第八章定积分的应用

第一节定积分的元素法

我们在引入定积分的概念时，讨论由曲线$y = f(x) \geqslant 0, x = a, x = b, y = 0$所围成的曲边梯形的面积$A$，分割区间$[a,b]$ 的过程，也就是将量A分成若干个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上定义的小曲边梯形ΔA_i,反之亦然，且$[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n}[x_{i-1}, x_i]$对应的有$A = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_i$，另外我们发现，最终的面积值，只要对区间$[a,b]$分割得足够细,小区间上取值是任意的，与分割区间$[x_{i-1}, x_i]$的下标无关，于是，我们用$[x, x+dx]$或$[x+dx, x]$代替$[x_{i-1}, x_i]$,用微分$f(x)dx$代替$f(\xi_i)\Delta x_i$,这样定积分的真实含义就是这些微分的"和"，由于用了微分代替，本质上我们已经对Riemann和$S_n(f) = \sum f(x)\Delta x$求了极限，因此微分$f(x)dx$的和就是积分$\int_a^b f(x)dx$

微分元素法：上述的问题，进一步可以抽象成如下问题，欲求一个定义在区间$[a,b]$上的量Q，若将量Q进行分割，随之将量所定义的区间也进行了分割，并且分量dQ 对应的就是小区间$[x, x+dx]$,反之将区间$[a,b]$进行分割,随之也将量Q进行了分割,且小区间$[x, x+dx]$对应的就是微量dQ,这时我们就称量Q对于其所定义的区间具有可加性。

如果所求得量满足上述元素法的条件，我们求量Q时,首先要确定量所定义的区间$[a,b]$,然后求出微分元素dQ,将dQ由a到b积分得，最终的积分就是所求的量Q ,这种方法称为微分元素法.

第二节定积分的几何应用

一、求平面图形的面积

1.直角坐标系求平面图形的面积

设曲线$y=f_1(x),y=f_2(x)$以及直线$x=a,x=b$围成了一个平面图形，如图8.2.1，我们用微分元素法求此图形的面积.

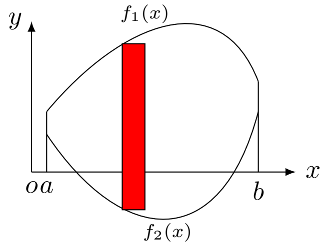

图8.2.1

显然这个面积对区间$[a,b]$具有可加性$dA=|f_1(x)-f_2(x)|dx$,将这些微分元相积得

$$A=\int_a^b dA=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$$

例8.2.1 求由$y=x^2,x=y^2$围成的图形的面积A

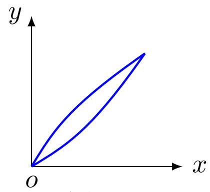

图8.2.2

解：首先确定A的可加区间，联立$y=x^2,x=y^2$解得交点$(0,0),(1,1)$,参见图8.2.2。因此A的可加区间为$[0,1]$,写出$dA=(\sqrt{x}-x^2)dx$,于是

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,|_0^1-\frac{1}{3}x^2\,|_0^1=\frac{1}{3}$$

例8.2.2 求由抛物线$y^2=x$与直线$x-2y-3=0$围成的平面图形的面积A.

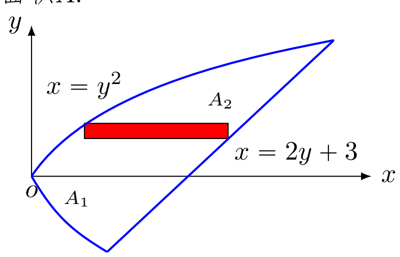

图8.2.3

解: 联立解得曲线的交点为$(1,-1)$和$(9,3)$,参见图8.2.3,虽然A对区间$[0,9]$具有可加性，但是我们写不出在这个区间上的微元dA的统一解析表达式，注意到这个平面图形可以分成两个部分，A_1和A_2,其中A_1 的可加区间为$[0,1]$，A_2 的可加区间为$[1,9]$. $dA_1=(\sqrt{x}-(-\sqrt{x}))dx, dA_2=(\sqrt{x}-\frac{x-3}{2})dx$ ，于是

$$A_1=\int_0^1(\sqrt{x}-(-\sqrt{x}))dx=2\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{4}{3},$$
$$A_2=\int_1^9(\sqrt{x}-\frac{x-3}{2})dx=\frac{28}{3}.$$

