第三节 幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算与和函数性质

四、求幂级数的和函数

一、 函数项级数的概念

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数列, 称

表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

为定义在区间 I 上的**函数项级数**.

对 $x_0 \in I$, 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 称 x_0 为其**收敛点**, 所有收敛点的全体称为其**收敛域**;

若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散, 称 x_0 为其**发散点**, 所有发散点的全体称为其**发散域**.

在收敛域I上，对$\forall x \in I$, 函数项级数成为一收敛数项级数，有确定的和S, 这样，在I上函数项级数的和是x的函数$S(x)$, 称它为函数项级数的**和函数**, 并写成

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

若用$S_n(x)$表示函数项级数前n项的和, 即

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

令余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

则在收敛域上有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$

二、 函数项级数收敛域的求法

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域的基本方法:

将其中的变量x看成参数,通过数项级数的敛散性判别法，判定函数项级数对哪些x值收敛，哪些x值发散.

例如, 定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数（等比级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

它的收敛域是 $(-1,1)$, 当$x \in (-1,1)$时，有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$,

或写作 $|x| \geq 1$.

目录 上页 下页 返回 结束

2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域，可通过 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$来讨论.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho(x) \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x)$$

$\rho(x)<1$，求解不等式，求出x的取值范围;

(此时$u_n(x)$绝对收敛，从而收敛)

$\rho(x)>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散

(因由比值，根值判别法判定的发散，$u_n \nrightarrow 0$)

$\rho(x)=1$ 时，才可能存在条件收敛，解出这些 x，

验证是否属于收敛域.

例2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)^n$ 的收敛域

解:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{x+1}{x^2+2}\right|^n}=\left|\frac{x+1}{x^2+2}\right|$$

当$\left|\frac{x+1}{x^2+2}\right|<1$时，即$-x^2-2<x+1<x^2+2$

收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

例3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域

解:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{3n+1}}{n\cdot 2^n}}=\frac{|x|^3}{2}\Rightarrow|x^3|<2\Rightarrow x\in\left(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\right)$$

考察当 $\frac{|x|^3}{2}=1$ 时,

当$x=\sqrt[3]{2}$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{3n+1}{3}}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2}}{n}$$ 发散

当 $x=-\sqrt[3]{2}$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2^{\frac{1}{3}})^{3n+1}}{n\cdot 2^n}=\sqrt[3]{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$ 收敛

收敛域为 $[-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$

三、幂级数及其收敛性

最简单常见的函数项级数，各项都是幂函数，形如：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中数列 $a_n\ (n=0,1,\cdots)$ 称为幂级数的**系数**．由幂函数列$\{a_n(x-x_0)^n\}$所产生的，叫做$(x-x_o)$的幂级数，其中x_o为固定值，可看成是多项式函数的延伸，是一个“无限次多项式”，它的部分和函数是一个多项式.

下面着重讨论 $x_0=0$ 的情形, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

称为标准的幂级数，其中常数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$

叫幂级数的系数，上式也叫做x的幂级数.

对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 只要令$t=x-x_0$，得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

问题： 幂级数的收敛性问题，即讨论幂级数的收敛域与发散域是怎样的?

幂级数的收敛性 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

幂级数的项都在$(-\infty, +\infty)$上有定义，对每个实数x或是收敛点或是发散点.

任何$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x = 0$处总是收敛的.

先考察下面幂级数的收敛性

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

对于 $x \in (-\infty, +\infty)$，将x固定，成为常数项级数

x可正，可负或为0, 考察它的绝对收敛性.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ +\infty, & x \neq 0 \end{cases}$$

可见, $x = 0$时，$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ 绝对收敛，从而收敛.

$x \neq 0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} |n!\,x^n|$ 发散，从而$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ 发散.

