第十二章

第四节 函数展开成幂级数

本节内容:

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、函数展开成幂级数

在收敛域内

$$\text{幂级数}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{\text{求和}} \text{和函数}\ S(x)$$

幂级数在其收敛域内就表示一个函数(它的和函数)，其和函数具有很好性质：

收敛区间内连续、逐项可导、逐项可积性.

若能将一个函数展开成幂级数，对于理论上研究此函数的性质带来方便，同时具有应用价值:

函数值的近似计算，求解一些积分、微分方程的数值解.

问题：

1. 给定一个函数$f(x)$能否找到一个幂级数使它在某区间内收敛，且和函数恰好是$f(x)$?

即函数展开成幂级数的条件？

2. 条件满足时，如何展开成幂级数？

一、函数的泰勒 (Taylor) 级数

复习: $f(x)$ 的 n **阶泰勒公式**

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x 与 x_0 之间)

称为**拉格朗日余项**． 称为$f(x)$在x_0处**泰勒公式.**

这时，在该邻域内$f(x)$可用n次多项式来近似代替，

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

误差为$|R_n(x)|$，随着n增大而减小，可以通过增加上式多项式的项数来提高精确度.

想到：若函数$f(x)$在x_0某邻域内具有任意阶导数

（无穷次连续可微，即$f(x)\in C^{\infty}\big(U(x_0)\big)$）

设想上面多项式的项趋向无穷而成为幂级数.

若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为$f(x)$在x_0处的**泰勒级数**.

当$x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为$f(x)$的**麦克劳林级数**.

问题：1) $f(x)$在x_0处的泰勒级数在$U(x_0)$内是否收敛?

2) 在收敛域上, 它的和函数是否为 $f(x)$?

是有条件的，定理给出:

$f(x)$满足什么条件时，它的泰勒级数收敛于函数$f(x)$本身.

定理1． 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0.$

证明:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,\quad x\in U(x_0)$$

令 $S_{n+1}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\,f(x)-S_{n+1}(x)\right]=0\,,\quad x\in U(x_0)$$

若 $f(x)$ 在x_0处的泰勒级数在$U(x_0)$内收敛于$f(x)$, 则称

$f(x)$在此邻域内可展开成泰勒级数，并称等式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为$f(x)$在 $x=x_0$ 处的幂级数展开式，或$f(x)$展开成

$(x-x_0)$的幂级数。

定理2. 若函数 $f(x)$ 在x_0的某邻域$U(x_0)$内可展开为幂级数，则展开式唯一.

(利用幂级数在收敛区间内可以逐项求导来证明)

推论: 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是**唯一**的 , 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\quad x\in(-R,R)$$

则

$$a_0=f(0)$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots;\qquad a_1=f'(0)$$

$$f''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots;\qquad a_2=\frac{1}{2!}f''(0)$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\cdots;\qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots$$

显然结论成立 .

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法} \\ \text{间接展开法} \end{cases}$ —— 利用已知其级数展开式的函数展开

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤 :

第一步　求函数 $f(x)$ 及其各阶导数在 x_0 处的值 ;

第二步　写出泰勒级数 , 并求出其收敛半径 R ;

第三步　判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$ 是否为 0.

若为0，则在收敛区间内写出展开式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x,\ f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与 x 之间)

故 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0\,, & n=2k\\(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中m为任意常数 .

解: 易求出 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1)$,

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,,\ \cdots$$

于是得 级数 $1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|=1$

因此对任意常数 m, 级数在开区间 (- 1, 1) 内收敛.

为避免研究余项，设此级数的和函数为$F(x), -1 < x < 1$

则 $F(x) = 1 + m x + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$F'(x) = m\left[1 + \frac{m-1}{1} x + \cdots + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \cdots\right]$$

$$(1+x)F'(x) = mF(x), \quad F(0) = 1$$

推导

$$\int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)} \mathrm{d}x = \int_0^x \frac{m}{1+x} \mathrm{d}x$$

$$\ln F(x) - \ln F(0) = m \ln(1+x)$$

$$F(x) = (1+x)^m$$

由此得

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

称为**二项展开式**.

说明:

(1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关.

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的**二项式定理**.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$(-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1< x< 1)$$

2. 间接展开法

直接法：要求各阶导数，计算量大，讨论余项比较困难.

间接法：利用一些已知函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成幂级数.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

对上式两边求导可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1)$$

“变量代换”

例4. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 把 x 换成 x^2，得

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (-1<x<1)$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad -1<x\le 1$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛，而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛域为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例6. 将$f(x)=arctanx$展开成x的幂级数,并求$f^{(k)}(0)$.

解: $$f'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (-1<x<1)$$

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

易见，当$x=\pm1$时，右端级数收敛，左端$arctanx$在$x=\pm1$有定义，连续. 因此，上式$x\in[-1,1]$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2n\\ (-1)^n(2n)!, & k=2n+1\end{cases}$$

$f(x)$的幂级数展开式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

幂级数展开式唯一: $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=a_n \Rightarrow f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$

例7. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\tfrac{\pi}{4})+\sin(x-\tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\ldots+$$

$$\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\cdots]$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

例8. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$$(\,|x-1|<2\,)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3\,)$$

注: 间接展开法，利用已知函数的幂级数展开式，经过变量代换，幂级数的运算（四则运算，逐项求导，逐项积分）等，将函数展开成幂级数.

根据函数的幂级数展开式的唯一性，它与直接展开法得到的结果一致. 这样做不但计算简单，而且可以避免余项的研究.

练习：1. 将$f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$展开成x的幂级数.

解：
$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{x}{2})^2]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$$

$$\frac{x}{4-x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$$

$-1<\left(\frac{x}{2}\right)^2<1$, 即有$x\in(-2,2)$

2. 将 $\frac{1}{x^2}$ 展开成$x+1$的幂级数.

解: $$-\frac{1}{x}=-\frac{1}{(x+1)-1}=\frac{1}{1-(x+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$$

$$|x+1|<1, \text{即} -2<x<0$$

从而

$$\frac{1}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}$$

$$x\in(-2,0)$$

3. 将$f(x)=cosx$展开成$\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的幂级数.

解： $cosx = \cos(\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3})$

$$= \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) cos\,(-\frac{\pi}{3}) - sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) sin\,(-\frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

4. 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

5. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在$x=0$处展为幂级数.

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n \qquad (-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此 $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n \qquad (-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

6. 将$e^x\sin x$在$x=0$展开成幂级数.

解： $$e^x\sin x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$
$$=\ x+x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty)$$

（利用幂级数的乘法）

作 业

P289　　2: (2)(3)，5，6

P329　　11: (2),