第七节 傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数和余弦级数

许多周期现象，如行星的运转，物体的振动等，在数学上用周期函数来描述。正弦函数是一种常见的，简单周期函数.

例，描述简谐振动的函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

(A为振幅, ω为角频率, φ为初相, y为位移)

较为复杂的周期运动，则常是有限个简谐振动的叠加。

更为复杂的一般周期运动，“有限个叠加”不能刻画, 需推广到“无限多个简谐振动”的叠加，来描述更为一般的周期运动现象.

一、三角级数及三角函数系的正交性

以2π为周期的无限个正弦型函数$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$叠加

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$ (谐波迭加)

$$A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t$$

令

$$\frac{a_0}{2}=A_0\sin\varphi_0 \qquad a_n=A_n\sin\varphi_n,\ b_n=A_n\cos\varphi_n,\ \omega t=x$$

得函数项级数 $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数. 其中$a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$都是常数.

(是由下面三角函数列所产生的级数)

定理 1. 组成三角级数的函数系 (三角函数列，或称三角函数系，都具有共同周期2π) 1，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，$\cdots$，$\cos nx$，$\sin nx$，$\cdots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上**具有正交性**，即其中任意两个不同的函数之积在$[-\pi,\pi]$上的积分等于 0 .

证:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n)$$

同理可证：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathbf{d}x=0 \qquad (k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathbf{d}x=0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都不等于 0 .且有 $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d} x = 2\pi,$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n x \, \mathrm{d} x = \pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n x \, \mathrm{d} x = \pi$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

即此三角函数系为 $[-\pi, \pi]$ 上的正交函数系.

事实上，此三角函数系是任意一个长度为2π区间上的正交函数系.（由于可积的周期函数在任何一个长度为一个周期的区间上的积分值都是相等的.）

二、 以2π为周期的函数展开成傅里叶级数

1. 定义: 设$f(x)$是以2π为周期的函数，且下述积分存在：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

则称 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 为$f(x)$的**傅里叶级数** (简称为F –级数)，记作：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中 a_0, a_n, b_n称为$f(x)$的**傅里叶系数**.

2. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

若 $f(x)$为周期为 2π 的奇函数, 其傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

其傅里叶级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ —— 正弦级数

若 $f(x)$为周期为2π的偶函数, 其傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ —— 余弦级数

说明：1） 傅里叶系数的构造（为什么取这样的系数？）

定理 2 . 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且可展开成

三角级数：$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad ①$$

并设右端级数可逐项积分，则有

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \quad ②$$

证明： 由定理条件，对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\,\pi$$ (利用正交性)

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 $\sin k\,x$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n称为函数 $f(x)$的**傅里叶系数；** 以$f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数 （①的右端） 称为 $f(x)$的**傅里叶级数** .

傅里叶，J.-B.-J.

2) 常数项写成$\frac{a_0}{2}$是为了与$a_n(n=0,1,2\ldots)$表达式统一.

一个定义在$(-\infty,+\infty)$上周期为2π的函数$f(x)$, 若它在一个周期上可积，则一定可以作出$f(x)$的傅里叶级数.

问题： $f(x)$的傅里叶级数是否一定收敛？

若收敛，是否一定收敛于函数$f(x)$？

一般来讲，这两个问题的答案都不是肯定的.

问题: $f(x)$在什么条件下，它的傅里叶级数不仅收敛，而且收敛于$f(x)$？即：$f(x)$在什么条件下可展开成傅里叶级数.

3. 定理3：(收敛定理, 展开定理, Dirichlet充分条件)

设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数， 并满足

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x \text{ 为间断点} \end{cases}$$

狄利克雷, P.G.L.

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 . (**证明略**)

说明: (1) 定理表明：只要 $f(x)$在 $[-\pi,\pi]$上满足定理条件：除有限个第一类间断点外处处连续，并且不作无限次的振动，则 $f(x)$的$F-$级数在连续点处收敛于该点的函数值，在间断点处收敛于该点左、右极限的算术平均值.

