第三节

三重积分

习题课

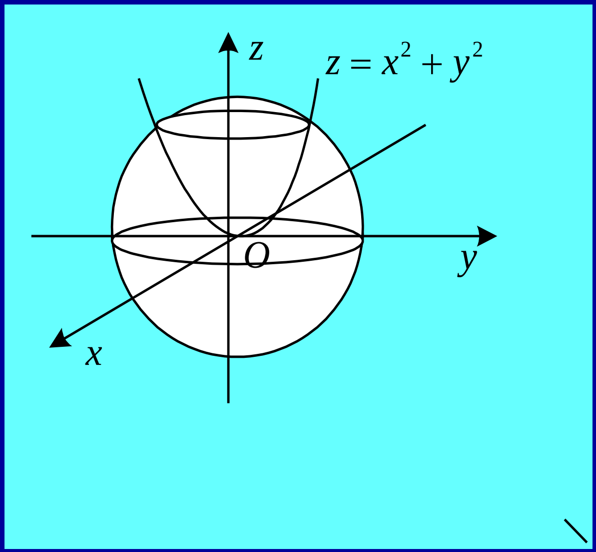
例1. 求 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\sqrt{x^2+y^2}\,dv$

Ω由曲面$x^2+y^2+z^2=2$与$z=x^2+y^2$所围成闭区域.

解: 原式 $=\iiint_{\Omega}x\sqrt{x^2+y^2}\,dv+\iiint_{\Omega}y\sqrt{x^2+y^2}\,dv+$

$$\iiint_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,dv=I_1+I_2+I_3$$

由对称性 $I_1=I_2=0.$

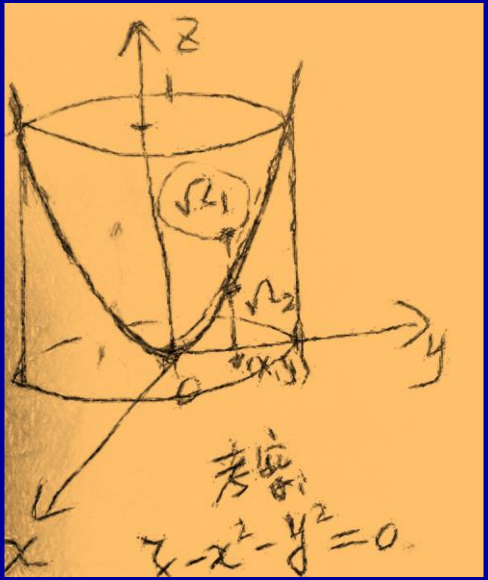


$$I_3=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\,d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\,dz$$

$$=\frac{34}{105}\pi$$

目录 上页 下页 返回 结束

例2. 求 $\iiint_{\Omega}|z-x^2-y^2|\mathrm{dv}$, 其中$\Omega$由曲面$x^2+y^2=1$, 平面$z=0, z=1$所围.



解：曲面$z=x^2+y^2$将Ω分成Ω_1,Ω_2.

原式$=\iiint_{\Omega_1}+\iiint_{\Omega_2}$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^1(z-r^2)\,dz$$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^{r^2}(r^2-z)\,dz$$

例3. 求 $\iiint_{\Omega}(xye^{z}+1)\,d\Omega$，其中Ω由曲面$x=2-y^{2}$，平面$x=0, z=0, x+z=2$所围成.

解： Ω关于xOz面对称，而xye^{z}是关于y的奇函数.

原式=$\iiint_{\Omega} d\Omega$

解法一：$\iiint_{\Omega} d\Omega=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{0}^{2-y^{2}}dx\int_{0}^{2-x}dz=\frac{16}{5}\sqrt{2}$

解法二：$\iiint_{\Omega} d\Omega=\int_{0}^{2}dx\iint_{D_x}dy\,dz=2\int_{0}^{2}(2-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$

D_x截面面积$2\sqrt{2-x}\cdot(2-x)$

例4. 求 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,d\Omega$，其中Ω由曲面 $x^2+y^2+z=2$ 和 $x^2+y^2-z^2=0$所围xOy面上方区域.

