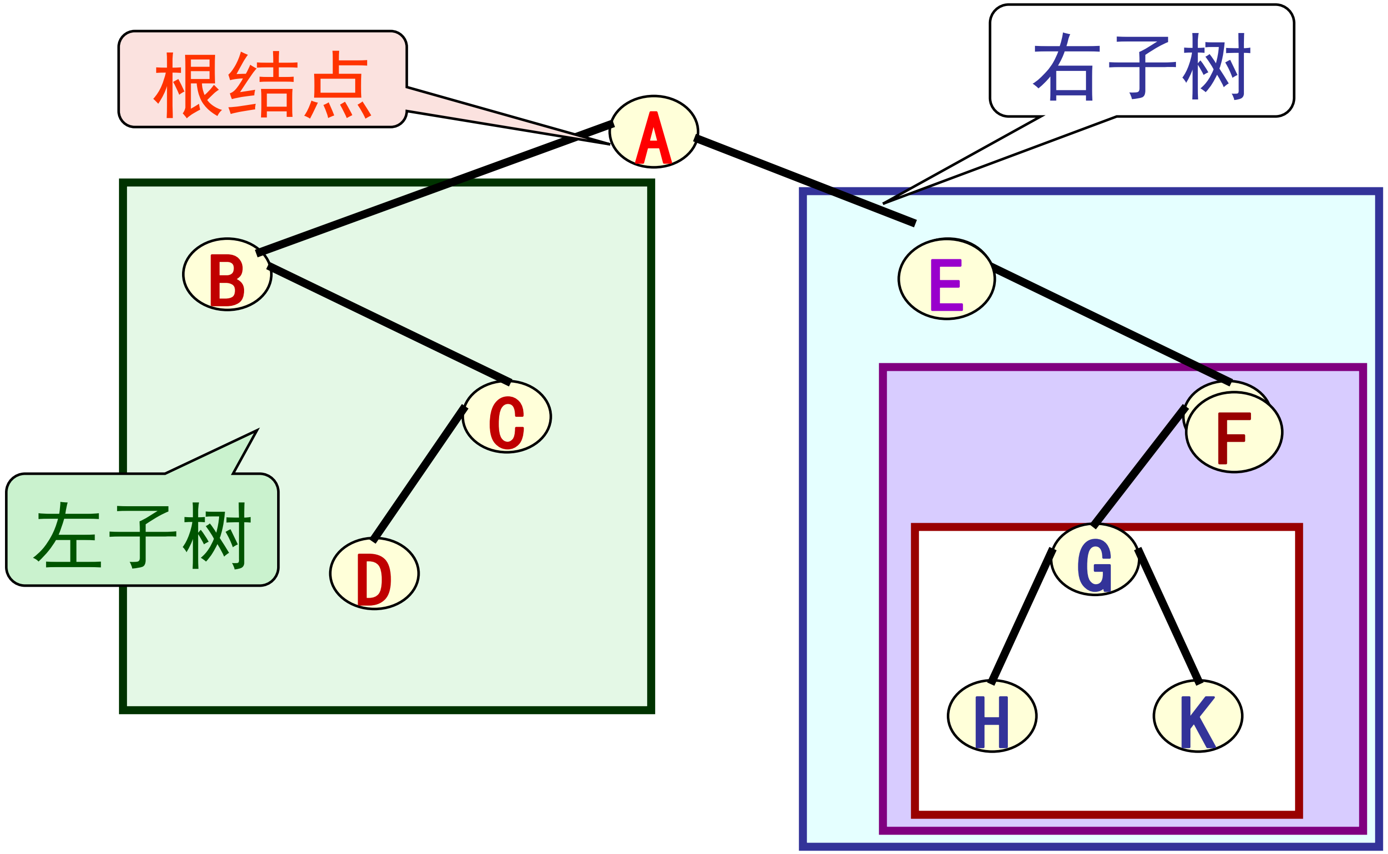
5.2.3 二叉树的遍历

5.2.4 二叉树遍历的应用



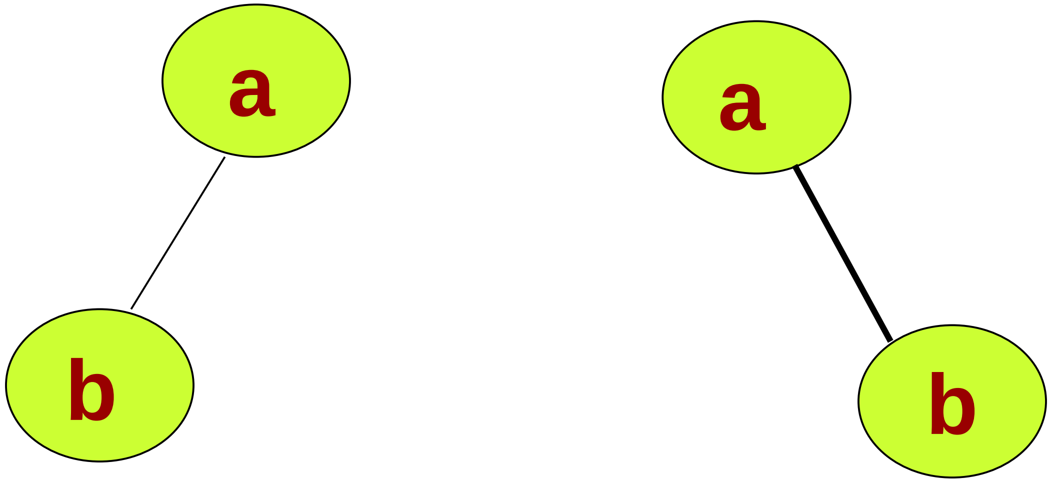
5.2.1 二叉树的定义及其性质

一 、定义：二叉树是n(n≥0)个结点的有限集合。它或为空树(n=0)，或由一个根结点和两棵分别称为根的左子树和右子树的互不相交的二叉树组成。



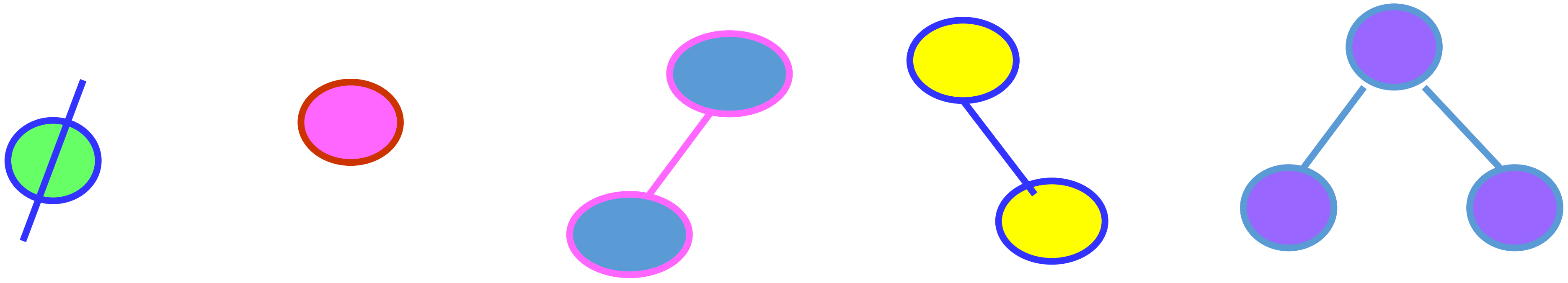
这也是一个递归定义。二叉树可以是空集合，根可以有空的左子树或空的右子树。

特点：每个结点至多只有两棵子树，子树有左右之分，其次序不能任意颠倒，分别称为左右子树。