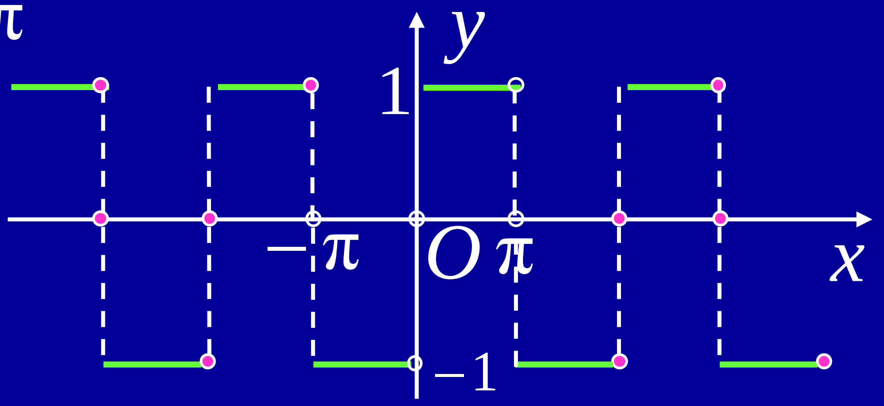
注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

(2) 周期函数的三角级数展开是唯一的，就是其傅里叶级数.

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解: 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=0\qquad(\,n=0,1,2,\cdots)$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

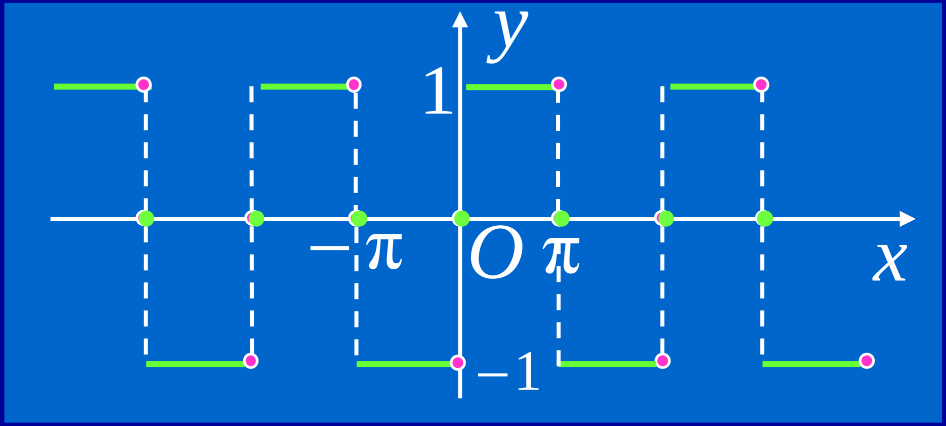
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当} n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当} n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\,x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$



说明:

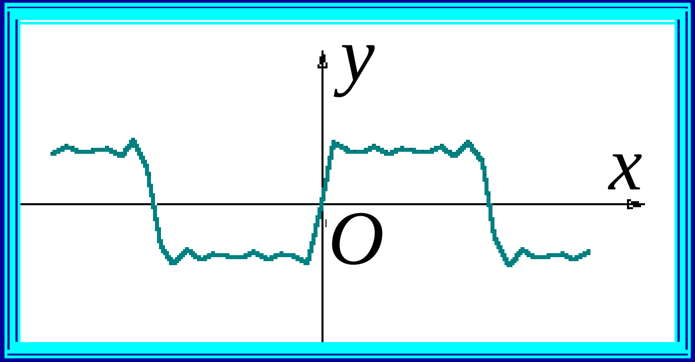
1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

时,级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

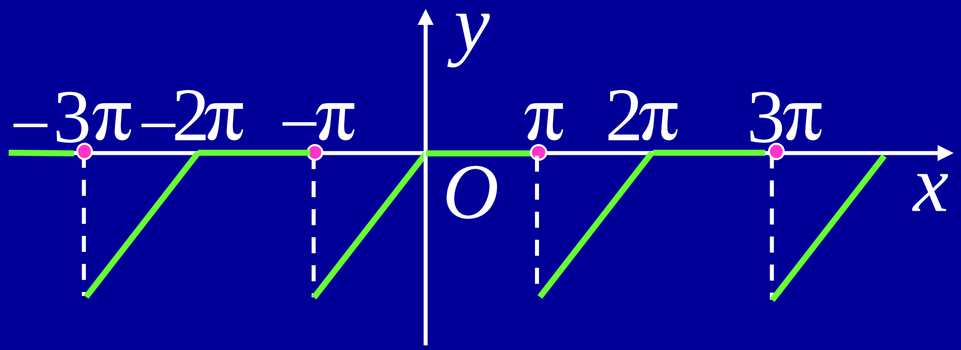
2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.



