第三章函数的连续性

连续函数是分析数学中一类重要的函数，从函数的图像我们看到有些函数的图形可以用连绵不断的曲线表示,有些则不行,例如Dirichlet函数.我们从函数定义域上某点处的极限开始研究函数的性态，结果我们发现：当给定自变量x_0一个改变量Δx（可正可负）让$x_0+\Delta x$仍然属于定义域，相应的函数自然有一个改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 若$\Delta x\to 0$时，$\Delta y$也趋于零，从几何的角度,可以看到这样函数的图形是不会断开的.

第一节连续函数的概念

一、函数在一点处的连续性

定义3.1.1　设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，给定自变量一个增量Δx（可正可负）使得$x_0+\Delta x\in U(x_0)$.若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数$y=f(x)$在点x_0处是连续的，否则称为间断.

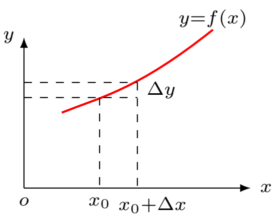

图3.1.1

例3.1.1　$y=\sin x$在其定义区间上任意点处连续.

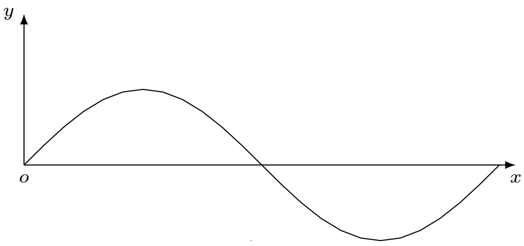

图3.1.2

解: $\forall x_0\in\mathbb{R},\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}\Longrightarrow 0\le|\Delta y|\le|\Delta x|$易知$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$由定义知道$y=\sin x$在其定义区间上任意点$x_0$处都连续.

例3.1.2 $y=sgn x$在点$x_0=0$处不连续.

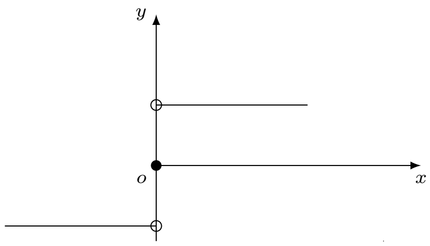

图3.1.3

解：当给定自变量的改变量$\Delta x>0$时，$\Delta y=sgn(0+\Delta x)-0=1$,因此$\Delta y$不趋于零，所以在$x_0=0$处不连续.

如果令 $x_0+\Delta x=x\Longrightarrow\Delta y=f(x)-f(x_0)$于是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$这与我们前面定义函数在点$x_0$处的极限的概念几乎一样，只不过极限值等于函数值而已.于是我们有如下连续的定义.

定义3.1.2 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数在$x_0$处连续.

这个定义的好处在于函数在点x_0处连续当且仅当满足以下三条：

i)函数$y=f(x)$在点x_0处有定义；

ii)函数在该点处有极限，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

iii)极限值等于函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

如果用函数极限的$\varepsilon-\delta$语言来叙述函数$y=f(x)$在x_0处连续，就是：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$x\in U(x_0,\delta)$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

注意到$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$,所以函数$y=f(x)$ 在x_0处连续，意味着函数符号与极限符号可以交换次序，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=f(x_0)$.

由命题2.3.1，我们有：

定理3.1.1 函数$y=f(x)$在点x_0处连续充分必要条件是：$f(x_0^+)=f(x_0)=f(x_0^-)$.

这时我们也称函数f在该点既左连续又右连续，所谓左连续指：$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 同理可以理解右连续.由这个定义我们看到：取整函数$y=[x]$在整点处右连续，但不左连续.

例3.1.3 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geq 0\\ x-2, & x<0\end{cases}$在点$x=0$处的连续性.

解：$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x+2=f(0)=2$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x-2=-2\neq f(0)$

,则$f(x)$在$x=0$处右连续而不左连续，所以不连续.

