第六章不定积分

第一节不定积分的概念与性质

一、不定积分的概念

我们在第四章曾考虑过如下问题: 给定函数$F(x)$ 求其变化率，$F'(x)=f(x)$

在研究实际问题中常常遇到已知变量的变化率，需要知道这个变量，即需要考虑逆问题：已知$f(x)$,问怎样的函数$F(x)$ 的导数是$f(x)$, 即求$F(x)$ 使得$F'(x)=f(x)$

定义6.1.1 对于区间I上任一点$x\in I$,若函数$F(x)$满足：$F'(x)=f(x), x\in I$ ，则称$F(x)$ 是$f(x)$ 在区间I上的一个原函数.

例如$\sin x$就是$\cos x$ 在实数轴上的一个原函数，$\frac{1}{3}x^3$, 是x^2 在实数轴上的一个原函数，而且对于任意常数C, $\frac{1}{3}x^3+C$都是x^2 在实数轴上的原函数. 一般地，若$F'(x)=f(x)$,则对于任意常数C, 我们有$(F(x)+C)'=f(x)$,于是,若某函数有一个原函数,则它有无穷多个原函数,自然要问, 是否每个函数都有原函数?如果有原函数如何求? 任意两个原函数之间关系如何?

事实上,不是每个函数在其定义区间上都有原函数,例如Dirichlet函数.

命题6.1.1 若函数$f(x)$在区间I上连续,则在I上一定有原函数.

我们将在第七章证明这个命题.

考虑到函数$f(x)$的原函数是不唯一的，我们想知道这些原函数之间有什么关系？

命题6.1.2 函数$f(x)$的任意两个原函数之间相差一个任意常数.

证明 设$F(x), G(x)$是$f(x)$在区间I上的任意两个原函数，则$(F(x)-G(x))'=0$,那么$F(x)-G(x)=C$,即$F(x)=G(x)+C$

注意到原函数之间的上述关系，我们有如下定义

定义6.1.1 函数f 在区间I上的全体原函数称为f在区间I 上的不定积分，记作$\int f(x)dx=F(x)+C$，其中，C是任意常数. 我们称$f(x)$为被积函数，$f(x)dx$为被积表达式,x 为积分变量.

不定积分有着明显的几何含义：若F 是f的一个原函数，则称函数$y=F(x)$ 的图像为f的一条积分曲线，f的不定积分表示f的某一积分曲线沿纵轴方向任意平移所得的一切积分曲线组成的曲线族，显然，

若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，则这些切线互相平行，见图6.1.1.

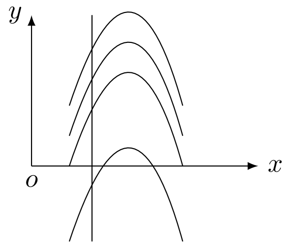

图6.1.1

根据不定积分的定义有如下等式：

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \qquad \int df(x) = f(x) + C$$

注: 如果不考虑任意常数，我们发现不定积分和微分运算,同乘法和除法运算类似,它们互为逆运算.

例6.1.1 求函数$f(x) = x^{\mu}, \mu \neq -1$的不定积分

解：由于$\left(\frac{1}{1+\mu}x^{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$,所以$\int x^{\mu}dx = \dfrac{1}{1+\mu}x^{\mu+1} + C$

例6.1.2 求函数$f(x) = \frac{1}{x}$的不定积分

解：当$x > 0$时$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

当$x < 0$时$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

即$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$所以$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

根据某些基本初等函数的微分公式，我们有如下简单积分表：

1 ,$\int 0dx = C$

2,$\int kdx = kx + C$

3,$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

4,$\int x^{\mu}dx = \dfrac{1}{1+\mu}x^{1+\mu} + C, \mu \neq -1$

5,$\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C$,特别$\int e^x dx = e^x + C$