例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

说明: 当 $x = (2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{0+(-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$

4. 定义在有限区间$[-\pi, \pi]$上函数的傅里叶展开

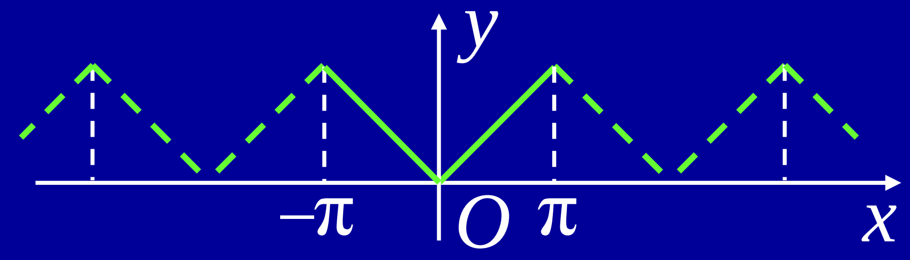
$f(x)$在有限区间$[-\pi, \pi]$上有定义，且满足收敛定理条件，则$f(x)$也可以展开成F-级数.

事实上，可在$[-\pi, \pi)$或$(-\pi, \pi]$外补充定义，使$f(x)$拓广成周期为2π的周期函数$F(x)$, 称$F(x)$为$f(x)$的周期延拓函数.（延拓过程不必操作，理解为周期函数即可）

将$F(x)$展开成F-级数，最后限制x在$(-\pi, \pi)$内，此时$F(x) \equiv f(x)$, 这样便得到$f(x)$的Fourier展开式. 由收敛定理在端点$x = \pm\pi$处收敛于 $\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}$.

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解: 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$，则



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0\quad, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

说明: 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, $\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$, $\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$$\because \ \sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}, \quad \therefore \ \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$$

又 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

例4. 将$f(x)=x\sin x,\ x\in[-\pi,\pi]$展开成$F$−级数.

解：所给函数在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理条件，并且拓广为周期函数时，它在每一点x处连续，因此拓广的周期函数的F−级数在$[-\pi,\pi]$上收敛于$f(x)$.

$f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的偶函数，故$b_n=0,\ n=1,2,\ldots$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}(\sin x-x\cos x)\Big|_0^{\pi}=2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2} sin(n+1)x$$

$$+ \frac{x}{n-1}\cos(n-1)x - \frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x]|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{\pi}{n+1}\cos(n+1)\pi + \frac{\pi}{n-1}\cos(n-1)\pi]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^n\pi}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}\pi}{n-1}] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}, \quad n = 2,3,\ldots\ldots$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\, cosx\, dx = -\frac{1}{2}.$$

因此，$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos 2x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$

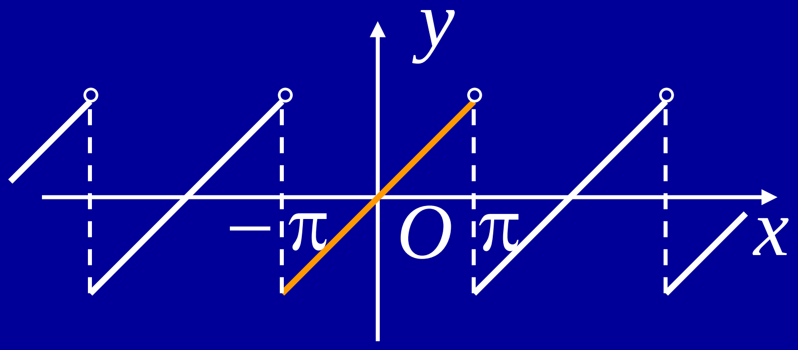
$$x \in [-\pi, \pi]$$

5. 正弦级数和余弦级数

(1) 周期2π的奇、偶函数的F –展开

例5. 设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=x$, 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 因此



