第二章函数的极限

第一节数列的极限

一、数列极限的定义

古人云:“一尺之棰，日取其半，则万世不竭”，从数学的角度看就是说：对于数量1，第一次取其$\frac{1}{2}$,第二次取$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{2}$,第n次取第$n-1$次留下来的$\frac{1}{2}$, 于是每次所取的量，就是如下一列数：$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$,如果从函数的角度解释，就是每次取前次剩余的一半，第n次取多少？设第n次取x_n，那么$x_n=f(n)=\frac{1}{2^n}$,显然这个函数的定义域是自然数集. 我们将这样的函数称为数列，记作$\{x_n\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, 其中$x_n=f(n)$称为数列的通项或一般项.

自然数集就是一个特殊的数列$\{n\}=\{0,1,2,\cdots,n\cdots\}$,从这两个数列我们不难发现，前者当自变量n越来越大,函数$x_n=f(n)$有确定的变化趋势，即x_n越来越接近于零.而后者当自变量n越来越大时，因变量也越来越大，变化的趋势是趋于无限，从量的角度看这种情况不能说是确定的.

从这两个具体的例子，我们看到：当数列$\{x_n\}$的自变量n趋向无穷时，如果因变量有确定的变化趋势，那么这个趋势是什么？如何来确定？数列没有确定的变化趋势如何来描述？

我们从以下具体的例子来归纳整理出我们的定义.

$x_n=\frac{1}{n},x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n^2},x_n=\frac{1}{2^n},x_n=\frac{1-2n}{1+n}$

我们发现当n越来越大时$x_n=\frac{1}{n}$作为数轴上的点，与原点的距离越来越接近零，即$|x_n-0|$要多小有多小(只要n越来越大）.

$x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n^2}$作为数轴上的点，与点1的距离越来越接近零，即$|x_n-1|=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}$要多小有多小(只要$n$越来越大）.

$x_n=\frac{1}{2^n}$作为数轴上的点，与原点的距离越来越接近零，即$|x_n-0|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}$要多小有多小(只要$n$越来越大）.

$x_n=\frac{1-2n}{1+n}$作为数轴上的点，与点-2的距离越来越接近零，即$|x_n-(-2)|=|\frac{1-2n}{1+n}+2|=|\frac{3}{n+1}|<\frac{3}{n}$要多小有多小(只要$n$越来越大）.

此时我们发现作为数轴上的动点x_n除有限项外将“会聚”到数轴上的某个定点A,由于距离总是非负

的，动点x_n 与定点A的距离要多小有多小，实际上是说$|x_n - A|$小于任意的正数.如果我们将这个任意的正数记作ε,上面的例子实际上就是说:当自变量n越来越大时，$|x_n - A| < \varepsilon$(只要n越来越大)，从几何上看，就是A的ε邻域$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 之外，只有因变量x_n的有限项，见图2.1.1.

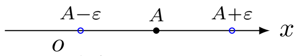

图2.1.1

定义2.1.1 设A是一个常数，$\{x_n\}$是一个数列，若对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在自然数$N \in \mathbb{N}$,当$n > N$时，不等式$|x_n - A| < \varepsilon$恒成立，我们称数列$\{x_n\}$ 当$n \to \infty$时，以常数A为极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于A. 记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$或$x_n \to A(n \to \infty)$.

注：此定义的本质是问量$|x_n - A|$在怎样的条件下，可以小于任意给定的正数ε,我们还是用例子来熟悉此定义.

例2.1.1 证明数列$\{\frac{1}{n}\}$,以零为极限.

证明:$\forall \varepsilon > 0$，欲$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$成立，只需$n > \frac{1}{\varepsilon}$,由于变量$n$是自然数，所以我们取$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$,$\Longrightarrow$当$n > N$.而$N > \frac{1}{\varepsilon}$, 于是，存在$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$,当$n > N$时，不等式$|x_n - 0| < \varepsilon$恒成立.由定义$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

例2.1.2 证明数列$\{x_n = q^n\}$, $|q| < 1$的极限为零.

证明: $\forall \varepsilon > 0$（由于ε是用来度量变量x_n接近于常数A的程度，不妨设$\varepsilon < 1$），欲$|x_n - 0| = |q|^n < \varepsilon$成立，只需$\ln|q|^n < \ln\varepsilon$,即$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$由于变量$n$是自然数，所以我们取$N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]+1$,$\Longrightarrow$当$n > N$.而$N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$,于是，存在$N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}] + 1$,当$n > N$时，不等式$|x_n - 0| < \varepsilon$恒成立.由定义$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例2.1.3 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 1$

证明:令$\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$,其中$\alpha_n > 0$，$\forall \varepsilon > 0$,欲不等式$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$成立.我们注意到

$a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + C_n^2(\alpha_n)^2 + \cdots + C_n^n(\alpha_n)^n > n\alpha_n$

$\Longrightarrow \sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n < \frac{a}{n}$. 只需$\frac{a}{n} < \varepsilon$,于是我们取$N = [\frac{a}{\varepsilon}] + 1$,当$n > N$时

不等式$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$恒成立.由定义命题得证.

注：从上面的定义和例子的讨论中，我们发现:

（1）由于要度量x_n接近于常数A的程度，我们用它们之间的距离，其度量尺度$\varepsilon > 0$是任意给定的，既是任意的又是给定的而且越小接近的程度越好.

（2）由于ε是任意给定的，所以当$x_n \to A(n \to \infty)$ 我们可以写$|x_n - A| < \varepsilon, |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_n - A| < M\varepsilon$($M$是任意正常数)等等. 由$\varepsilon$的任意性，我们可以认为$x_n$任意的接近$A$，即$x_n \to A(n \to \infty)$.

（3）定义中的N是与ε相关联的，一般来讲$N = N(\varepsilon)$，一般我们给定$\varepsilon > 0$ 后,来寻找相关的N.

（4）N的取法不是唯一的，只要取到一个使得$|x_n - a| < \varepsilon$即可，不需要取最小的N, 但是一旦N取定，当$n > N$时$|x_n - A| < \varepsilon$恒成立.

（5）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,一旦$x_N \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 当$n > N$时x_n一定属于此邻域.也就是说当$x_n \to A(n \to \infty)$时，邻域$(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$之外，只能有数列$\{x_n\}$的有限项.

变量x_n可以有极限，可以没有，若没有极限我们如何定义呢？实际上我们只要对某一个正数$\varepsilon_0 > 0$,对于数列$\{x_n\}$和任意的自然数N（无论多大）当$n > N$时总有点x_n满足$|x_n - A| \geqslant \varepsilon_0$,这时称数列$\{x_n\}$,不以常数$A$为极限.

例如数列$x_n = (-1)^n$就不以常数1为极限，因为有无限个n 使得$|x_{2n+1} - 1| = 2$

从这个定义判定数列$\{x_n\}$是否收敛，我们必须知道其极限值A,因此明显是有缺陷的. 在一般情况下，我们更关心数列$\{x_n\}$的极限是否存在，如果存在我们根据数列的极限性质和运算来求这个常数A.而对于发散的数列或者说无极限的数列，我们更多的关注如何判断其发散.

例2.1.4 以下命题哪一个是正确的

（1）若n越来越大时，$u_n - A$越来越小，则数列$\{x_n\}$必以A为极限.

（2）若n越来越大时，$|u_n - A|$越来越小,则数列$\{x_n\}$必以A为极限.

（3）若n越来越大时，$|u_n - A|$越来越接近于零,则数列$\{x_n\}$必以A为极限.

（4）若对于任意的$\varepsilon > 0$,存在自然数N,当$n > N$时，总有无穷多个u_n满足$|u_n - A| < \varepsilon$, 则数列$\{u_n\}$必以A为极限.

（5）若对于任意给定的$\varepsilon > 0$数列$\{u_n\}$中仅有有限多项不满足不等式$|u_n - A| < \varepsilon$,则数列$\{u_n\}$必以A为极限.

解：对于（1）$u_n=-n,A=1\Longrightarrow u_n-A=-n-1$越来越小($n$越来越大)；

对于（2）$u_n=-\frac{1}{n},A=1\Longrightarrow |u_n-A|=1+\frac{1}{n}$越来越小($n$越来越大);

对于（3）$u_n=2+\frac{1}{n},A=1\Longrightarrow |u_n-A|=1+\frac{1}{n}$越来越接近于零($n$越来越大)，但大于1;

对于（4）$u_n=\begin{cases}1-\frac{1}{n}, & n=2k\\ \frac{1}{n}, & n=2k+1\end{cases}$ 容易看到$\forall\varepsilon>0$ 有无穷多个u_n满足$|u_n-1|<\varepsilon$,但$\{u_n\}$却无极限.