两棵不同的二叉树

二叉树的五种基本形态



空二叉树

仅有
根结点

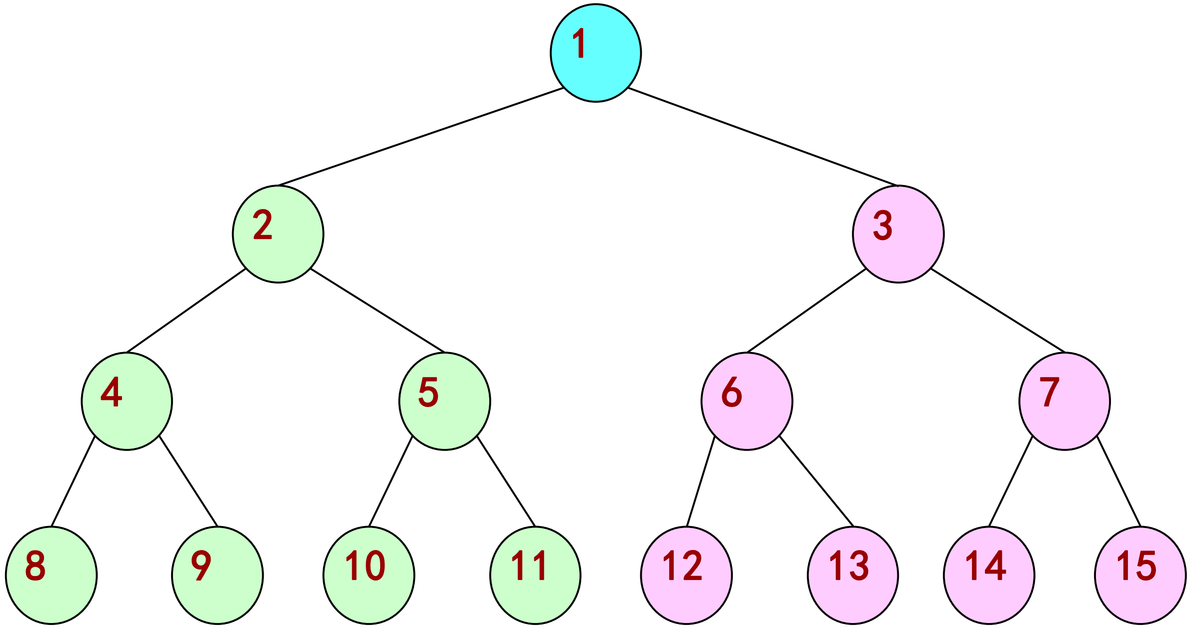
右子树
为空

左子树
为空

左右子树均
非空

二、特殊的二叉树

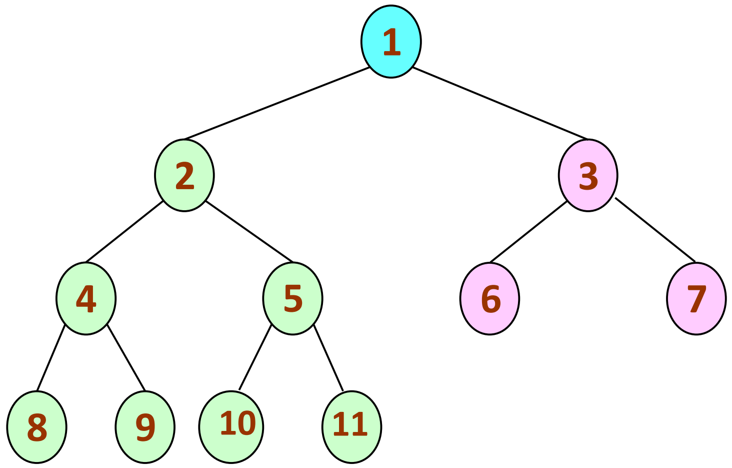
（1）满二叉树　　深度为k且含有2^k-1个结点的二叉树



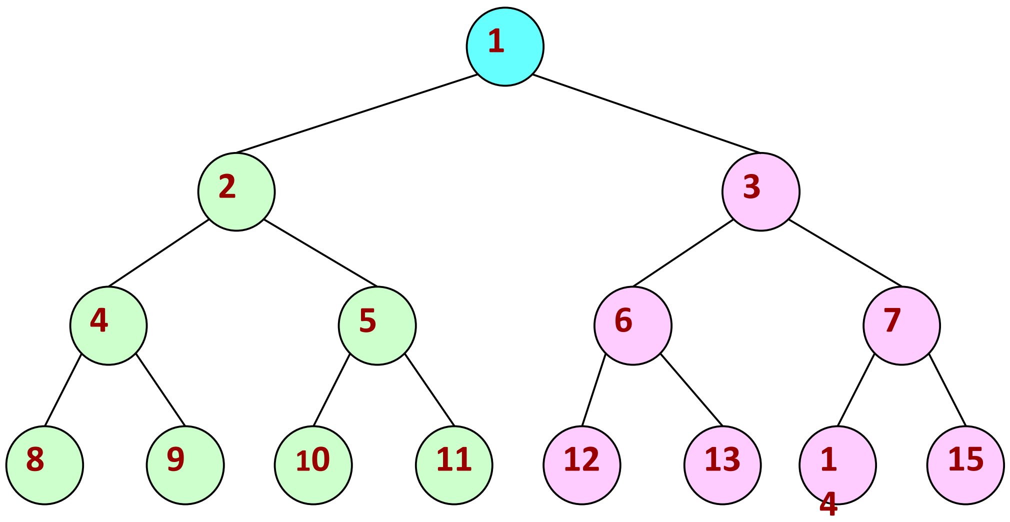
特点：每一层上都含有最大结点数。

（2）完全二叉树

树中所含的 *n* 个结点和满二叉树中**编号为** *1* **至** *n* **的结点**一一对应。



完全二叉树



满二叉树

