第一章集合与函数

在科学研究或实际生活中，我们面临的对象往往是一些具有特定性质的集合，而研究这些集合的属性常常归结为研究集合之间元素的某种依存关系，例如质点的运动，其位移总是依赖于时间的变化，即每一时刻，质点距离出发点都有一个确定的距离，又譬如，某种产品的产量总是随着其销量的变化而变化等等，对于这些我们在中学阶段已经对数集间量的对应关系有了初步的认识.

第一节集合与实数

一、集合及其运算：

1.所谓集合是指某些具有特定性质事物的全体或部分，例如自然数的全体，就是我们熟知的一个集合,一般用一个大写的英文字母例如$A, B, \cdots$表示一个集合.其中，组成集合的对象，我们称为集合的元素.常见的集合表示方法有枚举法（花名册法）:例如自然数集合$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots,\}$,偶数集合$E=\{2,4,6,\ldots,\}$,整数集$\mathbb{Z}$,某个班级的花名册等等.

特性描述法：$S=\{x|P(x)\}$,其含意是：集合$S(set)$中的代表或称元素x,具有性质$P(property)$．例如整数集合$\mathbb{Z}=\{x|x\text{是整数}\}$,

正有理数集合$\mathbb{Q}=\{x|x=\frac{p}{q}, q\neq 0, p, q$ 是互质（公约数为1）的整数$\}$,实数集：$\mathbb{R}$，复数集：$\mathbb{C}$等等.

不含任何元素的集合，我们称它为空集，习惯上记作$\varnothing$.例如集合$A=\{x|x\text{是实数}, x^2+1=0\}$.

数学作为一种语言，习惯上总是用一些约定的符号来表达，我们将逐渐给出这些符号和其含意. $x\in A$是指：x是集合A中的元素，$A\subseteq B$是指：集合A含于集合B,或者说A是B 的子集，集合A与集合B相等是说A, B互为子集.$\forall$是指：对于所有的或任意的，$\exists$是指：存在.用P, Q表示两个命题，$P\Longleftrightarrow Q$是指P与Q等价或称P成立的充分必要条件是Q成立,反之亦然.若P，则Q记作：若$P\Longrightarrow$(那么)Q.

例1.1.1 设$A=\{2,3\}$,$B=\{x|x^2-5x+6=0, x\in\mathbb{R}\}$,证明:$A=B$.

证明: $\forall x\in A$,容易看到$x\in B$,反之亦然.即$A\subseteq B, B\subseteq A$同时成立，则$A=B$,

我们说集合A是集合B的真子集,是指: $A\subseteq B$，但$\exists x\in B$，而$x\notin A$,这时记作$A\subset B$例如: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

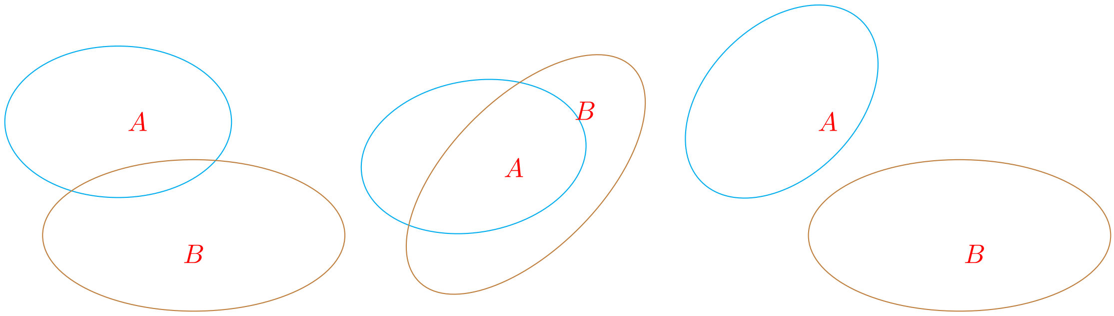
2.集合A和集合B之间可以进行某些运算，我们这里只研究以下三种运算“交”记作$A\bigcap B$,“并”记作$A\bigcup B$,“余”记作A^C.

集合$A\cap B^C$我们也记作$A\backslash B$.任意两个集合的上述三种集合运算的结果还是集合，它们分别是：

$A\cap B=\{x|x\in A且,x\in B\}$

$A\cup B=\{x|x\in A或,x\in B\}$

$A^C=\{x|x\notin A\}$.



与数的运算类似，空集$\varnothing$在集合运算中的作用相当于数集有理运算中的元素0.

对于集合有如下运算规律：

I, 交换律：$A\cap B=B\cap A$,$A\cup B=B\cup A$

II,结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

III,分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

IV,对偶律（De Morgan 律）$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$, $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

我们给出III和IV 的证明，其余由读者自己证明.

III 的证明: $\forall x\in A\cap(B\cup C)\Longrightarrow x\in A且x\in B\cup C$,于是$x\in A且x\in B或x\in C$,那么$x\in A\cap B或x\in A\cap C$. 于是，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,我们有$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

反之$\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Longrightarrow x\in A\cap B$ 或$x\in A\cap C\Longrightarrow x\in A且x\in B\cup C\Longrightarrow x\in A\cap(B\cup C)$,于是$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$综合上述讨论III成立.

IV的证明$\forall x\in(A\cap B)^C\Longrightarrow x\notin A\cap B\Longrightarrow x\notin A或x\notin B$, 于是$x\in A^C\cup B^C\Longrightarrow(A\cap B)^C\subseteq A^C\cup B^C$, 反之容易推证$A^C\cup B^C\subseteq(A\cap B)^C$,于是我们得到IV.

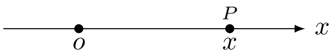
二、实数集：高等数学研究的基本对象是定义在实数集合上的函数,实数集合$\mathbb{R}$是由有理数和无理数组成的数集,有理数除了用$\frac{p}{q}$表示外还可以用有限十进制小数或无限循环小数来表示,而无限十进制不循

环小数称为无理数.

1 .实数的表示:

有限正小数(包括整数)也可以表示成无限循环小数的形式,若$x>0$是一个有限小数,则$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$其中$a_n\neq 0,a_0$是非负整数$a_j\in\{0,1,2,\cdots 9\}(j=1,2,\cdots,n)$,我们约定$x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\cdots$,当$x=a_0$我们记$x=a_0-1.999\cdots$ 例如3记作2.999⋯,而3.001记作3.000999⋯,对于负有限小数(包括负整数)y,则先将$-y$表示成无限小数,再将所得无限小数之前加负号,例如-8记作$-7.999\cdots$这样一来任何一个实数都可以用无限小数来表示.

实数也可以用一条数轴ox 来表示：数轴上的一个点P对应一个实数x，反之亦然.



对于两个实数我们可以比较大小,我们定义如下:

定义1.1.1 给定两个非负实数$x=a_0.a_1a_2\cdots,y=b_0.b_1b_2\cdots$,其中$a_0,b_0$为非负整数, $a_k,b_k\in\{0,1,2,\cdots,9\},(k=1,2,\cdots)$若$a_k=b_k,k=0,1,2\cdots$,则称$x$与$y$相等，记作$x=y$;若$a_0>b_0$或存在非负整数$\ell$,使得$a_k=b_k(k=0,1,2,\cdots,\ell)$ 而$a_{\ell+1}>b_{\ell+1}$，则称x大于y或y小于x，分别记作$x>y$或$y<x$.