对于（5）我们记不满足$|u_n-A|<\varepsilon$的u_n中最大标号为N, 那么当$n>N$时，不等式$|u_n-A|<\varepsilon$恒成立.由定义$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

综上所述，只有命题5正确

例2.1.5 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$ 并举例说明：如果数列$\{|u_n|\}$有极限，但数列$\{u_n\}$未必有极限.

证明: $\forall\varepsilon>0$欲

$||u_n|-|a||<\varepsilon$ ，

由于$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$当$n>N$时

$|u_n-a|<\varepsilon$,而对于任意的a,b

不等式$||a|-|b||\leqslant|a-b|$,恒成立，故对于上述的N和ε有

$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$由定义得证.

而$u_n=(-1)^n$,因为$|u_n|=1\to1(n\to\infty)$,但$\{u_n\}$无极限.

例2.1.6 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

证明: 欲证数列$\{x_ny_n\}$以零为极限,就是$\forall\varepsilon>0$欲不等式

$|x_ny_n-0|<\varepsilon$成立,考虑到数列

$\{x_n\}$的有界性,$\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N}$有$|x_n|\leqslant M$,于是

$|x_ny_n-0|\leqslant M|y_n|$,由于

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$所以

$\forall\varepsilon_1=\varepsilon/M>0,\exists N\in\mathbb{N}$当$n>N$ 时$|y_n|<\varepsilon_1$故$|x_ny_n-0|<\varepsilon$对上述的N和ε成立,由定义得证.

二、收敛数列的性质

定理2.1.1 （唯一性）若数列$\{x_n\}$有极限，极限是唯一的, 即若$x_n \to A, (n \to \infty), x_n \to B(n \to \infty)$，则$A = B$.

命题2.1.1 $\forall \varepsilon$若常数A, B满足不等式$|A - B| < \varepsilon$，则$A = B$

证明: 若$A > B$,令$\varepsilon = \frac{A-B}{2}$,于是$|A - B| < \frac{A-B}{2}$,那么$A < \frac{A+B}{2} < A$与事实矛盾，同理可证$A < B$也不成立，所以$A = B$

定理2.1.1 的证明 若$x_n \to A(n \to \infty), x_n \to B(n \to \infty)$，则存在$N_1 \in \mathbb{N}$ 和$N_2 \in \mathbb{N}$.当$n > \max\{N_1, N_2\}$时，我们有

$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ 同时成立，于是，

$|A - B| \leqslant |x_n - A| + |x_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$由命题2.1.1 $A = B$.

这个性质往往给我们判断一个数列无极限带来方便，例如$x_n = \frac{n+(-1)^n n}{n}$因为$x_{2n} = 2, x_{2n+1} = 0$,所以$\{x_n\}$发散.

定理2.1.2 （有界性）若数列$\{x_n\}$有极限，则数列$\{x_n\}$是有界的.

事实上，我们必须找到一个正数M，$\forall n \in \mathbb{N}$,使得$|x_n| \leqslant M$

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,由定义对于$\varepsilon = 1$，存在$N$,当$n > N$时$|x_n - A| < 1$,且

$|x_n| \leqslant |x_n - A| + |A| < |A| + 1$而

$|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|$是有限个数，我们取

$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |A|\}, \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ 我们有$|x_n| \leqslant M$

注：逆命题是不正确的，即有界数列不一定有极限，例如数列$x_n = (-1)^n$是有界的，但没有极限.

注:（逆否命题）无界数列是发散的.

定理2.1.3 （保号性（局部））若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0(< 0)$,则存在$N \in \mathbb{N}$ 当$n > N$时，$x_n > 0(x_n < 0)$;

事实上，对于$\varepsilon = \frac{A}{2}, \exists N \in \mathbb{N}$,当$n > N, |x_n - A| < \frac{A}{2}$,即$0 < \frac{A}{2} < x_n < \frac{3A}{2}$,命题得证.

推论2.1.1 若数列$\{x_n\}$从某项起$x_n \geqslant 0(\leqslant 0)$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则$A \geqslant 0(A \leqslant 0)$

证明:我们采用反证法，若$A < 0$,由定理2.1.3的证明，我们有某项之后$x_n < 0$，这与$x_n \geqslant 0$的假设是矛

盾的，于是推论得证.

推论2.1.2 若$\lim_{n\to\infty} x_n = A \neq 0$则存在$N \in \mathbb{N}$ 当$n > N$时，$|x_n| > \frac{|A|}{2}$.

证明留给读者，进一步还有

注：若$\lim_{n\to\infty} x_n = A \neq 0$，则存在$N \in \mathbb{N}$当$n > N$，时$\forall r \in (0, |A|)$,有$|x_n| > r$.

定理2.1.4 （保不等式性）若$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,且从某项起$x_n \leqslant y_n$，则$a \leqslant b$.

命题2.1.2 对于常数a, b ,若$\forall \varepsilon > 0$，$a < b + \varepsilon$，则$a \leqslant b$.

证明: 反证若$a > b$，我们令$\varepsilon = \frac{a-b}{2} \Longrightarrow a < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$与事实矛盾.

定理2.1.4 的证明. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$,当$n > N_j (j = 1, 2)$ $|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon$分别成立，假定从第$N_0$项起，当$n > N_0$时，不等式$x_n \leqslant y_n$成立.于是我们取$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$那么当$n > N$时$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n < b + \varepsilon$，于是$a < b + 2\varepsilon$,由命题2.1.2 $a \leqslant b$,即$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$

注：$x_n > 0 (< 0)$且$\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 不一定有$A > 0 (A < 0)$例如$\{x_n = \frac{1}{n} > 0\}$.

习题2.1

1.对于数列$\{x_n = 1 - \frac{1}{10^n}\}$研究下列问题：

1),若$\varepsilon_1 = 10^{-1}, N_1 = ?$,,2),若$\varepsilon_2 = 10^{-3}, N_2 = ?$ 对于上述的$\varepsilon_1, \varepsilon_2$分别找到了$N_1, N_2$是否可以认为数列$\{x_n\}$有极限？

2. 用$\varepsilon - N$定义证明：

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1,$　　2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$　　4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}] = 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}, (u_n \geqslant 0, n = 1, 2, \cdots, u_n \to a(n \to \infty),$

3.下列说法中哪些与$u_n \to a(n \to \infty)$等价:

1)$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < 100\varepsilon$;

3)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$;

4)对于正整数k,都能找到正整数N_k,只要$n > N_k$就有$|u_n - a| < \frac{1}{2^k}$

5)存在正整数N,只要$n > N$,就有$|u_n - a| < \frac{1}{n}$

6)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \varepsilon/n$;

7)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \sqrt{n}\varepsilon$.

4.下列哪个说法与$\{u_n\}$不收敛于a等价:

1) 存在$\varepsilon_0 \geqslant 0$,及正整数$N$,只要$n > N$就有$|u_n - a| \geqslant \varepsilon_0$;

2)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| \geqslant \varepsilon$;

3)$\{u_n\}$中除有限项外,都满足$|u_n - a| \geqslant \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$是某个正整数;

4)$\{u_n\}$中有无穷多项满足$|u_n - a| \geqslant \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$是某个正整数.

5.证明 1)数列$\{\frac{1}{n}\}$不以1为极限;

2)数列$\{n^{(-1)^n}\}$发散.

6.若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \neq 0$，证明：存在$N \in \mathbb{N}$当$n > N$，时$\forall r \in (0, |A|)$,有$|x_n| > r$

7.证明数列$\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\}$发散.

第二节数列极限的存在性

定理2.2.1 （四则运算性质）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则数列$\{x_n \pm y_n\}, \{x_n y_n\}, \{\frac{x_n}{y_n}\}$的极限都存在，且

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}(b \neq 0)$

证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$,当$n > N_j (j = 1, 2)$ 不等式$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$分别成立.

取$N = \max\{N_1, N_2\}$,当$n > N$ 时,上述二不等式同时成立，于是我们有

$|x_n \pm y_n - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$

由数列极限的定义容易得到$x_n \pm y_n \to a \pm b (n \to \infty)$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$. 注意到$\forall n \in \mathbb{N}, |y_n| \leqslant M$,当$n > N$,我们有

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < (M + |a|)\varepsilon$ 取$\varepsilon_1 = (M + |a|)\varepsilon$.由极限的定义$\{x_n \cdot y_n\} \to ab (n \to \infty)$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,利用收敛数列的有界性，存在$N_3 \in \mathbb{N}$,当$n > N_3$时，$|y_n| > \frac{|b|}{2}$,取$N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$,当$n > N$我们有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{x_n b - a y_n}{y_n b}\right| \\
&\leqslant \frac{|b||x_n - a| + |a||y_n - b|}{\frac{|b|^2}{2}} \\
&= \frac{2}{|b|^2}(|b||x_n - a| + |a||y_n - b|) < \varepsilon
\end{aligned}$$

只要$|x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}, |y_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4|a|}$.

