第一部分作业

1.对于数列$\{x_n = 1 - \frac{1}{10^n}\}$研究下列问题：

1),若$\varepsilon_1 = 10^{-1}, N_1 = ?$,,2),若$\varepsilon_2 = 10^{-3}, N_2 = ?$ 对于上述的$\varepsilon_1, \varepsilon_2$分别找到了$N_1, N_2$是否可以认为数列$\{x_n\}$有极限？

2. 用$\varepsilon - N$定义证明：

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}] = 0$

3.下列说法中哪些与$u_n \to a (n \to \infty)$等价:

1)$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < 100\varepsilon$;

3)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$;

4)对于正整数$k$,都能找到正整数$N_k$,只要$n > N_k$就有$|u_n - a| < \frac{1}{2^k}$

5)存在正整数$N$,只要$n > N$,就有$|u_n - a| < \frac{1}{n}$

6)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \varepsilon/n$;

7)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| < \sqrt{n}\varepsilon$.

4.下列哪个说法与$\{u_n\}$不收敛于$a$等价:

1) 存在$\varepsilon_0 \geq 0$,及正整数$N$,只要$n > N$就有$|u_n - a| \geq \varepsilon_0$;

2)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,只要$n > N$就有$|u_n - a| \geq \varepsilon$;

3)$\{u_n\}$中除有限项外,都满足$|u_n - a| \geq \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$是某个正整数;

4)$\{u_n\}$中有无穷多项满足$|u_n - a| \geq \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$是某个正整数.

5.设$a_1, b_1 > 0$,且$a_1 < b_1, a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, b_2 = \sqrt{a_1b_1} \cdots a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \cdots$ 证明:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

6.若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$证明:

1)$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$

2)若$a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$

7.若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = a(b_n > 0)$证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = a$

8.求极限

$$\begin{array}{ll} 1) \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n, & 2) \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n \\ 3) \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n & 4) \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2})^n \end{array}$$

9.若$|q|<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$

10. 设$a_1, a_2, \cdots, a_m$是$m$个正数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$

11.设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[na_n]}{a} = a$;

(2)若，$a>0, a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$;

12.试确定常数$\lambda$和$\mu$使等式

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu) = 0$ 成立.

13.试确定$\alpha$的值,使下列函数与$x^\alpha$当$x \to 0$ 时为同阶无穷小:

1) $\frac{1}{1+x} - (1-x)$; 2) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

3) $\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}$

14.证明:无穷大量一定是无界的量,其逆命题不真.

15.证明：1) $\circ\left[O(f(x))\right] = \circ(f(x))$; 2) $O\left[\circ(f(x))\right] = \circ(f(x))$

16.证明:$f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$,在$\overset{\circ}{U}(0)$内无界,但当$x \to 0$时,不是无穷大;

17.根据函数极限或无穷大定义，填写下表:

| | $f(x) \to A$ | $f(x) \to \infty$ | $f(x) \to +\infty$ | $f(x) \to -\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x \to x_0$ | $\forall \varepsilon > 0$,<br>$\exists \delta > 0$,<br>使当$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$时,<br>即有$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ | | | |
| $x \to x_0^+$ | | | | |
| $x \to x_0^-$ | | | | |
| $x \to \infty$ | | $\forall M > 0$,<br>$\exists X > 0$,<br>使当$\lvert x \rvert > X$时,<br>即有$\lvert f(x) \rvert > M$ | | |
| $x \to +\infty$ | | | | |
| $x \to -\infty$ | | | | |

第二部分作业

一、选择题

1.函数$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to 0$时，有(　　　)

$A.f(x)$与$x$是等价无穷小，$B.f(x)$与$x$是同阶但非等价无穷小

$C.f(x)$是比$x$高阶的无穷小，$D.f(x)$是比$x$低阶的无穷小

2. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,则$f(\ln x)$的定义域是(　　　)

$A.x\le 0, B.x\ge 0, C.[1,e], D.[0,1]$

3.$\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$为(　　　)

$A.0, B.1, C.2, D.$ 不存在

4.设$f(x)=x\sin x$, 则$f(x)$(　　　)

$A.$在$(-\infty,+\infty)$上有界，$B.$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界

$C.$当$x\to\infty$时无穷大，$D.$ 当$x\to\infty$ 时存在有限的极限值

5. 当$x\to 0$时$e^{7x}-e^{2x}$为$x$ 的(　　　)