对于负实数x,y 若按上述规定分别有$-x=-y$与$-x>-y$,则分别称$x=y$和$x<y$

定义1.1.2 设$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\geq 0$,称有理数$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$为$x$的$n$位不足近似,而有理数$\overline{x_n}=x_n+\frac{1}{10^n}$称为$x$的$n$位过剩近似$n=0,1,2,\cdots$.

对于负实数$x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其$n$位不足近似和$n$位过剩近似分别记作

$x_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{10^n}$与$\overline{x_n}=-a_0.a_1a_2\cdots a_n$，显然$x_n<x<\overline{x_n}$

为了论证方便,我们不加证明给出如下命题

命题1.1.1 设$x=a_0.a_1a_2\cdots,y=b_0.b_1b_2\cdots\in\mathbb{R}$,则$x>y\Longleftrightarrow$存在非负整数$n$,使得$x_n>\overline{y_n}$, 其中$x_n$表示$x$的$n$位不足近似,$\overline{y_n}$表示$y$ 的n位过剩近似.

例1.1.2 设$x,y\in\mathbb{R}$,且$x<y$，则存在$r\in\mathbb{Q}$满足$x<r<y$.

证明: 由命题1.1.1 $x<y$,则存在非负整数n,使得$y_n>\overline{x_n}$.令$r=\frac{1}{2}(\overline{x_n}+y_n)\in\mathbb{Q}$ 且$x\leq\overline{x_n}<r<y_n\leq y$.

2.实数有如下常见的性质:

(1)实数集$\mathbb{R}$对四则运算$(+,-,\times,\div)$封闭,即$\forall x,y\in\mathbb{R},x+y,x-y,x\times y,x\div y\in(y\neq 0)\mathbb{R}$.

(2)实数是有序的,即$\forall x,y\in\mathbb{R}$,必须满足下述三个关系之一,$x<y,x>y,x=y$.

(3)实数的传递性,即若$x<y,y<z$，则$x<z$.

(4)实数的阿基米德(Archimedes)性,即$\forall x,y\in\mathbb{R}$,若$x>y>0$,则存在正整数n,使得$ny>x$.

(5)实数的介值性,即$\forall x\in\mathbb{R}$,若$x\geq 0$,则存在非负整数n,使得$n\leq x<n+1$.

(6)实数的几何性,任意一个实数x都与实数轴(规定了原点、方向和单位长度的直线)上的点P一一对应,即给定实数x对应一个实数轴上的点P,反之亦然.

(7)实数的距离性,$\forall x,y\in\mathbb{R}$满足以下两条：

$0\leq|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$,且$|x|=0\Longleftrightarrow x=0$;

$|x+y|\leq|x|+|y|$.

实数的距离也称为实数的绝对值，就是实数x对应的点P到原点的距离.

3.实数的绝对值

设$x,y\in\mathbb{R}$,我们有

(1) $-|x|\leq x\leq|x|$

(2)$|x|<h\Longleftrightarrow -h<x<h;|x|\leq h\Longleftrightarrow -h\leq x\leq h(h>0),|x|\geq y\Longleftrightarrow x\geq y$ 或$x\leq -y$

(3)$|x|-|y|\leq|x\pm y|\leq|x|+|y|$ （三角不等式）

(4)$|xy|=|x||y|,|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$

我们给出性质3的证明，其余的证明留给读者.

证明 ：$\forall x,y,\in\mathbb{R}$由(1)

$-|x|\leq x\leq|x|$ (i)

$-|y|\leq y\leq|y|$ (ii)

$(i)+(ii)$得$-(|x|+|y|)\leq x+y\leq(|x|+|y|)$由 (2)得到$|x\pm y|\leq|x|+|\pm y|=|x|+|y|$

$|x|=|x+y-y|\leq|x+y|+|y|$得到$|x|-|y|\leq|x+y|$,于是我们得到(3)

例1.1.3 解不等式$|x^2+3x-4|>x^2+3x-4$

解：由于$|y|>y \Longleftrightarrow y<0$

因此原不等式与以下不等式等价：

$x^2+3x-4<0 \Longrightarrow (x+4)(x-1)<0$,即$-4<x<1$

例1.1.4 解不等式$||x+1|-|x-1||<1$

解：原不等式等价于$(x+1)^2-2|x^2-1|+(x-1)^2<1$

$\Longleftrightarrow |x^2-1|>x^2+\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow x^2-1>x^2+\frac{1}{2}$或$x^2-1<-(x^2+\frac{1}{2})$

$\Longleftrightarrow 2x^2<\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

4.常见的不等式

(i) $\forall a_j>0(j=1,2,\cdots,n)$,则$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

证明: (我们用数学归纳法证明) 当$n=1$时$a_1=a_1, n=2$时$\sqrt{a_1a_2}\le\frac{a_1+a_2}{2}$ 显然成立.

假定$n=k$时$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$

则当$n=k+1$时

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} &= \frac{k\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+a_{k+1}}{k+1}\\ &\ge \frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}}{k+1}\end{aligned}$$

设$a_1a_2\cdots a_k = x^{k(k+1)}, a_{k+1} = y^{k+1}$, 则$x \geq 0, y \geq 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}} \\
&\geq \frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}} \\
&= \frac{kx^{k+1}+y^{k+1}}{k+1} - x^ky = \frac{kx^{k+1}+y^{k+1}-kx^ky-x^ky}{k+1} \\
&= \frac{x-y}{k+1}[kx^k - y(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+x^{k-2}+y^{k-1})] \\
&= \frac{x-y}{k+1}[(x^k-x^{k-1}y)+(x^k-x^{k-2}y^2)+\cdots+(x^k-y^k)] \\
&= \frac{(x-y)^2}{k+1}[x^{k-1}+x^{k-2}(x+y)+\cdots+(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+y^{k-1})] \geq 0
\end{aligned}
$$

因此当$n = k+1$时成立

利用这个不等式，我们可以证明
$\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$
如果我们记$H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, A = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,我们分别称$H$为调和平均,$G$为几何平均,$A$为算术平均,于是$H \leq G \leq A$

反向归纳法证明：

$1°$对$n = 2^k$的情形证明

$\sqrt{a_1a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$

$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}$

$= \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}} \leq \sqrt{2^{k-1}}\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_3+a_4}{2}\cdots\frac{a_{2^k-1}+a_{2^k}}{2}}$

$\leq \cdots \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}$

$2°$令$A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$假定对$n+1$不等式成立，则

$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{nA+A}{n+1} = \tfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n+A}{n+1} \\
&\geq \sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_nA}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow A^{n+1} \geq a_1a_2\cdots a_nA, \Longrightarrow A^n \geq a_1a_2\cdots a_n$

即$A \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$

(ii)(柯西（Cauchy）施瓦茨（Schwarz）不等式)$\forall a_j, b_j \in \mathbb{R} (j = 1, 2, \cdots, n)$ 有

$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$

证明:令$B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, C = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$ 原不等式等价于$B^2 - AC \leq 0$,又$A \geq 0$,因为二次三项式

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax^2 + 2Bx + C \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

所以判别式$B^2 - AC \leq 0$,于是所证不等式成立.

例1.1.5 证明: $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^2 \leq 2n$.

证明: $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^2 = (1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + \cdots + 1 \cdot \frac{1}{n})^2 \leq n(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2})$

而$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots \frac{1}{(n-1) \times n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$

于是不等式得证.

(iii) (伯努利(Bernoulii)不等式) $\forall x > -1$有$(1+x)^n > 1 + nx$.