例2.2.1 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n+1}, (a \neq -1)$

解:若$a = 1$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n+1} = \frac{1}{2}$

若$|a| < 1$注意到$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$,则

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a^n / (\lim\limits_{n\to\infty} a^n + 1) = 0$

若$|a|>1$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{a^n}}=\frac{1}{1+0}=1$

我们称数列$\{x_n\}$的任意无穷子集$\{x_{n_k}\}$为数列$\{x_n\}$的子列，其中$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 数列$\{x_n\}$的收敛与发散与其子列$\{x_{n_k}\}$的敛散有着密切的关系.

定理2.2.2 （收敛数列的特征之一）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Longleftrightarrow\forall\{x_{n_k}\}\subseteq\{x_n\}$且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$.

证明: $(\Longrightarrow)$因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,设$\{x_{n_k}\}$ 是$\{x_n\}$的任意子列，不妨假定$n_k>\max\{n,k\}$,那么$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$,当$n>N$ 恒有$|x_n-A|<\varepsilon$ ，取$K=N$,当$k>K$时，$n_k>n_K=n_N>N$,于是$|x_{n_k}-A|<\varepsilon$ 所以$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$

$(\Longleftarrow)$反证若$\{x_n\}$不收敛于A,则$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n_0>N$有$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$

分别取$N=1,\exists n_1>1$,有$|x_{n_1}-A|\geqslant\varepsilon_0$,

取$N=n_1,\exists n_2>n_1$,有$|x_{n_2}-A|\geqslant\varepsilon_0$,

$\dots$

取$N=n_{k-1},\exists n_k>n_{k-1}$,有$|x_{n_k}-A|\geqslant\varepsilon_0$,

于是存在子列$\{x_{n_k}\}$不收敛于A与任意子列收敛于同一极限值矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

由此特征我们也可以回答数列$x_n=(-1)^n$无极限，因为$x_{2n}\to1,x_{2n+1}\to-1(n\to\infty)$ 所以$x_n=(-1)^n$无极限.

例2.2.2 对于数列$\{x_n\}$,若$x_{2k-1}\longrightarrow a(k\to\infty),x_{2k}\longrightarrow a(k\to\infty)$.证明$x_n\to a(n\to\infty)$.

证明: $\forall\varepsilon>0$欲不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立.

由奇子列$x_{2k-1}\to a$得$\exists K_1\in\mathbb{N}$当$2k-1>2K_1-1$ 时有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$ (1)

由偶子列$x_{2k}\to a$ 得$\exists K_2\in\mathbb{N}$ 当$2k>2K_2$时有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$ (2)

取$N=\max\{2K_1-1,2K_2\}$那么当$n>N$时(1)(2)同时成立,即$|x_n-a|<\varepsilon$ 由定义命题得证.

定理2.2.3 (夹逼准则）对于数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$,若从某项起满足不等式$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证明: $\forall\varepsilon>0$存在$N_0,N_1,N_2\in\mathbb{N}$.当$n>N_j(j=0,1,2)$时分别有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,|y_n-A|<\varepsilon,|z_n-A|<\varepsilon$

取$N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$,当$n>N$时,上述不等式同时成立,于是我们有$A-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<A+\varepsilon$,这样当$n>N$时，我们有$|x_n-A|<\varepsilon$，由极限的定义得$x_n\to A(n\to\infty)$.

例2.2.3 求$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha](0<\alpha<1)$.

解：$0<y_n=(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left((1+\frac{1}{n})^\alpha-1\right)<n^\alpha\left((1+\frac{1}{n})-1\right)=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$

令$x_n=0,z_n=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$,则$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$,由定理2.2.3，$y_n\to 0(n\to\infty)$.

例2.2.4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解:令$y_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$

我们有$y_n\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}=\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}=z_n$

$y_n\geqslant\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}=\frac{n^2+n}{2(n^2+n+n)}=x_n$

$\Longrightarrow x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$且$x_n\to\frac{1}{2},z_n\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$.

由定理$y_n\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$.

所谓数列的单调性是指:对于数列$\{x_n\}$,我们有$\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\leqslant x_{n+1}$或$x_n\geqslant x_{n+1}$,前者叫单调不减后者叫单调不增.

定理2.2.4 （单调有界准则）设数列$\{x_n\}$单调有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，进一步若$\{x_n\}$单调不减有上界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}$,若$\{x_n\}$单调不增有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}$

证明: 不妨设$\{x_n\}$单调不减有上界，由确界原理(定理1.1.1)$\eta=\sup\{x_n\}$存在，由确界的定义$\forall\varepsilon>0$和任意$n\in\mathbb{N},x_n\leqslant\eta,\exists x_{n_1}\in\{x_n\}$使得$\eta<x_{n_1}+\varepsilon$取$N=n_1$当$n>N$由单调性，$\eta-\varepsilon<x_N\leqslant x_{N+1}\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\eta<\eta+\varepsilon$ 于是当$n>N$时$|x_n-\eta|<\varepsilon$由极限存在的定义，$x_n\to\eta(n\to\infty)$.

同理对于单调不增有下界的数列$\{x_n\}$可以证明,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}$.

例2.2.5 若单调数列$\{x_n\}$的某一子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A,证明该数列收敛于A

证明: 不妨设该数列单调不减，即$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots$由于$x_{n_k}\to A(k\to\infty)$ 所以$\forall\varepsilon>0,\exists K$当$k>K$时$|x_{n_k}-A|<\varepsilon$,取$N=n_{K+1}$.

当$n>N$时，对于收敛子列必有某个自然数p, $|x_{n_{K+p}}-A|<\varepsilon$, 因为$n_{K+1}<n\leqslant n_{n_{K+p}}$，于是$-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-A\leqslant x_n-A\leqslant x_{n_{K+p}}-A<\varepsilon$，即$|x_n-A|<\varepsilon$,由定义$x_n\to A(n\to\infty)$.

例2.2.6 证明数列$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$单调有界，其极限值记为e

证明：利用Bernoulii 不等式$(1+\alpha)^n>1+n\alpha,(\alpha>-1)$

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n}&=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\&=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\ \text{由Bernoulii不等式}\\&=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>(1-\frac{1}{n+1})\frac{n+1}{n}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_n&=(1+\frac{1}{n})^n\\&=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\\&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&<3\end{aligned}$$

由准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\exists$,我们设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e.$

例2.2.7 数列由以下条件确定$x_0>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ 问数列是否有极限？

解：因为$x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant 1,\Longrightarrow x_n\geqslant\frac{1}{x_n}$ 于是$2x_n\geqslant x_n+\frac{1}{x_n}$即$x_n\geqslant\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=x_{n+1}$ 该数列单调递减有下界，设极限为a 在等式$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$两端取极限得到$a=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})\Longrightarrow a=1$,或$a=-1$由极限的保号性这是不可能的.所以极限值为1.

例2.2.8 设$x_1=a>0,y_1=b>0,x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$, 证明两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$ 的极限存在而且相等.

证明: 由数列的定义知$x_n\geqslant 0,y_n\geqslant 0$且$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\geqslant\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1}$

而$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_n^2}=x_n,y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n$, 于是,

$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant y_n\leqslant y_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant y_1.$

由单调准则知数列的极限存在分别设为A,B,在等式$y_n=\frac{x_n+y_n}{2}$两端取极限得到$B=\frac{A+B}{2}$,于是$A=B$.

例2.2.9 设$x_1=a,x_2=b,x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},n=2,3,\cdots$求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：欲求数列的极限，首先要知道其极限存在.我们注意到$x_k-x_{k-1}=\frac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2}-x_{k-1}=-\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{2}$

$$\begin{aligned}x_n&=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\\&=a+(b-a)-\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}}\\&=a+\frac{2(b-a)}{3}+\frac{b-a}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\end{aligned}$$

取极限得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}$.

例2.2.10 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

证明：$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$,

$\Longrightarrow x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}>2(\sqrt{n+1}-1)-2\sqrt{n}>-2$

因此x_n有下界，只需证明其单调递减即可，而

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n\quad&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0\end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

例2.2.11设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

解：
$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}\\&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a-a=0$.