故 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$仅有收敛点$x = 0$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (先把x看成定数，作为常数项级数来考察)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

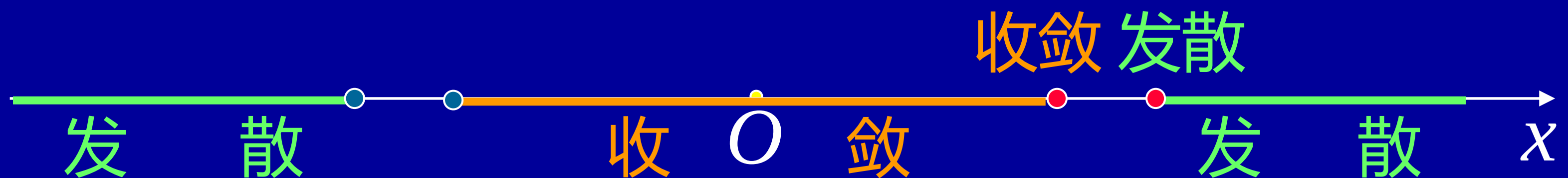
所以,对$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛，从而收敛.

定理 1. (Abel定理) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 点收敛，则对满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 幂级数都绝对收敛.


阿贝尔，N.H.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则对满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x，该幂级数也发散.

证: 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, 于是存在常数 $M > 0$, 使 $|a_n x_0^n| \le M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$



$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛, $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 也收敛,

故原幂级数绝对收敛 .

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散 , 反证法

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛 , 则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾, 故假设不真. 所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散 , 则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x , 原幂级数也发散 .

证毕

推论： 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数 R 存在，使得

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散

当$x=R$与$x=-R$时， 幂级数可能收敛也可能发散.

R 称为此幂级数的**收敛半径**，

$(-R, R)$ 称为**收敛区间**.

看出：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

用 $\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点，则

$R = 0$ 时，幂级数仅在 $x = 0$ 收敛；

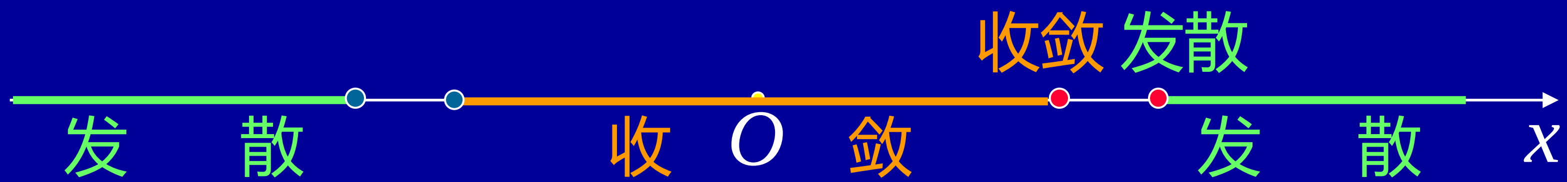
$R = +\infty$ 时，幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛；

$0 < R < +\infty$，幂级数在 $(-R, R)$ 收敛；

在 $[-R, R]$ 外发散；

在 $x = \pm R$ 可能收敛也可能发散 .

$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为**收敛域**.



定理2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$

其中a_n, a_{n+1}是级数相邻两项的系数.

或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

则

1) 若$\rho \neq 0$, $R = \frac{1}{\rho}$;

2) 当$\rho = 0$ 时, $R = +\infty$;

3) 当$\rho = +\infty$时, $R = 0$.

证: 考察 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, 对任何固定$x$, 称为数项级数,

后项与前项之比的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho\,|x|$$

根据比值审敛法可知:

1) 若$\rho \neq 0$, 当 $\rho|x|<1$, 即 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时, 原级数收敛;

当 $\rho|x|>1$, 即 $|x|>\frac{1}{\rho}$ 时, 原级数发散.

因此级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

2) 若 $\rho=0$, 恒有$\rho(x)=0(\forall x\neq 0)\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$处处收敛

对任意 x 原级数绝对收敛, 因此 $R=+\infty$;

3) 若 $\rho=+\infty$, 对$\forall x\neq 0$, $\rho|x|=+\infty\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散

$a_n x^n \nrightarrow 0(n\to\infty)$, $\forall x\neq 0$, 则对除 $x=0$ 以外

的一切 x 原级数发散, 因此 $R=0$.

例1. 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径及收敛域.

解: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

对端点 $x=1$, 级数为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x=-1$, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$, 发散 .

