第三节 格林公式及其应用

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定积分$N-L$: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

$f(x)$在$[a,b]$上的定积分可通过它的原函数$F(x)$在区间“边界”处函数值来表示.

问：平面有界闭区域上可讨论二重积分，该区域边界上可讨论曲线积分，二者之间有无关系？

格林公式回答这一问题

一、 基本概念

1. 平面单连通、复连通区域

设D为平面区域，若D内任意闭曲线所围的部分都属于D，则称D为平面单连通区域，否则称为复连通区域.

例：$\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$

$\{(x,y)|y>0\}$

单连通区域

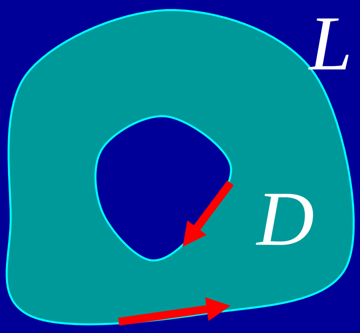
$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$

$\{(x,y)|0<x^2+y^2<2\}$

复连通区域

区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域 (无“洞”区域)} \\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)} \end{cases}$

2. 区域边界曲线方向的规定



平面区域D 的边界曲线L, 规定L的正向为:

当人沿着边界曲线L行走时, 区域D总在其

左边 (或说：人的左手始终向着区域内部.), 记为 L^+.

若与上述规定的方向相反，则称为负方向，记为L^-

一、 格林公式

定理1. 设平面闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \quad \text{（格林公式）}$$

或

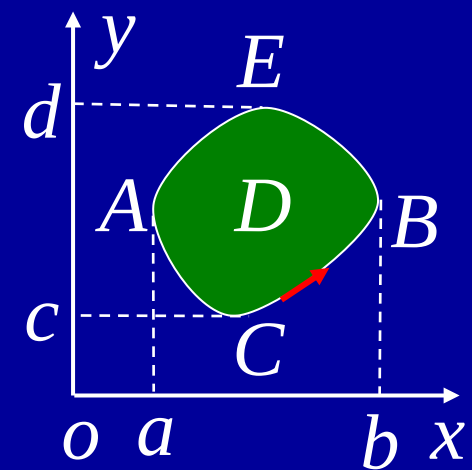
$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中L是D的 正向边界曲线.

证明: 1) 若D既是 X - 型区域 , 又是 Y - 型区域 , 且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

定理1 目录 上页 下页 返回 结束

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad ①$$

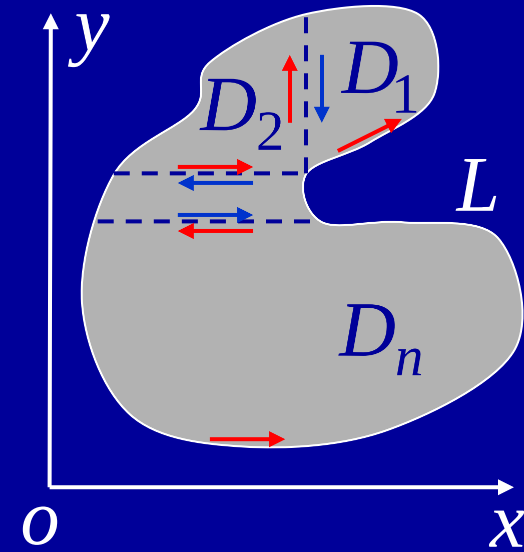
同理由D是X—型区域，可证得:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件, 则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域 , 如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

(∂D_k表示D_k的正向边界)

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

(相加时沿辅助曲线上来回的曲线积分相互抵消)

证毕

说明： （1）格林公式使用于单、复连通区域.

（2）对复连通区域D, 公式中曲线积分应包括沿D的全部边界的曲线积分，且边界的方向对区域D来说都是正向.

（3）此公式为求平面曲线积分，特别是闭曲线上的积分提供新思路. 可简化某些曲线积分或二重积分的计算.