6,$\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C$

7,$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C = -arccotx + C$

8,$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

9,$\int shxdx = chx + C, \int chxdx = shx + C$

二、不定积分的性质

性质1：设函数$f(x), g(x)$的原函数存在，则

$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

性质2：设函数$f(x)$ 的原函数存在，k是非零常数，则

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

这两个性质称为不定积分的线性组合性质,即

$\int \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int f_k(x)dx$

例6.1.3 求$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$

$$\begin{aligned}\text{解：}\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \ln|x| + \arctan x + C\end{aligned}$$

例6.1.4 求$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx.$

$$\begin{aligned}\text{解：}\int \frac{x^4}{1+x^2}dx &= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx \\ &= \int (x^2-1)dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C\end{aligned}$$

例6.1.5 质点以初速度v_0铅直上抛，不计空气阻力，求质点的运动规律.

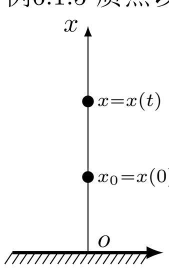

图6.1.2

解：建立坐标系如图6.1.2，上抛的高度为x，注意到高度x是时间t的函数，初始刻的高度为x_0,于是$x = x(t)$

$\frac{dx}{dt} = v(t), \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$($g$为重力加速度)

于是$v(t) = \displaystyle\int(-g)dt = -gt + C_1$注意到$v(0) = v_0$,所以$v(t) = -gt + v_0$

$x(t) = \displaystyle\int v(t)dt = \int(-gt + v_0)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$

注意到$x(0) = x_0, C_2 = x_0$

于是质点的运动规律为$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0, t \in [0, T]$

其中T表示质点落地的时刻.

例6.1.6求$\displaystyle\int \tan^2 x dx$

解：注意到$\tan x$是$\sec^2 x$的原函数，于是

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C\end{aligned}$$

例6.1.7求$\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解：注意到$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$,于是

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)dx \\ &= \tfrac{1}{2}(\int dx - \int \cos x dx) \\ &= \tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{2}\sin x + C\end{aligned}$$

例6.1.8 求$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

解：注意到$\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = (\frac{1}{2}\sin x)^2$,于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx &= \int \frac{4}{\sin^2 x} dx \\ &= 4\int \csc^2 x dx = -4\cot x + C\end{aligned}$$

例6.1.9$\displaystyle\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$

解：利用多项式除法可得$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1} = 2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2+1}$,于是

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx &= \int(2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1})dx \\ &= \int(2x^2 - 1)dx + 4\int \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^3 - x + 4\arctan x + C\end{aligned}$$

习题6.1

1, 设$f(x)$的一个原函数为$F(x), a, b$ 为非零常数，求$f(a^2x+b)$的原函数；

2，设$\dfrac{\sin x}{x}$为$f(x)$的一个原函数，a 为非零常数，求$\dfrac{f(ax)}{a}$的原函数；

3，已知$f'(\frac{1}{x})=x^2$,求$f(x)$

4,设$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leqslant 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$,求$f(x)$的原函数；

5，求下列不定积分：

1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx$; 2) $\displaystyle\int 10^x dx$;

3) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; 4) $\displaystyle\int (2^x+3^x)^2 dx$;

5) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$; 8) $\displaystyle\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;

9) $\displaystyle\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$; 10) $\displaystyle\int \sec x(\sec x-\tan x)dx$;

11) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$; 12) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

13) $\displaystyle\int \cot^2 x dx$; 14) $\displaystyle\int \cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)d\theta$;

15) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; 16) $\displaystyle\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}dx$;

6.汽车以$20m/s$的速度行驶，刹车后匀减速行驶了$50m$停住，求刹车加速度，可执行下列步骤：

(1) 求微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}=-k$满足条件$s'(0)=20, s(0)=0$的解；

(2)求使$\frac{ds}{dt}=0$时t 的值及相应的s值；

(3)求使$s=50$时，k的值.

7.一曲线通过$(e^2,3)$,且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

8.一物体由静止开始运动，经$t(s)$ 后的速度是$3t^2(m/s)$,问

(1) 在$3s$后物体离开出发点的距离是多少？

(2)物体走完$360m$需要多少时间？

9.证明函数$\arcsin(2x-1), \arccos(1-2x)$和$2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$都是$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数.