于是所求平面图形的面积为$A=A_1+A_2=\frac{32}{3}$

如果将此平面图形的面积看作由$x=y^2, x=2y+3$围成的图形的面积A，则A 对区间$[-1,3]$具有可加性$dA=(2y+3-y^2)dy$于是，

$$A=\int_{-1}^3(2y+3-y^2)dy=\frac{32}{3}$$

2.参数方程确定的曲线围成的平面图形的面积

如果平面图形是由参数方程$x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$,确定的连续曲线$C$，以及$x=a, x=b, y=0$围成，且$a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta), \varphi'(t)\neq 0, (a<b,$ 或$b<a)$, 则微面积元$dA=|ydx|$,那么$A=\int_a^b ydx=|\int_\alpha^\beta y(t)\varphi'(t)dt|$

例8.2.3 求由圆摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0)$的一拱与$x$轴所围成的平面图形（图8.2.4）的面积.

解：摆线的一拱可取$t\in[0,2\pi]$,则面积元$dA=ydx$,于是面积A为

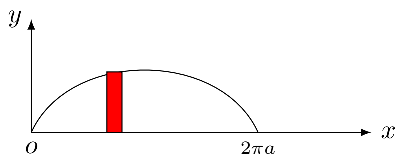

图8.2.4

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi a} y dx \\
&= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)[a(1-\cos t)]dt \\
&= a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos t)^2 dt \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi} (2\sin^2 \frac{t}{2})^2 dt \quad (u = \frac{t}{2}) \\
&= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du = 3\pi a^2.
\end{aligned}
$$

3.极坐标曲线围成的图形的面积

设平面图形由曲线$C: r = r(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta$围成,其中$r(\theta) \in C[\alpha, \beta], \beta - \alpha \leqslant 2\pi$,见图8.2.5.

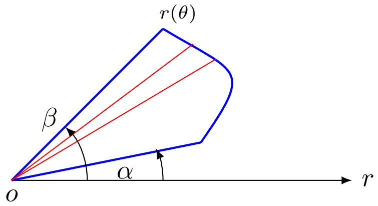

图8.2.5

我们用射线$\theta = \theta_i, \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$,分割此平面图形，由于$r(\theta)$连续，当分割$T$足够的细，$r(\theta)$在区间$[\theta_{i-1}, \theta_i] = \Delta\theta_i$上的变化幅度很小，任取$\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i], r(\theta) \approx r(\xi_i), i = 1, 2, \cdots, n$

这时第i个小扇形的面积$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta\theta_i$

用元素分析法：面积A对$[\alpha, \beta]$具有可加性，$dA = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$于是，

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

例8.2.4 求双纽线$r^2(\theta) = a^2 \cos 2\theta$围成的平面图形的面积$A$.

解: 如图8.2.6 ,这是一条封闭曲线，注意到$r^2(\theta) \geqslant 0, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \bigcup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$,

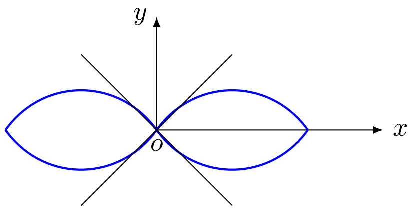

图8.2.6

由图形的对称性,面积A等于第一象限平面图形面积A_1的4 倍.

