4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2 dt$

解:（此题超出教材大纲的要求，广义积分的收敛性及函数极限的$Cauchy$准则)令$t^2=u$，则

原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$

由广义积分收敛判别法，广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$收敛

于是变上限函数$\int_1^{x}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$当$x\to+\infty$有极限，由函数有极限的$Cauchy$准则，知道

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$当$X_1,X_2>X$时

$\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du\right|<\varepsilon$

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2 dt=0$