（4）求闭区域面积

推论: 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_{L} x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 所围面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

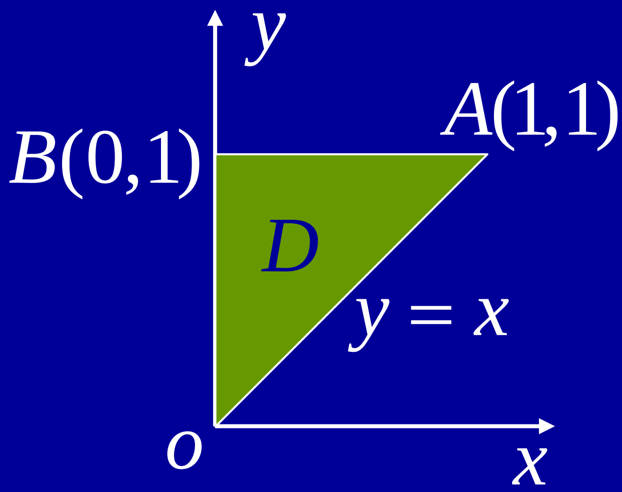
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$

利用格林公式, 得 $\displaystyle\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .

解: 令 $P=0,\ Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$



利用格林公式 , 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D} xe^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}} xe^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

例3. 求 $\displaystyle\oint_L \frac{\ln(x^2+y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy}{x^2+y^2+2x}$

L：$(x+1)^2+y^2=4$ 顺时针方向.

解：设L所围区域D，则

原式$\displaystyle=\frac{1}{3}\oint_L \ln(3-2x)\,dx+(3-2x)\,dy$

$$=-\frac{1}{3}\iint_D\left[(3-2x)'-(\ln(3-2x))'_y\right]dx\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\iint_D dx\,dy=\frac{8}{3}\pi$$

(注意负号，Green公式L是区域D的正向边界.)

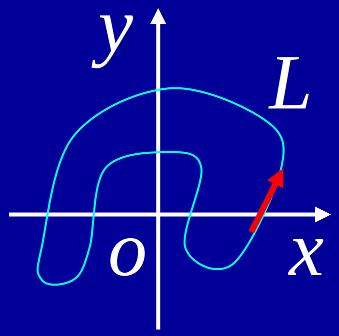
例4. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

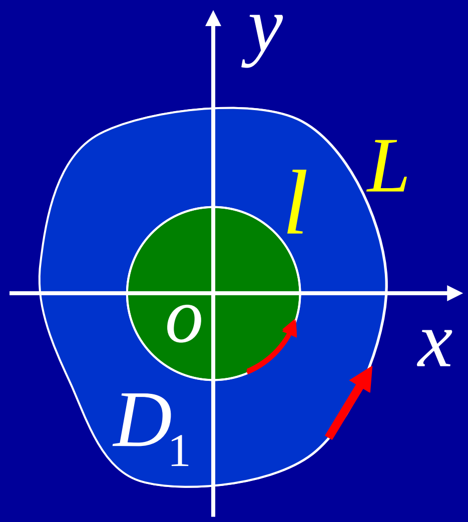
则当$x^2+y^2 \neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时, 在D 内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$, 取逆时针方向，记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1 , 对区域 D_1 应用格林公式 , 得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore \quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

例5. 求 $\int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx + \left[4x + 2y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]dy$

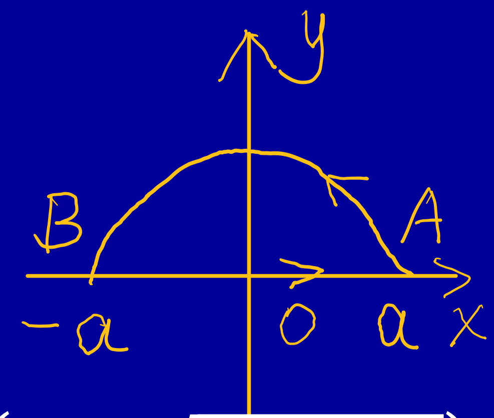
其中L为从点$A(a,0)$到点$B(-a,0)$的上半圆周

$x^2+y^2=a^2(a>0)$.

分析：直接计算比较困难. L不封闭，需“补边“, 构成封闭曲线. 由于在补充的曲线上还要计算曲线积分，故补充的曲线要简单，一般补的边是坐标轴上的直线段，或平行于坐标轴的直线或折线段，或圆等规则图形.

