第八章
向量代数与空间解析几何

第一部分 向量代数

第二部分 空间解析几何

在三维空间中:

空间形式 — **点, 线, 面**

↓↑

数量关系 — **坐标, 方程（组）**

基本方法 — **坐标法; 向量法**

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

二、向量的线性运算

三、空间直角坐标系

四、利用坐标作向量的线性运算

五、向量的模、方向角、投影

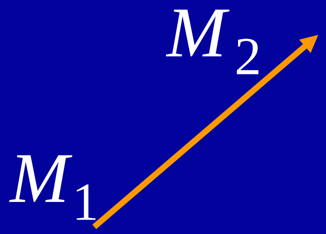
一、向量的概念

向量：既有大小，又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法： 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$.

向量的模： 向量的大小， 记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$.

自由向量： 与起点无关的向量.



单位向量： 模为 1 的向量，记作 $\vec{e}$ 或 $\boldsymbol{e}$.

零向量： 模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$，或 $\mathbf{0}$.

起点与终点重合，方向是任意的

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$大小相等, 方向相同, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$相等, 记作$\vec{a}=\vec{b}$;

与$\vec{a}$的模相同, 但方向相反的向量称为$\vec{a}$的负向量, 记作 $-\vec{a}$;

向量的平行

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$平行, 记作 $\vec{a}/\!/\vec{b}$;

零向量与任何向量平行

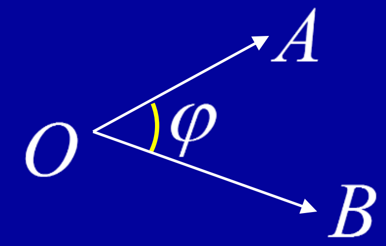
向量的共线、共面:

(向量平行也叫共线)

向量的夹角

设有两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\varphi$



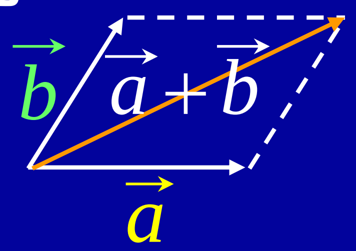
向量的垂直　　$\vec{a}\perp\vec{b}$

零向量与任何向量垂直

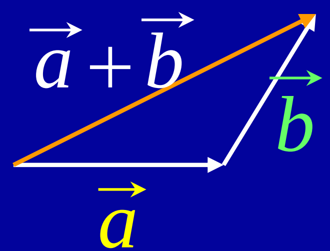
二、向量的线性运算

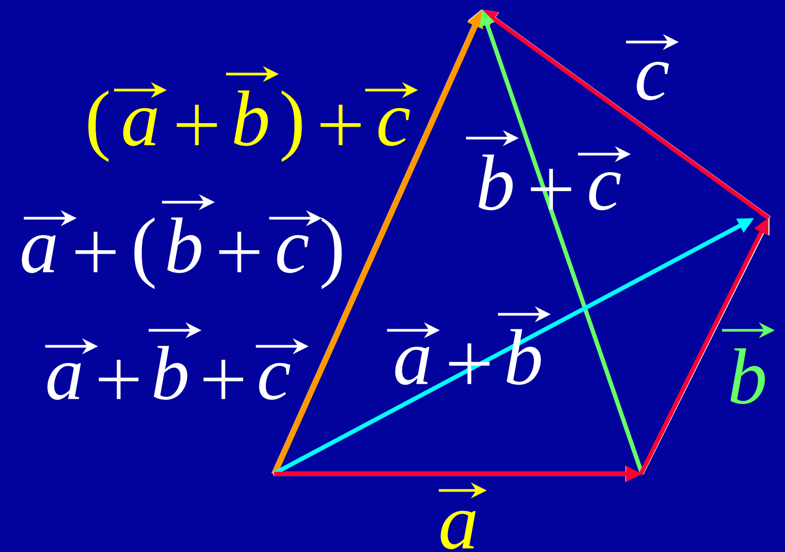
1. 向量的加法

平行四边形法则:



三角形法则:



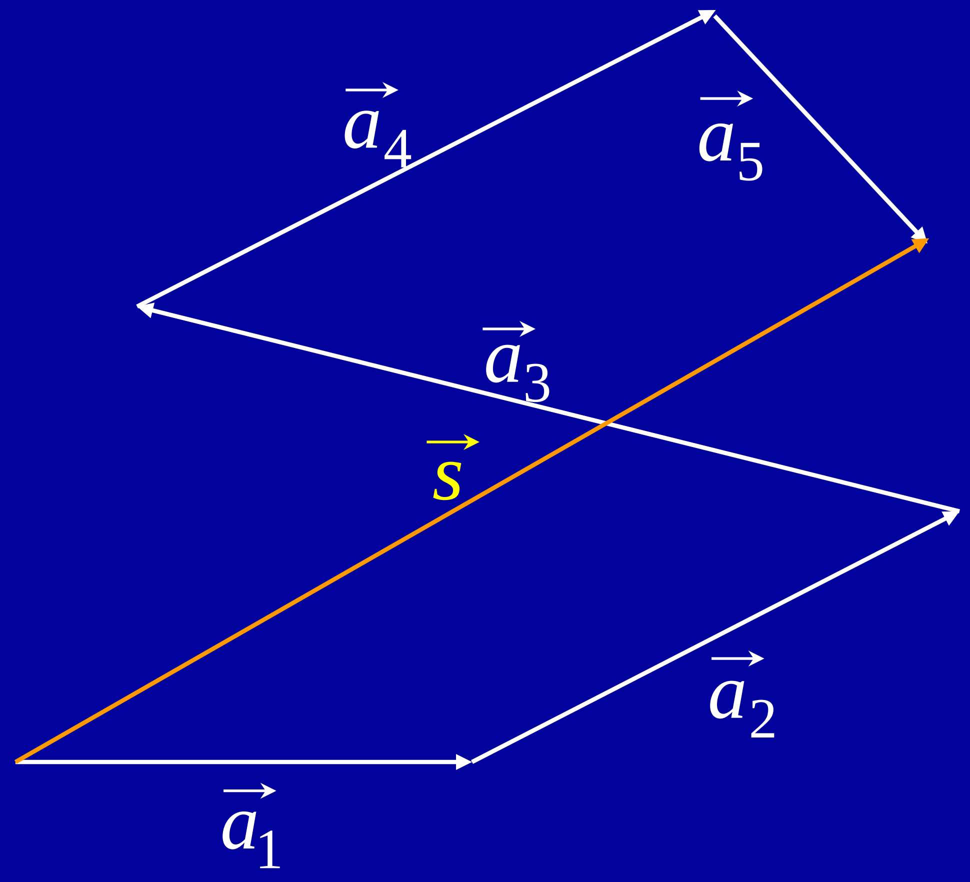


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$



2. 向量的减法

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

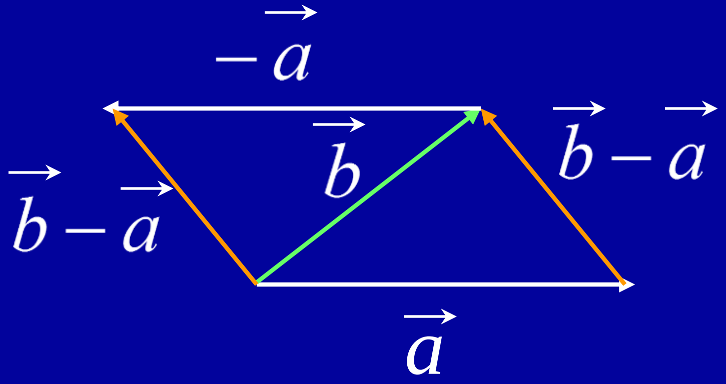
特别当 $\vec{b}=\vec{a}$ 时, 有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



