第一部分作业

1.下列各题中均假定$f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出A表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,其中$f(0)=0$, 且$f'(0)$存在；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$

以下两题中，选择给出的四个结论中一个正确的结论：

2.设$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$,则$f(x)$在$x=1$处的(   )

(A),左右导数都存在(B),左导数存在，右导数不存在，

(C)左导数不存在，右导数存在, (D)左右导数都不存在；

3.设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则$f(0)=0$是$F(x)$ 在$x=0$处可导的

(A),充分必要条件，(B),充分条件但非必要条件，

(C)必要条件但非充分条件, (D)既非充分条件又非必要条件；

4 .当物体温度高于室内温度时，物体就会逐渐冷却，设物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$, 求物体在时刻t的冷却速率.

5.设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le x_0\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$,若$f(x)$在$x_0$处可导，求$a,b$的值.

‘

6.如果$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，证明：$f'(0)=0$.

7.设$f(x)$定义在实数轴上，若$\forall x,y\in\mathbb{R} f(x+y)=f(x)\cdot f(y), f'(0)=1$, ,证明：函数在实数轴上可导，且$f'(x)=f(x)$

8. 设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(a)=f(b)=k, f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$,证明：存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=k$

9.证明：双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积等于$2a^2$.

10.设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$(有限),证明：$f(x)$在$x=0$ 处可导；

11.以初速度v_0竖直上抛的物体，其上升高度s与时间t的关系是：$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$,求：

(1)该物体的速度$v(t)$, (2)该物体达到最高点的时刻

12.溶液自深18cm顶直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深12cm时，其表面下降的速率为1cm/min ,问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率是多少？

13.设$y=y(x)$由方程$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$确定，求 $\frac{dy}{dx}$;

14.设曲线方程$x=1-t^2, y=t-t^2$,求它在下列点处的切线方程与法线方程：

1)$t=1$;　　2)$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

15.设$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin x^\beta, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$,问

1) 在什么情况下$f(x)$ 不是连续函数？

2) 在什么情况下$f(x)$连续但不可导？

3) 在什么情况下$f(x)$ 可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$ 上无界？

4) 在什么情况下$f(x)$可微，且$f'(x)$在$[-1,1]$上有界，但$f'(x)$不连续？

5) 在什么情况下$f(x)$连续可微？

16.求下列函数的导数:

1) $\begin{cases}x & =\sin^2 t\\ y & =\cos^2 t\end{cases}$;　　2) $\begin{cases}x & =a(t-\sin t)\\ y & =a(1-\cos t)\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x & =\frac{3at}{1+t^3}\\ y & =\frac{3at^3}{1+t^3}\end{cases}$;　　4) $\begin{cases}x & =3t^2+2t\\ e^y & \sin t-y+1=0\end{cases}$;

17.落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径的增大速率总是$6m/s$,问在$2s$末扰动水面面积增大的速率为多少？

18.注水入深$8m$上顶直径$8m$的正圆锥形容器中，其速率为$4m^3/min$,当

水深为$5m$时，其表面上升的速率为多少？

19.已知$f(x)$是周期为5的连续函数，它在$x=0$的某邻域内满足关系式：

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\circ(x)$

且$f(x)$在$x=1$ 处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

20.当正在高度为H水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时，如图1所示从飞机到机场的水平地面距离为L.假设飞机下降的路径为三次函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$的图形，其中$y(-L)=H,y(0)=0$,试确定飞机的降落路径.

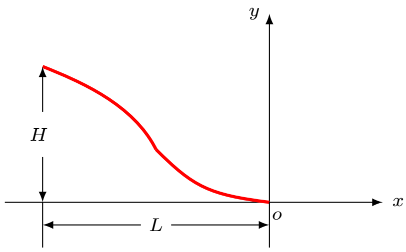


图1

第二部分作业

一、选择题

1.函数$f(x)$在$x=x_0$处(　　)

$A.$ 连续，则$f(x)$在该点一定可导，$B.$不可导，则$f(x)$在该点一定不连续

$C.$可导，则$f(x)$ 在该点一定可微，反之亦然，$D.$可导，则曲线在点$(x_0,f(x_0))$处一定没有切线存在

2.若$f(x)$在$x=0$处连续且可导，则$f(|x|)$在$x=0$处(　　)