二、间断及其间断点的类型

定义3.1.3 函数$f(x)$在点x_0处不连续,我们称其在该点处间断，x_0称为间断点.

我们注意如下函数：$y=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x}, & x\neq 0\\ b, & x=0\end{cases}$, $y=\frac{1}{x}, y=\sin\frac{1}{x}, y=sgnx$，不难发现$x_0=0$是这些函数的间断点，但这些函数在这一点间断各有特点.为此我们将函数的间断点进行分类. 一般地我们将函数的间断点分为两类：

若$f(x_0^+), f(x_0^+)$都存在，这样的间断点我们称其为第一类间断点. 例如符号函数$sgnx$和取整函数$[x]$的间断点就是第一类间断点.

若$f(x_0^-), f(x_0^+)$至少有一个不存在，这样的间断点我们称为第二类间断点. 例如$y=\frac{1}{x}$的间断点$x_0=0$

如果按照函数在一点处连续必须满足的三个条件对间断点进行分类　，则有如下结果：

1.可去间断点:若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$,则称$x_0$ 为可去间断点，因为我们只要补充函数值$f(x_0)=A$就去掉了间断点,这种方法也称为函数的连续延拓,即当函数$y=f(x)$在区间I_1 上连续,在x_0处间断，但有极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$,那么令

$F(x)=\begin{cases}f(x) & ,x\in I_1\\ a & ,x=x_0\end{cases}$,则$F(x)$ 在$I_2=I_1\bigcup\{x_0\}$上连续,我们称$F(x)$为$f(x)$ 的延拓.

例如对函数$y=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x}, & x\neq 0\\ b, & x=0\end{cases}$我们取$b=a$结果函数在点$x_0=0$ 处连续.

2.跳跃间断点：若$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，则称x_0为跳跃间断点，例如取整函数$y=[x]$整点都是其跳跃间断点.

3.无穷间断点：如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\infty$我们称这样的间断点为无穷间断，例如$y=\frac{1}{x}$的间断点$x_0=0$是无穷间断点.

4.振荡间断点：如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq\infty$,但$f(x)$在$U(x_0,\delta)$有界. 例如$f(x)=\sin\frac{1}{x}, x=0$就是振荡间断点.

三、区间上的连续函数

若函数$f(x)$在区间I 上任意点处都连续，则称函数$f(x)$在I 上连续，我们记作$f(x)\in C(I)$. 当$I=[a,b]$，则要求$f(x)\in C(a,b)$且在$x=a$处右连续，在$x=b$处左连续，即$f(a^+)=f(a), f(b^-)=f(b)$

*例3.1.4 证明（Riemanna)黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}, p,q\text{为正整数}, p/q\text{为既约真分数}\\ 1, & x=0,\\ 0, & x\text{ 是}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$$

在$(0,1)$内任何无理点处连续，有理点处间断.

证明: 在$x=0$ 处，对于$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$总存在无理数$x$,当$|x-0|<\delta$ 时, 有$|R(x)-R(0)|=1>\frac{1}{2}$ 故不连续.

在任意有理点$x_0=\frac{p}{q}$处,取$\varepsilon_0<\frac{1}{q}$,$\forall\delta>0$总有无理数$x$ 当$|x-\frac{p}{q}|<\delta$ 时有$|R(x)-R(\frac{p}{q})|=\frac{1}{q}>\varepsilon_0$ 故不

连续.

若x 是无理点,则$\forall\varepsilon > 0$(不妨设$\varepsilon < \frac{1}{2}$),满足$\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ 的正数q 显然只有有限个(至少有一个,如$q = 2$),从而使$R(x) \geq \varepsilon$的有理数$x \in (0,1)$ 只有有限个(至少有一个,如$\frac{1}{2}$),设为$x_1, x_2, \cdots, x_n$,取$\delta = \min\{|x_1 - x|, |x_2 - x|, \cdots, |x_n - x|\}$,则$\forall y \in U(x,\delta) \subset (0,1)$当$y$ 为有理数时有$R(x) < \varepsilon$,当y 为无理数时$R(x) = 0$,于是$|R(y) - R(x)| < \varepsilon$ 故连续.

