第四节 空间直线及其方程

一、空间直线方程

二、线面间的位置关系

一、空间直线方程

1. 一般式方程

直线可视为两平面交线，因此其一般式方程

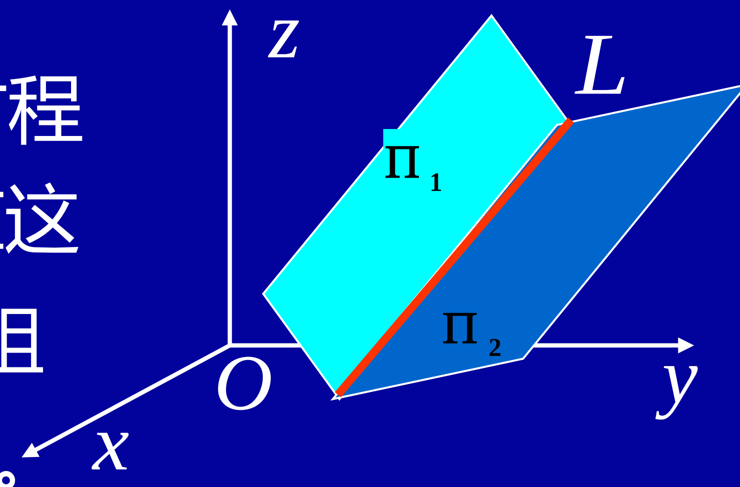
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

(**不唯一**)

注：直线L上任一点同时满足两个方程

若M不在直线L上，则它不能同时在这两个平面上，它的坐标不满足方程组

因此，直线L可用上述方程组来表示。



2. 对称式方程

（1）直线的方向向量：

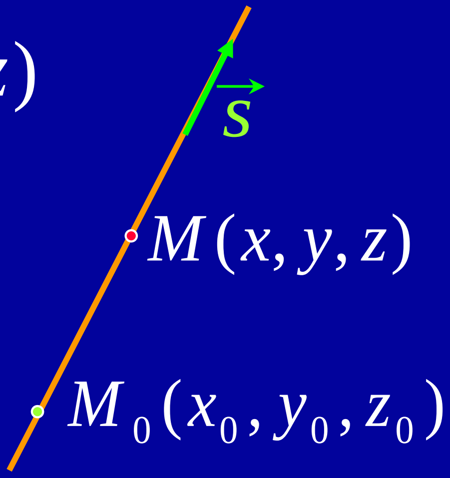
若一个非零向量平行于一条已知直线，则称这个向量为这条直线的方向向量。

（2）当直线上的一点，和这条直线的一个方向向量给定，则该直线的位置被确定。

(由于过空间中一点可作且只能作一条直线平行于已知直线。）

建立方程:

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$, 设直线上的动点为 $M(x, y, z)$



则

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

故有

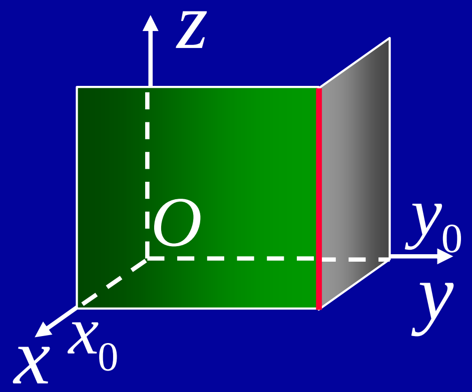
$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

此式称为直线的**对称式方程**(也称为**点向式方程**)

说明1: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m=n=0,\ p\neq 0$ 时, 直线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$



说明2: 直线的任一方向向量 $\vec{s}$ 的坐标 m, n, p 叫做这条直线的一组方向数，而向量 $\vec{s}$ 的方向余弦叫做该直线的方向余弦。

3. 参数式方程

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$

得参数式方程：

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}}$$

例1. 用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解: 先在直线上找一点.

令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases} y+z=-2 \\ y-3z=6 \end{cases}$, 得 $y=0,\ z=-2$

故 $(1,0,-2)$ 是直线上一点 .

再求直线的方向向量 $\vec{s}$.