3. 向量与数的乘法

λ 是一个数， λ 与 $\vec{a}$ 的乘积， 记 $\lambda\vec{a}$. **规定为向量**

$\lambda > 0$时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向,

$\lambda < 0$时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向,

$\lambda = 0$时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$. **方向任意**

模： $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$ $\quad 1\vec{a} = \vec{a} \quad -1\vec{a} = -\vec{a}$;

运算律：结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ $\quad \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

向量线性运算

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_a$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证: “$\Longrightarrow$”. 设 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$，取 $\lambda = \pm \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 同向时取正号反向时取负号，则 $\vec{b}$ 与 $\lambda \vec{a}$ 同向，且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$，则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

而 $|\vec{a}| \neq 0$，故 $|\lambda - \mu| = 0$，即 $\lambda = \mu$.

“$\Longleftarrow$” 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 则

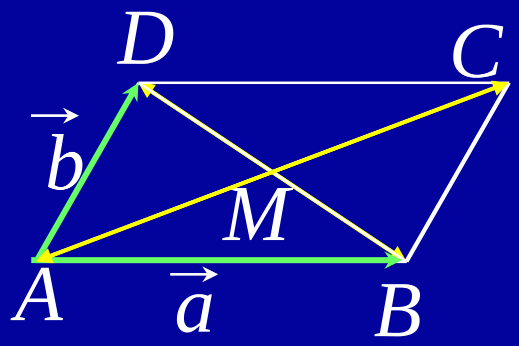
$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \lambda=0 \text{ 时, } \vec{b}=\vec{0} \\ \text{当 } \lambda>0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 同向} \\ \text{当 } \lambda<0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 反向}\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

例1. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

解:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$$



$$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MB}=-\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

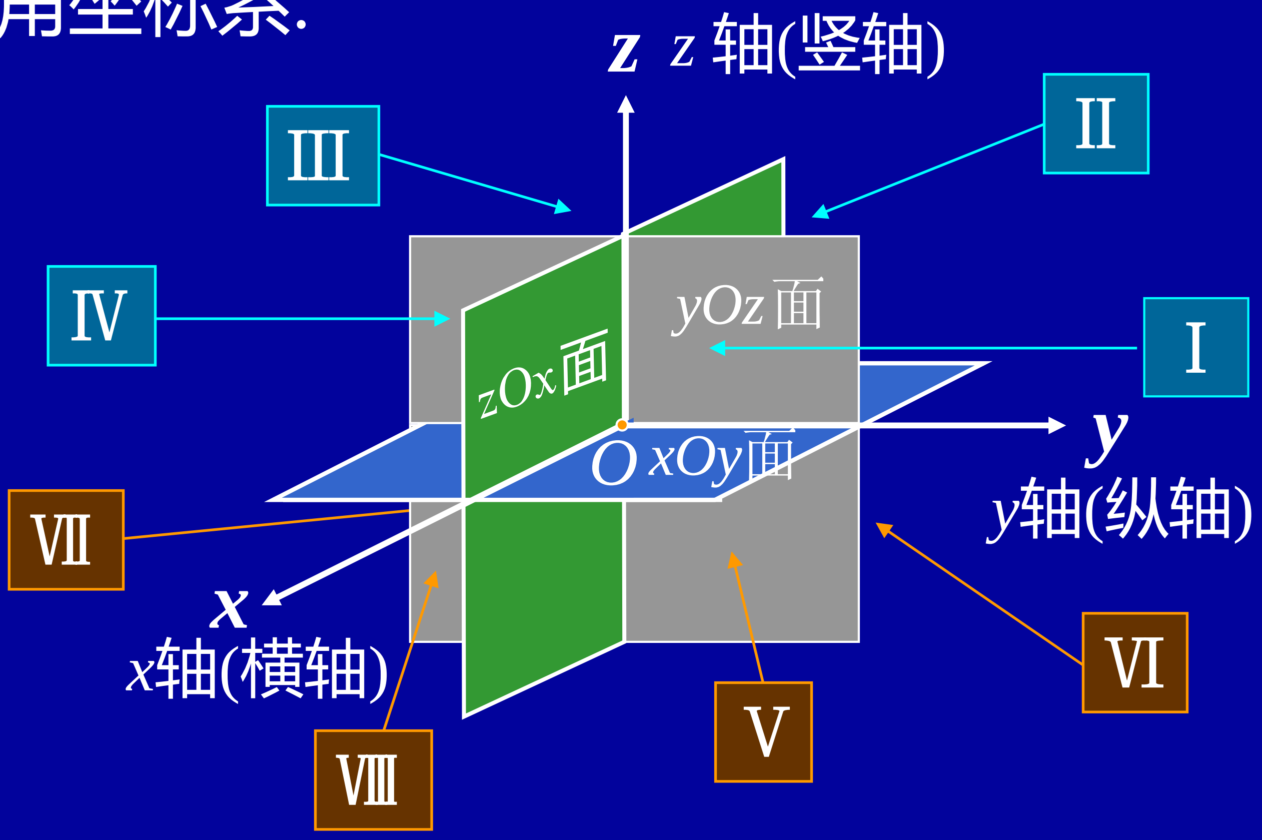
$$\overrightarrow{MC}=\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