证明：$n = 1, 1 + x \geq 1 + x$

$n = 2, (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$

假定$(1+x)^n \geq 1 + nx$

则$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

由归纳原理得证.

4.区间与邻域

集合$\{x | a < x < b\}$称为开区间，记作(a, b)

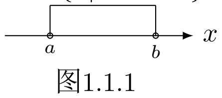


图1.1.1

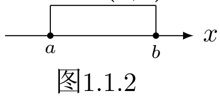
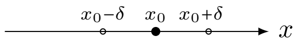


图1.1.2

集合$\{x | a \leq x \leq b\}$称为闭区间，记作$[a, b]$

邻域：考虑到实数集合在实数轴上的几何特征，开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $(\delta>0)$称为点（数）x_0的δ邻域，记作$U(x_0,\delta)$,显然我们有$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$



去心邻域：$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$,习惯上称为$x_0$的去心$\delta$邻域.有时也称$(x_0-\delta,x_0)$为$x_0$的左邻域，$(x_0,x_0+\delta)$ 为 x_0的右邻域.显然$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$，有时如果不需要指明邻域的大小，我们将含点$x_0$的开区间称为$x_0$的邻域，简记为$U(x_0)$

$U(\infty)=\{x||x|>M>0\}$, $U(+\infty)=\{x|x>M\}$,$U(-\infty)=\{x|x<-M\}$(M充分大)分别称为无穷远点$\infty,+\infty,-\infty$的邻域.

注：$\infty,\pm\infty$不是实数，但可以视作一个点，称为无穷远点,在平面上它们表示同一点.

5.有界数集与确界

定义1.1.3 设$S\subseteq\mathbb{R}$,若存在$M,m\in\mathbb{R}$,使得$\forall x\in S$ 有$m\le x\le M$，则称S是有界数集，其中m叫下界，M叫上界.

定义1.1.3′ 设$S\subseteq\mathbb{R}$,若存在$M>0$,使得$\forall x\in S$ 不等式$|x|\le M$成立，则称S是有界数集.

读者可以证明以上两个定义是等价的.

容易看到任何有限区间都是有界集合,任何无限区间都是无界集合.所谓无界集合S是指：$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x\in S$使得$|x|>n$

定义1.1.4 设$S\subseteq\mathbb{R}$,若$\beta(\alpha)\in\mathbb{R}$,满足以下两条:

(1)$\forall x\in S, x\le\beta(x\ge\alpha)$

(2)$\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in S$且$x_1+\varepsilon>\beta(x_1<\alpha+\varepsilon)$, 则称$\beta(\alpha)$为集合$S$的上确界(下确界)记作$\sup S=\beta(\inf S=\alpha)$

例如$S=(0,1),\sup S=1,\inf S=0$

定义1.1.4′ 设$S\subseteq\mathbb{R}$,若$\beta(\alpha)\in\mathbb{R}$满足以下两条:

(1)$\forall x\in S, x\le\beta(x\ge\alpha)$;

(2)$\forall x<\beta(x>\alpha),\exists x_1\in S$ 且$x_1>x(x_1<x)$，则称$\beta(\alpha)$为集合S的上确界(下确界).

读者可以证明定义1.4与定义1.4′是等价的.

注: $\sup S$是集合S的最小上界,$\inf S$是集合S的最大下界.

注:S的上、下确界不一定属于S.

注：若S的确界存在，则一定是唯一的且$\inf S \le \sup S$

定理1.1.1（确界原理）S是非空有界数集，则一定存在确界，且有上界的数集，存在上确界；有下界的数集，存在下确界.

证明: 不妨设S有上界，为了简化证明不妨设S中含有非负整数n, 且$n+1$是S 的一个上界，于是我们有

(1) $\forall x \in S, x < n+1$

(2) $\exists x_0 \in S$ 使得$x_0 \ge n$

将区间$[n, n+1)$10等分，分点分别为$n.1, n.2, \cdots, n.9$,则存在$0, 1, 2, \cdots, 9$中的一个数n_1 使得

(1)$\forall x \in S$有$x < n.n_1 + \frac{1}{10}$;

(2)$\exists x_1 \in S$使得$x_1 \ge n.n_1$

将区间$[n.n_1, n.n_1 + \frac{1}{10})$10等分，则存在$0, 1, 2, \cdots, 9$中的一个数$n_2$ 使得

(1)$\forall x \in S$有$x < n.n_1n_2 + \frac{1}{10^2}$;

(2)$\exists x_2 \in S$使得$x_2 \ge n.n_1n_2$

继续上述过程，则对于任何$k = 1, 2, \cdots$存在$0, 1, 2, \cdots, 9$中的一个数n_k 使得

(1)$\forall x \in S$有$x < n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$;

(2)$\exists x_k \in S$使得$x_k \ge n.n_1n_2\cdots n_k$

将上述步骤无限进行下去，得到实数$\beta = n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$

以下我们证明这样的数$\beta = \sup S$,只要证明

$(i)\forall x \in S, x \le \beta, (ii)\forall x < \beta \exists x' \in S$使得$x' > x$

反证，若(i)不成立，即存在$x \in S$,使得$x > \beta$由命题1.1.1，存在x的k位不足近似x_k满足$x_k > \overline{\beta_k} = n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$ 于是我们有$x > x_k > n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$这与上述中的(1)式矛盾，于是$(i)$成立.

对于(ii)由于$x < \beta$,则存在k使得$\beta_k > \overline{x_k}$ 注意到β的构造，存在$x' \in S$ 且$x' \ge \beta_k$,从而有$x' \ge \beta_k > \overline{x_k} \ge$

x,即(ii)成立.

习题1.1

1,确定集合$A\bigcup B, A\bigcap B, A\bigcap B^C, B\bigcap A^C$

1) $A=\{x|-4<x<1\}, B=\{x|0<x<4\}$;

2) $A=\{x|x^2-x-2>0\}, B\{x|6x-x^2\geq 0\}$

2,定义对称差$A\Delta B=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcap B)^C$, 证明$A\bigcup B=(A\Delta B)\Delta(A\bigcap B), A\bigcap B^C=A\Delta(A\bigcap B)$

3,求解下列不等式：

1)$|x+2|+|x-2|\leq 12$; 2)$|x(1-x)|<0.05$; 3)$|2x-1|<|x-1|$

4,证明Bernoulii不等式$\forall x>-1$，则$(1+x)^n>1+nx$;

5,证明:$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a), b>a>0$

6,利用Cauchy Schwarz不等式证明

1) $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$

2)$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n})\geq n^2(a_j>0(j=1,2,\cdots,n)$

3) 设$a_j, b_j\in\mathbb{R}(j=1,2,\cdots,n)$，有

$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$

7,证明：$|a\cos x+b\sin x|\leq\sqrt{a^2+b^2}$

8,证明：定义1.1.3与定义1.1.3$'$是等价的.

9，证明：定义1.1.4与定义1.1.4$'$是等价的.

10，证明：数集S的确界如果存在必定唯一，且$\inf S\leq\sup S$.

11，讨论以下各数集A 的上，下确界：

1)$A=\{\arctan x|-\infty<x<+\infty\}$

2),A为正无理数集合

3),$A=\{1+n\sin\frac{n\pi}{2}|n=1,2,\cdots\}$

12,设A,B均为非空有界实数集，证明：$A\bigcap B$也是有界集，且当$A\bigcap B\neq\varnothing$ 时

$\inf(A\bigcap B)\geq\max\{\inf A,\inf B\},\sup(A\bigcap B)\leq\min\{\sup A,\sup B\}$

13,设$a, b \in \mathbb{R}$,证明: $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

第二节映射与函数

一、映射：

细心的读者注意到，有些集合虽然杂乱无章，但是我们发现它可能与一个有规律的集合有某种对应关系，例如世界上所有的人是一个杂乱无序的集合，但如果给每个人一个编号，那么全世界的人这个庞大的集合就与自然数的一个真子集是相互对应的，即每一个人对应一个编号，而每一个这样的编号只对应一个人.