$$A = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

二、由平行截面面积求体积

设Ω 为三维空间的一个立体，若它夹在垂直于x 轴的平面$x = a, a = b (a < b)$之间,若对于任意的$x_i \in [a, b]$，平面$x = x_i$截Ω ,可以得到截面$A = A(x_i)$,其面积也记作$A(x_i)$, 这时薄片的体积ΔV_i近似地等于$A(\xi_i)\Delta x_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 见图8.2.7利用微元法$\Omega$ 的体积V对于区间$[a, b]$具有可加性,$dV = A(x)dx$于是，$V = \int_a^b A(x)dx$

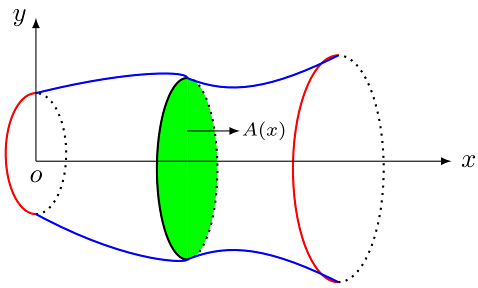

图8.2.7

例8.2.5 求由两个正交圆柱面$x^2 + y^2 = R^2, x^2 + z^2 = R^2$ 围成的立体的体积，见图8.2.8

解：这部分立体由八个部分组成，我们看到第一卦限部分用$x = x$截立体得到边长为$\sqrt{R^2 - x^2}$ 的正方形，所以截面的面积$A = (R^2 - x^2)$ 于是，

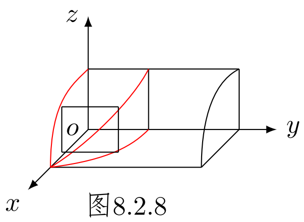

图8.2.8

$V=8\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{16}{3}R^3$

三、求旋转体的体积

1.求旋转体的体积

设$f\in C[a,b]$,Ω是由平面图形$S=\{(x,y)|x\in[a,b],0\leqslant|y|\leqslant|f(x)|\}$绕$x$轴旋转一周得到的旋转体,见图8.2.9,求$\Omega$的体积

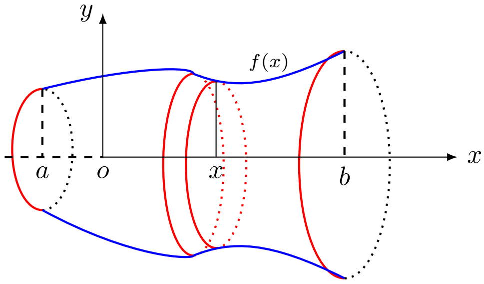

图8.2.9

由微元法Ω的体积V对区间$[a,b]$具有可加性,用垂直于x轴截Ω截面的面积为$\pi f^2(x)$,那么

$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

例8.2.6 求由圆盘$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$绕$x$轴旋转一周所得立体的体积.

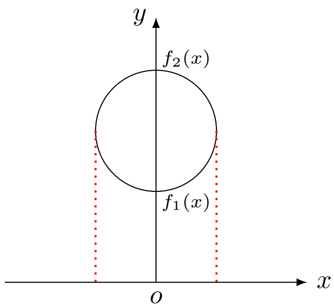

图8.2.10

解: 上半圆周的方程为: $y=f_2(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}$

下半圆周的方程为:$y=f_1(x)=R-\sqrt{r^2-x^2},|x|\leqslant r$,则

旋转体的体积元$dV=(\pi f_1^2(x)-\pi f_2^2(x))dx$

$V=4\pi R\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx=2\pi^2r^2R$

2.求旋转曲面的表面积

设平面光滑曲线C 绕x轴旋转一周，得到旋转曲面$\sum$，其中C的方程为$y = f(x), x \in [a,b]$(不妨设$f(x) \geqslant 0$),不难发现，$\sum$ 对区间$[a,b]$ 具有代数可加性，通过x轴上点x与$x+dx$分别作垂直于x轴的平面，则在旋转曲面上截得一条环形带，由于dx 很小，这条狭带的面积可以近似地看作是一个圆台的侧面面积ΔA，由图8.2.11.