故收敛域为 $(-1,1]$.

例2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径 .

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2, 故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$$

"缺项级数"

"函"不离"数"

"绝对收敛法"

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } 4x^2<1 \text{ 即 } |x|<\frac{1}{2} \text{ 时级数收敛} \\ \text{当 } 4x^2>1 \text{ 即 } |x|>\frac{1}{2} \text{ 时级数发散}\end{array}\right\}$$ 故收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

例3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n+1}$的收敛域.

解法一: 缺少偶次幂项,不能用定理(因有可能导致分母为0)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{n}x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x^2 = x^2$$

当$x^2<1$，即$-1<x<1$，级数绝对收敛

当$x^2>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}x^{2n+1}\right|$发散，原级数发散

(因用比值法判定的发散)

当 $x=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

当 $x=-1$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}$ 发散

故收敛域$(-1,1)$

解法二: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x^2)^n$

令$x^2=t(t\geq 0)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$

记 $a_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$$ 所以$R=1.$

当$t=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$ 发散.

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$收敛域为$0\leq t<1$，即$0\leq x^2<1$

从而 $-1<x<1.$

例4. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$的收敛域.

解: 令 $t=x-1$, 级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$\therefore R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n n}\Big/\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$$

当 $t=2$ 时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 此级数发散;

当 $t=-2$ 时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 此级数条件收敛;

因此级数的收敛域为 $-2\le t<2$, 故原级数的收敛域为 $-2\le x-1<2$, 即 $-1\le x<3$.

例5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n n}$ 的收敛域.

解：令 $t = x + 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 3^n}} = \frac{1}{3},\quad 收敛半径\ R = 3$$

收敛区间为：$|t| < 3$，即 $-4 < x < 2$,

当 $x = -4$, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

当 $x = 2$, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

原级数收敛域为 $[-4,2)$.

例6. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}(x^2+x+1)^n$ 的收敛域.

解： 设 $t=x^2+x+1$,则级数变为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}t^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=1\quad 所以\ R=1.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}t^n$ 收敛区间为$(-1,1)$. 另$t=1,t=-1$收敛点

解 $-1\le x^2+x+1\le 1$，得 $-1\le x\le 0$.

原级数收敛域为$[-1,0]$.

基本方法：“函数项级数离不开数项级数的方法”

四、幂级数的运算

定理3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2，令 $R = \min\{R_1, R_2\}$，(这两个级数在收敛区间 $|x| < R_1$ 内绝对收敛，由绝对收敛级数的性质，定义四则运算.) 则：

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n \quad (\lambda\text{为常数}) \qquad |x| < R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \qquad |x| < R$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R \text{ 其中}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(对角线法则——柯西乘积)

说明: 两个幂级数相除所得幂级数的收敛半径可能比原来两个幂级数的收敛半径小得多. 例如, 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \begin{pmatrix} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0,\ n = 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

它们的收敛半径均为 $R = \infty$, 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

五、幂级数的和函数的分析性质

性质1： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其**收敛域**上连续.

说明：1) 若$x=-R$处收敛，则在这一点处$S(x)$右连续.

2) 若$x=R$处收敛，则在这一点处$S(x)$左连续.

性质2：(逐项可积性) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数$S(x)$

在其**收敛域** I上可积，并且有逐项积分公式：对$x \in I$,

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

逐项积分后得到的幂级数和原幂级数**有相同的收敛区间**.

(但收敛域可能改变，即端点处敛散性可能改变)

例：

$1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$

收敛域为$(-1,1)$. 逐项积分后得到的幂级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$在$x=1$处收敛，因而它的和函数

在$x=1$处左连续. （右端和函数在$x=1$有定义且

连续）故逐项积分后幂级数收敛域为$(-1,1]$.

性质3：(逐项可导性) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

在其收敛区间内可导，且有逐项求导公式：

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛区间.

(但收敛域可能改变，即端点处敛散性可能改变)

注： 反复应用性质3，可知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数

$S(x)$ 在其收敛区间内具有任意阶导数.

六、求幂级数的和函数

首先确定收敛域

例1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数 .