定义1.2.1设X,Y是两个非空的集合，若$\forall x \in X$，存在一个对应关系f，可以确定Y中的元素y与之对应，则称f是从X到Y的映射，记作$f: X \longrightarrow Y$,其中y被称为元素x的像，记作 $f(x)$或$y = f(x)$,x称为y在f下的原像.

集合X称为映射f的原像集或定义域，记作D_f,而称集合$f(X) \triangleq \{y|y = f(x), x \in X\}$为映射$f$的像集或值域，为了与定义域对应,记作$R_f$

注：若$f : X \longrightarrow Y$,则$D_f = X$,但像集$f(X) = R_f$不一定是Y ,也就是说若f是X到Y的映射，未必是Y到X的映射.即 或者$R_f \subset Y$或者$R_f \subseteq Y$.若$y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$,则$x_1 \neq x_2$,但当$x_1 \neq x_2$时，可能有$f(x_1) = f(x_2)$.

例如$X = \{0, 1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}, (f(0) = 1, f(k) = k, (k =, 1, 2, 3)), f(X) \subset Y$.

设$x_1, x_2 \in D_f$,当$x_1 \neq x_2$,有$f(x_1) \neq f(x_2)$,则称f是X到Y的单射，例如$f : y = \ln x$满足$f : A = (0, +\infty) \longrightarrow B = (-\infty, +\infty)$,就是由$A$到$B$的单射,单射的另一个等价的定义是若像相同，则原像也相同.

当$R_f = f(X) = Y$,即$\forall y \in Y, \exists x \in X$,使得$y = f(x)$,则称$f$是$X$到$Y$的满射(或称$f$ 是X到Y上的映射). 例如：$A = (-\infty, +\infty), f(x) = sinx : A \longrightarrow B = [-1, 1]$,但不是单射. 请读者举一个，是单射但不是满射的例子.

既是单射又是满射的映射我们称其为双射或一一对应.例如$A = [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], f(x) = sinx, B = [-1, 1]$, 我们说集合$A = [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ 与集合$B = [-1, 1]$一一对应.从一一对应的角度，我们发现有趣的事实，虽然集合$A = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \subset B = (-\infty, +\infty)$, 但在双射$y = \tan x$下，$A$与$B$一一对应，即部分和全体具有相同多的"点"，这是无穷集合与有限集合的本质区别.

若映射f是X到Y的单射，我们从集合$f(X) = R_f$出发,发现：$\forall y \in R_f$, $\exists$ 唯一的$x \in X$,使得x与y对应，

于是我们得到了从R_f到X的映射，我们称此映射为映射f的逆映射，记作f^{-1},显然只有单射才有逆映射.而且逆映射的定义域是原来映射的值域，而逆映射的值域是映射的定义域.

不同的映射和映射之间在一定条件下是可以定义运算的，例如：

$f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$,那么我们称映射$g \circ f: A \longrightarrow C$,其中$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$,是两个映射的复合. 这里提请读者注意复合运算的前提：$R_f \bigcap D_g \neq \varnothing$.

例1.2.1 设$g: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]: g(x) = \sin x, f: [-1,1] \longrightarrow [0,1]: f(u) = \sqrt{1-u^2}$

解: $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$ 那么映射$f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

而映射$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(\sqrt{1-u^2}) = \sin\sqrt{1-u^2}$,那么

$g \circ f: [-1,1] \longrightarrow [0, sin 1]$,一般来讲$g \circ f \neq f \circ g$.

例1.2.2 设映射$f: X \longrightarrow Y, A \subset X, B \subset X$.证明

（1）$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2)$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

证明: 先证$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$, $\forall y \in f(A \cup B), \exists x \in A \cup B$,使得$y = f(x)$.也就是$x \in A$或$x \in B$且$y = f(x)$即，$y \in f(A)$ 或$y \in f(B)$,即, $y \in f(A) \cup f(B)$.

注意到$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$所以$f(A) \subseteq f(A \cup B), f(B) \subseteq f(A \cup B)$即, $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$于是（1）成立

（2）$\forall y \in f(A \cap B), \exists x \in A \cap B$使得$y = f(x)$,而$x \in A \cap B$ 就是$x \in A$且$x \in B$.于是$y = f(x) \Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

但右边不一定属于左边，例如

$A = \{1,2,3\}, B = \{3,4,5,6\}: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 0, f(4) = 1, f(5) = 2, f(6) = 3$

$f(A \cap B) = \{0\}, f(A) \cap f(B) = \{0,2,3\}$

例1.2.3 设映射$f: X \longrightarrow Y$,若存在一个映射$g: Y \longrightarrow X$,使$g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$,其中$I_X, I_Y$分别是$X, Y$上的恒等映射，即对于每一个$x \in X$, 有$I_X x = x$;对每一个$y \in Y$有$I_Y y = y$, 证明：$f$是双射，且$g$是$f$的逆映射：$g = f^{-1}$

证明: 欲说f是双射，须说f既单又满，先证f是单射：$\forall x_1, x_2 \in X$，若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$.事实上，若$f(x_1) = f(x_2)$, 则$g \circ (f(x_1)) = g \circ (f(x_2))$这是因为$f(x_j) \in Y$而$g$是$Y$上的映射，于是有$I_X x_1 = I_X x_2$,即$x_1 = x_2$.

f是满射：即证明$f(X) = Y$事实上，$\forall y \in Y$由于g 是Y 到X 的映射，故存在$x \in X$使得$g(y) = x \Longrightarrow f \circ (g(y)) = f(x)$于是，$I_Y y = f(x)$ 那么$y = f(x)$，此即$Y \subseteq f(X)$ 又显然$f(X) \subseteq Y$故f是双射. X与Y 是一一对应的，于是$g = f^{-1}$

二、函数

1. 函数的概念：

定义1.2.2 设非空数集$D \subseteq \mathbb{R}$,则称映射$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ 为定义在D上的函数.记作$y = f(x)$(f是单词function的第一个字母，在数学中用来表示变量y依赖于变量x）当然也可以记作$y = \varphi(x), y = y(x)$其中x称为自变量，y称为因变量，因变量对自变量的依赖关系称为函数关系，如果不强调具体的依赖关系，我们也称因变量y是自变量x的函数.

注：函数的定义：$\forall x \in D_f$,存在唯一确定的数值y与之对应，我们这里主要强调函数的单值对应.因此函数定义有两个要素：定义域D_f和对应法则f,如果这两个要素确定了，则函数的值域

$R_f = \{y | y = f(x), x \in D_f\}$是确定的.

注：如果函数的定义域是确定的，对应法则也是确定的，函数的表示与所用的符号没有关系. 例如$y = \sin x, x \in \mathbb{R}$与$u = \sin t, t \in \mathbb{R}$表达了同一函数，所以若$D_f = D_\varphi, f, \varphi$表示相同的对应法则，则$y = f(x), u = \varphi(t)$表示同一函数关系.