定理2.2.5 (Cauchy收敛准则) 数列$\{x_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$,当$n,m>N$时,恒有$|x_n-x_m|<\varepsilon$

证明:($\Longrightarrow$) 因为$\forall\varepsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$当$n,m>N$ 时恒有$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},|x_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

于是$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-A|+|x_m-A|<\varepsilon$

($\Longleftarrow$)对于$\varepsilon=1$ 存在$N\in\mathbb{N}$当$n,m>N$时，$|x_n-x_m|<1$,取$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$

那么$\forall n\in\mathbb{N}$恒有$|x_n|\leqslant M$,于是数列$\{x_n\}$有界，不妨设$\{x_n\}\subseteq[a,b]$

二等分$[a,b]$得$[a,c]$与$[c,b]$其中，$c=\frac{a+b}{2}$,这两个区间中必有一个包含$\{x_n\}$的无穷项，不妨设$[a,c]$ 中

含有$\{x_n\}$的无穷项，并记作$[a_1,b_1]$我们在其中取一点,使其尽可能靠近区间的左端点a_1,$x_{k_1} \in [a_1,b_1]$,继续二等分$[a_1,b_1]$，其中必有一个小区间含有$\{x_n\}$ 的无穷项，并记这个小区间为$[a_2,b_2]$,我们在其中取一点$x_{k_2} \in [a_2,b_2]\bigcap\{x_n\}$,并且使得$x_{k_2} > x_{k_1}$,如此下去，我们将得到$\{x_n\}$中一列单调有界的子数列$\{x_{n_k}\}$,由单调数列必有极限，不妨设$x_{n_k} \to A(k\to\infty)$.

注意到$|x_n - A| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - A|$,于是$x_n \to A(n\to\infty)$.

习惯上将满足上述不等式的数列称为Cauchy列，这个准则也可以叙述成数列收敛的充分必要条件是该数列是Cauchy列.

注：准则的几何意义是十分明显的,即收敛数列$\{x_n\}$自某项之后，任意两项的距离任意的小，即数列“会聚”到一点.

例2.2.12 证明数列$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$的极限不存在.

证明: 若令$m=2n$,考虑到$|x_{2n}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$，所以该数列不是Cauchy列，因此不会收敛.

例2.2.13 证明数列$x_n = \frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}, n\in\mathbb{N}$的极限存在.

证明: 对于任意的自然数p,我们不妨令$m=n+p \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \\
&\leqslant \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}}+\frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}+\cdots \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots) \\
&< \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$只要$n>[\frac{1}{\varepsilon}]+1$取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 就有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

例2.2.14 设数列$\{x_n\}$满足：存在正数M,对一切n都有

$A_n = |x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}| \leqslant M$证明：数列$\{x_n\}$, $\{A_n\}$都收敛.

证明: $\forall n\in\mathbb{N}$

$A_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \leqslant A_n + |x_{n+1} - x_n| = A_{n+1}$ 所以数列$\{A_n\}$是单调不减的,又$\forall n \in \mathbb{N} A_n \leqslant M$由单调有界准则$\{A_n\}$收敛，由Cauchy收敛准则$\{A_n\}$是Cauchy列，$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$当$n > N, \forall p \in \mathbb{N}$

$|A_{n+p} - A_n| = |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| < \varepsilon$ 而

$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

于是$\{x_n\}$是Cauchy列，故$\{x_n\}$收敛.

习题2.2

1. 求下列数列的极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2+2}{5n^3+3n-2}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}]$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

2.求下列数列的极限

1)$u_1=\sqrt{a}, u_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, u_n=\sqrt{a+u_{n-1}}, (a>0)$求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

2)$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

3.证明数列$\{u_n\}$的极限存在

1)$u_n=\frac{10}{1}\times\frac{11}{3}\times\cdots\times\frac{n+9}{2n-1}$, 2)$u_n=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2^n})$

3)$u_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, 4)$u_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$,

5)$u_n=\frac{n^k}{a^n}, (a>1, k$为正整数$)$, 6)$u_n=P_0+\frac{P_1}{10}+\cdots+\frac{P_n}{10^n}, (P_j$是不大于9的非负整数$j=1,2,\cdots,n)$

4.设$a_1,b_1>0$,且$a_1<b_1, a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, b_2=\sqrt{a_1b_1}\cdots a_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\cdots$ 证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

5.若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$证明:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

2)若$a_n>0(n=1,2,\cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

6.若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=a(b_n>0)$证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$

7.求极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2})^n$

8.利用Cauchy收敛准则证明下列数列极限存在

1)$u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}$, 2)$u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$

3)$u_n=\frac{\cos 1!}{1\times2}+\frac{\cos 2!}{2\times3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$,

9. 求下列极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^n})$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$

10.若$|q|<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$

11. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$是m个正数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

12.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{a}=a$;

(2)若，$a>0,a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$;

13.利用不等式$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a),b>a>0$,证明:数列$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$单调递减;

14.证明:$\left|e-(1+\frac{1}{n})^n\right|<\frac{3}{n}$;

第三节函数的极限

在上一节的讨论中我们发现特殊函数$x_n = f(n)$当自变量n变化$(n \to \infty)$,在一定的条件下因变量x_n可能有确定的变化趋势，即无限地接近某一确定的常数A,自然地要问一般的函数$y = f(x)$当自变量x变化时，因变量是否也会有确定的变化趋势，即y是否也会无限地接近某一确定的常数A

我们容易看到函数$y = f(x)$的自变量x的变化可以分为两类情形:

(1) x趋向于某一有限值x_0，即$x \to x_0$或$x \to x_0^{\pm}$;

(2) x 趋向于无穷，即$x \to \pm\infty$或$x \to \infty$.

一、自变量趋向于有限值时函数的极限

根据函数的定义，当自变量x趋向于x_0，这就意味着x在点x_0附近变化，自然因变量y 也在变化，这种变化有没有确定的变化趋势?实际上就是指因变量能否无限的接近于某一常数A,即$\forall \varepsilon > 0$ ，讨论不等式$|y - A| < \varepsilon$能否成立.

定义2.3.1 设函数$y = f(x)$在点x_0的某去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta')$有定义，$A$是一个常数，若$\forall \varepsilon > 0$（不论其多小），存在(可以找到）$\delta > 0 (\delta' > \delta)$,当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$,恒有不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，我们称当$x \to x_0$时，函数$y = f(x)$以常数$A$为极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A (x \to x_0)$.

注：定义的本质是研究自变量x趋近x_0时,因变量y是否无限接近常数A，因此只需x在x_0附近有定义，如果函数在x_0处有定义，该定义当然成立.

注：由于考虑x趋近x_0，一般来讲δ是很小的，而且一旦找到$\delta > 0$，使得$|f(x) - A| < \varepsilon$,那么对于任意的$\delta_1 < \delta$，只要$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_1)$不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立.

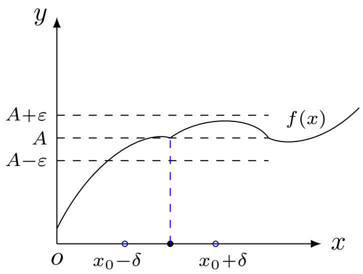

图2.3.1

注：从函数的图象可以看到：一旦x进入x_0的δ邻域$\overset{\circ}{U}$，其函数值$f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$，见图2.3.1.

注：一般来讲，函数极限定义中的δ是由x_0和ε确定的，记作$\delta=\delta(x_0,\varepsilon)$.

例2.3.1 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$

证明: $\forall\varepsilon>0$,欲$|x-x_0|<\varepsilon$,取$\delta=\varepsilon$ ，当$|x-x_0|<\delta$，我们恒有$|x-x_0|<\varepsilon$.

例2.3.2 证明：当$x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

证明：$\forall\varepsilon>0$欲$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$,注意到$x_0>0$

不妨限定$|x-x_0|<x_0$,于是

$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|$

只要$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$,因此取

$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$,当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$

有定义得证.

例2.3.3 证明：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

证明: $\forall\varepsilon>0$,欲$|\frac{x^2-9}{x-3}-6|<\varepsilon$，由于$|\frac{x^2-9}{x-3}-6|=|x-3|$，取$\delta=\varepsilon$ ，当$0<|x-3|<\delta$,不等式$|\frac{x^2-9}{x-3}-6|<\varepsilon$成立，由定义得证.

例2.3.4 证明：$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$

证明: $\forall\varepsilon>0$,欲$|x^2-4|<\varepsilon$，由于$|x^2-4|=|x+2||x-2|$，因为$x\to 2$不妨限定$|x-2|<1,\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}|x^2-4|&=|x-2|(|x-2+4|)\\&\leqslant|x-2|(|x-2|+4)\\&<5|x-2|\end{aligned}$$

，取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{5},1\}$ ，当$|x-2|<\delta$时,不等式$|x^2-4|<\varepsilon$成立，由定义得证.

注意到：函数极限的定义中，变量x趋于x_0的方式是任意的.

当x从x_0 的左侧趋近x_0时，即存在$\delta_1>0$当$x\in(x_0-\delta_1,x_0)$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，我们称A为左极限，记作$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$或记$f(x_0^-)=f(x_0-)$

同样当x从x_0 的右侧趋近x_0，即存在$\delta_2>0$ 当$x\in(x_0,x_0+\delta_2)$时，有$|f(x)-B|<\varepsilon$，我们称B 为右极

限，记作$f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = B$或记$f(x_0^+) = f(x_0+)$ 由上述分析，容易证明如下命题：函数$y = f(x)$在点x_0处有极限的充分必要条件是在x_0的双侧极限$f(x_0^+), f(x_0^-)$存在而且相等，即：

命题2.3.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$

例2.3.5 函数$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$证明：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

证明: $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1,$

$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$ 由命题2.3.1得证.