第二节换元积分法

一、第一类换元法

设$\int f(x)dx = F(x) + C$,则$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$，$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$等等，我们发现若$\int f(u)du = F(u) + C$ 且$u = \varphi(x), \varphi(x)$可导，则我们可以求出形如$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$的不定积分：事实上我们有

定理6.2.1 设$g(u)$在$[\alpha, \beta]$上有定义，$u = \varphi(x)$在$[a, b]$上可导，且$\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta, x \in [a, b]$记$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), x \in [a, b]$,若$\int g(u)du = G(u) + C$,则$\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$

证明: 令$u = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du \\ &= G(u) + C = G(\varphi(x)) + C\end{aligned}$$

例6.2.1 求$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$

解：$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt{\sin x} d\sin x = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C$

例6.2.2 求$\int \frac{xdx}{1+x^2}$

解：$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \int \frac{du}{u} = \ln(1+u^2) + C = \ln(1+x^2) + C$

例6.2.3 求$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= \int \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\frac{x}{a} \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}du \\ &= \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

例6.2.4 求$\int\frac{dx}{a^2-x^2}$

$$
\begin{aligned}
\text{解：原式} &= \int\frac{dx}{(a+x)(a-x)}\\
&= \frac{1}{2a}\int(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x})dx\\
&= \frac{1}{2a}[\int\frac{1}{a+x}dx+\int\frac{1}{a-x}dx]\\
&= \frac{1}{2a}[\ln|a+x|-\ln|a-x|]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C
\end{aligned}
$$

注：从上述几例不难发现，此类方法，实际上我们是根据基本积分公式，通过“凑”微分的方法，求不定积分.以上的积分方法习惯上称为凑微法. 我们利用了$\varphi'(t)dt=d\varphi(t)=du$所以也称这种积分方法为函数变量化.

例6.2.5 求$\int\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

解：考虑到$d\sqrt{x}=\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= 2\int e^{3\sqrt{x}}d\sqrt{x}=\frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d(3\sqrt{x})\\
&= \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}+C
\end{aligned}
$$

例6.2.6 求$\int\sin^3 xdx$

解： $\int\sin^3 xdx=\int\sin^2 x\sin xdx=-\int(1-\cos^2 x)d\cos x$

$=-\int d(\cos x)+\int\cos^2 xd\cos x$

$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

例6.2.7 求$\int\cos^2 xdx$

解： $\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos 2xdx\right)$

$=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

例6.2.8 求$\int\cos^4 xdx$

解：考虑到

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)\end{aligned}$$

所以 $\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}+\int \cos 2x d2x+\frac{1}{8}\int \cos 4x d4x\right]$

$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

例6.2.9 求$\int \csc x dx$ 和$\int \sec x dx$

$$\text{解：}\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$= \int \frac{d\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

因为$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x-\cot x$ 因此$\int \csc x dx = \ln|\csc x-\cot x|+C$

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} \\ &= \ln|\csc(x+\tfrac{\pi}{2})-\cot(x+\tfrac{\pi}{2})|+C \\ &= \ln|\sec x+\tan x|+C\end{aligned}$$

方法2

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx$$

$$= \int \frac{(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx}{\sec x+\tan x}$$

$$= \int \frac{d(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$$

$$= \ln|\sec x+\tan x|+C$$

例6.2.10 求$\int \sec^6 x dx$

$$\text{解：} \int \sec^6 x dx = \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx$$
$$= \int (1+\tan^2 x)^2 d\tan x$$
$$= \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x) d\tan x$$
$$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$$

例6.2.11 求$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

解：令I=$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ ，$J=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, 于是

$$I+J=\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = x+C \quad (1)$$
$$I-J=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=-\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$
$$=-\ln|\sin x+\cos x|+C \quad (2)$$