交已知直线的两平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,1,1), \qquad \vec{n}_2=(2,-1,3)$$

$$\because \quad \vec{s}\perp\vec{n}_1,\ \vec{s}\perp\vec{n}_2 \qquad \therefore \quad \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$

参数式方程为 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$

解题思路: 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

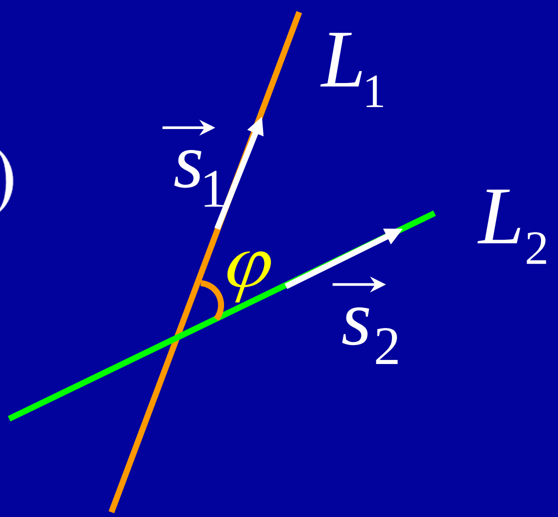
$(1,0,-2)$
是直线上一点

二、线面间的位置关系

1. 两直线的夹角

定义为: 其方向向量间的夹角(通常指锐角或直角)

设直线 L_1, L_2 的方向向量分别为



$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1),\ \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

则两直线夹角 φ 满足

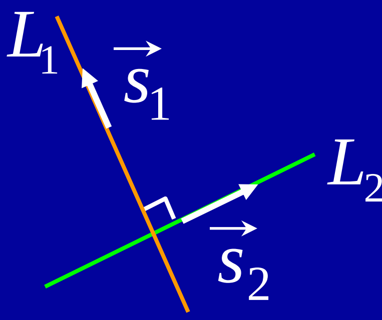
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

$$= \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2} + p_1^{\,2}}\ \sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2} + p_2^{\,2}}}$$

特别有:

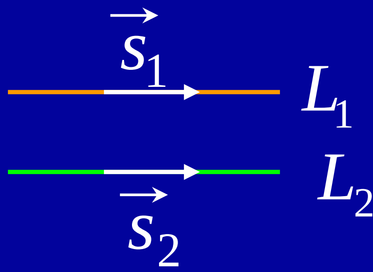
(1) $L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

$\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$



(2) $L_1 \,//\, L_2 \iff \vec{s}_1 \,//\, \vec{s}_2$

$\iff \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$



$\vec{s}_1 = (m_1,\, n_1,\, p_1)$

$\vec{s}_2 = (m_2,\, n_2,\, p_2)$

例2. 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \qquad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 直线L_1的方向向量为 $\vec{s}_1 = (1, -4, 1)$

直线L_2的方向向量为 $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -1)$

二直线夹角φ的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{\left|1\times 2 + (-4)\times(-2) + 1\times(-1)\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

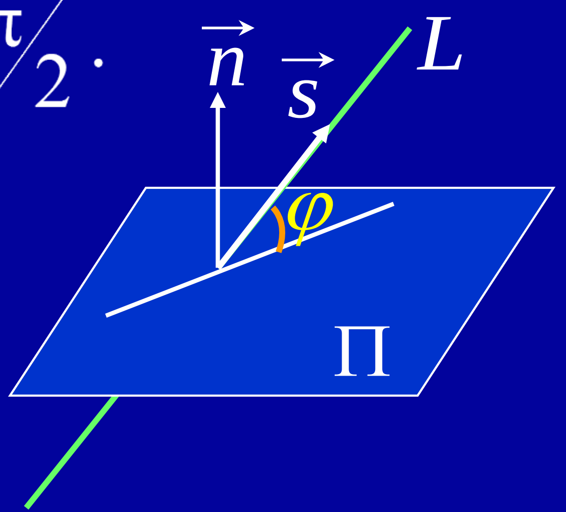
从而 $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

2. 直线与平面的夹角

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹**锐角** φ 称为直线与平面间的夹角;

当直线与平面垂直时,规定其夹角为 $\pi/2$.