$A.$ 不一定连续，$B.$连续但不一定可导，$C.$连续且可导，$D.$连续但一定不可导

3. 设$f(x)$ 是可导函数，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x-\Delta x)}{\Delta x}$ 的值为(　　)

$A.0, B.2f(x), C.2f(x)f'(x), D.4f(x)f'(x)$

4.设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^a}\cos\frac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ (a 为实数), 若$f(x)$在$x=1$处可导，则必有(　　)

$A.a<-1, B.-1<a<0, C.-1\leq a<1, D.a\geq 1$

5.已知$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\leq 0\\ x, & x>0\end{cases}$, 则$f(x)$在$x=0$ 处(　　)

$A.$ 间断，$B.$导数不存在，$C.f'(x)=-1, D.f'(x)=1$

6. 下列给出的求导运算正确的是

$A.\frac{d}{dx}(x^x)=x\cdot x^{x-1}=x^x$

$B.$设$f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中$\varphi(x)$ 在$x=a$处连续，则$f'(a)=$

$[\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)]_{x=a}=\varphi(a)$

$C.$设$y=f(x)$单调连续可导且$f'(x)\neq 0$,则它的反函数$x=\varphi(y)$的二阶导数$\varphi''(y)=(\varphi(y))'=\left(\frac{1}{f'(x)}\right)'=\dfrac{y''}{(y')^2}$

$D.$ 设$f(x)=t\cdot\ln\left(\frac{x}{t}+1\right)$,由于$f'(x)=t\cdot\frac{1}{\frac{x}{t}+1}\cdot\frac{1}{t}=\frac{t}{x+t}$. 从而有$f'(t)=\frac{t}{t+t}=\frac{1}{2}$.

7. 曲线$y=x\cdot\ln x$ 上平行于直线$x-y+1=0$的切线方程是

$A.y-x+1=0, B.y-x-3e^{-2}=0,$

$C.y-x+3e^2=0, D.y+x-3e^{-2}=0$

8. 设$y=f(e^x)e^{f(x)}$,且$f'(x)$存在，则$y'=$

$A.f'(e^x)e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}, B.f'(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

$C.f'(e^)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x), D.f'(e^x)e^{f(x)}$

9. 设$f(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$,则$f'(1)=$

$A.-101!, B.-\frac{101!}{100}, C.-100!, D.\frac{100!}{99}$

10. 若函数$y=f(x)$,有$f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则当$\Delta x\to 0$时，该函数在$x=x_0$处的微分dy是

$A.$与Δx等价的无穷小，$B.$与Δx同阶的无穷小，但不是等价的无穷小

$C.$比Δx低阶的无穷小，$D.$比Δx高阶的无穷小

11.设$f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{-x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则$f'(0)$为(　　　)

$A.0, B.\frac{1}{2}, C.1, D.-1$

12.设$f(x)$可导，且满足条件$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线斜率为

$A.2, B.-2, C.\frac{1}{2}, D.-1$

13.设$f(x),g(x)$定义在$(-1,1)$,且都在$x=0$处连续，若$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$,则

$A.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, 且$g'(0)=0$, $\quad B.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$且$g'(0)=1$

$C.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$, 且$g'(0)=0$, $\quad D.\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$且$g'(0)=2$

14.设$f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x}, & x>0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$在$x=0$处可导，则

$A.a=1, b=\frac{\pi}{2}$, $\qquad B.a=1, b=0$

$C.a=-1, b=-\frac{\pi}{2}$, $\qquad D.a=-1, b=\frac{\pi}{2}$

15. 设$y=e^{\sin^2 x}$,且$f'(x)$存在，则$dy=$

$A.e^{\sin^2 x}, B.2e^{\sin^2 x}\sin xdx, C.2e^{\sin^2 x}\cos x, D.e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$

16.设函数$f(x)=3x^2+x^2|x|$,则$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数$n=$

$A.0, B.1, C.2, D.3$

二、解答题

1.求下列函数的导数

(1)$y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$,

(2)$y=\frac{a^x\sin x}{1+x}$,

(3)$y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x},(a>0)$,

(4)$y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$

2.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f\left(t+\frac{x}{a}\right)-f\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]$,其中$t,a$与$x$无关，且$a\neq 0$,而$f(x)$是可导函数

3.设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leq 0\\ x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$，问$a,b$ 取何值时，该函数在$x=0$处可导

4.设$y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$,求$dy$

5.设$y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x),f(u)$可导，求$\frac{dy}{dx},\frac{dy}{d(\cos^2 x)},\frac{dy}{d(\cos x)}$.