结果,$I=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C$

例6.2.12 求$I=\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解：注意到$d\sqrt{x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$,则

$$\text{原式} = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}$$
$$= 2\int \arctan\sqrt{x} d\arctan\sqrt{x}$$
$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

例6.2.13求$I=\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$

$$\begin{aligned}\text{解：原式}&=\int \frac{(1+x)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx\\&=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)\\&=\ln|xe^x|-\ln|1+xe^x|+C\end{aligned}$$

例6.2.14求$I=\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$

$$\begin{aligned}\text{解：原式}&=\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}dx\\&=-\int \frac{d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C\end{aligned}$$

二、第二换元积分法

定理6.2.2 若令$x=\varphi(t)$，其中$\varphi(t)$ 可导,且$\varphi'(t)\neq 0$，则$dx=\varphi'(t)dt$，于是$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

证明: 因为$x=\varphi(t)$存在反函数，$t=\varphi^{-1}(x)$,且$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(x)}$

$$\begin{aligned}\text{所以}\qquad \frac{d}{dx}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)=&\frac{d}{dt}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)\frac{dt}{dx}\\=&f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x)\end{aligned}$$

例6.2.15 求$\int\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$

解：令$x=a\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,则满足积分法所需要的条件，代入得

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx&=\int a^2\cos t\cos t dt\\&=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\&=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C\end{aligned}$$

注意到$\frac{x}{a}=\sin t, t=\arcsin\frac{x}{a},\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$,参见图6.2.1 代入后得到

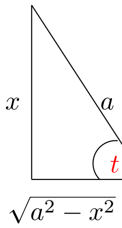

图6.2.1

$$原式 = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

例6.2.16 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$

解：利用$x = a\tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$满足积分法所需要的条件，代入得到

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{1}{a}\frac{a\sec^2 t}{\sec t}dt \\ &= \int \sec t dt + C\end{aligned}$$

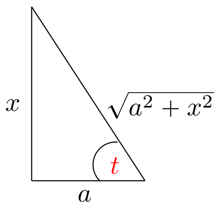

图6.2.2

利用结论$\int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$ 参见图6.2.2$\sec t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$得到

$$原式 = \ln|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}| + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

例6.2.17 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$

解：方法1利用变换$x = a\sec t, t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{1}{a}\frac{a\sec t\tan t}{\tan t}dt \\ &= \int \sec t dt + C = \ln|\sec t + \tan t| + C\end{aligned}$$

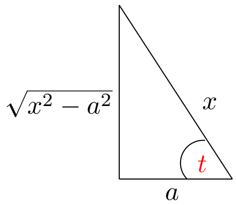

图6.2.3

注意到$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$$原式 = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C(x>a)$$

当$x<-a$时，令$x=-u, \Rightarrow u>a$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= -\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = -\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|+C \\ &= -\ln|-x+\sqrt{x^2-a^2}|+C \\ &= \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C \\ &= \ln|-x-\sqrt{x^2-a^2}|+C\end{aligned}$$

综合讨论得到原式$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

方法2:利用变换$x=a\,cht, dx=a\,sht$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int\frac{a\,sht}{a\,sht}dt=\int tdt=t+C \\ &= arsh\frac{x}{a}+C \\ &= \ln[\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}]C \\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\end{aligned}$$

例6.2.18 求$\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$

解：注意到$x^2-2x+10=(x-1)^2+3^2$,于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(x-1-1)d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+3^3}} \\
&= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2+3^2}} - \int \frac{du}{\sqrt{u^2+3^2}} \ (u=x-1) \\
&= \sqrt{u^2+3^2} - \ln|u+\sqrt{u^2+3^2}| + C \\
&= \sqrt{x^2-2x+10} - \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}| + C
\end{aligned}$$

例6.2.19 求$\displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

解：令$x=\tan t$,则$dx=\sec^2 tdt$

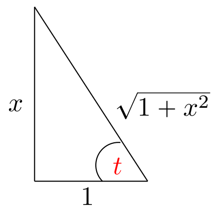

图6.2.4

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{dt}{\cos t(2\tan^2 t+1)} \\
&= \int \frac{\cos tdt}{2\sin^2 t+\cos^2 t} \\
&= \int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t} \\
&= \arctan(\sin t)+C \\
&= \arctan\tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C
\end{aligned}$$