二、自变量趋于无穷时函数的极限

如果函数$y = f(x)$当自变量x的绝对值$|x|$较大时有定义，（或者说在$U(\infty)$内有定义）当$x\to\infty, f(x)$与常数A的距离趋于零，我们就说$x\to\infty$ 时，函数$f(x)$以常数A为极限.

定义2.3.2 对于某正数$M>0$，函数$y = f(x)$,当$|x| > M > 0$时有定义，A是一个常数，若$\forall\varepsilon>0$（不论其多少），存在(可以找到）$X>0$,当$|x|>X$时,恒有不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，我们称当$x\to\infty$时，函数$y=f(x)$以常数A为极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

例2.3.6 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$=0

证明: 注意到$\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}$,即$\ln x<2\sqrt{x}, x>0$,

$\forall\varepsilon>0$,欲$|\frac{\ln x}{x}-0|<\varepsilon$,因为$x\to+\infty$ 不妨设$x\geqslant 1$, 那么

$$\left|\frac{\ln x}{x}-0\right| \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} < \varepsilon$$

取$X = \max\{1, \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2\}$,于是，当$x>X$时, $\left|\frac{\ln x}{x}-0\right|<\varepsilon$,由定义得证.

注：对于此定义，我们可以区分$x>0 (x<0)$分别来定义函数的极限，不妨也称为双侧极限.当$x>0$且x为整数时，这时极限的定义与数列极限的定义是一样的.

例2.3.7 证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

证明: ($\Longrightarrow$) 因为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,所以$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$,当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$,此即，当$x>X$或$x<-X$时，都有$|f(x)-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$(\Longleftarrow)$ 因为$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$所以$\forall\varepsilon > 0, \exists X_1 > 0$

当$x < -X_1$时有$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (1)$

对上述的$\varepsilon > 0, \exists X_2 > 0.$

当$x > X_2$时有$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (2),$

取$X = \max\{X_1, X_2\}$,当$|x| > X$时，不等式（1)、（2）同时成立，由定义知$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

三、函数极限的性质

函数的极限与函数的极限过程密切相关，以下性质在如下极限过程下

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} f(x);(2)\ \lim_{x\to-\infty} f(x);\ (3)\ \lim_{x\to\infty} f(x);$$

$$(4)\ \lim_{x\to x_0} f(x);(5)\ \lim_{x\to x_0^+} f(x);\ (6)\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

均成立

定理2.3.1（唯一性）若函数$f(x)$在某一极限过程下$\lim f(x)$存在，则极限是唯一的.

证明：我们假定$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,反证若

$f(x) \to A, f(x) \to B(x \to x_0)$ 那么$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$

当$x \in U(x_0, \delta_j)(j = 1, 2)$ 分别有$|f(x) - A| < \varepsilon/2, |f(x) - B| < \varepsilon/2,$

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$时那么

$|A - B| \leqslant |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon$,由命题2.1.1$A = B$。

定理2.3.2（局部有界性） 若函数$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,那么存在常数$M > 0$和 $\delta > 0(X > 0)$ 当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)(|x| > X)$时，有$|f(x)| \leqslant M$

证明：因为$f(x) \to A(x \to x_0)$,所以对于$\varepsilon = 1$,$\exists\delta > 0(|x| > X)$,当 $0 < |x - x_0| < \delta(|x| > X)$时，有

$|f(x) - A| < 1 \Longrightarrow |f(x)| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| = M$

定理2.3.3（局部保号性）若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0(< 0)$,则$\exists\ \delta > 0$,当

$0 < |x - x_0| < \delta$时，$f(x) > 0(f(x) < 0).$

证明: 就$A > 0$的情况证明，对于$\varepsilon = \frac{A}{2} > 0, \exists\ \delta > 0$

当$0<|x-x_0|<\delta$时

$|f(x)-A|<\frac{A}{2}$,即$0<\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3A}{2}$.

推论2.3.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq 0)$，则$\exists\ \delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|>r\in(0,|A|)$.

证明: 对于$\varepsilon=|A|-r>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$A-|A|+r<f(x)<A+|A|-r$,容易看到$|f(x)|>r$.

注: 在利用局部保号性时经常取$r=\frac{|A|}{2}$.

定理2.3.4(保不等式性) 设$\lim f(x),\lim g(x)$存在，且在某邻域$\mathring{U}(x_0,\delta')(|x|>X>0)$内满足$f(x)\leqslant g(x)$, 则$\lim f(x)\leqslant\lim g(x)$

证明: 不妨以$x\to x_0$为例来证明,设

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

于是,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\delta_2>0$,当

$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_j)(j=1,2)$时,分别

有$|f(x)-A|<\varepsilon,|f(x)-B|<\varepsilon$,取$\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}$

,则当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,

我们有$A-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)<B+\varepsilon\Longrightarrow A<B+2\varepsilon$ 由命题2.1.2 $A\leqslant B$,即命题成立.

注:若等式两端都有极限,则等式两端取极限等式仍然成立.

注：以上的性质在$x\to x_0^{\pm},x\to\pm\infty$都有类似的结论，读者可以自己给出.

注：以下凡是没有出现极限过程的命题，表明该结论在任何极限过程下都成立.

习题2.3

1.给出 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$的定义;

2.给出 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$的定义;

3.给出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \mp A$的定义;

4.用定义证明:下列极限:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x+5}{x} = 6$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+10) = 2$

5.证明:命题2.3.1;

6. 证明：$\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1(a>1)$

7.证明：1) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2}(|x_0|<1)$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

8.设$f(x)\to A(x\to x_0), g(x)\to B(x\to x_0)$

1)若在某$\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有$f(x)<g(x)$,是否有$A<B$?为什么？

2)证明:若$A>B$,则在某$\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有$f(x)>g(x)$

9.证明：若$\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$

10,证明: $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, (x_0>0)$

第四节无穷小与无穷大

一、无穷小

定义2.4.1 若某个量$f(x)$在某个极限过程下以零为极限，则称该量在此极限过程下为无穷小（量）, 记作$f(x)=\circ(1)$,此记号和随后的$O(1)$称为（兰道(Landau)）记号.

例如量$f(x)=\frac{1}{x}$当$x\to\infty$时，就是无穷小，$f(x)=x-2$当$x\to 2$时，就是无穷小.

注：除常数零以外，无论其绝对值多么小的数都不是无穷小.

注:用函数或数列极限存在的语言描述无穷小,即$\forall\varepsilon>0$,量$f(x)$在某极限过程下满足:不等式$|f(x)|<\varepsilon$

命题2.4.1 $\lim f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中$\alpha$是在同一极限过程下的无穷小.

证明: $(\Longrightarrow)$ 假定$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,所以$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 此时令$f(x)-A=\alpha$,则有$f(x)=A+\alpha,\alpha=\circ(1)(x\to x_0)$.

$(\Longleftarrow)$ 若在x_0的某去心邻域有$f(x)=A+\alpha,\alpha\to 0$,则$\forall\varepsilon>0$ 有$|f(x)-A|=|\alpha|<\varepsilon$,由极限的定义有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

类似我们可以证明其它极限过程下相应的结论.

注：此等式将极限存在的描述性定义转化成用一个等式来描述，它反映了函数存在极限的本质.

二、无穷大

定义2.4.2 设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内（或当$|x|>X_0$时）有定义，若对于任意的正数$M>0,\exists\delta>0(X>0)$当$0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$时,恒有$|f(x)|>M$,则称$f(x)$在此极限过程下是无穷大(量). 记作$\lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)}f(x)=\infty$

例如$f(x)=\frac{1}{x}(x\to 0)$就是无穷大.

命题2.4.2设$f(x)\neq 0$,在某个极限过程下$f(x)$是无穷小的充分必要条件是$\frac{1}{f(x)}$在同一极限过程下为无穷大.

证明:$(\Longrightarrow)$ 不妨设$f(x)=\circ(1)(x\to x_0)$,则$\forall\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$,有$|f(x)|<\varepsilon$,即$\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}=M>0$,由无穷大的定义，$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

$(\Longleftarrow)\forall M>,\exists\delta>0$,当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$有不等式$\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M,\Longrightarrow|f(x)|<\frac{1}{M}=\varepsilon$, 所以$f(x)=\circ(1)(x\to$

x_0).

注：同无穷小一样，无穷大不是一个确定的量，但它是一个无界的量.

注：无界的量不一定是无穷大.

例如$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是无界的，但不是无穷大.