解：补加直线段$\overrightarrow{BA}$，方向由B到A.

设L与$\overrightarrow{BA}$所围成的区域为D.



令 $P = \dfrac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\quad Q = 4x + 2y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4 + \frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在D内连续.

$$\text{原式}=\oint_{L+\overrightarrow{BA}} P\,dx + Q\,dy - \int_{\overrightarrow{BA}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 4\,dx\,dy - \int_{-a}^{a} 0\,\mathrm{d}x = 2\pi a^2$$

说明： (1) 用格林公式时的条件：

曲线封闭性，不封闭构成封闭.

积分曲线是正向

$\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在所围区域D内连续.

(2) 用格林公式时：

直接用公式

换路法：当曲线积分与路径无关时用.

补边法: (注意“先代后补”, 若用曲线方程化简被积函数，先代入，化简再补边，再用Green公式.

例6. 设$z=f(x,y)$在 D：$x^2+y^2\le 1$具有连续二阶偏导且

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y^2)e^{x^2+y^2}$. 求 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dx\,dy$

解：设 $Q=\frac{\partial z}{\partial x}$, $P=-\frac{\partial z}{\partial y}$

取 D的正向边界曲线C：$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, 则

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\oint_C\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy$$

有向曲线C的切向量：$\left(x'(\theta),y'(\theta)\right)=(-\sin\theta,cos\theta)$

$=(-y,x)$

方向余弦 $\cos\alpha = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -y,\quad \cos\beta = x$

$$\oint_C \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} dy = \oint_C \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial x}\cos\beta\right) ds$$

$$= \oint_C \left(y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) ds = \oint_C (x+y^2) e^{x^2+y^2}\, ds$$

$$= \oint_C y^2 e^{x^2+y^2}\, ds \quad = \oint_C y^2 e\, ds$$

$$= e\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= e\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \pi e$$

例7. 求星形线$x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$所围图形面积.

解：$S = \dfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\sin^4 t\, cos^2 t]\,dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cot^2 t\,dt$$

$$=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt$$

$$=\frac{3}{8}\pi a^2$$

第二型曲线积分：既可能与路径有关，也可能无关.

实际问题中, 例如研究场力所作的功与路径无关的

条件，即在什么条件下，场力所作的功与路径无关?

数学上：研究曲线积分与路径无关的条件.

若无关，计算时可通过改变路径简化计算,而且在物理中有重要意义.

1. 定义： 曲线积分与路径无关

设G是一个区域，$P(x,y),Q(x,y)$在G内具有一阶连续

偏导数. 如果对G内任意指定的两个点A,B, 以及G内从

点A到点B的任意两条曲线L_1, L_2，都有

$$\int_{L_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy$$

则称 $\int_L P\,dx + Q\,dy$与路径无关, 只与起点和终点有关.

否则称与路径有关.

2. 若$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 是某一个二元函数$u(x,y)$的全微分，即 $du = P\,dx + Q\,dy$, 则称$P\,dx + Q\,dy$为全微分，也称$u(x,y)$是$P\,dx + Q\,dy$**的原函数.**

二、平面上曲线积分与路径无关等价条件

定理2. 设 D 是一平面单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则下列四个条件等价:

(1) 沿 D 内任意光或分段光滑闭曲线 L，$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$

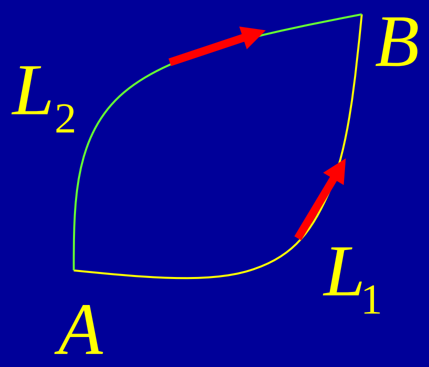
(2) 对 D 中任一分段光滑曲线 L，曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起终点有关.