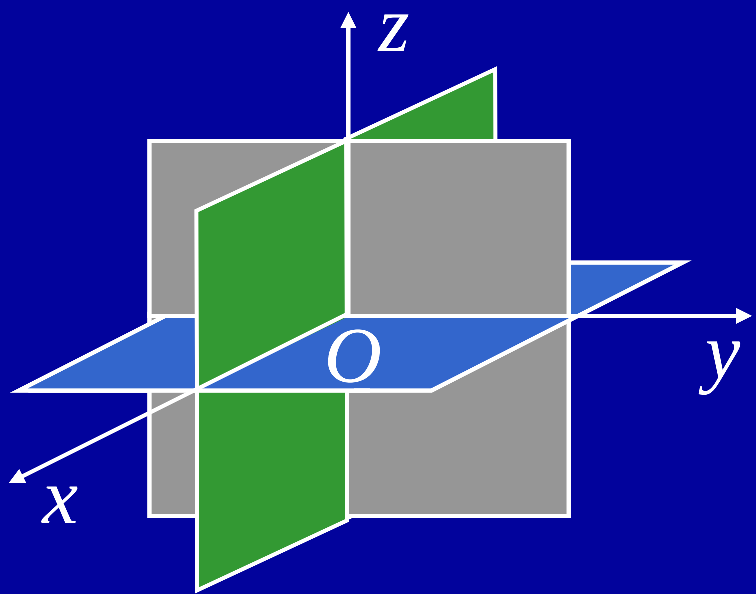
三、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 O ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)





坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

坐标面：

xOy面 $\leftrightarrow z=0$

yOz面 $\leftrightarrow x=0$

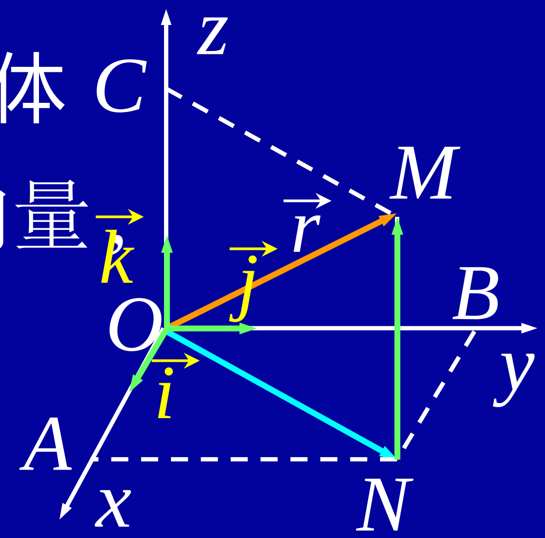
zOx面 $\leftrightarrow y=0$

2. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

$\overrightarrow{OM}$为对角线，三个坐标轴为棱的长方体

以 $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ 分别表示 $x\,,y\,,z$ 轴上的单位向量