设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$

则直线与平面夹角 φ 满足

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}})|$$

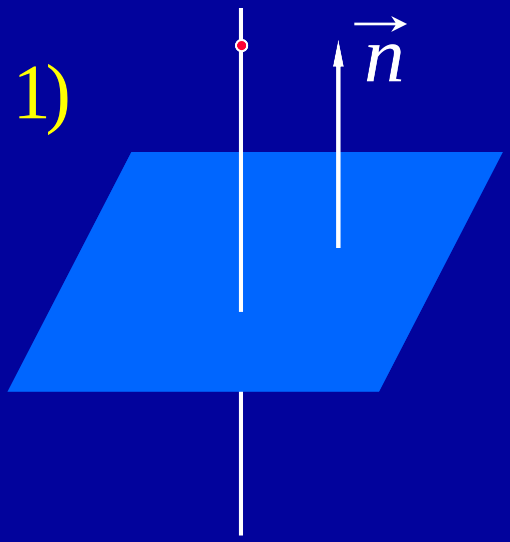
$$= \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

特别有:

$$(1)\ L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Longleftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

$$(2)\ L \parallel \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

例3. 求过点(1, - 2 , 4) 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.



解: 取已知平面的法向量 $\vec{n} = (2, -3, 1)$ 为所求直线的方向向量.

则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

内容小结

1. 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

$(m^2 + n^2 + p^2 \neq 0)$

2. 线与线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\quad \vec{s}_1=(m_1,\,n_1,\,p_1)$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=(m_2,\,n_2,\,p_2)$

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 \,/\!/\, L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}$

3. 面与线间的关系

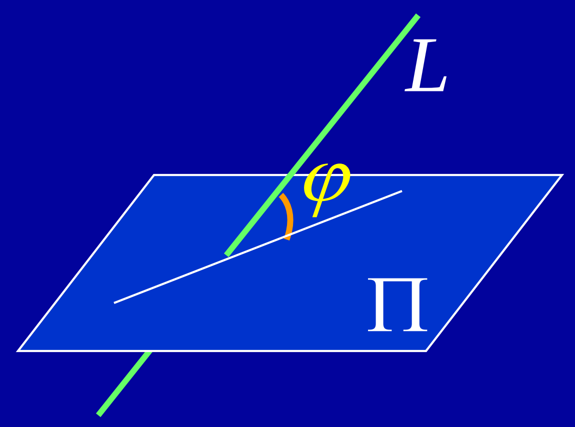
平面 Π： $Ax+By+Cz+D=0,\ \vec{n}=(A,B,C)$

直线 L： $\dfrac{x-x}{m}=\dfrac{y-y}{n}=\dfrac{z-z}{p},\quad \vec{s}=(m,n,p)$

$$L\perp\Pi \iff \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0} \iff \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$L\,//\,\Pi \iff \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \iff mA+nB+pC=0$$

夹角公式： $$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$$



例题 1.

一直线过点$A(1,2,1)$且垂直于直线$L_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$,

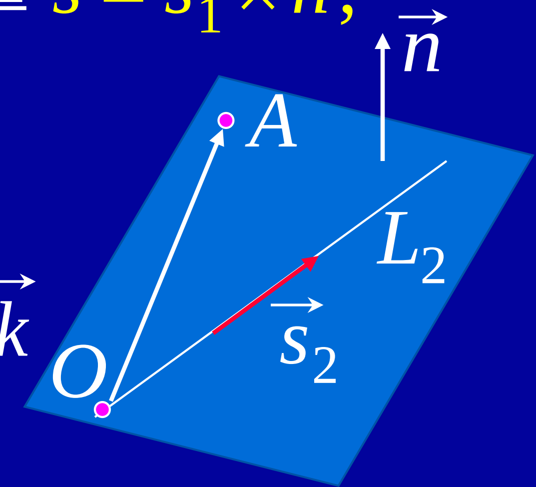
又和直线$L_2: \frac{x}{2}=y=\frac{z}{-1}$ 相交, 求此直线方程 .

解：方法1 利用叉积.