注：函数的定义域有时是由函数表达的实际背景来确定，例如半径为r的圆的面积$A = \pi r^2$,定义域$D = [0, +\infty)$，但如果只考虑单纯的函数表达式，其定义域就是实数轴$(-\infty, +\infty)$.通常函数的定义域是指，使得函数表达式有意义的自变量的全体，我们常常采取默认的办法来对待函数的自然定义域. 例如函数$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$的定义域就是$D_f = (-1, 1)$

注：函数关系是指两个数集的对应关系，对于任意的自变量，只要存在某种法则能够确定因变量，就给出了一个函数关系，例如圆周的方程$x^2 + y^2 = R^2$就给定了$\forall x \in [-R, +R]$都有确定的值$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$这

与函数定义中唯一性矛盾，但对应关系是确定的，这样的函数，我们称为多值函数，本书主要研究单值函数，涉及到多值函数我们将具体说明.

注：符号$y(x_0), f(x_0)$,意味着函数$y = f(x)$在点x_0处的函数值，

例如$y = e^{\sin x}, y(\frac{\pi}{2}) = e^{\sin\frac{\pi}{2}} = e$ ($e = 2.718281828459\cdots$是一个无理数)

2. 函数的表示：

函数的表示方法有解析法，图象法和图表法等，对于这些我们在初等数学的学习中已经比较熟悉.$y = f(x)$在直角坐标系下有特殊的含义，如果我们将定义域置于直角坐标系的横轴ox轴上.根据函数的定义，我们在直角坐标平面上得到点集：$E = \{(x,y)|x \in D_f \subseteq \mathbb{R}, y = f(x)\}$ ，则我们称动点(x,y)的轨迹为函数$y = f(x)$的图象，

例1.2.4 常函数$y = C$,其定义域为实数轴$(-\infty,+\infty)$, 函数图象是一条平行于横轴x且与横轴的距离为$|C|$的直线.

例1.2.5 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$，其定义域是实数轴$(-\infty,+\infty)$,函数图象是第I,III象限和第$II, IV$ 象限角平分线，在横轴x的上方部分,见图1.2.1.

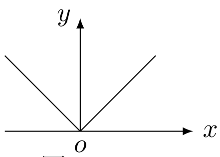


图1.2.1

例1.2.6 （符号函数）$y = sgnx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$,其定义域为实数轴$(-\infty,+\infty)$, 函数图象是两条半直线$y = 1, y = -1$和原点组成的点集,见图1.2.2.

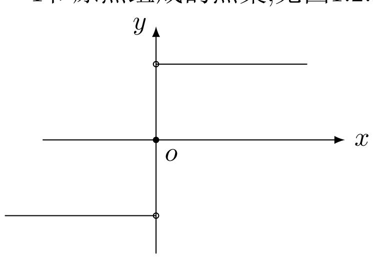


图1.2.2

例5和例6 之间的约束关系是$x = |x|sgnx$

例1.2.7（取整函数）$y=[x]$,函数值取不大于x的最大整数,其定义域是实数轴.

例如$y(0.1)=0, y(-1.1)=-2, y(\sqrt{2})=1$,其图象是阶梯状的线段,见图1.2.3,对于取整函数，我们还有$\forall x\in\mathbb{R}, x-1<[x]\leq x$.

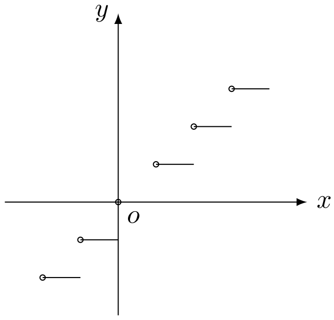


图1.2.3

例1.2.8（分段函数）$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leq x\leq 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$,其定义域为区间$[0,+\infty)$，其图象是抛物线$y=2\sqrt{x}$接直线$y=x+1$,见图1.2.4.

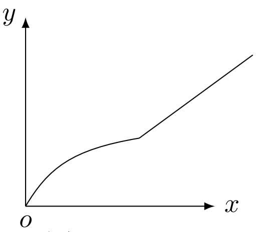


图1.2.4

注：不是所有具有解析表达式的函数都可以用图象甚至“连续光滑”的曲线来表示的，反之不是所有的曲线都是某一个解析函数的图象.

例1.2.9（Dirichlet函数）$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^C\end{cases}$ 的图象我们是无法画出的.

例1.2.10“一尺之棰，日取其半”第n天还剩几何？

若用$y(n)$表示第n天棰把的长度，则$y(n)=\frac{1}{2^n}$定义域为自然数集$\mathbb{N}$,

3. 函数的（整体）特性

I 函数的有界性：若$\forall x\in D_f, \exists M>0$满足不等式$|f(x)|\leq M$,则称函数在定义域上是有界的.例如函数$y=\sin x, x\in\mathbb{R}$,而$|\sin x|\leq 1$

函数的有界性也可以有另一个定义，即函数在定义域上有上界：$\forall x\in D_f, f(x)\leq M$,且有下界：$\forall x\in$

$D_f, m \le f(x)$

以上两个定义是等价的.

命题1.2.1 函数$y = f(x)$有界的$\Longleftrightarrow$ 是$f(x)$既有下界又有上界.

证明：($\Longrightarrow$)（命题的必要性）因为函数在定义域D_f上有界，$\Longrightarrow \forall x \in D_f, \exists M > 0$ 使得$|f(x)| \le M$,即

$m = -M \le f(x) \le M$,证毕.

($\Longleftarrow$)（命题的充分性）设$\forall x \in D_f$,有

$m \le f(x) \le M_1$,取$M = \max\{|m|, |M_1|\}$,

$\Longrightarrow, -M \le m \le f(x) \le M$即$|f(x)| \le M$

注:若$\exists x_1 \in D_f, \forall M > 0$有$|f(x_1)| > M$,则称函数$y = f(x)$在其定义域上无界.

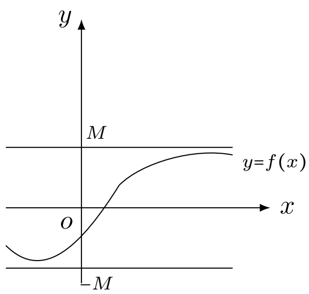
例如$y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$I = (0,1)$上无界. 事实上，$x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \in I$而

$|f(x_k)| = |(2k\pi + \frac{\pi}{2})\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2})| = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > 2k$

k为任意的自然数.

上面的例4，6，9，10是有界函数，其余是无界函数.

对于可以画出图像的有界函数$y = f(x), x \in [a,b]$,其图像总是位于两条平行直线$y = -M$和$y = M$之间，



见图1.2.5

图1.2.5

II 函数的单调性：设区间$I \subset D_f$,若$\forall x_1, x_2 \in I$且$x_1 < x_2$,如下不等式成立$f(x_1) \le f(x_2)(f(x_1) \ge f(x_2))$,则称函数在区间$I$上单调不减（单调不增）.无论单调不减还是单调不增，统称为在区间I上单调.若不等式变成严格不等式，则称为单调递增（递减）.

注：单调性不仅与函数本身有关还和定义的区间有关，例如函数$y = x^2$在定义域$(-\infty, +\infty)$不是单调的，但在0的左邻域$(-\infty, 0)$单调递减，在0的右邻域单调递增.函数$y = \sin n, n \in \mathbb{N}$在任何一个区间上都不具

有单调性.函数$y=\sin x$ 在区间$[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$上单调递增，但在定义域上却不单调.