事实上，取$x_k = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, \Longrightarrow x_k \in (0,1), |f(x_k)| = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > 2k$ 取k为任意正整数，即知其无界，虽然$x_{2k} = \frac{1}{2k\pi} \to 0(k \to \infty)$,而$f(x_{2k}) = 0$,所以不是无穷大.

三、无穷小的运算

定理2.4.1 有限个无穷小之和是无穷小.

证明: 我们以两个无穷小为例来证明，设α, β当$x \to x_0$时,是无穷小，则$\forall\varepsilon > 0$,存在$\delta_1 > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta_1$时,恒有$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$,同理存在$\delta_2 > 0$,

当$0 < |x - x_0| < \delta_2$时,恒有$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$,取

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有

$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| < \varepsilon$ 由无穷小的定义定理得证.

注：无穷个无穷小之和就不一定是无穷小了

例如$x_n = \frac{1}{n}(n \to \infty)$,但$x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

定理2.4.2有界的量与无穷小量之积是无穷小.

证明: 不妨设$f(x)$在某个区间I上是有界的量，即存在$M > 0$,使得$|f(x)| \leqslant M, \alpha \to 0(x \to x_0)$,则$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时,由于$x \in I$,我们有$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$,而$|f(x)\alpha| \leqslant M|\alpha| < \varepsilon$那么$\alpha f(x)$是无穷小.

注：无界的量乘以无穷小就不一定是无穷小.

例如$f(n) = n, g(n) = \frac{1}{n}(n \to \infty), f(n) \cdot g(n) = 1$

推论2.4.1 常数与无穷小之积是无穷小.

定理2.4.3 设$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ 则$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$

证明: 我们就$x \to x_0$的情况下给出证明,其它极限过程类似考虑. 由题设和命题2.4.1，存在去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_j)(j=1,2)$,当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_j)$等式$f(x)=A+\alpha(\alpha\to 0), g(x)=B+\beta(\beta\to 0)$分别成立, 故对于去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta),(\delta=\min(\delta_1,\delta_2))$以上两个等式同时成立，于是我们有

$f(x)\pm g(x)=A\pm B\pm(\alpha+\beta)=A\pm B+\gamma$,由定理2.4.1

$\gamma=\pm(\alpha+\beta)\to 0$, 再由命题2.4.1,定理的第一个结论成立.

以下我们来证明第三个结论，令$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}$只要证明$\gamma\to 0$, 由命题2.4.1 ，则结论成立.由于存在去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0)$,使得不等式$|g(x)|>\frac{|B|}{2}$在该去心邻域内成立,于是

$\gamma=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\alpha)}$

由定理2.4.1和定理2.4.2,我们有$B\alpha-A\beta=\circ(1)(x\to x_0)$, 而

$\left|\frac{1}{B(B+\alpha)}\right|=\frac{1}{|B||g(x)|}<\frac{2}{|B|^2}$

于是$\gamma=\circ(1)(x\to x_0)$.

注: 以上的定理的条件都是充分条件，而非必要条件.例如极限$\lim(f(x)\pm g(x))$存在，$\lim f(x),\lim g(x)$可以同时不存在.

注：以上的四则运算法则仅仅是针对有限项的，对于无限项的和、差、积、商即便每一项的极限都存在，运算法则可能不成立.

例2.4.1 求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

解：当$x\to 3$时，分母的极限为零，故不能直接使用商的运算法则，注意到$x\to 3$,但$x\neq 3$. 所以

原式=$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}3=3+3=6.$

例2.4.2 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}$

解：注意到$\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\circ(1)(x\to 1)$,由命题2.4.2 $\frac{2x-3}{x^2-5x+4}$是无穷大，即

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$

例2.4.3 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

解：$\sin x$是一个有界的量，$\frac{1}{x}=\circ(1), x\to\infty$ 由定理2.4.2知$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

例2.4.4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$.

解：由于分子和分母当$x\to\infty$时都为无穷大，显然不能用商的极限运算法则，

当$m=n$ 时分子分母分别除以x^m,于是

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_m\frac{1}{x^m}}{b_0+b_1\frac{1}{x}+\cdots+b_m\frac{1}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$

当$n<m$分子分母分别除以x^m,则

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0\frac{1}{x^{m-n}}+a_1\frac{1}{x^{m+1-n}}+\cdots+a_n\frac{1}{x^m}}{b_0+b_1\frac{1}{x}+\cdots+b_m\frac{1}{x^m}}=0$

当$n>m$时，仿照例2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}=0$，综上所述，我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

四、无穷小的比较

无穷小量虽然都以零为极限，但不同的无穷小量趋于零的速度是不同的. 例如当$x\to0$时，$3x,x^2,\sin x$都是无穷小但有如下结果：

$$\lim_{x\to0}\frac{3x}{x}=3,\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\infty$$

显然x^2趋于零的速度比x趋于零的速度快，我们通过两个无穷小的商的极限来进行无穷小的比较.

设$\alpha\neq0,\beta$是同一极限过程下的两个无穷小,若

(1) $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=\circ(\alpha)$, 即$\beta$趋于零的速度快.

当$x\to0$，$x,x^2,x^{2/3},\cdots,x^k(k>0)$都是无穷小，习惯上称$x^k$为$x$的$k$阶无穷小，显然$x^{k+1}=\circ(x^k)(x\to 0)$

(2) 若$K\leqslant\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\leqslant L$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小，记作$\beta=O(\alpha)$, 即$\beta$和$\alpha$趋于零的速度相当.特别当$\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq0$时，$\alpha=O(\beta)$

例如当$x\to0$时,$\frac{1}{2}x^2$与x^2皆为无穷小，注意到$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$所以$\frac{1}{2}x^2=O(x^2)(x\to0)$ 又当$x\to 0$时，x与$x(2+\sin\frac{1}{x})$都是无穷小，注意到$1\leqslant|2+\sin\frac{1}{x}|\leqslant3$ 所以$x(2+\sin\frac{1}{x})=O(x)(x\to0)$.

当f在$\overset{\circ}{U}(x_0)$内有界,则记作$f(x)=O(1)(x\to x_0)$. 例如$\sin x=O(1)(x\to\infty)$.

注：若 $f(x),g(x)$当$x\to x_0$时为无穷小，则等式$f(x)=\circ(g(x))(x\to x_0)$或 $f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$等与通常的等式含义不同，这里左边是一个函数，右边是一个函数类，而中间的等号的含义是“属于”

(3)若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\beta\sim\alpha$,即$\beta$与$\alpha$趋于零的速度几乎是一样的.

注: 若$\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$均为无穷小,则有如下等价关系:

$i)\alpha\sim\alpha;$

$ii)$若$\alpha\sim\beta$,则$\beta\sim\alpha$;

$iii)$若$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则$\alpha\sim\gamma$

例2.4.5 证明当$x\to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

证明：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1]}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}=1\end{aligned}$$

命题2.4.3 $\alpha\sim\beta\Longleftrightarrow\beta=\alpha+\circ(\alpha)$.

证明:($\Longrightarrow$)因为$\alpha\sim\beta,\Longrightarrow$由命题2.4.1 有$\frac{\beta}{\alpha}=1+\circ(1),\Longrightarrow\beta=\alpha+\alpha\cdot\circ(1)$,而$\frac{\alpha\cdot\circ(1)}{\alpha}=\circ(1)$ 所以$\alpha\cdot\circ(1)=\circ(\alpha)$

($\Longleftarrow$)因为$\beta=\alpha+\circ(\alpha),\Longrightarrow\frac{\beta}{\alpha}=1+\frac{\circ(\alpha)}{\alpha}=1+\circ(1)$,由命题2.4.1$\frac{\beta}{\alpha}\to 1$所以$\alpha\sim\beta$

由此定理和前面的讨论我们有: $\sqrt[n]{1+x}-1=\frac{1}{n}x+\circ(x)(x\to 0)$.

命题2.4.4 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$为非零无穷小, $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$ 且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在, 则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

证明：$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

例2.4.6 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{-\frac{1}{2}x^2}=1$求$a$

解:当$x\to 0$,时$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}ax^2,-\frac{1}{2}x^2\sim-\frac{1}{2}x^2$ 由命题2.4.4得

原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a$,则$a=-\frac{3}{2}$.

注：$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,而$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$不一定成立，但当$\frac{\alpha}{\beta}\to k\neq -1$时，$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$.

五、曲线的渐近线：

定义2.4.3 若曲线C 上的动点P沿着曲线无限地远离原点时，点P与某定直线L的距离趋于零，则称直线L为曲线C的渐近线.