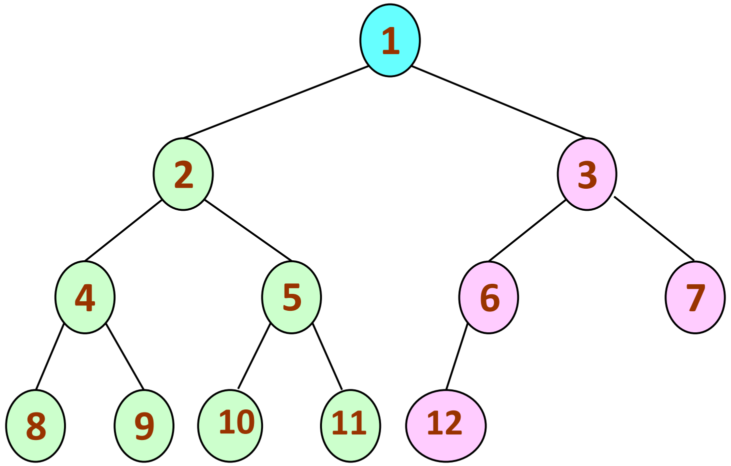
满二叉树是完全二叉树的特例

特点：

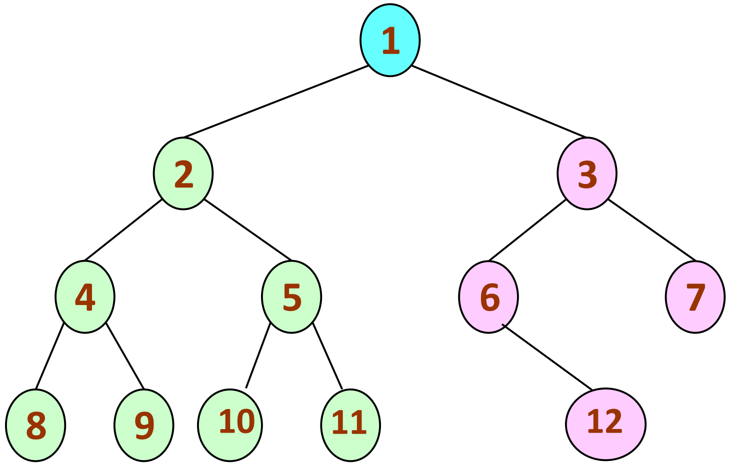
- 除最后一层外，每一层都取最大结点数
- 深度为k的完全二叉树, 所有的叶结点都出现在第k层或k－1层
- 最后一层结点都集中在该层最左边的若干位置
- 如果其右子树的最大层次为L，则其左子树的最大层次为L或L＋1.

（3）理想平衡树

在一棵二叉树中，若除最后一层外，其余层都是满的，则称此树是理想平衡树。理想平衡树包括满二叉树和完全二叉树。但并不一定是完全二叉树。



完全二叉树



理想平衡树

三、 二叉树的五个基本性质

性质1：在二叉树的第k层上至多有2^{k-1}个结点（$k\geqslant1$）

用归纳法证明：

（1）k=1时，$2^{k-1}=1$，即只有一个根结点。

（2）设对j=k−1，命题成立，则可以证明j=k时命题也成立。

由于第k−1层上至多有2^{k-2}个结点，由于二叉树中每个结点的度至多为2，故第k层上的结点数最多为 $2^{k-2} \times 2 = 2^{k-1}$。

性质2：深度为k的二叉树至多有2^k-1个结点（k≥1）

$\sum_{i=1}^{k}$第i层上的最大结点数 = $\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = (1+2+2^2+ \cdots +2^{k-1}) = 2^k-1$