$A.$高阶无穷小，$B.$ 低阶无穷小

$C.$同阶但不是等价无穷小，$D.$ 等价无穷小

6.若$x\to 0$时, $f(x)$为无穷小量, 且是比$x^2$高阶的无穷小, 则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=$(
)

$A.0, B.1, C.\infty, D.\frac{1}{2}$

7.设$f(x-1)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \ln(x+1), & x<0\end{cases}$,则$f(x)$在$x=-1$处(　　)

$A.$ 极限存在，但不连续，$B.$连续，$C.$右连续，但不左连续，$D.$左连续，但不右连续

8.设$f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\frac{1}{x}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　)

$A.$ 可去间断点,$B.$跳跃间断点,$C.$无穷间断点,$D.$振荡间断点

9.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1+x}}}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{x^2(1-\cos x)}{\sin^4 x}, & x>0\end{cases}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　)

$A.$ 连续点，$B.$第一类可去间断点，$C.$第一类不可去间断点，$D.$第二类间断点

10.$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$,则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是(　　)

$A.$ 初等函数，$B.$处处有定义的函数，$C.$处处有极限的函数，$D.$处处连续的函数

11.若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，下列哪一个条件能推出$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在(　　)

$A.\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$存在, $B.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$存在;

$C.\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+b_n|$存在, $D.\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-7b_n)$存在.

12. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$,则当$x\to 1$时，(　　)

$A.\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, $B.\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$;

$C.f(x)\to\infty(x\to 1)$ , $D.f(x)$不存在极限，也不趋于$\infty$.

13.当$x \to 0$时，与$x$等价的无穷小量是(　　　)

$A.\sin x - x^2$ , $B.x - \sin x$;

$C.x^2 - \sin x$ , $D.1 - \cos x$.

14.当$x \to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$是与$\cos x - 1$等价的无穷小量，则

常数$a =$ (　　　)

$A.\frac{3}{2}, B.\frac{2}{3}, C.-\frac{3}{2}, D.-\frac{2}{3}$

解：$1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a$

15.若$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b\right) = 0$,则(　　　)

$A.a = 1, b = 1, B.a = -1, b = 1;$

$C.a = 1, b = -1, D.a = -1, b = -1$

二、解答题

1.设$f(x) = \begin{cases} x^2, & \frac{1}{e} < x < 1 \\ \ln x, & 1 \le x < e \end{cases}$, $g(x) = e^x$,求$f[g(x)]$及$f[g(\frac{1}{2})]$

‘

2.求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{15}(3x+1)^{25}}{(3x-1)^{40}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$

(4)已知$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，求$a$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(2x+1)-\ln 2x]$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+ax}-x)$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - x}$

(10)已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$,求$a$和$b$

(11)设$x_1=1, x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}, (n=1,2,\ldots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

(12).求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$.

(13)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

(14) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$,试确定$a,b$的值

(15)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\ln(1+x^2)}$

(16)$\lim\limits_{x\to0}(ax+e^{bx})^{\frac{1}{x}}$

(17)求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

3. $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\sin x$,讨论$f(g(x))$的连续性.

4.讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，判断其类型

5.证明方程$\sin x+x+1=0$,在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

6.已知$Rt\Delta ABC$中，直角边$AC,BC$ 的长度分别为20, 15,动点$P$从$C$出发，沿三角形边按$C\longrightarrow B\longrightarrow A$方向移动，动点$Q$从$C$出发，沿三角形边界按$C\longrightarrow A\longrightarrow B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点$Q$移动的速度是点$P$移动的速度的2倍.设动点$P$移动的距离为$x$,$\Delta CPQ$ 的面积为$y$,试求$y$与$x$之间的函数关系.

‘

三、选择题

1.设$f(x)$在$(0,2a)$上连续，且$f(0)=f(2a)$,则在$[0,a]$上至少存在一点$\varepsilon$, 使得$f(\varepsilon)=f(\varepsilon+a)$.

2.设$f(x)$在点$x=0$连续，若$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$

3.讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$的连续性

.

4.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{个}} = 1$

6.根据定义证明：函数$y=\frac{1+2x}{x}$为当$x\to 0$时的无穷大.问$x$应满足什么条件，能使$|y|>10^4$