设渐近线的方程为$y=kx+b$，$P(x,f(x))$是曲线L上的动点，则P到渐近线的距离为$d=\frac{|kx-f(x)+b|}{\sqrt{1+k^2}}$由渐近线的定义我们有$\lim\limits_{x\to\infty}d=0$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}x(k-\frac{f(x)}{x}+\frac{b}{x})=0$,

那么$\lim\limits_{x\to\infty}(k-\frac{f(x)}{x}+\frac{b}{x})=0$

$\Longrightarrow k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$,

若k为无穷，即渐近线为垂直于横轴的直线，则渐进线方程由如下方式来确定：

$\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}f(x)=\infty$,

则$x=x_0$就是其一条垂直渐近线.

注:求渐近线时的极限过程可以为$x\to x_0^{\pm},x\to\pm\infty$

例2.4.7 求曲线$f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$的渐近线.

解：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2-3x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-2x^2+3x}{x^2+2x-3}\right)=-2$

所以斜渐近线为：$y=x-2$又$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$

所以铅直渐近线为：$x=-3,x=1$.

习题2.4

1.证明下列等式:

1)$2x-x^4=O(x)(x\to 0)$;　　2)$\sqrt{1+x}=1+\circ(1)(x\to 0);)$

3)$(1+x)^n=1+nx+\circ(x)(x\to 0)$($n$为正整数)　　4)$\circ(x^m)\pm\circ(x^n)=\circ(x^{\min\{m,n\}})(x\to 0)$

5)$\circ(x^n)\cdot\circ(x^n)=\circ(x^{m+n})(x\to 0)$($m,n$为正实数)　　6)$k\cdot\circ(x^m)=\circ(x^m)(x\to 0)$

2.求下列极限:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$;　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{5}}\sin\frac{1}{x^2}$;　　4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;　　6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

3.试确定常数λ和μ使等式

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$ 成立.

4.试确定α的值,使下列函数与x^α当$x\to 0$ 时为同阶无穷小:

1)$\frac{1}{1+x}-(1-x)$;　　2)$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

3)$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$

5.证明:无穷大量一定是无界的量,其逆命题不真.

6.证明：1)$\circ[O(f(x))]=\circ(f(x))$;　　2)$O[\circ(f(x))]=\circ(f(x))$

7.证明:$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$,在$\overset{\circ}{U}(0)$内无界,但当$x\to 0$时,不是无穷大;

8.根据函数极限或无穷大定义，填写下表:

	$f(x) \to A$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$
$x \to x_0$	$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$时, 即有$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$			
$x \to x_0^+$				
$x \to x_0^-$				
$x \to \infty$		$\forall M > 0$, $\exists X > 0$, 使当$\lvert x \rvert > X$时, 即有$\lvert f(x) \rvert > M$		
$x \to +\infty$				
$x \to -\infty$				

第五节函数极限的存在性

一、极限的存在性

定理2.5.1 (复合函数的极限运算法则) 设函数$y=f(g(x))$ 是函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成, $f(g(x))$在x_0的某去心邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 且存在$\delta_0>0$,当$x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_0)$时,有$g(x)\neq u_0$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$

证明: 由$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 则$\forall\varepsilon>0\ \exists,\eta>0$,当$0<|u-u_0|<\eta$时,我们有

$|f(u)-A|<\varepsilon$.由$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$,则对于上述的$\eta>0$, $\exists\delta_1>0$

使得,当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有$|g(x)-u_0|<\eta$, 取$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$

则当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|g(x)-u_0|<\eta, g(x)\neq u_0$同时成立,从而$|f(g(x))-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$.

注：$g(x)\neq u_0$的限制，是考虑到函数在一点的极限的存在性可以不考虑函数在该点处是否有定义,同时若$g(x)=u_0$,则在邻域$U(x_0,\delta)$，$f(u)$变成了常函数，极限当然是常数.

定理2.5.2 （夹逼定理）对于函数$f(x),g(x),h(x)$若在x_0的某去心邻域内满足不等式$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,且$f(x)\to A, h(x)\to A(x\to x_0)$, 则$g(x)\to A(x\to x_0)$

证明留给读者

例2.5.1 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

解: 分子和分母的极限都是无穷小,所以不能用极限的四则运算法则.在图2.5.1中，在单位圆内设圆心角

$\angle AOB=x(0<x<\frac{\pi}{2})$,

于是由正弦线$AC=\sin x$,正切线$DB=\tan x$,与单位圆相关的面积有

ΔAOB的面积<圆扇形AOB的面积$<\Delta DOB$的面积,所以

$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$ 整理得

$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$，注意到当$0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，

$0<|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$，令

$f(x)=0, h(x)=1-\cos x, g(x)=\frac{x^2}{2}$

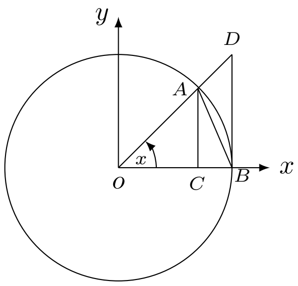

图2.5.1

由夹逼定理知道$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$,再令$f(x)=\cos x,g(x)=\frac{\sin x}{x},h(x)=1$ 由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

而 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$，由命题2.3.1 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

注：这是一个很重要的极限，它的形式为$\frac{\sin\square}{\square},\square\to0$, 在利用它时一定要注意分子，分母中$\square$ 的内容要完全吻合.例如极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}$,尽管分子和分母都是无穷小，但由于$\square$ 中的内容不一样，其结果应为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x=0$而非1.

例2.5.2 求$\lim\limits_{t\to0}\frac{\arctan t}{t}$

解：令$\arctan t=x,t=\tan x,\Longrightarrow t\to0\Longleftrightarrow x\to0$所以

原式=$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\cos x=1$

例2.5.3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

解：因为对于任意的非负实数x总存在自然数n（包含0）使得$n\leqslant x<n+1$ 于是，

$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}$注意到当$a>1$时,$a^x$的递增性，我们有

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

注意到$x\to+\infty\Longleftrightarrow n\to+\infty$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\to e,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\to e(n\to+\infty)$,由夹逼定理

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x&=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}\\&=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^t=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1+1}\\&=\lim_{u\to+\infty}(1+\frac{1}{u})^u=e\end{aligned}$$

由§2.3例6 我们有另一个重要的极限: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.另外如果我们令$\alpha=\frac{1}{x}$,我们还有

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

注：这个极限表达式的使用同第一个一样也要注意$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}$ 其中□的内容完全一样.

借助于命题2.4.4,我们可以计算许多复杂形式的极限,但要注意无穷小替换的“整体性”

例2.5.4 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

解:虽然$\sin x\sim x,\tan x\sim x(x\to 0)$,但是$\sin x-\tan x\nsim x-x$,但注意到$\circ(x^m)\cdot\circ(x^n)=\circ(x^{m+n})(x\to 0)$

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\frac{1}{\cos x})}{\frac{1}{3}x^2\frac{1}{2}\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}6\frac{\cos x-1}{x^2}=6\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-3\end{aligned}$$

例2.5.5 设α,β是非零无穷小,若$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$ 且$\lim\frac{\beta}{\alpha}=k\neq -1$, 则$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$

证明:$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha'+\beta'}=\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\alpha'}}{1+\frac{\beta'}{\alpha'}}=\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\alpha'}}{1+\frac{\beta'}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\alpha'}}\to\frac{1+k}{1+k}=1$

即$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$.

定理2.5.3 设函数$f(x)$在邻域$\overset{\circ}{U}_+(x_0)=(x_0,x_0+\delta)$ 上单调有界，则右极限$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在.

证明: 不妨设$f(x)$单调不减，由确界原理（定理1.1.1）$\inf\limits_{x\in\overset{\circ}{U}_+(x_0)}f(x)$存在，记作$\alpha$,以下证明$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\alpha$

事实上，$\forall\varepsilon>0\ \exists x'\in\overset{\circ}{U}_+(x_0)$,使得$f(x')<\alpha+\varepsilon$,取$\delta=x'-x_0>0$,由$f(x)$的不减性$\forall x\in(x_0,x')=\overset{\circ}{U}_+(x_0,\delta)$ 有$f(x)\leqslant f(x')<\alpha+\varepsilon$注意到$\alpha-\varepsilon<f(x)$ 我们有$\forall x\in\overset{\circ}{U}_+(x_0,\delta),\alpha-\varepsilon<f(x)<\alpha+\varepsilon$ 于是定理得证.

注：对于不同极限过程$(x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to-\infty,x\to+\infty)$ 下的函数极限存在的单调准则也有相应的描述, 例如若函数$f(x)$在x_0的某一个左邻域$(x_0-\delta,x_0)$单调有界,则左极限$f(x_0^-)$存在. 细心的读者可以总结相应极限过程下的单调准则.