(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，即 $\mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为D 内**任意**两条由A 到B 的有向分段光滑曲线, 则



$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1 + L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(根据条件(1))}$$

$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

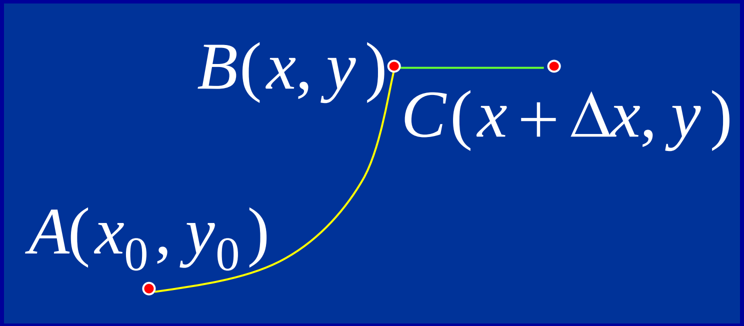
说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明： $(2) \Longrightarrow (3)$

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$



则 $$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y)$$

$$=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} P\,\mathrm{d}x$$

$$=P(x+\theta\,\Delta x,\,y)\Delta x \qquad (0\le\theta\le 1)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\,\Delta x,y)=P(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, 因此有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Longrightarrow$ (4)

设在D内存在函数 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

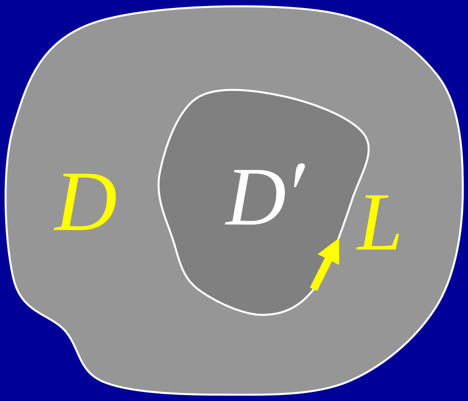
因P, Q 在 D 内具有连续的偏导数，所以$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$连续，故相等. 从而，在$D$内每一点都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

证明 $(4) \Longrightarrow (1)$

设L为D内任一分段光滑闭曲线，由于G是单连通的．

设L所围的闭区域为D'，$D' \subset D$



因此在D'上恒有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

利用**格林公式**，得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0$$

证毕

说明: 根据定理2，若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

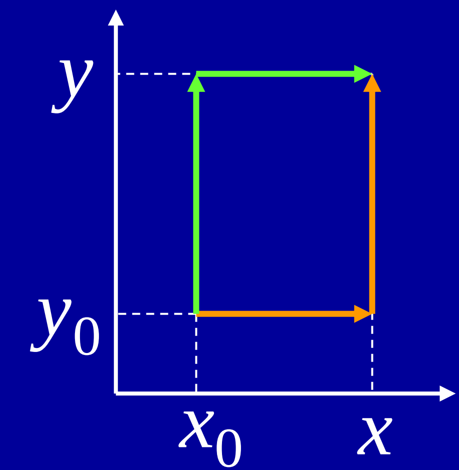
1) 计算曲线积分时，“换简单路径法”；

2) 求曲线积分时，可利用格林公式简化计算，
若积分路径不是闭曲线，可添加辅助线；

3) 可用积分法求 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在域 D 内的原函数：
取定点 $(x_0, y_0)\in D$ 及动点 $(x, y)\in D$，则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$

4) 曲线积分与路径无关时，可通过先求原函数，再代入值的方法. $\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} P\,dx + Q\,dy,$

$$= u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A)$$

5) “D单连通，且P,Q在D具有一阶连续偏导数”

若两个条件中一个不能满足，则定理结论不能保证成立.

如例4中，当L包含原点时,虽 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 但沿闭曲线积分不为零. 因偏导连续不成立，有奇点.

6) 若D复连通时，定理条件(4) 不能保证(1),(2),(3)成立，但(1),(2),(3)仍等价. (4)是(1),(2),(3)结论的必要条件.

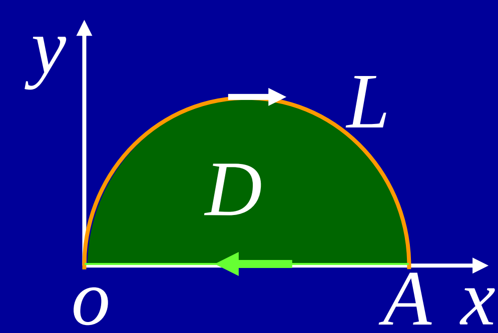
例8. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O\,(0,0)$ 到 $A\,(4,0)$.