例6.2.20 求$\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

解：令$e^x=t$,则$dx=\frac{dt}{t}$

原式$=\displaystyle\int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \ln|\frac{t}{t+1}|+C = x-\ln(1+e^x)+C$

三、分部积分

在研究两个函数乘积的微分中，我们知道，若函数$u=u(x),v=v(x)$均可微，则$d(uv)=vdu+udv$这说明，函数uv是函数$vu'+uv'$的原函数,于是我们有$\displaystyle\int(vu'+uv')dx=uv+C$注意到等式的左边为两个积分的和，我们有$\displaystyle\int vdu+\int udv=uv+C$考虑到不定积分中总含有任意常数，所以我们有分部积分公式.

定理6.2.3 $\displaystyle\int vdu = uv - \int udv$

上述公式专门对付被积函数是两个函数乘积形式的不定积分

例6.2.21 求$\displaystyle\int \ln xdx$

解：令$v=\ln x,u=x$那么

原式$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$

例6.2.22 求$\int \arcsin x dx$

解：令$v = \arcsin x, u = x$那么

原式$=x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

例6.2.23 求$J = \int e^x \sin x dx$

解：令$v = \sin x, u = e^x$

$J = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$注意到等式右端的第二项就形式而言与积分$J$相似. 对右端第二式继续分部积分得

$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + J$代入得到

$J = e^x \sin x - e^x \cos x - J \Rightarrow J = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

例6.2.24 设$f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算$\int f(x)dx$

解：令$\ln x = t$则$x = e^t, f(t) = \dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$，于是

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx \\ &= -\int \ln(1+e^x)de^{-x} \\ &= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x} \\ &= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x})dx \\ &= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C\end{aligned}$$

例6.2.25 求$J = \int \sec^3 x dx$

解：令$v=\sec x,u=\tan x$

$$\begin{aligned}J&=\sec x\tan x-\int\tan^2 x\sec x dx\\&=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx\\&=\sec x\tan x-\int\sec^3 x+\int\sec x dx\\&=\sec x\tan x-J+\ln|\tan x+\sec x|\end{aligned}$$

解得$J=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\tan x+\sec x|)+C$

利用上述循环办法还可以得到不定积分的递推式.

例6.2.26 求$I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$,其中$n$为正整数.

解：当$n>1$时,利用分部积分

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x(-n)(x^2+a^2)^{-n-1}2xdx\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n(I_n-a^2I_{n+1})\end{aligned}$$

$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right)$

注意到$I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$通过叠代可以得到$I_n$

例6.2.27 求$I=\displaystyle\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$$\begin{aligned}\text{解:}I&=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int(x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{其中} I_2 &= \int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx \\
&= \int xe^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x}) \\
&= \int xd(e^{x+\frac{1}{x}}) \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} - \int e^{x+\frac{1}{x}}dx = xe^{x+\frac{1}{x}} - I_1
\end{aligned}
$$

故$I = I_1 + I_2 = xe^{x+\frac{1}{x}} + C$

习题6.2

1. 求下列不定积分：

1) $\int \frac{dx}{25+4x^2}$;　2) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$;　3) $\int \sqrt{1-2x}dx$;

4) $\int \cos 3x dx$;　5) $\int \frac{\ln x}{x} dx$;　6) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$;

7) $\int \frac{8dx}{4x^2-12x+20}$;　8) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$;　9) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$;

2.求下列不定积分：

1) $\int \arctan x dx$;　2) $\int x\sin x$;　3) $\int \arccos x dx$;

4) $\int x\arctan x dx$;　5) $\int x\cdot 3^x dx$;　6) $\int e^{ax}\cos bx dx$;

7) $\int x\sec^2 x dx$;　8) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})dx$;　9) $\int \sin(\ln x)dx$;