定理2.5.4 （海涅（Heine）归结原理）设$f(x)$在x_0 某邻域$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\iff\forall\{x_n\}\subseteq\overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$,当$x_n\to x_0(n\to\infty)$有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

证明: $(\Longrightarrow)$ 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta')$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,因

为$x_n \to x_0$,故对上述的$\delta > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$,当$n > N$时,有$|x_n - x_0| < \delta \Longrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta) \Longrightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

($\Longleftarrow$) $\forall \{x_n\} \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$,当$x_n \to x_0 (n \to \infty)$有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$,若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$,则存在$\varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0$(无论多小) 总存在$x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$使得$|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$ 我们依次取$\delta = \delta', \frac{\delta'}{2}, \frac{\delta'}{3}, \cdots, \frac{\delta'}{n} \cdots$ 于是存在点

$x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$分别满足:$0 < |x_n - x_0| < \frac{\delta'}{n}$,但$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$ 这样一来存在一列$\{x_n\} \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$且$x_n \to x_0 (n \to \infty)$但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$与假设矛盾,所以必有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

例2.5.6 证明$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$不存在

证明:取$x_n' = \frac{1}{n\pi}, x_n'' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n = 1, 2, \cdots$ 显然$x_n' \to 0 (n \to \infty), x_n'' \to 0 (n \to \infty)$

但$\sin\frac{1}{x_n'} = 0 \to 0, \sin\frac{1}{x_n''} = 1 \to 1 (n \to \infty)$ 由归结原理得证.

定理2.5.5（Cauchy收敛准则）设函数$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta < \delta')$, 当$x', x'' \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时，恒有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证明: ($\Longrightarrow$) 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)(\delta < \delta'), |f(x) - A| < \varepsilon/2$ 于是，$\forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta), |f(x') - f(x''| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'' - A| < \varepsilon$

($\Longleftarrow$)设数列$\{x_n\} \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$ 且$x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 由假设$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 (\delta' > \delta)$使得$\forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 对于上述的δ $\exists N \in \mathbb{N}$当$n, m > N, x_n, x_m \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta) \Longrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$所以$\{f(x_n)\}$是Cauchy列，因此收敛.令$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

若另一数列$\{y_n\} \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$且$y_n \to x_0 (n \to \infty)$ 如上所述有$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$ 那么我们得到数列$\{z_n\}$: $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n \cdots \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta'), z_n \to x_0 (n \to \infty)$且$\{f(z_n)\}$收敛，由收敛数列极限的唯一性，作为子列$\{f(x_n)\}, \{f(y_n)\}$，其极限是相等的，即$A = B$.由归结原理（定理2.5.4）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

例2.5.7 (极限的局部逆问题)已知$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{ax^2 - x + 3} - 2x) = b$求常数$a, b$

解:原式$= \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{a - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2\right) = b$第二个因子的极限必为零,即$\sqrt{a} - 2 = 0, \Longrightarrow a = 4$将其代入

原式并有理化得

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-x+3}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{\sqrt{4x^2-x+3}+2x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

例2.5.8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

解:$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e(n\to\infty)$

$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geqslant\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}$

由归结原则（取$x_n=\frac{n^2}{n-1},n=1,2,\cdots$）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=\lim\limits_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$

由夹逼准则原式的极限为e

二、两个重要的极限

在求函数的极限时我们遇到两类“病态”极限，即$\frac{0}{0}$,型

例如例1$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$等，$1^\infty$,

例如例3 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$以及相应的等价形式$\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, 以上两种类型的极限都是四则运算处理不了的类型,我们称这些类型的极限为不定式的极限，我们将在不定式的极限一节继续讨论.

习题2.5

1.设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A, \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$ 证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$;

2.证明：定理2.5.2;

3.叙述并证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的Heine归结原理；

4.设$f(x)$在$[a,+\infty)$上增（减），证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在$\Longleftrightarrow f(x)$在$[a,+\infty)$上有上（下）界；

5.叙述$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$的Cauchy收敛准则；

6.证明：若 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to a^-} |f(x)|=|A|$

7. 求下列极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;　　4) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{5}}\sin\frac{1}{x^5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}$;　　6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^{\sqrt{x}}$;　　8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\alpha x)^{\frac{1}{x}}$($\alpha$是常数);

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$;　　10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

8.已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$用定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f^3(x)=A^3$;

练习二

1.求下列极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{n!}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n}), |\alpha|<1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$($n,m$为正整数);

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sqrt[3]{1+\sin^2 2x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right), m,n$为正整数;

11) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)$;

2.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a,2,\cdots,a_k\}$, 其中$a_i>0,(i=1,2,\cdots,k)$

3.设$x_0=a,x_1=1+bx_0,x_{n+1}=1+bx_n$,问当$a,b$为何值时该数列收敛?

4.方程$x=m+\varepsilon\sin x(0<\varepsilon<1)$称为开普勒方程，若$x_0=m,x_n=m+\sin x_{n-1}$ 证明数列$\{x_n\}$收敛.

5.证明：若数列$\{x_n\}$满足下列条件之一，则$\{x_n\}$是无穷大数列：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=r>1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=s>1(x_n\neq 0,n=1,2,\cdots)$

6.证明：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$

7.设$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$,其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是常数，若$\forall x\in\mathbf{R},|f(x)|\leqslant|\sin x|$,证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$

8.求下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}, x\geqslant 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$

9. 若$f(x)$是周期函数,且$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$,证明: $f(x)\equiv 0$

10.设函数f在$(0,+\infty)$上满足方程$f(2x)=f(x)$,且$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=A$, 证明:$f(x)\equiv A, x\in(0,+\infty)$

11.设函数f在$(0,+\infty)$上满足方程$f(x^2)=f(x)$,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$, 证明:$f(x)\equiv f(1),x\in(0,+\infty)$

12.设函数f定义在$(a,+\infty)$上,f在每一个有限区间(a,b)内有界,并且有$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$

关于两个特征的证明

1.(Cauchy 柯西准则)

我们这里仅给出数列收敛得Cauchy准则，其实还有相应的函数极限的Cauchy准则，这里就不在深入讨论

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在iff $\forall\varepsilon>0$,存在$N\in\mathbb{N}$当$n,m>N$ 时,恒有$|x_n-x_m|\varepsilon$

证明($\Longrightarrow$) 因为$\forall\varepsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$当$n,m>N$ 时恒有$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},|x_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

于是$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-A|+|x_m-A|<\varepsilon$

($\Longleftarrow$)对于$\varepsilon=1$ 存在$N\in\mathbb{N}$当$n,m>N$时，$|x_n-x_m|<1$,取$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$

那么$\forall n\in\mathbb{N}$恒有$|x_n|\leqslant M$,于是数列$\{x_n\}$有界，不妨设$\{x_n\}\subseteq[a,b]$

二等分$[a,b]$得$[a,c]$与$[c,b]$其中，$c=\frac{a+b}{2}$,这两个区间中必有一个包含$\{x_n\}$的无穷项，不妨设$[a,c]$ 中含有$\{x_n\}$的无穷项，并记作$[a_1,b_1]$我们在其中取一点,使其尽可能靠近区间的左端点a_1,$x_{k_1}\in[a_1,b_1]$,继续二等分$[a_1,b_1]$，其中必有一个小区间含有$\{x_n\}$ 的无穷项，并记这个小区间为$[a_2,b_2]$,我们在其中取一点$x_{k_2}\in[a_2,b_2]\bigcap\{x_n\}$,并且使得$x_{k_2}>x_{k_1}$,如此下去，我们将得到$\{x_n\}$中一列单调有界的子数列$\{x_{n_k}\}$,由单调数列必有极限，不妨设$x_{n_k}\to A(k\to\infty)$

注意到$|x_n-A|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-A|$于是$x_n\to A(n\to\infty)$

2.（海涅（Heine）归结原理）设$f(x)$在x_0 某邻域$\mathring{U}(x_0,\delta')$内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\{x_n\}\subseteq\mathring{U}(x_0,\delta')$,当$x_n\to x_0(n\to\infty)$有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

证明 ($\Longrightarrow$) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta')$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,因为$x_n\to x_0$,故对上述的$\delta>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$,当$n>N$时$|x_n-x_0|<\delta\Longrightarrow x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta)\Longrightarrow|f(x_n)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

$(\Longleftarrow)$ $\forall\{x_n\} \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$,当$x_n \to x_0(n \to \infty)$有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$,若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$,则存在$\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0$(无论多小) 总存在$x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$使得$|f(x)-A| \geqslant \varepsilon_0$ 我们依次取$\delta = \delta', \frac{\delta'}{2}, \frac{\delta'}{3}, \cdots, \frac{\delta'}{n} \cdots$ 于是存在点$x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$分别满足:$0 < |x_n - x_0| < \frac{\delta'}{n}$,但$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$ 这样一来存在一列$\{x_n\} \subseteq \overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$ 且$x_n \to x_0(n \to \infty)$但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$与假设矛盾,所以必有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$