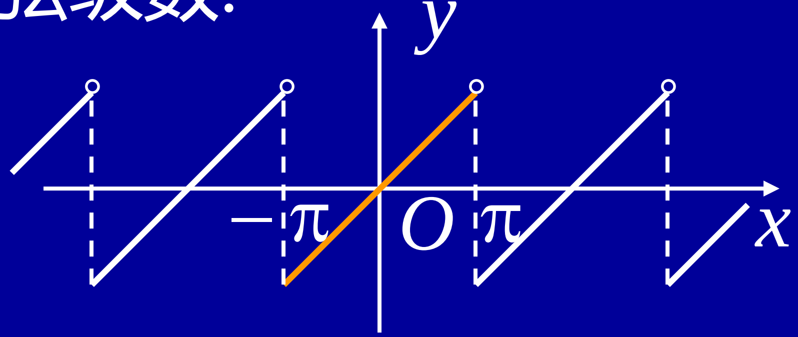
$$a_n=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:



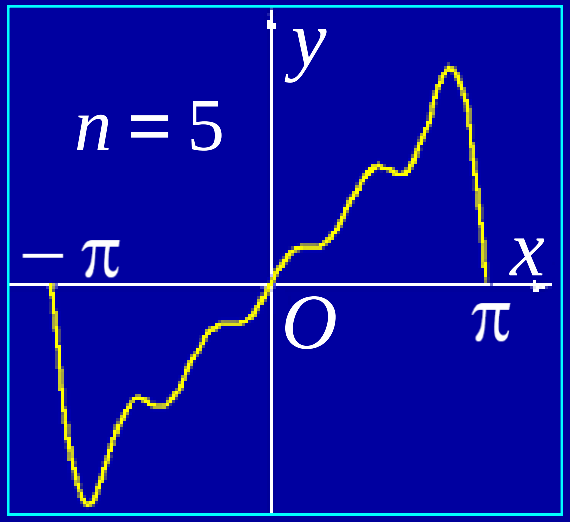
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$= 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

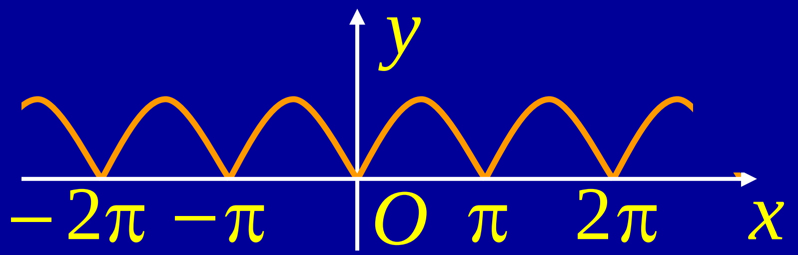
$$(-\infty < x < +\infty\,,\ x \neq (2k+1)\pi\,, k = 0, \pm 1\,, \cdots)$$

在 $[-\pi, \pi)$ 上级数的部分和

逼近 $f(x)$ 的情况见右图.



例6. 将周期函数 $u(t)=|E\sin t|$ 展成傅里叶级数, 其中 E 为正常数 .



解: $u(t)$是周期为2π 的周期偶函数 , 因此

为便于计算, 将周期取为2π

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\ \right)\mathrm{d}\,t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1\,,2\,,\cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2\,t\,\mathrm{d}\,t\ = 0$$

$$\therefore\ u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2k\,x$$

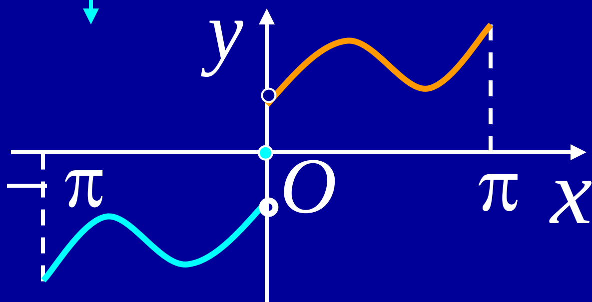
$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t\ - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos\ 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