习题3.1

1 .利用连续的定义证明下列函数的连续性:

1)$f(x)=x^2$; 2)$f(x)=\cos x$; $f(x)=|x|$

2.研究下列函数在给定点处的连续性:

1)$f(x)=[x],x$ 为整数点, 2)$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}},x=0$

3)$f(x)=sgn(\sin x),x\in\mathbb{R}$, 4)$f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x},(\alpha>0)x=0$

3.指出下列函数的间断点及其类型:

1)$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$; 2)$f(x)=\frac{x}{\sin x}$;

3)$f(x)=sgn(\sin\frac{\pi}{x})$; 4)$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;

5)$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\leq 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$; 6)$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q}\\ -x, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$;

4.试分别举出具有以下性质的函数$f(x)$的例子:

1)$x=0,\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n}\cdots$是$f(x)$ 的间断点;

2)$f(x)$在$\mathbb{R}$上处处不连续，但$|f(x)|$在$\mathbb{R}$上处处连续;

3) $f(x)$在$\mathbb{R}$上仅在一个定点x_0处连续，在$\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$上间断.

5.当$x\neq 0$时,$f(x)\equiv g(x)$,而$f(0)\neq g(0)$,证明:f与g至多有一个函数在$x=0$处连续.

6.设$f(x)$是区间I上的单调函数,证明:若$x_0\in I$是f的间断点,则x_0是第一类间断点.

7.设$f(x)\in C[a,b]$,且$\forall r_1,r_2\in[a,b]\bigcap\mathbf{Q}$,当$r_1<r_2$时总有$f(r_1)\leq f(r_2)$, 证明:函数$f$在$[a,b]$上单调不减.

8.讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，判断其类型.

9.设

$$f(x)=\begin{cases}x & ,x\in Q\\ 0 & ,x\in\mathbb{R}/Q\end{cases}$$

证明：(1) $f(x)$在$x=0$处连续;

(2) $f(x)$在非零的x处都不连续.

第二节连续函数的性质

一、连续函数的局部性质

注意到函数连续的特征是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$因此由函数在$x_0$ 处的极限性质我们有

定理3. 2.1 (局部有界性)若函数$f(x)$在点x_0处连续，则存在$U(x_0,\delta)$,当$x\in U(x_0,\delta), f(x)$有界.

推论：若函数$f(x)$在点x_0处连续,则$\forall r\in(0,|f(x_0)|)$ 存在$U(x_0,\delta)$ 使得$\forall x\in U(x_0,\delta)|f(x)|>r$

定理3. 2.2 (保号性)若$f(x_0)>0,(<0)$,且$f(x)$在x_0处连续，则存在$\delta>0$,当$x\in U(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0(<0)$.

定理3. 2.3 (四则运算) 若函数$f(x),g(x)$在x_0 处连续,则$f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), f(x)/g(x)(g(x_0)\neq 0)$在$x_0$处连续.

定理3. 2.4 若函数$y=f(u)$在u_0处连续，$u=\varphi(x)$在x_0处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数$y=f(g(x))$在x_0处连续.

即$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))=f(g(\lim\limits_{x\to x_0} x))=f(g(x_0))$

注:若复合函数$f\circ g$的内函数g当$x\to x_0$时极限为a,若$a\neq g(x_0)$或在x_0处无定义(即x_0为g 的可去间断点)而外函数f 在$u=a$处连续，则我们仍然可以用上述定理来求复合函数的极限，即有$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$

注：上式不仅对$x\to x_0$成立，而且对于$x\to+\infty, x\to-\infty$或$x\to x_0^{\pm}$等类型的极限也是成立的.

例3.2.1 求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}$.

解：(1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(2-\frac{\sin x}{x})}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}$.