解： Ω在xOy面上的投影区域 D_{xy}.

(两曲面方程联立消z，得到投影柱面

$x^2+y^2=[2-(x^2+y^2)]^2$，即 $r^2=(2-r^2)^2$,

$r=1$ (xOy面上方)或 $r=2$(xOy面下方)，取 $r=1$.)

D_{xy}： $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 1$.

原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_r^{2-r^2}r^2\,dz=\frac{4}{15}$.

例5. 求 $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv$, 其中Ω是由曲线 $\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

绕z轴旋转形成的旋转曲面和平面$z=0, z=1$所围.

解： 旋转曲面方程：$x^2+y^2-z^2=1$

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dv = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{Dz} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x dy$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^3\,dr$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(1+z^2)^2\,d\theta = \frac{14}{15}\pi$$

例6. 求 $\iiint_{\Omega} y^2\,\mathrm{dv}$, 其中Ω为由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$

及圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的闭区域.

解：在xOy面上投影区域为圆域：$0\le\theta\le 2\pi$.

球面的球面坐标方程：$r=2\cos\varphi$

圆锥面的球面坐标方程：$\varphi=\frac{\pi}{4}$

$$\iiint_{\Omega} y^2\,\mathrm{dv}=$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\sin\varphi(r\sin\varphi\sin\theta)^2\,dr$$

$$=\frac{4}{15}\pi$$

例7. 求$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,d\Omega$，$\Omega$是由 $x^2+y^2+z^2\le 2$，

及 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 所围的公共区域.

解：由投影区域为圆域，$0\le\theta\le 2\pi$. 由z轴正向穿过Ω

且曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 与xOy面相切，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 与$x^2+y^2+z^2=2$的交线为：

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

两球面坐标方程分别为：$r=\sqrt{2}$，$r=2cos\varphi$

$$原式 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \sin\varphi \, dr$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^4 \sin\varphi \, dr$$

例8. 求 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dv$, Ω满足条件:

$x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1,\ z \ge 1, y \ge 0$ 的区域.

解: $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$与$z = 1$交线为:

平面$z = 1$上的圆周 $x^2+y^2 = 1$.

此圆周上点的球面坐标为 $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Ω在以原点为中心，半顶角为$\frac{\pi}{4}$的圆锥面内, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

由 $y \ge 0$，因此Ω是由球面 r=2cosφ, 平面 $r = \frac{1}{cos\varphi}$所围满足$y \ge 0$的部分.

Ω在xOy面上的投影区域为半圆域.

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi \, dr$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[2\cos^2\varphi - \frac{1}{2\cos^2\varphi} \right] d\varphi$$

$$= \pi \left(-\frac{2}{3}\cos^3\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{7}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \right)$$

例9. 求 $\iiint_{\Omega} x^2 dv$, $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0,$

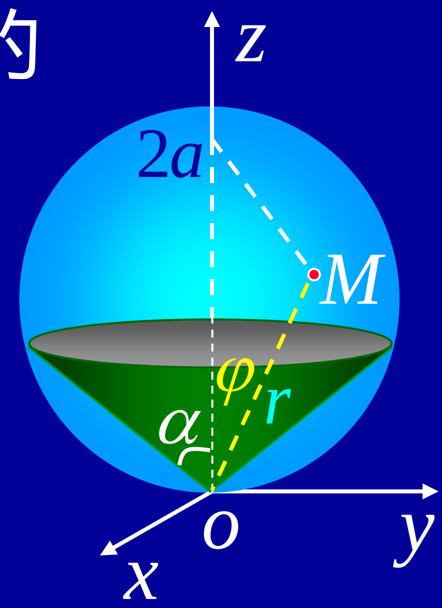
$z \ge 0.$

解: $$\iiint_{\Omega} x^2 dv = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^4 \sin\varphi\, dr$$

$$= \frac{a^5\pi}{30}$$

例10. 求半径为a 的球面与半顶角为α的内接锥面所围成的立体的体积.



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le 2a\cos\varphi\\ 0\le\varphi\le\alpha\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

则立体体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$$