设直线 L_i 的方向向量为 $\vec{s}_i\ (i=1,2)$,过 A 点及 L_2 的平面的法向量为 $\vec{n}$, 则所求直线的方向向量 $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}$,

因原点 O 在 L_2 上,所以

$$\vec{n}=\vec{s}_2\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$$



所求直线过点$A(1,2,1)$

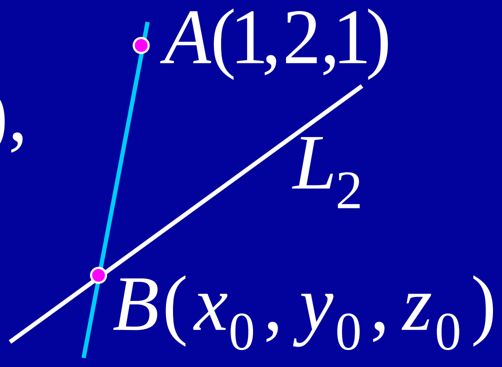
待求直线的方向向量

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 3\end{vmatrix}=3(3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k})$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-5}$

方法2 利用所求直线与L_2的交点 .

设所求直线与 L_2 的交点为$B(x_0,y_0,z_0)$,



则有 $\dfrac{x_0}{2}=y_0=\dfrac{z_0}{-1}$

即 $x_0=2y_0,\ z_0=-y_0$

$L_2:\dfrac{x}{2}=y=\dfrac{z}{-1}$

$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

而 $\overrightarrow{AB} = (x_0 - 1, y_0 - 2, z_0 - 1) \perp L_1$

$$\therefore \quad 3(x_0 - 1) + 2(y_0 - 2) + (z_0 - 1) = 0$$

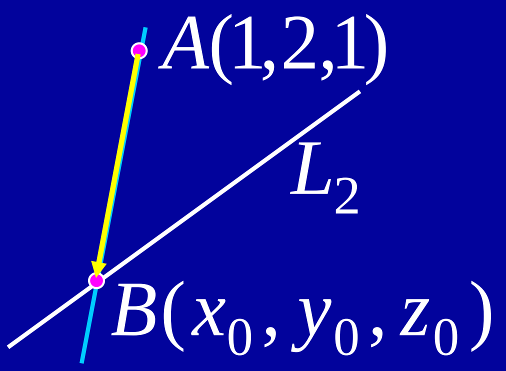
将 $x_0 = 2y_0, z_0 = -y_0$ 代入上式，得

$$y_0 = \frac{8}{7}, x_0 = \frac{16}{7}, z_0 = -\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = (\frac{9}{7}, \frac{-6}{7}, -\frac{15}{7}) = \frac{3}{7}(3, -2, -5)$$

由点向式得所求直线方程

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-5}$$



例题 2.

设有两个平面$x-4z=3$与$2x-y-5z=1$

(1) 求与这两平面交线平行且过点（1，3，2）的直线方程

(2) 求这两平面交线与平面$2x+y+z-6=0$的交点

解：（1）点向式：方向向量$\vec{s}$　　$\vec{s}\perp\vec{n}_1$，$\vec{s}\perp\vec{n}_2$

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-\ (4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})$

方程为： $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$

(2) 求直线与平面的交点，最好方法是采用直线参数方程代入平面方程。

(写参数方程方法：用一般式方程中一个变量作为参数就可得到)

解：交线方程为 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$

得参数方程为：$\begin{cases} x=3+4z \\ y=5+3z \\ z=z \end{cases}$

将参数方程代入 $2x+y+z-6=0$ 得 $z=-\dfrac{5}{12}$

故交点为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{15}{4},-\dfrac{5}{12}\right)$

补充定义：直线在平面上的投影

过直线 L 且与平面 π 垂直的平面与平面π 的交线，称为直线 L 在平面 π 上的投影直线。

例题 3.

求过点$A(2,1,3)$且与直线 $\dfrac{x+1}{.3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

垂直相交的直线的方程。

解：先过已知点作垂直于已知直线的平面：

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求直线与平面的交点

直线参数方程为：$x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$

代入上述平面方程得：$t=\frac{3}{7}$，交点为$B\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$.