性质3：对任何一棵二叉树T，如果其终端结点数为n_0，度为2的结点数为n_2，则有$n_0=n_2+1$。

证明（3）：设度为 1 的结点数为n 1，二叉树的总结点数为n，则有

$n = n0 + n1 + n2;$

整棵二叉树的分支数为B，由于除根结点外，每一个结点都有一个分支到达，则有

$n = B + 1;$

又由于这些分支数是由度为1和度为2的结点发出的，则有：

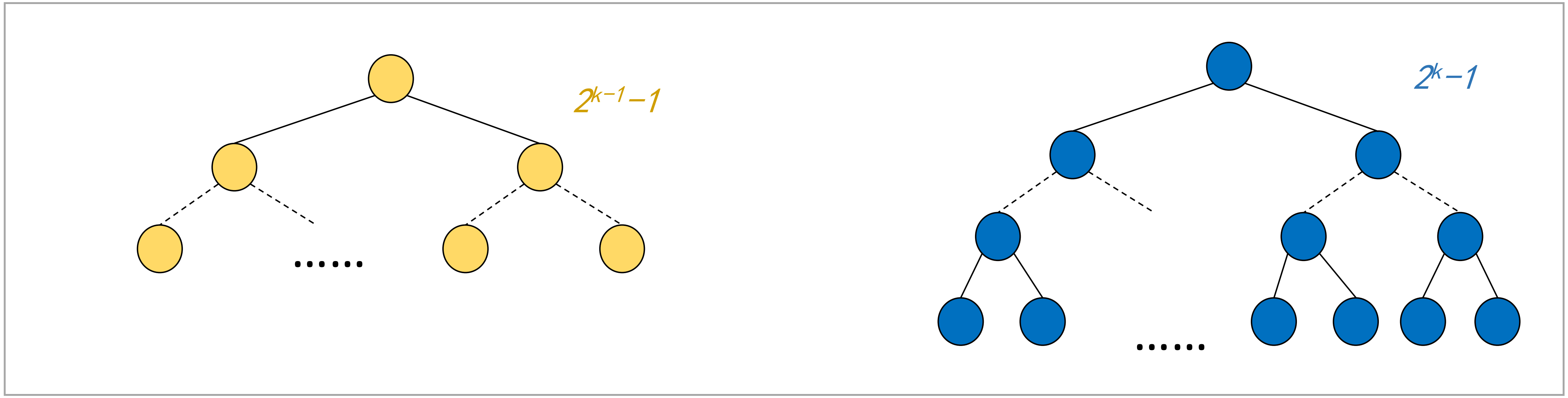
$B = n1 + 2n2$。

由上可得：$n0 + n1 + n2 = n1 + 2n2 + 1$

即可导出：$n0 = n2 + 1$

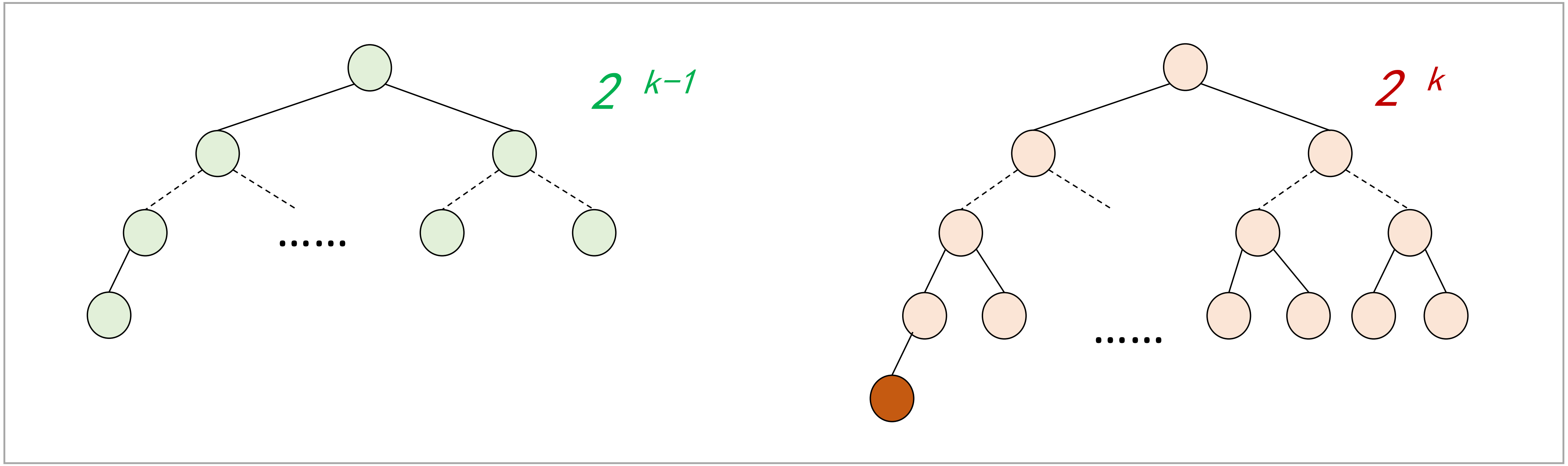
性质4：具有n个结点的完全二叉树的深度为$\lceil \log_2(n+1) \rceil$或$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$。

分析：n可取值的范围　$2^{k-1}-1 < n \leq 2^k-1$



深度为k-1的满二叉树状态　　深度为k的满二叉树状态

n可取值的范围 $2^{k-1} \leqslant n < 2^{k}$



深度为k的结点个数最少的完全二叉树状态

深度为k+1的结点个数最少的完全二叉树状态

证1

$2^{k-1}-1 < n \leqslant 2^{k}-1$

$2^{k-1} < n+1 \leqslant 2^{k}$

$k-1 < \log_2(n+1) \leqslant k$

$\log_2(n+1) \leqslant k < \log_2(n+1) + 1$

$k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

证2

$2^{k-1} \leqslant n < 2^{k}$

$k-1 \leq \log_2 n < k$

$\log_2 n < k \leq \log_2 n+1$

$k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1;$

或$\lfloor \log_2 n + 1 \rfloor$

性质5：如果对一棵有n个结点的完全二叉树，其深度为$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$的结点按层序编号，则对任一结点i（$1 \leqslant i \leqslant n$），有