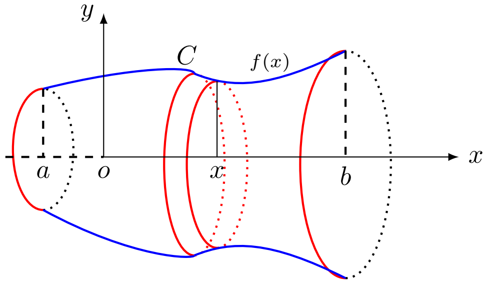

图8.2.11

$$\begin{aligned}\Delta A &\approx \pi[f(x)+f(x+\Delta x)]\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\\ &= \pi[2f(x)+\Delta y]\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x\end{aligned}$$

其中$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$,

注意到$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1+f'^2(x)}$

于是，$dA = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

所以$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

如果C由参数方程$x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$给出，则旋转曲面的面积为

$A = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

例8.2.7 求半径为R的球面的表面积A

解：半径为R 的球面可以看成由半圆周$y=\sqrt{R^2-x^2}$绕x轴旋

转一周而成的旋转曲面，则

$$A = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = 4\pi R^2$$

例8.2.8 求心脏线$r = a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转产生的旋转体的表面积.

解；$dA = 2\pi y ds = 2\pi r\sin\theta\sqrt{(r'(\theta))^2+r^2(\theta)}d\theta$

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}d\theta \\
&= 2\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta \\
&= 2\pi a^2 4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\pi a^2
\end{aligned}$$

注:计算曲边梯形$x = a, x = b, y = 0, y = f(x) \geqslant 0$绕$x$轴旋转产生的旋转体的体积时，体积元应为小圆台$dV_{台}$，为什么我们可以将其当作小圆柱体$dV_{柱} = \pi f^2(x)dx$，事实上

$$\begin{aligned}
dV_{台} &= \tfrac{\pi dx}{3}(R^2+Rr+r^2) \quad R, r\text{分别是圆台的两个半径} \\
&= \tfrac{\pi dx}{3}((f(x)+dy)^2 + (f(x)+dy)(f(x)+f^2(x)) \\
&= \pi f^2(x)dx + \tfrac{\pi dx}{3}(3f(x)dy + (dy)^2) \quad (dy = f'(x)dx) \\
&= \pi f^2(x)dx + \circ(dx) \quad (dx + \circ(dx) = dx)
\end{aligned}$$

于是用$dV_{柱}$代替$dV_{台}$产生了比dx 高阶无穷小的误差，我们可以舍去，于是我们认为这样的旋转体是圆柱体的叠加.

而$dV_{台}$的侧面积

$$\begin{aligned}
dA &= \pi(R+r)\ell \quad R, r, \ell \text{ 分别为上，下底半径和母线长} \\
&= \pi(f(x)+dy+f(x))(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \\
&= \pi 2f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx + \pi f'(x)\sqrt{1+f'^2(x)}(dx)^2 \\
&= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx + \circ(dx)
\end{aligned}$$

而$dV_{柱}$的侧面积$dS = 2\pi f(x)dx$，如果用$dV_{柱}$的侧面积代替$dV_{台}$的侧面积所产生的误差是与dx同阶的无穷小，因此不能代替.