注意到函数在一点处连续是其在该点处极限存在的特殊情况，因此上述定理的证明与函数极限一节相应定理如出一辙，只要将极限值A换成函数值$f(x_0)$即可，因此连续函数在一点处相应的局部性质：

一个定义：$f(x)\to f(x_0)(x\to x_0)$;

两个准则:夹逼准则,单调有界准则;

三个性质:唯一性、局部有界性、局部保号性；

四类运算：四则运算、复合运算、极限号与函数符号交换次序、无穷小及等式运算；

五个特征：1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow f(x)=f(x_0)+\circ(1)(x\in U(x_0,\delta))$;

2° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$;

3° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow \forall x_{n_k}\subset U(x_0)\subset D_f, x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$, 恒有数列$f(x_{n_k})\to f(x_0)(k\to\infty)$;

4°(Cauchy 准则)$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x'-x_0|<\delta$ 恒有$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon$;

5°(Heine归结原理)$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow\forall\{x_n\}\subset U(x_0), x_n\to x_0(n\to\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

有关这些内容的详细论述请读者给出.

二、闭区间上连续函数的基本性质

若$f(x)$在数集D上有定义，$x_0 \in D$,使得$\forall x \in D$有$f(x) \leq f(x_0)$或$f(x) \geq f(x_0)$, 则称$f(x_0)$为$f(x)$在D上的最大值或最小值.

定理3. 2.5（最大值和最小值定理）设函数$y = f(x)$在区间$[a,b]$上连续，即$f(x) \in C[a,b]$,则在$[a,b]$上至少存在两点x_1, x_2,使得$\forall x \in [a,b]$，我们有$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$

这个定理的证明见实数理论一章.

推论3. 2.1 若$f(x) \in C[a,b]$,则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

注：开区间上连续的函数未必是有界的，例如函数$f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,1)$, 不仅达不到最大值也达不到最小值，而且还是无界的.

注：如果一个函数在闭区间$[a,b]$达不到最值，那么该函数一定是不连续的.

注：闭区间上的连续性是函数达到最值的一个充分条件，区间上不连续的函数也可能达到最小值和最大值，例如符号函数，Dirichlet函数.

定理3. 2. 6 (根的存在定理、零点存在定理)若$f(x) \in C[a,b], f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$使得$f(\xi) = 0$.

该定理表明：若函数$f(x) \in C[a,b]$ 且在端点处异号，则曲线至少经过x轴一次，几何解释见图3.2.1.

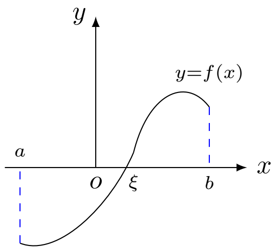

图3.2.1

定理3. 2.7（介值性定理）若$f(x) \in C[a,b]$且$f(a) \neq f(b)$, 则对于介于$f(a)$和$f(b)$之间的任意数μ，至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi) = \mu$.

证明: 令$F(x) = f(x) - \mu \Longrightarrow F(x) \in C[a,b]$且$F(a) \cdot F(b) < 0$,由零点存在定理(定理3.2. 6),至少存在一点$\xi \in (a,b)$ 使得$F(\xi) = 0$,即$f(\xi) = \mu$

注：该定理表明：平行于x轴的任意一条直线$y = \mu, \mu$ 只要μ介于$f(a)$与$f(b)$之间，则与曲线$y = f(x)$至少有一个交点,见图3.2.2.

注: 若$f(x)$在区间I 上连续,且不是常函数,则像集$f(I)$也是一个区间,特别当$I = [a,b]$ $f([a,b]) = [m,M]$其中m, M 分别是函数$f(x)$在$[a,b]$ 上的最小值和最大值.