过两点A,B求直线方程：

$\overrightarrow{AB}=-\frac{6}{7}(2,-1,4)$是所求直线的一个方向向量。

故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

平面束方程

1. 定义：过一条直线有无数个平面，称通过定

直线的所有平面的全体为过该直线的平面束。

2. 通过直线 L 的平面束方程：

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$$

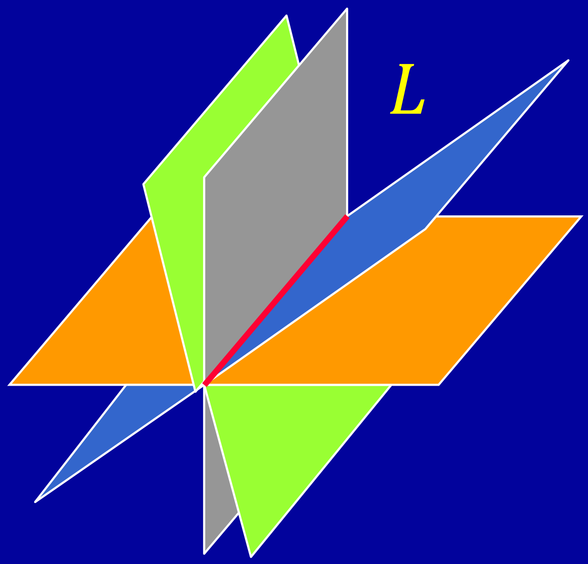
其中A_1,B_1,C_1与A_2,B_2,C_2 不成比例.(从而两者必相交)

建立三元一次方程：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

—— (3)

其中 λ 为任意实数。


L

其中A_1, B_1, C_1与 A_2, B_2, C_2 不成比例，因此，对任何一个 λ 值。（3）式的系数$A_1+\lambda A_2$，$B_1+\lambda B_2$，$C_1+\lambda C_2$ 不全为0，从而（3）表示一个平面。

说明： 若一点在直线 L 上，则点的坐标必同时满足方程 (1) 和（2)，从而满足（3). 因此, （3）表示通过直线 L 的平面且对应于不同的λ 值，(3) 表示通过直线 L 的不同的平面.

反过来， 通过 L 的任何平面（但平面（2）除外）. 都包含在(3) 所表示的一族平面内.

称(3)为通过直线 L 的平面束方程(但缺少(2)这一平面)

注释：无论 λ 为何值，(2) 都不包含在（3）中.

例题 4. 求过点 $(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$

的平面方程。

解法一：(利用平面束方程)，直线L的一般式方程：

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2} \\ \dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$$

过直线L的平面束方程为：

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0$$

将点$(3,1,-2)$代入上式得 $\lambda=\frac{11}{20}$. 所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0.$$

即 $8x-9y-22z-59=0.$

注： 利用平面束方程，是求过一条已知直线和直线外一点的平面方程的最简方法。

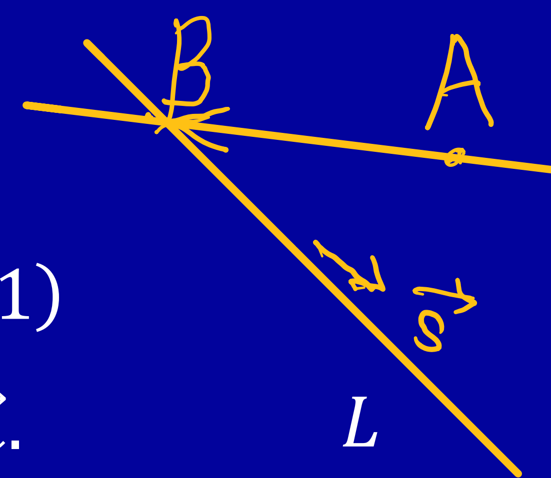
解法二： $A(3,1,-2)$ 不在L上，在L上找一点B，

显然 L上有一点$B(4,-3,0)$

$\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$

直线L的方向向量：$\vec{s}=(5,2,1)$

设过A与L的平面的法向量为$\vec{n}$.



$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(8,-9,-22).$$

过A与L的平面方程 $8x-9y-22z-59=0.$

例题 5.

求直线L: $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面$x+y+z=0$

上的投影直线方程 .

解析:（找过直线L与已知平面垂直的平面，即投影平面，

它是过 L的平面束中的一个平面。）

过直线 L 的平面束方程为:

$$(x+y-z-1)\quad+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0.$

此平面与已知平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是：

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0.$$

得 $\lambda=-1.$

代入上面可得投影平面方程为： $y-z-1=0.$

故投影直线方程为

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$$

作业

P36　2，4，7，9，12，13，15