四、求平面曲线的弧长

设A,B是曲线弧上的两个端点(图8.2.12)在$\widehat{AB}$上分别取分点$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B$,并依次连接相邻的分点得一内接折线(图8.2.12),当分点的数目无限增加且每个小段$\widehat{M_{i-1}M_i}$都缩向一点时，如果折线的长$\sum\limits_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$的极限存在，则称此极限为曲线弧$\widehat{AB}$的弧长，并称此曲线弧是可求长的。

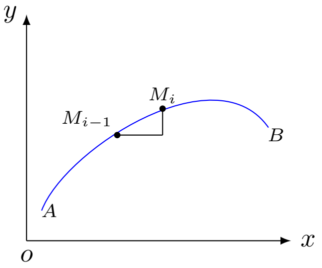

图8.2.12

注: 若曲线上每一点处都有切线，且切线随切点的移动而连续转动，这样的曲线称为光滑曲线，光滑曲线是可求长的。

设曲线弧由参数方程$x=\varphi(t),y=\psi(t),t\in[\alpha,\beta]$给出,其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续的导数,现利用微元法计算这个曲线段的弧长。

取参数t为积分变量，它的变化区间为$[\alpha,\beta]$,相应于$[\alpha,\beta]$上任意小区间$[t,t+dt]$的小弧段的长度Δs近似等于对应的弦的长度$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,因为

$$\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t)\approx dx=\varphi'(t)dt,$$

$$\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)\approx dy=\psi'(t)dt,$$

所以Δs的近似值（弧微分），即弧长元素为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2+\psi'^2(t)(dt)^2}$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

于是所求弧长为

$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

当曲线弧由直角坐标方程$y=f(x), x\in[a,b]$给出，其中$f(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导数，这时曲线弧有参数方程$x=x, y=f(x), x\in[a,b]$,从而弧长为

$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx$

当曲线弧由极坐标方程$\rho=\rho(\theta), \theta\in[\alpha,\beta]$,由直角坐标与极坐标之间的关系得

$$\begin{cases} x &= \rho(\theta)\cos\theta, \\ y &= \rho(\theta)\sin\theta, \end{cases} (\theta\in[\alpha,\beta])$$

容易推证弧微分$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$,

于是$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$

注: 为什么在极坐标方程$r=r(\theta)$下弧微分ds不能用$rd\theta$ 取代，原因是其弧微分$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$,曲线的参数方程为 $\begin{cases} x &= r(\theta)\cos\theta \\ y &= r(\theta)\sin\theta \end{cases}$, 因此$dx=(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta, dy=(r'\sin\theta+r\cos\theta)d\theta$

于是$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$,如果用$rd\theta$代替$ds$,相当于你默认了曲线是圆弧$r'(\theta)=0$,而一般曲线弧$r'(\theta)$ 未必为零.

例8.2.9 计算摆线$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$的一拱$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$的长度.

解: 弧微分

$ds=\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$

所求弧长$s=\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$

例8.2.10 求Archimedes 螺线$\rho=a\theta(a>0)$相应于θ从0到2π一段的弧长.

解:弧微分$ds=\sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}d\theta$

于是所求弧长为

$s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta=\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})]$

习题8.2

1.过点$(2,0)$做曲线$y=x^3$的切线，求所有切线与曲线$y=x^3$围成封闭区域的面积。

2.在$[0,1]$上给定$y=e^x$,对任意的$t\in[0,1]$,令A_1 为$x=0,y=e^x$及$y=e^t$围成的面积，A_2为$x=1,y=e^x$及$y=e^t$围成的面积，设$A(t)=A_1+A_2$,求$A(t)$的最大值和最小值。

3.设xOy平面上有正方形$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$及直线$l:x+y=t(t\geqslant 0)$,若$S(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积，求$\int_0^x S(t)dt(x\geqslant 0)$

4.设$k>0,y=kx^2$与$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$在$x=t$处相交，记$S_1$为$y=kx^2$ 与$y=\sin x$围成的面积，S_2为$y=\sin x,y=\sin t$与$x=\frac{\pi}{2}$围成的面积，证明：$S(t)=S_1+S_2$在$(0,\frac{\pi}{2})$内必有最小值。

5.求由$y=x^2,x=y^2$围成的区域绕x轴旋转一周生成的旋转体的体积。

6.设$y=f(x)$在$[0,+\infty)$上连续单调增加且非负，又$f(0)=0$,区域$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$绕$x=t$轴旋转一周生成的旋转体体积为$V(t)$,证明：$V(t)$二阶可导，并求$V''$