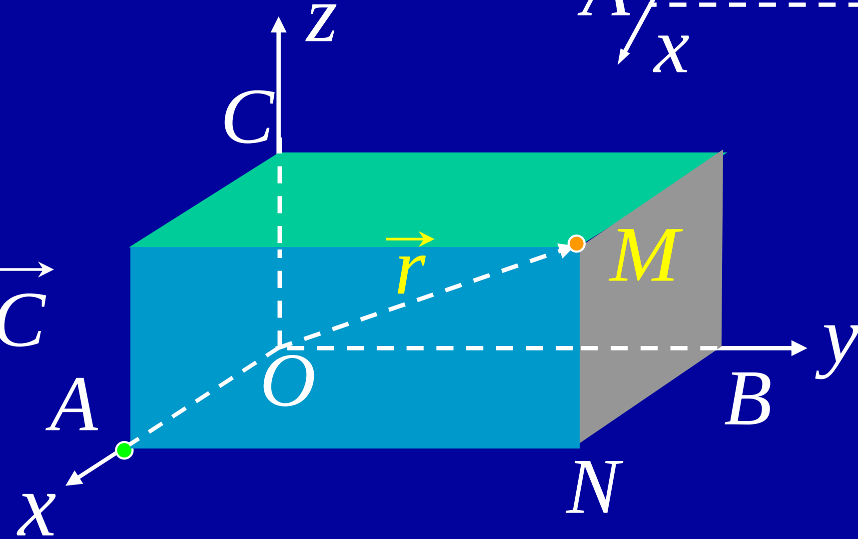
$$\overrightarrow{OA}=x\,\vec{i},$$
$$\overrightarrow{OB}=y\,\vec{j},$$
$$\overrightarrow{OC}=z\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

记

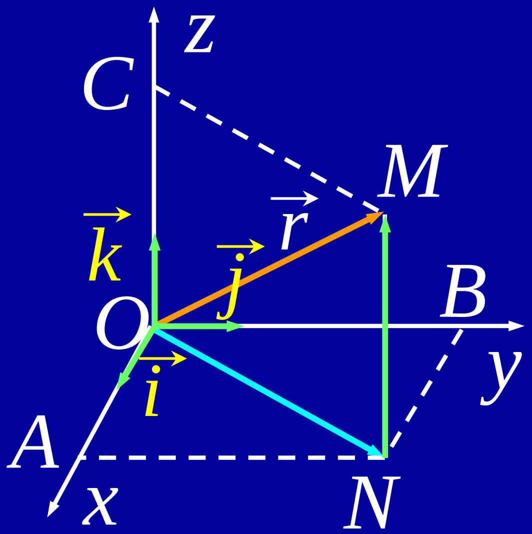
$$=(x,y,z)$$



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\Big\downarrow \quad \overrightarrow{OA} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OB} = y\vec{j},\ \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \overset{\text{记}}{=} (x, y, z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**，x, y, z 称为向量 $\vec{r}$ 的坐标 .