(2) 定义在$[0,\pi]$上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x),\ x\in[0,\pi]$

奇延拓

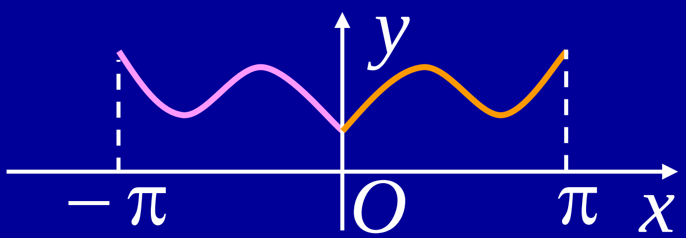


$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成余弦级数

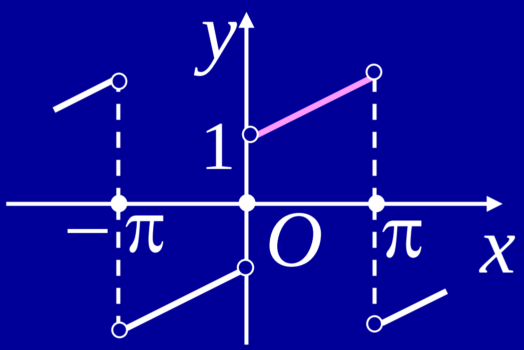
例7. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

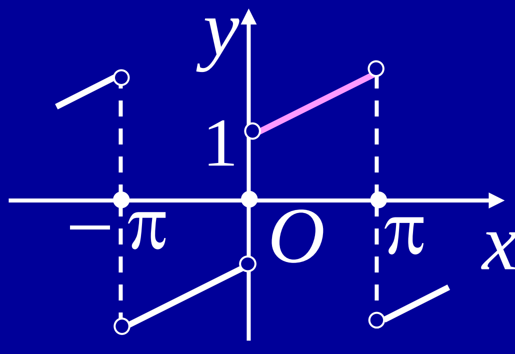
$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$



$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi + 2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\frac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

因此得



$$x + 1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi + 2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi + 2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

注意: 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0 ,

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0, \quad \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = 0$$

与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

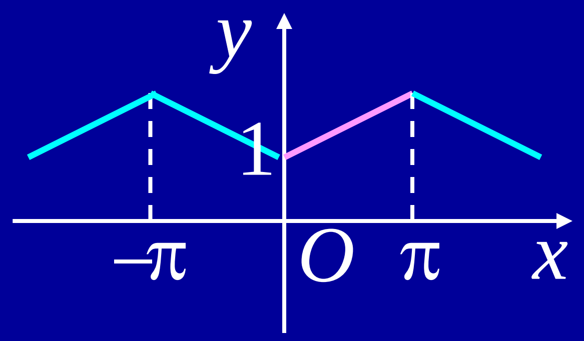
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

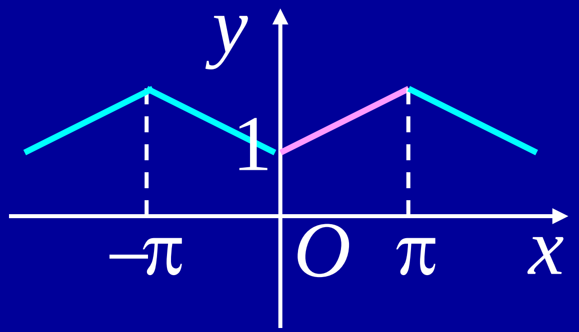
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$



说明: 令 $x=0$ 可得

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

例8. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,\pi]$上展开成正弦型级数.

解：将$f(x)$看成作奇式延拓

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{2(-1)^n}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4[(-1)^n-1]}{n^3\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4[(-1)^n-1]}{n^3\pi}\right]sinnx=\begin{cases}x^2, & x\in[0,\pi)\\ 0, & x=\pi\end{cases}$$

例9. 将函数$f(x)=1-x^2\ (0\le x\le\pi)$展开成余弦级数，

并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$的和.