III 函数的奇偶性：设区间$(-\ell,+\ell)\subseteq D_f$, 若$f(-x)=f(x)$,则称函数$y=f(x)$在区间$(-\ell,+\ell)$ 上是偶函数，其几何意义是函数的图象关于y轴是对称的，例如$y=x^{2k}$,在其定义域上是偶函数，例如$y=x^2$,图像关于y轴对称；若$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$是奇函数，其几何意义是函数的图象关于原点对称.例如$y=x^3$，在其定义域上是奇函数,见图1 .2.6，图1.2.7.

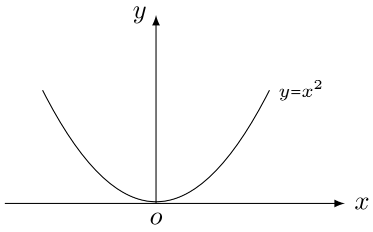


图1.2.6

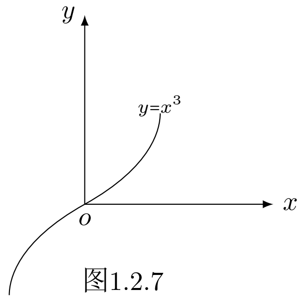


图1.2.7

注：函数的奇偶性，要求函数必须在某个对称区间上有定义.例如$y=x^2,x\in[-1,2]$就不是一个偶函数；不是所有定义在对称区间上的函数都具有奇偶性.例如$y=\sin x+\cos x,x\in\mathbb{R}$是一个非奇非偶函数.

命题1.2.2 任何一个定义在对称区间上的函数都可以表示成奇函数与偶函数的和.

证明: 令$\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)),\psi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$，则$\varphi(x)$是偶函数，$\psi(x)$是奇函数.显然

$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

IV 函数的周期性：对于某个常数T,函数$y=f(x)$满足:$\forall x\in D_f$ 有$f(x+T)=f(x)$, 则称函数以T为周期，例如$y=\sin x$以2π为周期.

注：若函数$y=f(x)$是周期函数，其定义域必是无穷区间，这是因为若$f(x+T)=f(x)$

那么$\forall k\in\mathbb{Z},f(x+kT)=f(x)$,如果定义域是某个有限的区间$I$,$x+kt$可能不属于区间$I$.

我们将函数的最小正周期称为函数的基本周期. 但不是所有的周期函数都有基本周期，例如前面提到的$Dirichlet$函数（$D(x)$），就是一个以任意有理数为周期的函数，而正有理数是没有最小值的，所以$D(x)$没有基本周期.

4. 函数的运算

I（四则运算）设函数$y=f(x),y=g(x)$的定义域分别记作D_f,D_g

$P(x) = (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$其定义域是$D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$

$T(x) = f(x)g(x)$其定义域是$D_f \cap D_g$

$Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$,定义域是$D_f \cap D_g \setminus \{x|g(x) = 0\}$

II（反函数）若函数$y = f(x)$的值域R_f满足：$\forall y \in R_f$存在唯一确定的$x \in D_f$ 与之对应，我们称x是y的函数，记作$x = f^{-1}(y)$,这时称其为原来函数的反函数，原来的函数$y = f(x)$称为直接函数.直接函数与其反函数互为反函数. 相应的反函数的定义域是直接函数的值域，反之反函数的值域是直接函数的定义域.

函数若存在反函数，则有明显的几何含义，即用任一条平行于x轴的直线，穿越函数图象时与函数的图像至多有一个交点.

注：不是所有的函数都有反函数的，即便是有，有可能是多值的.例如三角函数等.

命题1.2.3 严格单调函数$y = f(x), x \in D_f$ 总有反函数，而且其反函数$x = f^{-1}(y)$也是严格单调的.

证明: 不妨设$y = f(x)$在定义区间$I = D_f$上单调递增，即$x_1 < x_2$必有$f(x_1) < f(x_2)$, 所以这样的映射是单射，而单射一定存在逆映射，记作$x = f^{-1}(y)$,若$y_1 < y_2$,那么$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$,若$x_1 = x_2$,必然$y_1 = y_2$导致矛盾.若$x_1 > x_2$由函数的单调性$y_1 > y_2$与题设矛盾，因此$x_1 < x_2$.

函数$y = f(x)$的图象与其反函数$x = f^{-1}(y)$的图象在同一坐标系下是重合的.但是由于函数关系与变量的符号无关，所以习惯上我们总是用y 表示因变量，x表示自变量，这样$y = f(x)$ 的反函数可以表示成$y = f^{-1}(x)$,这时若在同一坐标系下绘制图象，反函数的图象与直接函数的图象就不重合了，而是关于直线$y = x$对称,见图1.2.7.

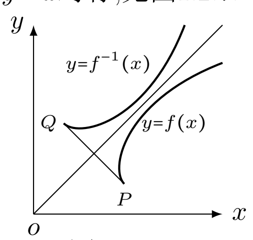


图1.2.7

事实上，若$y = f(x)$上的任意点设为$P(a, b)$,按照反函数的定义应有$a = f^{-1}(b)$,故$Q(b, a)$是$y = f^{-1}(x)$上的点，点$P(a, b)$ 到直线$y = x$的距离$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}|a - b|$. 点$Q(b, a)$到$y = x$的距离$d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}|b - a|.d_1 = d_2$,于是点$P$与$Q$关于$y = x$对称.

注：我们说点P与点Q关于某直线ℓ对称，是指点P与Q所确定的线段PQ与该直线ℓ垂直，且分别到ℓ的距离相等.

如何利用函数$y=f(x)$的解析表达式，求其反函数的解析表达式？

我们只需要根据正确的推理将函数$y=f(x)$变量的记号互换，得到相应的表达式$x=\varphi(y)$这时再将变量y,x的符号按照习惯互换，得到$y=\varphi(x)$就是函数$y=f(x)$ 的反函数.

例1.2.11 求$y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数

解：因为$y(1+x)=1-x$,

$\Longrightarrow y+yx=1-x$,即$(1+y)x=1-y$

$\Longrightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}$,

于是，所求反函数为$y=\dfrac{1-x}{1+x}$,我们发现该函数的反函数就是其本身.

例1.2.12 设$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，求反函数

解：上述等式两端同乘以e^x ，并令$e^x=u$，我们有$2yu=u^2-1$，解此一元二次方程，得

$u=\dfrac{1}{2}(2y\pm\sqrt{4y^2+4})$

$\Longrightarrow u=y\pm\sqrt{y^2+1}$注意到$u>0$, 故只取正号，于是

$u=y+\sqrt{y^2+1}$,那么$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$,于是所求的反函数为

$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

III （复合函数）按照复合映射的定义：设函数$y=f(u)$的定义域为D_1,函数$u=g(x)$ 的定义域为D,且$g(D)\bigcap D_1\neq\varnothing$,则函数$y=f[g(x)],x\in D$ 称为函数$y=f(u)$（外函数）与$u=g(x)$（内函数）的复合函数.