解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L 所围区域为D , 则

$$原式=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$



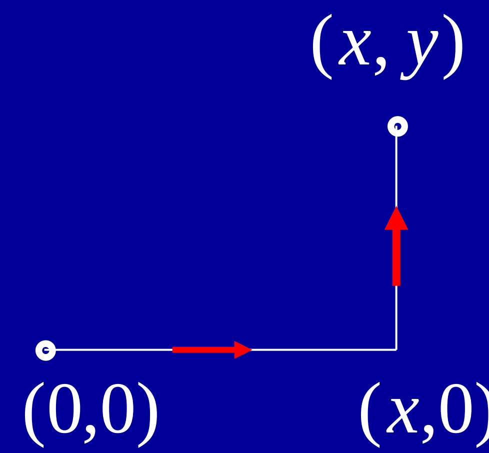
$$=8\pi+\frac{3}{64}$$

例9. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分，并求出 $u(x, y)$.

证： 设 $P = xy^2,\ Q = x^2y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由定理2 可知, 存在函数 $u(x, y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

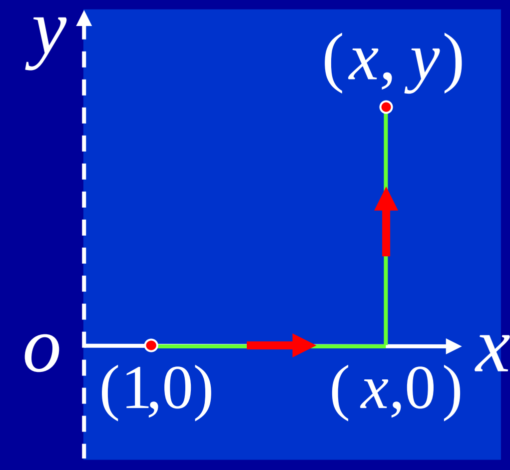


$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^x x\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y + C = \frac{1}{2}x^2y^2 + C$$

例10. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 ($x>0$) 内存在原函数 , 并求出一个这样的函数.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\quad (x>0)$

由**定理 2** 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=-\int_1^x 0\cdot\mathrm{d}x+x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\qquad (x>0)$$

或

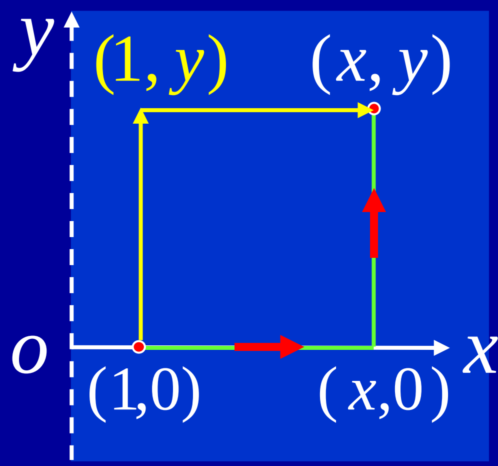
$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-y\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\arctan y+\arctan\frac{1}{y}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$$

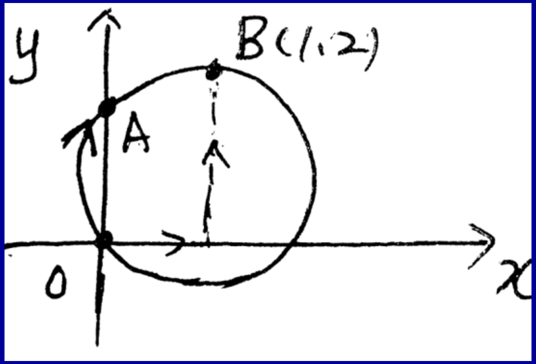
$$=\arctan\frac{y}{x}\qquad(x>0)$$



例11. 求 $\int_{\widehat{OAB}}(e^y + x)\,dx + (xe^y - 2y)\,dy$

其中$\widehat{OAB}$是过O(0,0), $A(0,1)$, $B(1,2)$的圆弧段，由O→B.

分析：参数法，格林公式，**路径无关**.