10) $\int x^2(\ln x)^2 dx$

3.求下列不定积分：

1) $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$;　2) $\int \sec^2 x\sin^3 x dx$;　3) $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx$;

4 $\int \cot^5 x dx$;　5) $\int \tan^2 2x\sec^4 2x dx$;　6) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$;

7) $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}dx$;　8) $\int \frac{\sqrt{25-\theta^2}}{\theta^2}d\theta$;　9) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+10)^{3/2}}$;

第三节有理函数积分法

一、有理函数的不定积分

设被积函数具有如下形式：$\frac{Q(x)}{P(x)}$,其中$Q(x),P(x)$为多项式. 若分子$Q(x)$的次数低于分母$P(x)$的次数，这样的有理分式称为真分式，反之称为假分式，利用综合除法，任何一个假分式总可以转化成多项式与真分式的和，即$\frac{Q(x)}{P(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{P(x)}$故我们以求真分式的不定积分为例介绍此类积分法.

代数基本定理：任何一个实系数的n次多项式在复数域上总有n个根（包含根的重数）

设$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$为一个首项系数为1的$n$次多项式，由代数基本定理，我们有$P(x)=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_t)^{r_t}$ ，其中$\sum\limits_{j=1}^{t}r_j=n$, 又注意到，若多项式的根$x_j$是复数，则其共轭$\overline{x_j}$也是$P(x)$的根，于是

$P(x)=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_s)^{r_s}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdots(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}$,其中$\sum\limits_{j=1}^{s}r_j+\sum\limits_{j=1}^{k}2t_j=n$ $x_j\in\mathbb{R},j=1,2,\ldots,s,p_i,q_i$是实数，$p_i^2-4q_i<0,i=1,2,\ldots,k.$

这样一来一个真分式可以拆成如下部分分式的和，即

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{P(x)}=&\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots\\&+\frac{B_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}}+\cdots+\frac{C_1}{x-x_s}+\frac{C_2}{(x-x_s)^2}+\cdots+\frac{C_{r_s}}{(x-x_s)^{r_s}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\\&+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{M_{t_1}x+N_{t_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\cdots+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_kx+q_k}+\\&+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_kx+q_k)^2}+\cdots+\frac{E_{t_k}x+F_{t_k}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}\end{aligned}$$

其中$A_j,B_j,C_j,M_j,N_j,E_j,F_j$ 为待定常数.事实上，我们将等式右端通分后得到，$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{R(x)}{P(x)}$,令$Q(x)\equiv R(x)$ 然后比较同次幂的系数得到待定常数.

以下我们只需求真分式的不定积分，值得注意的是有理分式的原函数一定是初等函数，但并非所有的初等函数的原函数都是初等函数，例如虽然函数$f(x)=\frac{\sin x}{x},x\neq0,e^{-x^2}$等在区间上都是连续的，原函数虽然存在，但它的原函数却不是初等函数.

根据有理分式的拆分，我们只需要计算如下形式的积分即可.

I $\dfrac{A}{x-a}$

II $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($k\geqslant 2$ 自然数)

III $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ($p^2-4q<0$)

IV $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k\geqslant 2$自然数)

I, $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C.$

II $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{1-k}(x-a)^{-k+1}+C$

III

$$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=&\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx\\=&\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C\end{aligned}$$

IV

$$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=&\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\\=&\frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^k}\\=&\frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}\end{aligned}$$

其中$t=x+\frac{p}{2},m=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$，则由上一节例26得到这类不定积分的递推关系式.