6.求对数螺线$\rho=e^\theta$在$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程

7.试求由参数方程$\begin{cases}x & =\ln\sqrt{1+t^2}\\ y & =\arctan t\end{cases}$确定的函数的导数$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

8. 求由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

9. 设$f(x)$具有任意阶的导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$,求$f^{(n)}(x)$.

10.求下列函数的导数

(1)$y=x\arctan\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$,

(2)$y=\ln(x-\sqrt{a^2-x^2})$

11. 设$y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(x+2)}\right]^n$,

求y''

12.设$f(x)=e^x(x^2+2x+3)$,求$f^{(20)}(x)$

13.证明：曲线$\begin{cases}x & =a(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t)\\ y & =a\sin t\end{cases}$ $(a>0,0<t<\pi)$ 上任一点处的切线与x轴的交点到切点的距离（称为切线长）恒为常数

14.设$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$,求$f'(t)$

15.设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 0, & x=0\\ \ln(1-x), & x<0\end{cases}$,该函数在$x=0$处是否可导？为什么？

16.试求由参数方程$\begin{cases}x & =1+t^2\\ y & =\cos t\end{cases}$确定的函数的导数$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

17. 试求由参数方程$\begin{cases}x & =\arctan t\\ 2 & y-ty^2+e^t=5\end{cases}$确定的函数的导数$\frac{dy}{dx}$

18.设$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$,求$y^{(n)}(3)$

19.设$y=f(x+y)$,其中f 有二阶导数，且其一阶导数不等于1，求y''

20.设质点抛射的运动轨迹由方程组$\begin{cases}x & =\sqrt{3}t-1\\ te^y & -y=0\end{cases}$确定，试

求开始抛射时$(t=0)$质点运动的速度大小及方向。

三、选做题

1.设函数$y = f(x)$ 与$y = \psi(x)$在点x_0处可导，试证曲线$y = f(x)$与$y = \psi(x)$在点x_0处相切的充要条件是：当$x \to x_0$时$f(x) - \psi(x)$是$x - x_0$的高阶无穷小

2.设函数$f(x)$处处可导，且有$f'(0) = 1$,并对任意实数x, h,有

$f(x+h) = f(x) + f(h) + 2hx$,求$f'(x)$,

3.设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内处处有定义，且对任意的实数x, y,有$f(x+y) = f(x)f(y)$, 又$f(x) = 1+xg(x)$,其中$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$,试证$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内处处可导.

4. 设$f(x)$在$(0, +\infty)$内有定义，且对于任意$x > 0, y > 0$都有

$f(xy)=f(x)+f(y)$,又$f'(1)=1$,求$f'(x)$,及$f(x)$

5.已知函数$y=y(x)$二阶可导，并满足方程

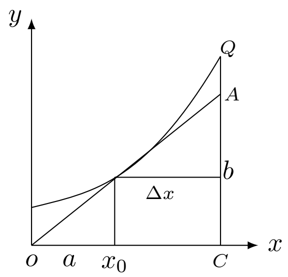
$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay^2=0,$

求证：若$x=\sin t$，则此方程可以变换为$\frac{d^2y}{dt^2}+ay^2=0$

6.设曲线$y=f(x)$,在原点与曲线$y=\sin x$相切，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$

补充题目

1.已知直角三角形的两直角边分别为a和b且直角边a与x轴重合斜边C与曲线$y=e^x$相切，求切点坐标，取切点到直角边b 距离作为自变量的增量Δx,求出函数$y=e^x$在点x_0处相应于Δx的增量Δy与微分dy



2. 设$f(x)=(\arcsin x)^2$,求$f^{(n)}(0)$,

3. 设$F(x)=f(x)(1+|\sin x|), f(x)$可导，证明$F(x)$在$x=0$处可导的充分必要条件是$f(0)=0$

4.设$f(x)$ 在区间$[a,b]$上有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0, f'(a)\cdot f'(b)>0$,证明：存在$\xi\in(a,b), \eta\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0, f''(\eta)=0$