注：有限个函数，在“内函数”的值域与“外”函数的定义域的交集非空的情况下, 可以进行复合运算,且复合函数的定义域是内函数的定义域或内函数定义域的一部分.例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,$u=g(x)=\sin x$的定义域为$\mathbb{R}$,且$g(\mathbb{R})\subset[-1,1]$，于是$g$与$f$可以构成复合函数：

$y=\arcsin\sin x,x\in\mathbb{R}$;

又如$y=f(u)=\sqrt{u}$的定义域为$D_f=[0,+\infty)$, $u=g(x)=\tan x$的值域为$R_g=(-\infty,+\infty)$,显然

$R_g \notin D_f$,故g与f不能构成复合函数，但是，如果将函数g限制在其定义域的一个子集

$D = \{x | k\pi \le x < (k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}$上，令$g^*(x) = \tan x, x \in D$,那么

$R_{g^*} = g^*(D) \subset D_f, g^*$与$f$就可以构成复合函数

$(f \circ g^*)(x) = \sqrt{\tan x}, x \in D$

5.基本初等函数与初等函数

在中学我们曾经遇到的如下函数，我们称其为基本初等函数：

幂函数:$y = x^\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$是常数),考虑到μ,其定义域“至少”是$(0, +\infty)$；

指数函数：$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$，定义域是实数轴，值域为$(0, +\infty)$.

对数函数：$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$特别$a = e$时，我们记$y = \ln x$，它们分别是指数函数$a^x$和$e^x$的反函数，因此定义域：$(0, +\infty)$，值域是实数轴.

指数函数和对数函数的运算法则:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x / a^y = a^{x-y}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$\log(xy) = \log x + \log y$

$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

$a^x = y \Longrightarrow x = \log_a y$

一个重要的恒等式：若$y = (\varphi(x))^{\psi x}, (\varphi(x) > 0)$，则

$y = e^{\psi(x) \ln(\varphi(x))}$我们称这样的函数为幂指函数.

三角函数：$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

三角函数之间的关系：

同角三角函数的关系见图1.2.8与图1.2.9.

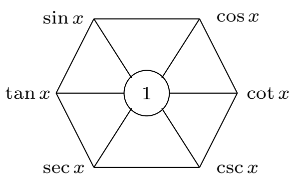


图1.2.8

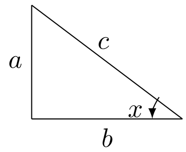


图1.2.9

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin x = \frac{\cos x}{\cot x}, \cdots, \sin x \cdot \csc x = 1, \cdots$

诱导关系：$-\alpha\pi \pm \alpha, 2\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha$的三角函数的值等于$\alpha$的同函数值，放上把$\alpha$看作锐角时，原函数在相应象限内的符号；

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$的三角函数的值等于$\alpha$的相应余函数的值，放上把$\alpha$看作锐角时，原函数在相应象限内的符号，记忆方法“奇变偶不变，符号看象限”，即$\frac{\pi}{2}$的奇数倍$\pm\alpha$的三角函数，则变成α角的相应余函数，$\frac{\pi}{2}$ 的偶数倍$\pm\alpha$的三角函数，仍记为α的同名函数，符号是把α当作锐角时，所在象限的符号.

和差关系：$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$等.

半角公式：$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$等.

和差化积：$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

积化和差：$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$,

$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

反三角函数（主值）：$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = arccotx$等.

基本初等函数经过有限次的有理运算或有限次的复合运算得到的函数称为初等函数，例如

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), y = \arctan(x^{\sin x} + 1)$

双曲函数：形如

$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

我们分别称其为双曲正弦函数和双曲余弦函数，分别记作

$y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$y=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$,或记作：

$y=shx, y=chx$类比于六类三角函数和它们之间的关系，我们有

双曲正切函数：$y=thx=\dfrac{shx}{chx}$,

双曲余切函数：$y=cthx=\dfrac{chx}{shx}$等等，它们之间有着与三角函数之间类似的关系，使我们的运算大大方便，例如

$sh(x\pm y)=shxchy\pm chxshy$,$ch(x\pm y)=chxchy\pm shxshy$

$ch^2x-sh^2x=1, sh2x=2shxchx, ch2x=ch^2x+sh^2x$等等.

注：为什么称$x=cht, y=sht$ 为双曲函数呢？事实上,由$ch^2t-sh^2t=1$,得$x^2-y^2=1$ 这正是等轴双曲线.

注：反双曲函数：由例12 我们知道反双曲正弦函数：$y=arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 注意到双曲余弦是定义在对称区间（实数轴）上的偶函数，我们考虑当$x\geq 0$时，用例12的方法，其反函数为反双曲余弦：$y=archx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，反双曲正切：$y=arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$等.

分段函数是不是初等函数？分段函数例5,$y=|x|=\sqrt{x^2}$是初等函数，而分段函数例9 Dirichlet函数就不是初等函数,（为什么？）

函数的某些特性经过函数的运算后，是否还能保持，例如两个奇函数的和、差、积、商是否还是奇函数？函数$y=\sin u$以2π为周期，而$y=\sin\frac{1}{x}$不是周期函数.事实上，由周期函数的定义若存在常数T,使得$\sin\frac{1}{x+T}=\sin\frac{1}{x}$

$\Longrightarrow,\sin\frac{1}{x+T}-\sin\frac{1}{x}=-2\sin\frac{T}{2x(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0$

若$\sin\frac{T}{2x(x+t)}=0,\Longrightarrow\frac{T}{2x(x+T)}=k\pi$我们得到$T=T(x)$与$T$是常数矛盾, 因此假设错误.

若$\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0,\Longrightarrow\frac{2x+T}{2x(x+T)}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,我们也得到$T=T(x)$因此假设也是错误的.

例1.2.13 已知函数$y = f(u)$的定义域是区间$[0,1]$,求函数$f(x+a)+f(x-a), a>0$的定义域.

解：由题意，我们有$\begin{cases} 0 & \le x+a \le 1 \\ 0 & \le x-a \le 1 \end{cases}$即$\begin{cases} -a & \le x \le 1-a \\ a & \le x \le 1+a \end{cases}$

(1)若$a \le 1-a, \Longrightarrow a \le \frac{1}{2} \Longrightarrow a \le x \le 1-a$

(2)若$1-a < a, \Longrightarrow a > \frac{1}{2}$上述不等式组无解,函数的定义域是空集.

于是当$0 < a \le \frac{1}{2}$所求函数的定义域是$a \le x \le 1-a$.

例1.2.14 设$f(x) = \dfrac{x}{1-x}, x \neq 1$，求函数$f(f(x))$的定义域.

解：$f(f(x)) = \dfrac{f(x)}{1-f(x)} = \dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \dfrac{x}{1-2x}$

因此所求函数的定义域为：$\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$

例1.2.15 设$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$,$\psi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \le 1 \\ 2, & |x| > 1, \end{cases}$求$\psi(\varphi(x))$

解:$\psi(\varphi(x)) = \begin{cases} 2-\varphi^2(x), & |\varphi(x)| \le 1 \\ 2, & |\varphi(x)| > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \psi(\varphi(x)) = \begin{cases} 2-1, & |x| \le 1 \\ 2-0, & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$

对于奇偶函数的复合，我们容易验证如下的结论:

例1.2.16 设$y = f(x)$为偶函数，$x = \varphi(t)$为奇函数，则$y = f[\varphi(t)]$是偶函数，$y = f(x)$为奇函数，$x = \varphi(t)$为偶函数，则$y = f[\varphi(t)]$是偶函数.$y = f(x)$是奇的，$x = \varphi(t)$也是奇的，则复合函数$y = f(\varphi(t))$还是奇函数吗？

例1.2.17 设函数$y = f(x)$定义在实数轴上，其图形关于直线$x = a, x = b, (a < b)$对称，证明$y = f(x)$是周期函数.

证明: 由对称性$f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$

$$\begin{aligned} \text{所以} f(x) &= f(a-(a-x)) \\ &= f(a+(a-x)) = f(2a-x) = f(b-(b+x-2a)) = f(b+b+x-2a) \\ &= f(x+2(b-a)) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow T = 2(b-a)$

习题1.2

1,举出如下映射的例子：

1)单射而非满射；

2）满射而非单射；

3）既单又满的映射.