7.过原点作曲线$y=\sqrt{x-1}$ 的切线，求切线与该曲线及x轴围成的区域绕x轴旋转一周生成的旋转体的表面积。

8.求过抛物线$y^2=4ax(a>0)$焦点的一条直线，使其与抛物线围成的区域的面积为最小。

9.设平面光滑曲线由极坐标方程$r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta([\alpha,\beta]\subset[0,\pi],r(\theta)\geqslant 0)$给出，求其绕极轴旋转所得旋转曲面的面积。

10. 求悬链线$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$从$x=0$到$x=a>0$那一段的弧长.

11.求心脏线$r=a(1+\cos\theta)(a>0)$的周长.

第三节定积分在物理学中的某些应用

一、变力作功

由物理学知道物体M在力F的作用下沿力的方向移动的距离为S，则力F对物体M作了功，其大小为$W = F \cdot S$

例8.3.1 把一个带有电量$+q$的点电荷放在r轴上的坐标原点O处,它产生一个电场,这个电场对周围的电荷有作用力, 由物理学可知,如果将一个单位正电荷放在这个电场中距离原点为r的地方,那么电场

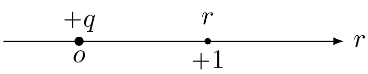

图8.3.1

对它的作用力的大小为$F = k\frac{q}{r^2}$(图8.3.1)

解：根据同性相斥原理，单位正电荷在电场力的作用下将沿轴r移动，假定从$r = a$移动到$r = b$，求电场力所作的功W，显然W对区间$[a, b]$具有可加性，从r处移动到$r + dr$处，电场力所作的微功为$dW = Fdr = \frac{kq}{r^2}dr$于是$W = \displaystyle\int_a^b \frac{kq}{r^2}dr = kq(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$ 在计算静电场中某点的电位时，物理学规定该点的电位为电场力将单位正电荷移动到无穷远时所作的功即静电场的电位$= \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2}dr = kq\frac{1}{a}$.

例8.3.2 在底面积为S的圆柱形容器内盛有一定量的气体，在等温条件下，由于气体的膨胀，将容器中的活塞（面积）为S从点a推到点b，求气体压力所作的功.

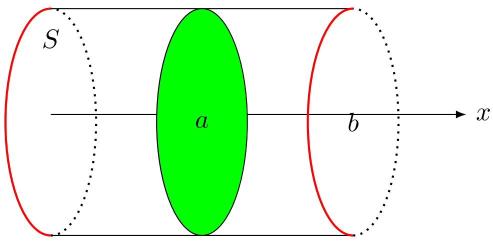

图8.3.2

解：由波义尔-马略特定律假定压强为p,体积为v，压力为F,则$pv =$

RT其中R为普适常数，在该题条件中我们有$pv = C$于是$p = \frac{C}{v} = \frac{C}{xS}$而压力为$F = ps = \frac{C}{xs} \cdot s = \frac{C}{x}$ 显然功W对区间$[a, b]$具有可加性，于是活塞从点x移动到$x + dx$,压力作的功$dW = \frac{C}{x}dx$,那么所求得功为$W = \int_a^b \frac{C}{x}dx = C(\ln b - \ln a)$.