解: 收敛半径 $R=+\infty$. 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

故有

$$\left(\mathrm{e}^{-x}S(x)\right)'=0$$

因此得

$$S(x)=C\,\mathrm{e}^x$$

由 $S(0)=1$ 得 $S(x)=\mathrm{e}^x$, 故得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$.

例2. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1，且 $x=-1$时级数收敛，$x=1$ 时级数发散, 收敛域$[-1,\ 1)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\qquad x\in[-1,\ 1).$$

于是 $$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\left(xs(x)\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\qquad(|x|<1)$$

对上式从0到x积分：

$$xS(x)=\int_0^x \frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(1-x)$$

$$x\in[-1,1)$$

当$x\neq 0$时, 有

$$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

左端在收敛域$[-1,1)$上连续，右端在$x=-1$处连续

当$x=0$时, 有

$$S(0)=a_0=1$$

也可由函数的连续性得到

$$S(0)=\lim_{x\to 0}S(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=1$$

因此,

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

例3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x=\pm 1$ 时级数发散,

故当 $x\in(-1,1)$ 时, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

注: 求幂级数和函数步骤

1) 先求收敛域;

2) 通过各种运算，变量代换，求导，积分等

化为常见幂级数展开式的形式，从而得到其和函数.

例4. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n$

解：收敛域为R.

$$原式=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^2\cdot x^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\cdot x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=x^2e^x+xe^x+e^x-1$$

例5. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解: 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x\neq 0)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\quad(x\neq 0)$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$$

$$\therefore\quad S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\qquad(x\neq 0)$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

注: 数项级数求和法 1）定义法：部分和数列极限

2）幂级数求和法: 通过求幂级数和函数的方法.

例6. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{2^{n-1}}$的和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n-1}}$的和.

解: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left|\frac{n}{n-1}\right| = \frac{1}{2}$, 收敛域$(-2,2)$

设和函数$S(x)$,即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{2^{n-1}}$

从而

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (n-1)\cdot\frac{x^{n-2}}{2^{n-1}}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

所以

$$S(x) = \left(\frac{2}{2-x}\right)' = \frac{2}{(2-x)^2},\quad x\in(-2,2)$$

于是 $S(1) = 2$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n-1}} = 2$.

例7. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}$ 的和.

分析：用幂级数及其和函数来求常数项级数的和.

解：原式= $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)(-\frac{1}{2})^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)(-\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$$

讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n$

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n\ (\,|x|<1\,)$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'' = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''$$

$$= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(-\frac{1}{2})^n = S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27}$$

原级数$= \dfrac{4}{27}+\dfrac{2}{3} = \dfrac{22}{27}$

例8. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, 收敛域[−1,1].

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,dx-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^n\,dx \qquad (x\neq 0)$$

$$=\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\Big)\,dx-\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)\,dx$$

收敛区间内逐项求导，求积

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx$$

$$= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x)$$

当$x = 0$时，幂级数和为0.

所以

$$S(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) + \dfrac{1}{x}\ln(1-x) + 1 & x \in [-1,0) \cup (0,1) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

当$x = 1$时，$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1.$

作业

P281　　1: (2)(5)(7)

　　2: (1)(3)

作业

P329　　8: (1)(4)

　　9: (1)(3)　　10: (1)

内容小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性.

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求.

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

2) 在收敛域内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

3. 求和函数的常用方法 — 利用幂级数的性质

思考与练习

1. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

答: 根据Abel 定理可知, 级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛，$|x| > |x_0|$ 时发散．故收敛半径为 $R = |x_0|$.

2. 在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} x^n$ 中,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 3/2\,, & n\text{ 为奇数} \\ 1/6\,, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

能否确定它的收敛半径不存在？

答: 不能. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}\,\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

当 $|x| < 2$ 时级数收敛，$|x| > 2$ 时级数发散，$\therefore R = 2.$

说明: 可以证明

比值判别法成立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 根值判别法成立

备用题 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中 $a>1$.

解: 令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$

作幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为 $S(x)$,

则
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n=x\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}=x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)'$$

$$=x\cdot\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n=S(\tfrac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$$