在直角坐标系下

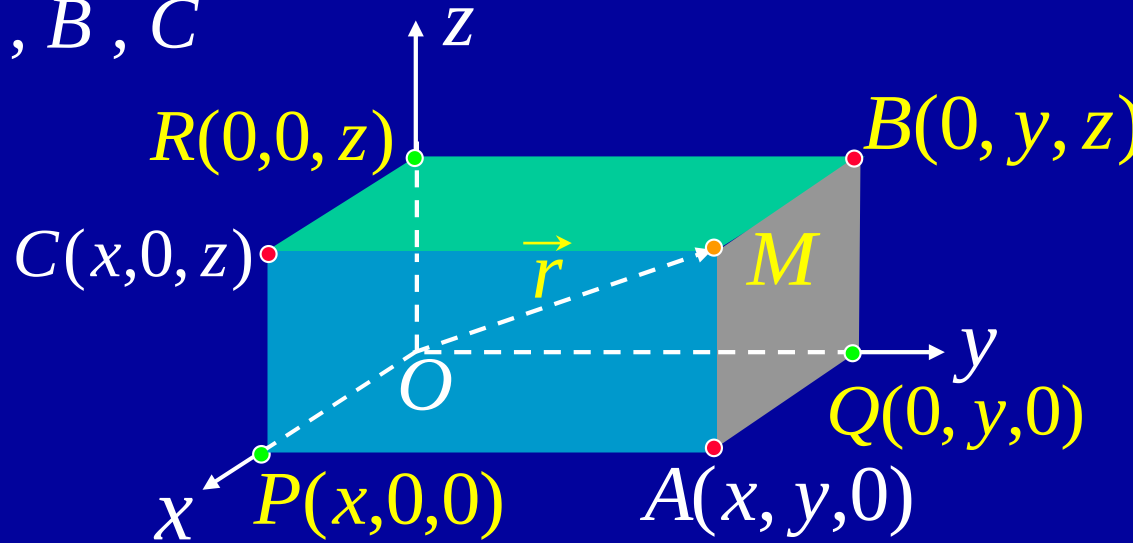
点 $M \overset{1\text{--}1}{\longleftrightarrow}$ 有序数组 $(x, y, z) \overset{1\text{--}1}{\longleftrightarrow}$ 向径 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

(称为点 M 的**坐标，也称为向量** $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记

特殊点的坐标: $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$

原点 $O(0,0,0)$；坐标轴上的点 P, Q, R；

坐标面上的点 A, B, C



四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数,则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}//\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z \end{aligned}}$$

例2. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2),\ \vec{b}=(-1,1,-2)$.

解: 2×① - 3×②，得

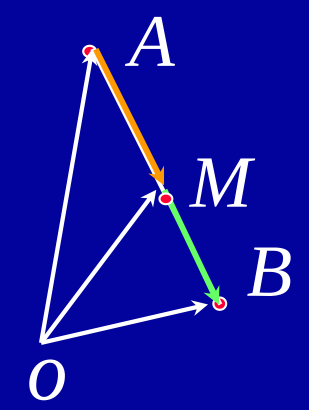
$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

例3. 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$, 在AB所在直线上求一点 M, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

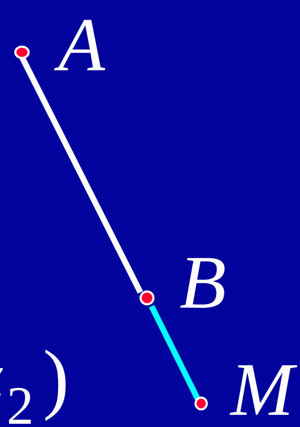
解: 设 M 的坐标为(x, y, z), 如图所示



$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \end{aligned} \Bigg\downarrow$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

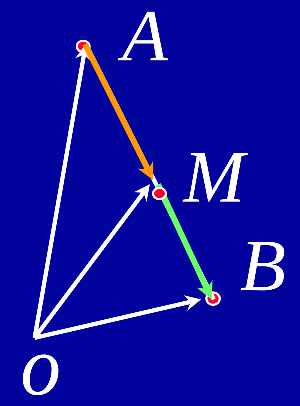
说明: 由

$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

得**定比分点公式:**

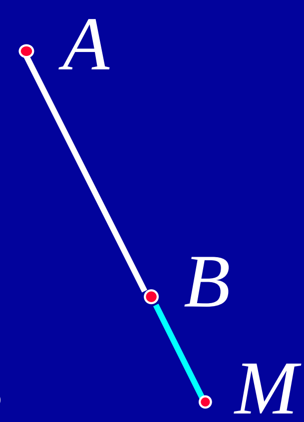
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$