解：　(先考虑路径无关)

设$P = e^y + x$, Q= $xe^y - 2$y.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在xOy面(单连通)恒成立, 且$\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial P}{\partial y}$连续,

与积分路径无关.

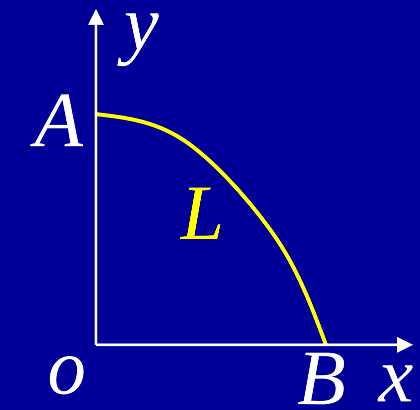
原式=$\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y + x)\,dx + (xe^y - 2y)\,dy$

$=\int_0^1(1 + x)\,dx + \int_0^2(e^y - 2y)\,dy$

例12. 设质点在力场 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L :

$y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\dfrac{\pi}{2},0)$, 求力场所作的功 W

(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



解: $W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L \dfrac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$

令 $P=\dfrac{ky}{r^2},\ Q=-\dfrac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x^2+y^2\neq 0)$$

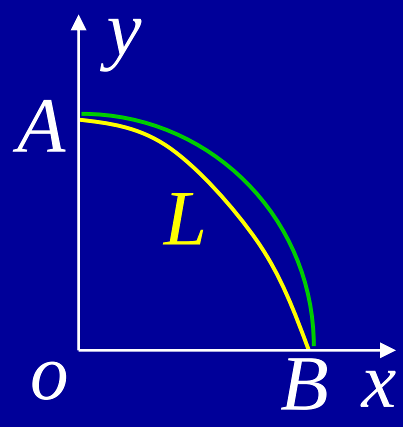
可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\widehat{AB}$: $x=\frac{\pi}{2}\cos\theta,\ y=\frac{\pi}{2}\sin\theta\ \ (\theta: \frac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\widehat{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}k$$



思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关!

例13. 选择a, b,使得

$$(2ax^3y^3 - 3y^2 + 5)\,dx + (3x^4y^2 - 2bxy - 4)\,dy$$

是某一函数$u(x, y)$的全微分，并求$u(x, y)$. 进一步，求

$\int_L P\,dx + Q\,dy$. L 为由(1,2)到(3,1)的有向曲线.

解: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 - 2by$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6ax^3y^2 - 6y$

由于在整个xOy面，单连通，偏导连续, 且

$P\,dx + Q\,dy$是函数$u(x, y)$的全微分. 由定理知: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

故 $a = 2, b = 3$. 利用曲线积分与路径无关(在xOy面内).

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(4x^3y^3-3y^2+5)\,dx+$$

$$(3x^4y^2-6xy-4)\,dy+C$$

$$=\int_0^x 5\,dx+\int_0^y(3x^4y^2-6xy-4)\,dy+C$$

$$=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+C$$

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=u(3,1)-u(1,2)$$

$$=(5x+x^4y^3-3xy^2-4y)\Big|_{(1,2)}^{(3,1)}$$

$$=\ldots\ldots.$$

解法二：求函数$u(x,y)$的另一方法.

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=4x^3y^3-3y^2+5$

故$u(x,y)=\displaystyle\int P(x,y)\,dx=x^4y^3-3xy^2+5x+\varphi(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^4y^2-6xy+\varphi'(y)$$

$$=Q(x,y)=3x^4y^2-6xy-4$$

$\varphi'(y)=-4$，从而 $\varphi(y)=-4y+C$

因此，函数 $u(x,y)=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+C$

作 业

P217　　2: (3), 3, 4, 6(2), 7: (1)(4),

8: (4), 11

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

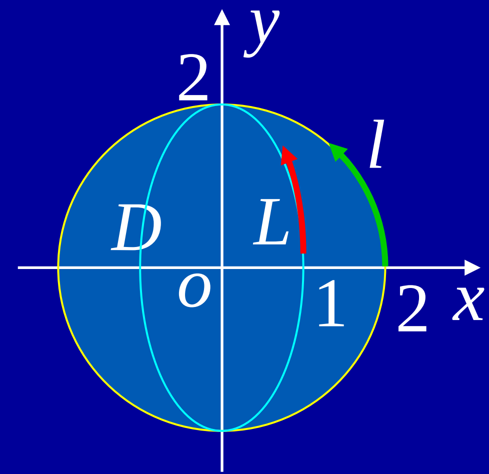
$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