2，建立映射使集合$(0,1)$与集合$(a,b),(-\infty,+\infty)$一一对应

3.证明：如果$f:E\to F$,且$A\subset F,B\subset F$,则下列不等式成立：

1) $f^{-1}(A\bigcap B)=f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$;

2)$f^{-1}(A\bigcap B^C)=f^{-1}(A)\bigcap(f^{-1}(B))^C$;

3)$f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$

4.下列函数$f:[0,1]\to[0,3]$中的哪一个是单射，满射和双射，画出这些函数的图形

1)$x\mapsto 3\sin\frac{\pi x}{2}$;　　　　2)$x\mapsto\tan\frac{\pi x}{4}$;

3)$x\mapsto 3-\frac{16}{3}(x-\frac{1}{4})^2$;　　　　4)$x\mapsto 2|x+2|-3$

5.设$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$求$f(x)$

6.设$f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明: $f(t)=f(\frac{1}{t})$

7.设$f(0)=15,f(2)=30,f(4)=90$,且$f(x)=a+bc^x$,求a,b,c的值.

8. 设f,g在D上有界,证明:

1)$\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\},\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$

2)$\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}+\inf\limits_{x\in D}\{g(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}+\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$

9.设$y=\frac{1}{x^2}$,证明:函数在定义域上有下界,无上界,若记$\delta>0$,则函数在$(-\infty,-\delta]\bigcup[\delta,+\infty)$上有界.

10.判别下列函数的奇偶性:

1) $y=x^4-2x^2$,　2) $y=x-x^2$,　3) $y=\cos x$
4) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$,　5) $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>1)$,　6) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}(|x|<1)$
7) $y=\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^2$,　8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

11. 将下列函数表示为偶函数与奇函数之和的形式:

$$y = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5, \quad 2)y = \sin 2x + \cos\frac{x}{2} + \tan x$$

12.求下列函数的周期:

$$\begin{array}{l} 1)y = \sin\frac{x}{2}, \quad\ 2)s = \cos(3t + \frac{\pi}{6}, 3)y = |\sin x| \\ 4)y = x\sin x, \quad 5)y = sgnD(x), \text{其中}D(x)\text{是Dirichlet函数} \end{array}$$

13.将函数$y = x, x = [0,1]$延拓成周期函数.

14.证明:$y = \sin|x|$不是周期函数.

15.设$y = f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为奇函数,已知$f(1) = a$,对$x \in (-\infty,+\infty)$有$f(x+2) = f(x) + f(2)$,试求1)$f(5)$,2)若$y = f(x)$以$T = 2$为周期,则a为何值?

16.求下列函数的反函数

$$\begin{array}{lll} 1)\ y = 10^{x+1}, & 2)y = \frac{2^x}{1+2^x}, & 3)\ y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 1} \\ 4)y = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}, & 5)y = \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}, & 6)y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

17. 证明下列恒等式:

1)$1 - th^2x = sech^2x$, 2)$ch2x = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1 = 1 + 2sh^2x$,

3)$arcthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}(|x| < 1)$

18.求联系华氏温度（用F表示）和摄氏温度（用C表示）的转换公式，并求

(1) $90°F$的等价摄氏温度和$-5°C$的等价华氏温度；

(2)是否存在一个温度值，使得华氏温度计和摄氏温度计的度数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

其中华氏温度规定为：一定浓度的盐水的凝点为$0°F$，标准大气压下纯净水的冰点为$32°F$,标准大气压下纯净水的沸点为$212°F$,等分冰点到沸点为$1°F$,

摄氏度的规定为：标准大气压下纯净水的沸点为$100°C$,冰点为$0°C$.

19.设$f(x)$为定义在$(-\ell,\ell)$内的奇函数，若$f(x)$在$(0,\ell)$ 内单调增加，证明：$f(x)$在$(-\ell,0)$内也单调增加.

练习一

1.若$\forall x,y\in\mathbb{R}$，有$\frac{f(x)+f(y)}{2}\le f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 且$f(x)\ge 0, f(0)=c$,证明：$\forall x\in\mathbb{R} f(x)=c$

2.$\forall x_j>-1(j=1,2,\cdots,n)$且$x_i\cdot x_j\ge 0, i\ne j, i,j=1,2,\cdots$ 证明：$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\ge 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$

3. 若$x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$且$x_1\cdot x_2\cdots x_n=1$证明：$x_1+x_2+\cdots+x_n\ge n$

4.1) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n>1;$

2)$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

5.A,B是非空有界数集，满足：$\forall x\in A, y\in B, x\le y$ 证明：$\sup A,\inf B$存在，且$\sup A\le\inf B$

6. 设S是非空数集定义集合$S^-=\{x|-x\in S\}$,证明：$1)\inf S^-=-\sup S; 2)\sup S^-=-\inf S$

7.设A,B为非空数集，$A+B=\{x+y|x\in A,y\in B\}$，证明：$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

8.证明：$\sup\{a_n+b_n\}\le\sup\{a_n\}+\sup\{b_n\}$

$\inf\{a_n+b_n\}\ge\inf\{a_n\}+\inf\{b_n\}$

9. 映射$f:[0,\frac{\pi}{2}]\mapsto\mathbb{R}$,由下面等式给出：

$1) f(x)=\tan x; 2) f(x)=\cot x,$

求以下集合：$f([0,\frac{\pi}{6}]), f([0,\frac{\pi}{4}]), f([\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]), f^{-1}((0,1]), f^{-1}([\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]), f^{-1}\left(\{\frac{1}{\sqrt{3}},1,\sqrt{3}\}\right)$

10. 证明：若$f:E\mapsto F, A\subset E, B\subset F$,则有：

$$\begin{array}{l}1) A\subset f^{-1}(f(A)); 2) f(f^{-1}(B))=B;\quad 3) f(A)\bigcap B=f(A\bigcap f^{-1}(B));\\ 4) f(A)\bigcap B=\varnothing\Leftrightarrow A\bigcap f^{-1}(B)=\varnothing;\quad 5) f(A)\subset B\Leftrightarrow A\subset f^{-1}(B)\end{array}$$

11.证明：若函数$f(x)$与$\varphi(x)$在数集A上有界，则函数$f(x)+\varphi(x), f(x)-\varphi(x), f(x)\varphi(x)$在数集$A$上也有界.

12. 证明：在实数轴$\mathbb{R}$上不存在严格递增的偶函数.

13.证明：若函数$f(x),g(x),h(x)$均为单调增加函数且$f(x)\le g(x)\le h(x)$,则$f[f(x)]\le g[g(x)]\le h[h(x)]$

14.若$f(x)$是x的二次函数，且$f(0)=1, f(x+1)-f(x)=2x$，求$f(x)$

15.证明：若函数$f(x)$与$g(x)$分别以T_1,T_2 为周期，且$T_1/T_2=a\in\mathbb{Q}$, 则$f(x)+g(x), f(x)\cdot g(x)$是周期函数.

16.设$f(x)=\frac{x}{x-1}$,求$f(f[f[f(x)]]),f\left(\frac{1}{f(x)}\right)(x\neq 0,1)$

17.利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测2010年的世界人口.

年份	人口数（百万）	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4936	
1987	5023	1.0176
1988	5111	1.0175
1989	5201	1.0176
1990	5329	1.0246
1991	5422	1.0175