解：$f(x)$作偶式延拓，$f(x)=1-x^2\ (-\pi\le x\le\pi)$

从而$b_n=0,\ n=1,2,\ldots$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=2-\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},\qquad n=1,2,\ldots$$

由于$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续，又$f(-\pi)=f(\pi)$，满足展开定理条件，从而有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\qquad x\in[0,\pi].$$

令 $x=0$ 得： $1=1-\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$

于是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

作 业

P321	6
P329	12

内容小结

1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad (x\neq \text{间断点})$$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

注意: 若 x_0为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数
- 偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数

3. 在 $[0, \pi]$ 上函数的傅里叶展开法

- 作奇周期延拓，展开为正弦级数
- 作偶周期延拓，展开为余弦级数

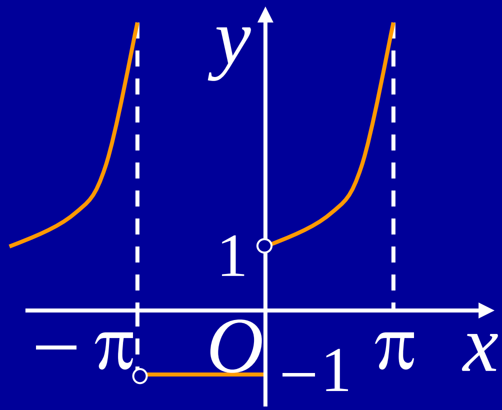
思考与练习

1. 在 $[0, \pi]$ 上的函数的傅里叶展开法唯一吗？

答: 不唯一，延拓方式不同级数就不同 .

2. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\ \pi^2/2\ }$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

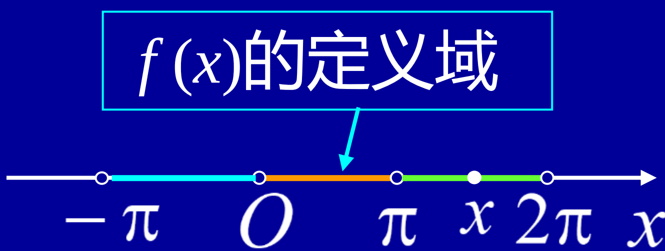
3. 设 $f(x)=\pi x-x^2,\ 0<x<\pi$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 内以 2π为周期的正弦级数展开式的和函数，求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$的表达式．

解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上，$S(x)=F(x)$；在 $(\pi,2\pi)$ 上，由周期性:

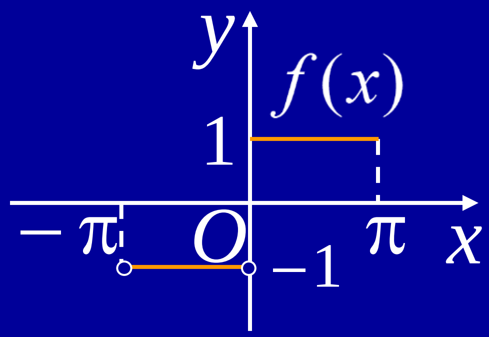
$$S(x)=S(x-2\pi)$$
$$=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2$$
$$=x^2-3\pi x+2\pi^2$$



$x-2\pi\in(-\pi,0)$

4. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅氏级数的和函数.

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



备用题 **1.** 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数

$b_3=$ $\underline{\quad \dfrac{2\pi}{3} \quad}$.　　(1993 考研)

提示: $b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$

利用“偶倍奇零”

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \pi x & & \pi & & 0 & & \\ & + & & - & & + \int_{-\pi}^{\pi} & \\ \sin 3x & & -\frac{1}{3}\cos 3x & & -\frac{1}{9}\sin 3x & & \end{array}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{3}\cos 3x+\frac{\pi}{9}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其傅氏系数为 a_n，b_n，则 $f(x+h)$ (h为常数) 的傅氏系数

$a_n' =$ $\underline{a_n \cos nh + b_n \sin nh}$，$b_n' =$ $\underline{b_n \cos nh - a_n \sin nh}$.

提示: $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx \,\mathrm{d}\,x$ $\boxed{令\ t = x+h}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}\,t$$

利用周期函数性质 $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$

$$= \cos nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}\,t + \sin nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \cos nh \cdot a_n + \sin nh \cdot b_n$$

类似可得b_n'