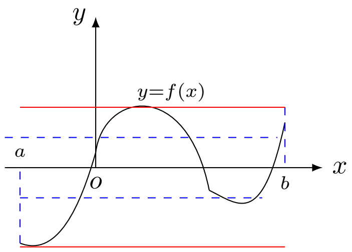

图3.2.2

例3.2.2 证明：若$f(x) \in C(-\infty,+\infty)$,且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明：因为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，所以对于$\varepsilon = 1$,存在$X > 0$,当$|x| > X$ 时，$|f(x) - A| < 1$,显然$f(x) \in C[-X,X]$, $[-X,X] \subset (-\infty,+\infty)$,由最值性，存在$M_1 > 0$使得$\forall x \in [-X,X]$, $|f(x)| \le M_1$ 取$M = \max\{|A|+1, M_1\}$,则$\forall x \in (-\infty,+\infty)$ 我们有$|f(x)| \le M$.

例3.2.3 $f(x) \in C[0,1], \forall x \in [0,1], 0 \le f(x) \le 1$,证明：至少存在一点$\xi \in [0,1]$ 使得$f(\xi) = \xi$

证明：令$F(x) = f(x) - x$，由题设$F(x) \in C[0,1], F(0) = f(0) \ge 0, F(1) = f(1) - 1 \le 0$

若$F(0) = F(1) = 0$,则取$\xi = 0,1$即可

若不成立，则$F(0) > 0, F(1) < 0$,由零点存在定理，至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使得$F(\xi) = 0$, 即$f(\xi) = \xi$.

例3.2.4 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$且$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$,证明：至少存在一点ξ使得$f(\xi) + \xi = 0$

证明：令$F(x) = f(x) + x$，即证明$F(x)$的零点存在. 问题转化成在$(-\infty,+\infty)$上找出一个闭区间，然后在此闭区间上利用零点存在定理.注意到

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 + \frac{f(x)}{x}) > 0$$

由保号性存在$X_1 > 0$，当$x > X_1, F(x) > 0$ 那么$F(X_1 + 1) > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} x(1 + \frac{f(x)}{x}) < 0$$

由保号性存在$X_2 > 0$，当$x < -X_2, F(x) < 0$ 那么$F(-X_2 - 1) < 0$,考虑到$F(x) \in C[-X_2 - 1, X_1 + 1]$，由零点存在定理至少存在一点$\xi \in (-X_2 - 1, X_1 + 1) \subset (-\infty,+\infty)$使得$F(\xi) = 0$.

例3.2.5设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0) = f(1)$,证明：对于任意自然数n ,都必然存在相应的点$x_n \in [0,1]$,使得$f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$

证明：令$g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$,于是$g(x) \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$必然达到最大值与最小值，不妨设最小值为$m$最大值为$M$，则$m \le g(\frac{k}{n}) \le M (k = 0, 1, \ldots, n-1)$,那么

$m \le \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) \le M$由介值定理一定存在$x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \subset [0,1]$,使得

$g(x_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$而

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left[f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k+1}{n})\right] = f(0) - f(1) = 0$, 故$g(x_n) = 0$,即$f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$

三、反函数的连续性

定理3.2.8 若函数$y=f(x)$在$[a,b]$严格单调连续，则其反函数

$x=f^{-1}(y)$存在，且在相应的区间$[f(a),f(b)]$或$[f(b),f(a)]$上也严格单调且连续.

证明: 不妨设$f(x)$严格单调递增，则反函数$x=f^{-1}(y)$的存在性和严格单调性的证明见命题1.2.3, $\forall y_0\in(f(a),f(b))$,设$x_0=f^{-1}(y_0)$,则$x_0\in(a,b)$于是$\forall\varepsilon>0$在$x_0$的两侧各取异于$x_0$的两点$x_1,x_2(x_1<x_0<x_2)$,使它们与$x_0$的距离小于$\varepsilon$.