当$\lambda = 1$时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得

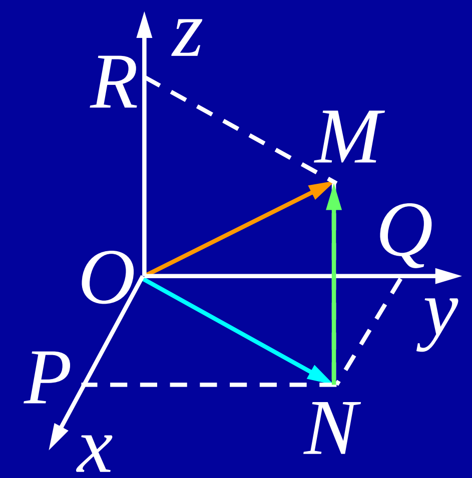
中点公式:



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式



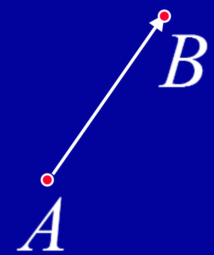
设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$, 因



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例4. 求证以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形 .

证:

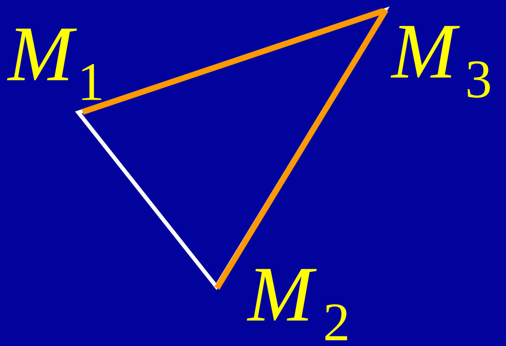
$$\because \ |M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \ |M_2M_3| = |M_1M_3|$$

即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形 .



例5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

解: 设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 xOy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

提示:

(1) 设动点为 $M(x,y,0)$, 利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0,\ 且\ z=0$$

(2) 设动点为 $M(x,y,z)$, 利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例6. 两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 同方向单位向量 $\vec{e}$.

解:

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

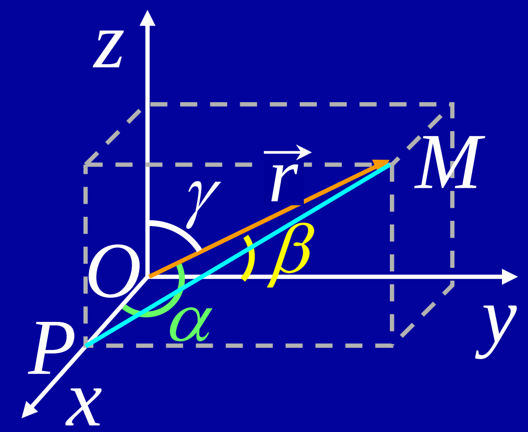
2. 方向角与方向余弦

定义向量与轴, 轴与轴的夹角 .

给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ 与三坐标轴的夹角 α,β,γ

为其**方向角**.

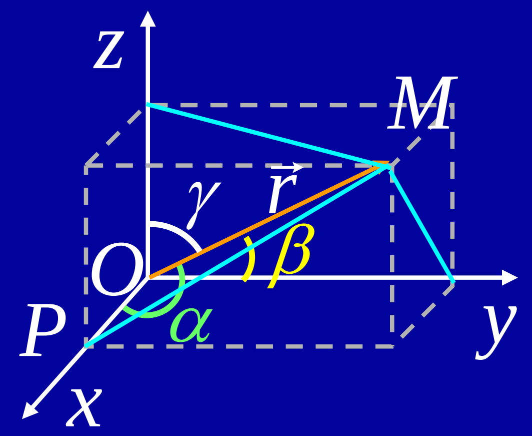
方向角的余弦称为其**方向余弦**.



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量 :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

例7. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角 .

解:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$$

$$= (-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\quad \cos\beta = \frac{1}{2},\quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3},\quad \beta = \frac{\pi}{3},\quad \gamma = \frac{3\pi}{4}$$

例8. 设点 A 位于第一卦限, 向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}|=6$,求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}, \beta=\dfrac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限 , 故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$, 于是

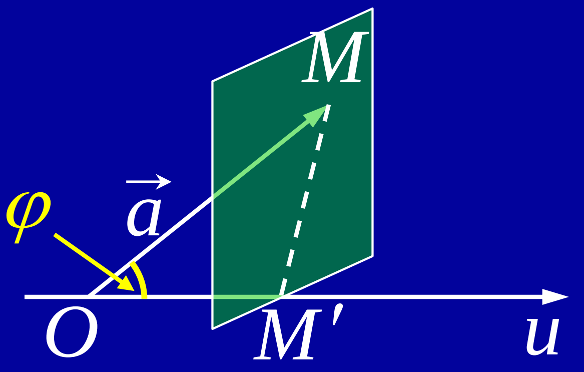
$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\,\vec{e}_{OA}=6(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$=6(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})=(3,3\sqrt{2},3)$$

故点 A 的坐标为 $(3,3\sqrt{2},3)$.

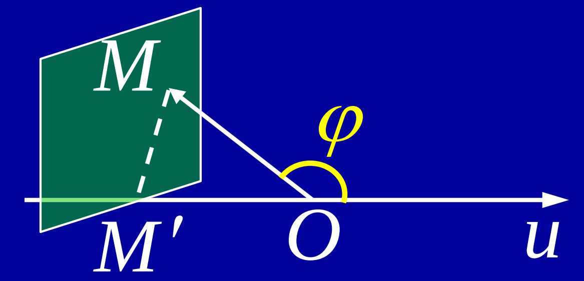
3. 向量在轴上的投影

设 $\vec{a}$ 与 u 轴正向的夹角为 φ，



则 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\varphi$

记作 $\mathrm{Prj}_u\,\vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$，即



$$(\vec{a})_u = |\vec{a}|\cos\varphi$$

例如，$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 在坐标轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z

投影的性质

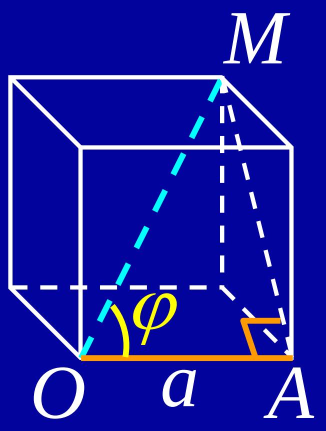
1) $(\vec{a}+\vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u$

2) $(\lambda\vec{a})_u = \lambda(\vec{a})_u$ （λ 为实数）

例9. 设立方体的一条对角线为OM, 一条棱为 OA, 且 $|OA| = a$, 求$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影.

解: 如图所示, 记 $\angle MOA = \varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\therefore \quad \mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = \left| \overrightarrow{OA} \right| \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

作业 P13 5, 15, 17

备用题

1. 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$

求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解: 因 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$$

故在 x 轴上的投影为 $a_x=13$

在 y 轴上的分向量为 $a_y\vec{j}=7\vec{j}$

2. 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$, 求以向量 $\vec{m},\vec{n}$ 为边的平行四边形的对角线的长度 .

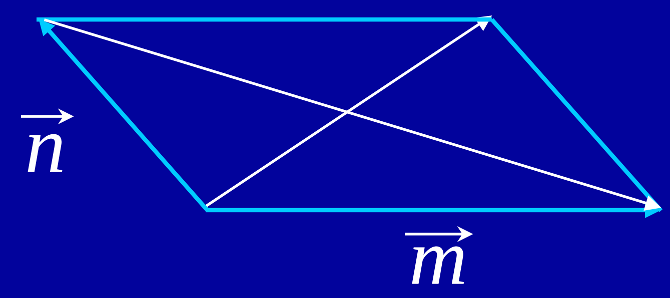
解 : 对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|,\ |\vec{m}-\vec{n}|$

$$\because\quad \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$$

$$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$$

$$\therefore\quad |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$$

$$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$$



该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$