例8.3.3 一圆柱形的贮水桶高为5m底圆半径为3m，桶内盛满了水，试问要把桶内的水全部吸出需要作多少功？

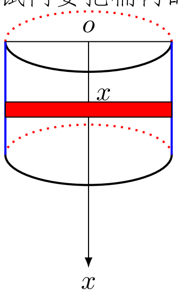

图8.3.3

解：注意建立所求量定义的区间，还要考虑到实际情形，作x轴向下，取x为积分变量，也表示水的深度为x 这样所求量的定义区间为$[0, 5]$，于是x深处任意薄层水的高度设为dx ，该薄层水的重力为

$$1 \cdot 9.8\pi \cdot 3^2 dxkN$$

那么将这层水吸出，克服重力作的微功为$dW = 88.2\pi \cdot x \cdot dx$ 于是所求的功为

$$W = \int_0^5 88.2\pi x dx = 88.2\pi \cdot \frac{25}{2}(kJ)$$

注：这里的物理量纲:密度为$1T/m^3$,因此功为千焦耳(kJ)

二、液体静压力

由物理学知道水深h处的压强为$p = \rho gh$,其中ρ是水的密度，g是重力加速度显然,一个面积为S的面板放在水中,平放和侧放，面板所

承受的压力是不同的.

例8.3.4 一个横放着的圆桶内盛有半桶水,设桶的半径为R,水的密度为ρ,求底端半圆面所承受的压力.

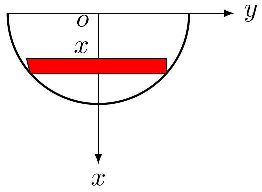

图8.3.4

解:用x表示水深,建立坐标系如图8.3.4,则所求的量，压力F,定义在区间,为$[0,R]$上,x处的压力元为x处的压强乘以圆桶底端x深处小窄条的面积,该窄条的面积看作是矩形条，于是通过所建立的坐标系，得底端圆周的方程为$x^2+y^2=R^2$,那么压力元

$$dF = 2y\cdot \rho g x dx = 2\rho g x\cdot\sqrt{R^2-x^2}dx$$

，于是所求的压力

$$F=\int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2-x^2}dx = -\rho g\int_0^R (R^2-x^2)^{1/2}d(R^2-x^2) = \frac{2\rho g}{3}R^3$$

例8.3.5 设底为a高为h的三角形平板铅直沉没在水中，试比较下列两种情况该平板每侧所受的压力

（1）底a与水面平齐；

（2）底a在水中与水面平行,a对的顶点恰在水面上.

解:（1）底a与水面平行；

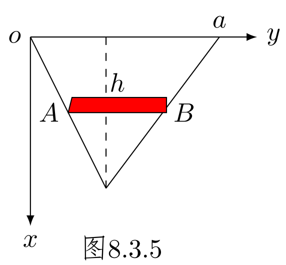

图8.3.5

(2)顶在水面上

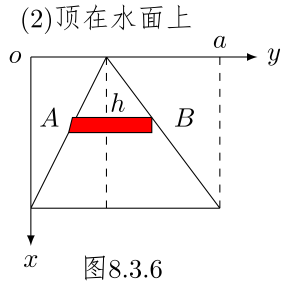

图8.3.6

解：(1)由图8.3.5所示，可知若底边与水面平行，则$\frac{AB}{a}=\frac{h-x}{h}$

于是侧壁压力元$dF_1=\rho\cdot g\cdot x\frac{a}{h}(h-x)dx$

则压力$F_1=\rho\cdot g\cdot\frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)dx=\dfrac{a\cdot g\cdot\rho}{6}h^2$

(2)如图8.3.6所示，若顶点在水面上，则$\frac{AB}{a}=\frac{x}{h}$

此时侧壁压力元$dF_2=\rho\cdot g\cdot x\frac{a}{h}xdx$

则压力$F_2=\frac{a\cdot g\cdot\rho}{h}\int_0^h x^2dx=\dfrac{a\cdot g\cdot\rho}{3}h^2.$