设与x_1,x_2对应的函数值分别为y_1,y_2，由f的严格递增性$y_1<y_0<y_2$.取$\delta=\min\{y_2-y_0,y_0-y_1\}$当$y\in U(y_0,\delta)$时，对应的$x=f^{-1}(y)$的值都落入$x_1$与$x_2$ 之间，故有$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$，这就证明了$f^{-1}(y)$在点$y_0$处连续，从而$f^{-1}(y)\in C(f(a),f(b))$

在点a的右侧，取x_1使得$x_1-a<\varepsilon$设x_1点处的函数值为y_1,由递增性$f(a)<f(x_1)$ 取$\delta<f(x_1)-f(a)$当$y\in(f(a),f(x_1))$对应的$x=f^{-1}(y)$的值落入a与x_1之间, 故$|f^{-1}(y)-f^{-1}(f(a))|=|x-a|<\varepsilon\Longrightarrow f^{-1}(f(a)^+)=f^{-1}(f(a))$同理可得$f^{-1}(f(b)^-)=f^{-1}(f(b))$所以$x=f^{-1}(y)\in C[f(a),f(b)]$

例3.2.6 $y=x^n$(n为正整数)在$[0,+\infty)$上严格单调递增，其反函数$y=x^{\frac{1}{n}}$ 在$[0,+\infty)$上连续，又$y=u^{\frac{1}{n}}$连续，$u=\frac{1}{x}$连续，所以复合函数$y=x^{-\frac{1}{n}}$在$(0,+\infty)$上连续.

*四、一致连续性

函数在区间上的连续性反映了函数在区间上的点点连续, 从定义上看$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0$当$x\in U(x_0,\delta)$时$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 因此$\delta$与$x_0$ 相关，即$\delta=\delta(x_0,\varepsilon)$,而一致连续反映了函数在区间上有更强的连续性.

定义3. 2.1 设函数f定义在区间I上，若$\forall\varepsilon>0$ 存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对于任意的$x',x''\in I$,只要$|x'-x''|<\delta$,就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, 则称函数$f$在区间$I$上一致连续.

一致连续的几何解释：若函数$f(x)$在区间I上一致连续，我们可以找到一个长2δ直径2ε圆管，当小圆柱管平行于x 轴移动，曲线总在这个管内.

例3.2.7 函数$y=ax+b(a\neq0)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证明: $\forall\varepsilon>0$由于

$|f(x')-f(x'')|=|a||x'-x''|$

取$\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$，则对于任意的$x',x''\in(-\infty,+\infty)$ 都有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$所以$ax+b$在$(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例3.2.8 函数$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上不一致连续.

证明: 只需证明:对于某个$\varepsilon_0>0$无论δ多么小,存在$x',x''\in(0,1)$虽然$|x'-x''|<\delta$,但$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$事实上取$x'=\frac{1}{n},x''=\frac{1}{2n}$对于$\varepsilon_0=1$ 当$\delta=\frac{1}{n},(n\to\infty)$ 而$|f(x')-f(x'')|=n>1=\varepsilon_0$

注: 函数在区间I上连续与一致连续这两个概念,前者是函数在一点处的局部性态,后者是函数在区间

上的整体性态,从几何上看,不论区间I上任意两点x',x''在区间I的什么位置,只要它们的距离小于δ就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 这个δ只与ε相关,而与x无关,即$\delta=\delta(\varepsilon)$,显然若函数在区间$I$ 上一致连续,则在I上连续,反之不然.

定理3. 2.9 函数$f(x)\in C[a,b]$，则f在区间$[a,b]$上一致连续.

例3.2.9 设区间I_1 的右端点为$c\in I_1$,区间I_2的左端点也为$c\in I_2(I_1,I_2)$可以分别为有限和无限区间) 若f分别在区间I_1,I_2上一致连续,则f在$I=I_1\bigcup I_2$上一致连续.

证明: 因为f 分别在区间I_1,I_2上一致连续，所以存在δ_1,δ_2当$x',x''\in I_j(j=1,2)$时只要$|x'-x''|<\delta_j$ 就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

由于f在c点处连续,对上述$\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$当$|x-c|<\delta_0$时$|f(x)-f(c)|<\varepsilon/2$

取$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$于是$\forall x',x''\in I$, 当$|x'-x''|<\delta$时

若$x',x''\in I_j(j=1,2)$,则结论成立

若x',x''分别属于I_1与I_2,不妨设$x'\in I_1,x''\in I_2$ 那么$|x'-c|=c-x'<x''-x'<\delta\le\delta_0$

故$|f(x')-f(c)|<\varepsilon/2$同理得$|f(x'')-f(c)|<\varepsilon/2$ 那么f在I上一致连续.