例如 $$\begin{aligned}I=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=&\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}\\=&-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}\end{aligned}$$

那么$I=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+2x+3}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

例6.3.1 分解有理分式$\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$

解：设

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

比较两端分子可得恒等式

$$x^3+1=A(x-1)^3+B(x(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx=(A+B)x^3+(C-2B-3A)x^2+(3A+B-C+D)x-A$$

通过比较同次幂的系数我们得到$A=-1,B=2,C=1,D=2$

例6.3.2 将下列有理分式$\dfrac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}$拆成部分分式

解：$\dfrac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

那么$x^2+5x+2=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)=(A+B)x^2+(B+C)x+A+C$

由于上式是关于变量x的恒等式不妨令$x=-1,0,1$分别代入

得$x=-1,\ -2=2A$, 即$A=-1$

$x=0,\ 2=A+C$, 那么$C=3$

$x=1,\ 8=2A+2B+2C\Rightarrow A=-1,C=3,B=2$

二、被积函数有理化

有些被积函数可能不是有理函数，但是可以经过变量代换转化成有理分式

例6.3.3 求$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

解：令$x=u^6,dx=6u^5du$ 那么

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\int\frac{6u^5}{u^2+u^3}du=&6\int\frac{u^3}{1+u}du\\=&6\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{1+u}\right)du\\=&6(\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2+u-\ln|1+u|)+C\\=&2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+C\end{aligned}$$

例6.3.4 求$\displaystyle\int\sqrt{1-e^x}dx$

解：$u^2=1-e^x,dx=-\dfrac{2u}{1-u^2}du$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-e^x}dx&=\int u\left(-\frac{2u}{1-u^2}\right)du\\&=\int\frac{2u^2}{u^2-1}du=\int\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C\\&=2\sqrt{1-e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}\right|+C\end{aligned}$$

例6.3.5 求$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$

解：令$\sqrt{x^2+c} = -x+t$（通常称此类变换为Euler变换）,则$x = \dfrac{t^2-c}{2t}$ 那么$dx = \dfrac{t^2+c}{2t^2}dt$，于是$\sqrt{x^2+c} = -x+t = -\dfrac{t^2-c}{2t}+t = \dfrac{t^2+c}{2t}$ 那么我们有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln|x+\sqrt{x^2+c}| + C_1$$

例6.3.6 求$\int R(\sin x, \cos x)dx$，其中$R(\sin x, \cos x)$是关三角函数的有理分式

解：为了转化成有理分式，我们令$u = \tan\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$，

则$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ 因为$u = \tan\frac{x}{2}$, 则$dx = \frac{2}{1+u^2}du$

最后我们有

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2}{1+u^2}du$$

这是关于u的有理分式. 我们称$u = \tan\frac{x}{2}$为万能代换.

例6.3.7 求$\int \dfrac{\sin^2 x}{(\sin x - \cos x - 1)^3}dx$

解：令$t = \tan\frac{x}{2}$,则$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{t^2}{(t-1)^3}dt \\
&= \int \frac{[(t-1)+1]^2}{(t-1)^3}dt \\
&= \int \left[\frac{1}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^3}\right]dt \\
&= \ln|t-1| - \frac{2}{t-1} - \frac{1}{2(t-1)^2} + C \\
&= \ln\left|\tan\frac{x}{2} - 1\right| - \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} - \frac{1}{2\left(\tan\frac{x}{2} - 1\right)^2} + C
\end{aligned}$$

例6.3.8 求$\int \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

解：令$\sqrt{x-1}=u$,那么$dx=2udu$ 则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=&\int\frac{u}{1+u^2}2udu\\=&2\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}du\\=&2u-2\arctan u+C\\=&2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C\end{aligned}$$

例6.3.9 $\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$

解：$\sqrt[3]{x+2}=u$, 因此$dx=3u^2du$，那么

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx=\int\frac{3u^2du}{1+u}=3\int\frac{u^2-1+1}{1+u}du\\=&3\int(u-1+\frac{1}{1+u})du\\=&\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C\end{aligned}$$

例6.3.10 求$\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

解：令$u=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$,则$dx=-\dfrac{2udu}{(u^2-1)^2}$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=&\int(u^2-1)u\cdot\frac{-2u}{(u^2-1)^2}du\\=&-2\int\frac{u^2}{u^2-1}du=-2u+\ln|u+1|-\ln|u-1|+C\\=&-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|+C\end{aligned}$$