三、引力

例8.3.6 在长度为ℓ的均匀细棒的中垂线上距棒为α单位处有一质量为m的质点M, 求均匀细棒对质点M的引力

解：设均匀细棒的线密度为μ,建立坐标系将细棒置于y轴上，中垂线作x轴如图8.3.7

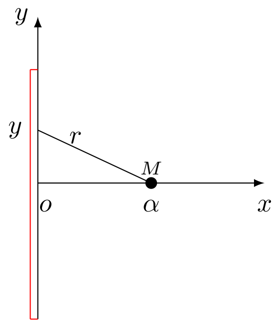

图8.3.7

细棒定义在区间$[-\frac{\ell}{2},+\frac{\ell}{2}]$,将细棒上相应于区间$[y,y+dy]$看成一个质点,由物理学知道$M$与该点的引力$\Delta F\approx G\dfrac{m\mu dy}{r^2}$,其中$G$为引力常数，$r$ 为该质点距M的距离,且$r=\sqrt{\alpha^2+y^2}$。将引力ΔF分解成水平和垂直方向的引力分别为ΔF_x和ΔF_y,于是

水平方向上的引力元$dF_x=G\dfrac{\mu mdy}{r^2}(-\dfrac{\alpha}{r})=-G\dfrac{\mu mdy}{(\alpha^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

积分得到水平方向上的引力为$F_x=\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{l}{2}}\dfrac{G\mu m}{(\alpha^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy=-\dfrac{2Gm\mu\ell}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4\alpha^2+\ell^2}}$

由对称性可知垂直方向上的引力$F_y=0$

习题8.3

1.由实验知道，弹簧在伸拉过程中，需要的力F（单位：N）与伸长量，s（单位：cm)成正比，即$F = ks$ (k是比例常数）如果把弹簧由原长拉伸6cm,计算所作的功。

2.直径为20cm，高为80cm的圆柱体内充满压强为$10N/cm^2$的蒸汽，设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功？

3.证明：把质量为m的物体从地球表面升高到h处，所作的功为$W = k\dfrac{mMh}{R(R+h)}$,其中k是引力常数，M是地球的质量，R是地球的半径。

4.用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击打第一次时，将铁钉击入木板1cm，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问锤击第二次时，铁钉又击入多少？

5.设一锥形贮水池，深15 cm,口径20cm,盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

6.棍长为线密度为常数,以等角速度绕轴旋转,求棍的动能。

7.将半径为R的半圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服浮力做的功（设水的密度为1）

练习八

1.一金属棒长$3m$，离棒左端xm处的线密度为$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}(kg/m)$,问$x$为何值时，$[0, x]$一段的质量为全棒质量的一半.

2.求由曲线$\rho = a\sin\theta, \rho = a(\cos\theta + \sin\theta)(a > 0)$所围图形公共部分的面积.

3.设抛物线$y = ax^2 + bx + c$通过点$(0, 0)$,且当$x \in [0, 1]$时，$y \geqslant$

0,试确定a,b,c的值，使得抛物线$y=ax^2+bx+c$与直线$x=1,y=0$所围图形的面积为$\frac{4}{9}$,且使该图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积最小.

4.求圆盘$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$绕y轴旋转而成的旋转体的体积.

5.求抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$被圆周$x^2+y^2=3$所截得的有限部分的弧长.

6.在纯电阻电路中，已知交流电压为$V=V_m\sin\omega t$,求在一个周期$[0,T](T=\frac{2\pi}{\omega})$ 内消耗在电阻上的能量，并求与之相当的直流电压；

7.边长为a和b的矩形薄板，与液面成$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$角，斜沉于液体中，设$a>b$,长边平行于液面，上沿位于深$h$处，液体的比重为$\mu$,试求薄板每侧承受的静压力。

8.直径为6米的球浸入水中，其球心在水平面下10米处，求球面上所受的静压力。

9.设有两条各长l的均匀细杆，放在同一直线上，中间离开距离为c，每根细杆的质量为M ,试求它们之间的引力。

10.一物体在某介质中按$x=ct^3$作直线运动，介质的阻力与速度$\frac{dx}{dt}$的平方成正比，计算物体由$x=0$移动到$x=a$时可服介质阻力所作的功。

11.半径为r的球体沉入水中，其比重与水的比重相同，试问从水中将球捞出需作多少功？