习题3.2

1.若函数$f(x)$在点x_0处连续且$f(x_0)\neq 0$,证明存在x_0 的一个邻域$U(x_0)$ 使得当$x\in U(x_0)$时，$f(x)\neq 0$.

2.设$f(x)\in C[0,2a]$ ，其中$a>0, f(0)=f(2a)$,证明至少存在一点$\xi\in[0,a]$，使得$F(x)=f(x+a)-f(x)$以ξ为零点.

3.设$f(x)\in C[a,b], c,d\in(a,b), t_1>0, t_2>0$证明：存在一点$\xi\in[a,b]$,使得$t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi)$

4.设$0<c<1$,用定义证明：函数$y=\sin\frac{1}{x}$在$[c,1]$上一致连续.

5.设函数$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,存在$x_1\in(-\infty,+\infty)$使得$f(x_1)>0$,证明函数$f(x)$在连续区间上可以达到正的最大值.

6.设函数$f(x)$在其定义区间$(-\infty,+\infty)$上满足不等式$|f(x')-f(x''|\leq q|x')-x''|, q\in(0,1)$ 证明：存在唯一点x^*使得$f(x^*)=x^*$

7.设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有下界，但不能达到其下确界A，证明：在$[a,b]$上存在点列$\{x_n\}\subset[a,b]$使得数列$f(x_n)$单调减少趋于A.

8.研究函数的连续性：

1)$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$;

2)$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$

第三节初等函数的连续性

一、基本初等函数的连续性

通过前面的讨论，不难发现三角函数、反三角函数的连续性，注意到幂函数和指数函数之间的关系，我们以下只需要讨论指数函数的连续性，就可以回答幂函数和对数函数的连续性.

例3.3.1 指数函数$y=a^x$ 在实数轴上连续.

证明：当$a>1$由极限定义容易证明$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$,那么$a^x$在$x=0$处连续.$\forall x_0\in\mathbb{R}$ $\Delta y=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)$ 于是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=a^{x_0}\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)=0$由连续的定义知$y=a^x$在$x_0$处连续，由$x_0$的任意性知$a^x\in C(\mathbb{R})$

当$0<a<1$令$b=\frac{1}{a}$,则$b>1$而$a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{b^x}=b^{-x}$ 由于b^u连续，$u=-x$连续，所以复合函数b^{-x}连续，于是$y=a^x$连续.

$y=a^x$在$\mathbb{R}$上严格单调连续,因此其反函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$上严格单调连续.

$y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$由复合函数的连续性知幂函数在$(0,+\infty)$上连续.

由此例和前面的讨论，我们有

定理3. 3.1 基本初等函数（常、幂、指、对、三、反）在其定义区间上是连续的.

二、初等函数的连续性

由于初等函数是基本初等函数经过有限次的有理运算和有限次的复合运算得到，所以我们有

定理3. 3.2 初等函数在其定义区间上连续.

注：Dirichlet函数不是初等函数，因为它在定义区间实数轴上处处不连续.

例3.3.2 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$

解：因为初等函数的连续性我们有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

例3.3.3 借助求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ 求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$.

解：令$a^x-1=t\Longrightarrow x=\log_a(1+t)$且$x\to 0\Longleftrightarrow t\to 0$,则

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$.

由Heine归结原理$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

例3.3.4 设函数$f(x)$与$g(x)$在点x_0处连续，证明函数$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$在点$x_0$处也连续.

证明：因为$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|),\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$ 由$|f(x)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|,\Longrightarrow||f(x)|-|f(x_0)||\le|f(x)-f(x_0)|$可知，函数$|f(x)|$在点$x_0$处连续，所以$\varphi(x),\psi(x)$在点$x_0$处连续.