(1)如果i = 1，则结点i是根。如果i>1，则其双亲parent(i)是结点$\lfloor i/2 \rfloor$。

(2)如果2i>n，则结点 i 为叶子，否则其左孩子Lchild(i)是结点2i。

(3)如果2i+1>n，则结点i无右孩子，否则其右孩子是结点2i+1。

证明(2),(3):

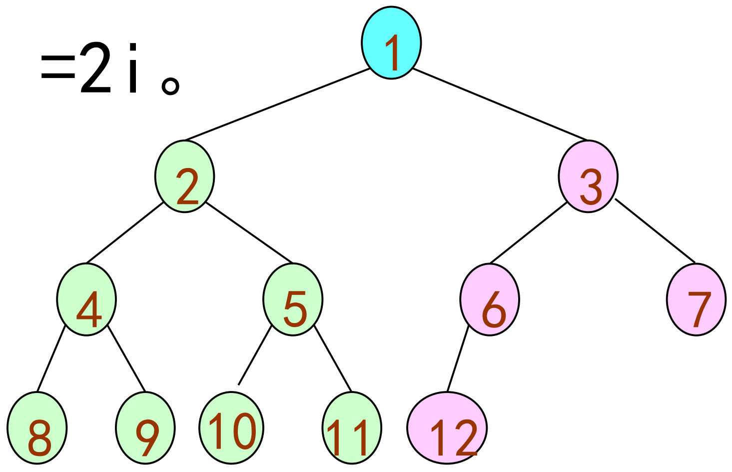
对于i=1,左孩子是2, 右孩子是3。

对于i>1,可分两种情况讨论:

第一种情况:设第j层的第1个结点的编号为i($i=2^{j-1}$),则其左孩子必为第j+1层的第1个结点,其编号为$2^{j}=2*2^{j-1}=2i$。

若2i>n,则i无左孩子。右孩子编号为2i+1,

若2i+1>n,则无右孩子



完全二叉树

第二种情况：假设第j层上某个结点的编号为i，且$2i+1<n$，则其左孩子为2i，右孩子为2i+1。

则编号为i+1的结点是编号为i的结点的右兄弟或堂兄弟，若它有左孩子，其编号必为$2i+2=2(i+1)$，若它有右孩子，其编号必为$2i+3=2(i+1)+1$。

由上可知，对于二叉树的任意一个结点，（2）（3）都成立

练习

练1. 具有n个结点的满二叉树，其叶结点的个数为多少？

练2. 设高为h的二叉树只有度为0和2的结点，则此类二叉树的结点数至少为？ 至多为？

练3. 已知一棵度为k的树中有n1个度为1的结点，n2个度为2的结点，n3个度为3的结点，nk个度为k的结点，问该树中多少个叶子结点？

练4. 已知一棵含有n个结点的树中，只有度为0和度为k的结点，求叶子结点数目？

练1：分析，满二叉树的总结点数和叶子结点数都与深度有关，因此设深度为k，则总结点数$n = 2^k - 1$，叶子结点数$n_0 = 2^{k-1}$，可导出，$n_0 = \frac{n+1}{2}$

练2：分析，满二叉树中没有度为1的结点，因此最多结点数的情况一定是满二叉树$2^h - 1$ ；最少结点数，是除了根结点，其余每一层都只有2个结点，即$2h - 1$