例6.3.11 求$I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a\neq b)$

解：注意到根式下经配方化为$(x-a)(b-x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$ 令$x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin t(t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}\text{原式}=&\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\sin t\right)^2}}\cdot\frac{b-a}{2}\cos tdt\\=&\int dt=t+C\\=&\arcsin\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+C=\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+C\end{aligned}$$

如果被积函数中含有不同的二次方根例如

$\sqrt{x+\alpha},\sqrt{x+\beta},(\alpha<\beta)$ 令$\sqrt{x+\beta}=\lambda(t+\frac{1}{t}),\sqrt{x+\alpha}=\lambda(t-\frac{1}{t})$ 两式平方后相减解得$\lambda:4\lambda^2=\beta-\alpha\Rightarrow\lambda=\dfrac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}$,于是$t=\dfrac{1}{2\lambda}(\sqrt{x+\beta}+\sqrt{x+\alpha})$

例6.3.12 求$I=\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

解：令$\sqrt{1+x}=\lambda(t+\frac{1}{t}),\sqrt{x}=\lambda(t-\frac{1}{t})$

解得$\lambda=\frac{1}{2}$,则$t=\sqrt{x}+\sqrt{1+x},dx=\dfrac{t^4-1}{2t^3}dt$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{2}\int\frac{t^4-1}{t^3(t+1)}dt\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{1+t}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^3(1+t)}dt\\
&=\frac{1}{2}(t-\ln|1+t|)-\frac{1}{2}\int[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{1+t}]dt\\
&=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^2}+C\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2}+C
\end{aligned}$$

令$t=\frac{1}{x+a}$往往可以消去有理或无理分式中分母的$x+a$ 的幂次

例6.3.13 求$\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

解：令$t=\frac{1}{x+1}$则

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=-\int\frac{dt}{\sqrt{2t-1}}\\
&=-\sqrt{2t-1}+C=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C
\end{aligned}$$

习题6.3

1.求下列不定积分：

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$;　2) $\int \frac{dx}{2x-x^2-10}$;　3) $\int \frac{dx}{x^2+2x}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$;　5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}dx$;　6) $\int \frac{2x+3}{4x^2+1}dx$;

7) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$;　8) $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;　9) $\int \frac{dx}{1+x^3}dx$;

10) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$;　11) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$;　12) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;

13) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$;　14) $\int \frac{5x^2-12}{x^2-6x+13}dx$;　15) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$;

2. 求下列不定积分:

1) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;　2) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;　3) $\int \frac{dx}{5-4\cos 2x}$;

4) $\int \frac{dx}{2+\sin x-\cos x}$;　5) $\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$;

3.求下列不定积分:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;　2) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$;　3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;　5) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x^2}}$;　6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

7) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$;　8) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;　9) $\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{x^2}$;

10) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$;　11) $\int \frac{dx}{1+x+2x^2}$;　12) $\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{x^2}$;

13) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3-4x}}$;　14) $\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$;　15) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$;

16) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;　17) $\int \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}dx$;　18) $\int \frac{e^{c\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$;

19) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$;　20) $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}dx$

练习六

1. $\int \frac{dx}{x(1+x^8)}$;　2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

3. $\int \arctan\sqrt{x}dx$;　4, $\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{e^x-2}}$;

5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx$;　6. $\int \frac{\ln(1+e^{-x})dx}{1+e^x}$;

7. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$;　8. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}$;

9. $\int \frac{\cos x+x\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$;　10. $\int \frac{\tan x dx}{3\sin^2 x+2\cos^2 x}$;

11. $\displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;　　12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{1+x}}$;

13. $\displaystyle\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$;　　14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^8)}$;　　16. $\displaystyle\int \frac{(1+x^2)\arctan x dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$;　　18. $\displaystyle\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

19. $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;　　20. $\displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

21. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$;　　22. $\displaystyle\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

23. $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\cos x}dx$;　　24. $\displaystyle\int x^2 e^x \sin x dx$;

25.$\displaystyle I_n=\int \tan^n x dx$;　　26.$\displaystyle J_k=\int \frac{\sin kx}{\sin x}$($k$是正整数);