例3.3.5 讨论分段函数是初等函数吗？

解：函数$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$是一个分段函数，事实上，令$y=\sqrt{u},u=x^2$这是两个幂函数复合而成的函数，所以它是初等函数.

而函数$f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$就不是初等函数,若它是初等函数，则它应在定义区间实数轴上连续，由前面讨论它在点$x=0$处间断，与初等函数在定义区间上连续的事实矛盾，所以不是初等函数，由此可见分段函数不能作为初等函数与非初等函数分类的标准.

例3.3.6 设$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$,证明$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$.

证明: 令$u(x_0)=a,v(x_0)=b$, 则函数$u(x),v(x)$在x_0处连续, 从而$v(x)\ln u(x)$在x_0处连续, 所以$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$在$x_0$处连续，于是$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b$

例3.3.7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解：由Heine归结原理

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]^{\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)}\\&=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}\end{aligned}$$

习题3.3

1.设$f(x)\in C(\mathbb{R})$,若常数$c>0$,则$F(x)=\begin{cases}-c & ,若f(x)<-c,\\ f(x), & 若|f(x)|\le c\\ c, & 若f(x)>c\end{cases}$ 证明：$F(x)\in C(\mathbb{R})$

2.若$\forall\varepsilon>0,f(x)\in C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$证明：$f(x)\in C(a,b)$

3.若$f(x)\in C[a,b]x_j\in[a,b](j=1,2,\cdots,n)$,证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

4.证明：$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

5.设函数$f(x)$在$[a,b]$上递增，其值域为$[f(a),f(b)]$,证明：$f(x)\in C[a,b]$

6.求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x+t\cos x}{1+x^3+x\ln(1-x)}$;　　2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

7.证明：方程$\sin x+x+1=0$在区间$(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$内至少有一个根.

练习三

1.在“充分”,“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1)数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的______条件.数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的______条件

(2)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的______条件.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的______条件.

(3)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$的______条件.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的______条件.

(4)$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的______.

2.选择以下两题中给出的四个结论中一个正确的结论。

(1)设$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to0$时，有(　　　)

$(A)f(x)$与x是等价无穷小，$(B)f(x)$与x同阶但非等价无穷小

$(C)f(x)$是比x高阶的无穷小，$(D)f(x)$是比x 低阶的无穷小

(2)设$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　　)

(A)可去间断点，(B)跳跃间断点，(C)第二类间断点，(D)连续点

3. 试确定a 的值，使得函数在其定义域内处处连续；

1)$f(x)=\begin{cases}\frac{x+a}{3}, & x\le0,\\ x^{2x}, & x>0,\end{cases}$　　2)$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}, & x<0,\\ ae^x,x\ge0\end{cases}$

4.$f(x)\in C[a,b]$,且$\forall x\in[a,b],f(x)\in[a,b]$,证明存在$\xi\in[a,b]$使得$f(\xi)=\xi$

5.$f(x),g(x)\in C[a,b]$,且$f(x)$递增，$g(x)$递减，讨论方程$f(x)=g(x)$在$[0,1]$上根的存在性和唯一性.

6.证明：方程$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ 有两个实根，其中，$a_i>0(i=1,2,3),\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$

7.$f(x)\in C[0,1],f(0)=f(1)$,证明：存在$\xi\in[0,1]$使得$\forall n\in\mathbf{N}$ 有$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

8.设$f(x)\in C[a,b],x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b],\lambda_j>0(j=1,2,\cdots,n)\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=1$,证明：存在一点$\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

9.证明：若$f(x)\in C(a,b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$,则$f(x)$在(a,b)内达到最小值.

10.函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$,$f(x)$在点x_0处连续，证明1)$f(x)\in C(\mathbb{R})$,2)$f(x)$是线性函数，即$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\ f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$

11.证明：方程$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3}=0$ 有且仅有两个实根，其中$a_i>0(i=1,2,3),\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$