练3：类似于性质3可推导。

总的结点数n=n0+n1+n2+⋯+nk；

n还可以表示为n=T+1；其中，T是分支。T=n1+2n2+⋯+knk；

由此可导出，n0+n1+n2+⋯+nk = n1+2n2+⋯+knk+1；

进一步可导出：

n0 = n2+2n3+⋯(k−1)nk+1 = $\sum_{i=2}^{k}(i-1)n_i+1$

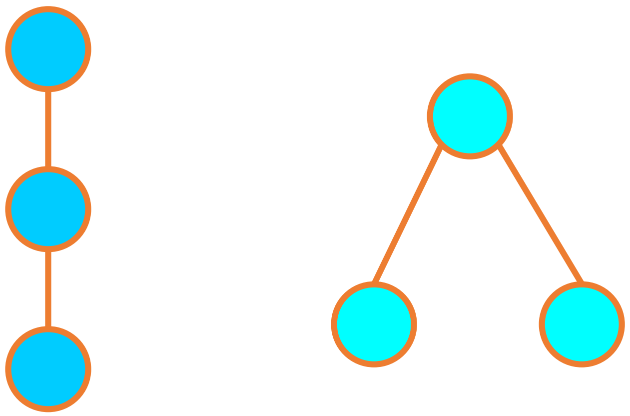
练4：总的结点数 n=n0+nk； n=knk+1；

可导出：$\mathrm{n0}=\mathrm{n}-\frac{n-1}{k}$

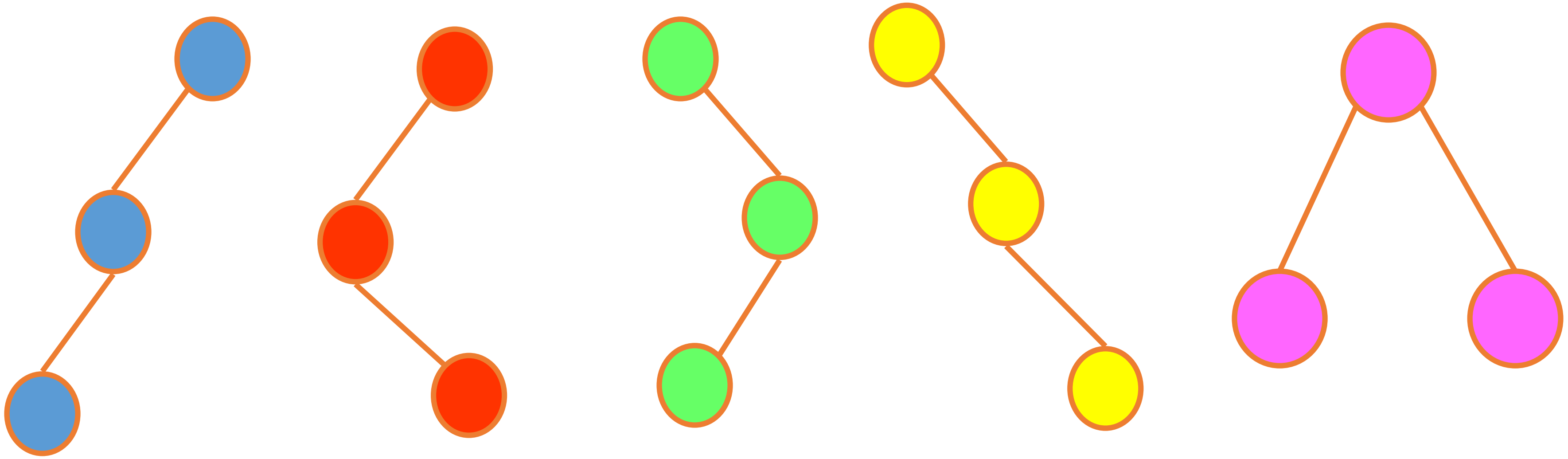
四、树与二叉树的区别

1）树中结点的最大度数没有限制，二叉树结点最大度数为2。
2）无明确指出，树没有左、右子树之分，二叉树有明确的左、右子树之分。

包含3个结点的树



包含3个结点的二叉树



同学们再见，周五见