思考与练习

1. 设 $L: x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1,\ l: x^2 + y^2 = 4,$

目且都取正向, 问下列计算是否正确 ?



$$(1)\ \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - 4y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} \cancel{=} \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y - 4y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y - 4y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\iint_D 5\,\mathrm{d}\sigma = 5\pi$$

$$(2)\ \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2\pi$$

提示: $x^2 + y^2 \neq 0$时

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$

(2) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

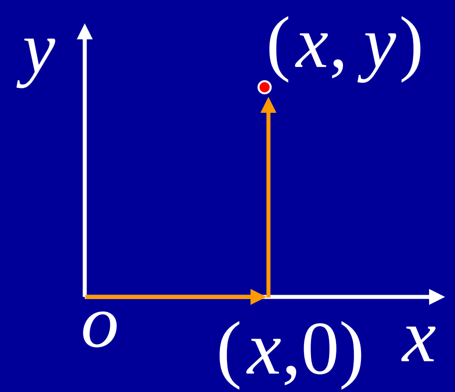
2. 设 $\mathrm{grad}\, u(x,y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$,求 $u(x,y)$.

提示: $\mathrm{d}\, u(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^x x^4\,\mathrm{d}x + \int_0^y (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y + C$$

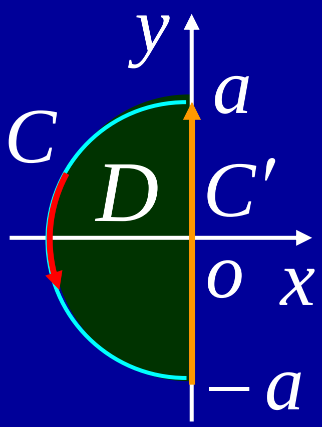
$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5 + C$$



备用题 1. 设 C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆, 计算

$$\int_C \frac{y^2}{\underline{\sqrt{a^2+x^2}}}\mathrm{d}x+\left[\underline{ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})}\right]\mathrm{d}y$$

解: 添加辅助线如图 , 利用格林公式 .



$$原式 = \int_{C+C'} - \int_{C'}$$

$$=\iint_D\left[a+\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}-\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

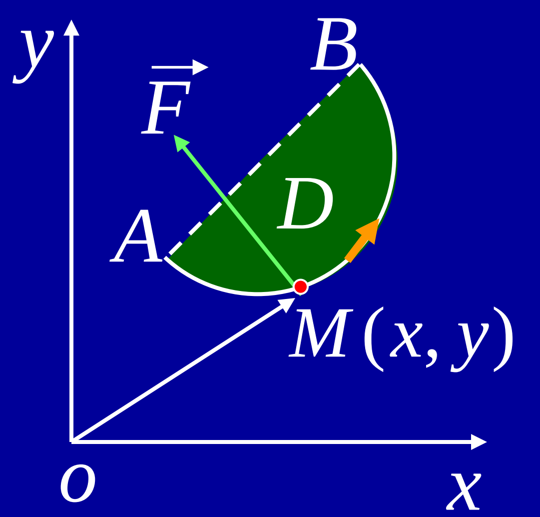
$$-\int_{-a}^{a}\cancel{(2y\ln a)}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^3$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

2. 质点M 沿着以AB为直径的半圆, 从 $A(1,2)$ 运动到点$B(3, 4)$, 在此过程中受力 $\vec{F}$ 作用, $\vec{F}$ 的大小等于点 M 到原点的距离, 其方向垂直于OM, 且与y 轴正向夹角为锐角, 求变力 $\vec{F}$ 对质点M 所作的功. (90考研)

解: 由图知 $\vec{F}=(-y,\, x)$, 故所求功为



$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\Big(\int_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}}\Big)(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

$$=2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_1^3[-(x+1)+x]\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi-2$$

$\overline{AB}$的方程

$$y=2+\frac{4-3}{3-1}(x-1)$$