# 第六节 空间曲线及其方程

## 一、空间曲线的一般方程

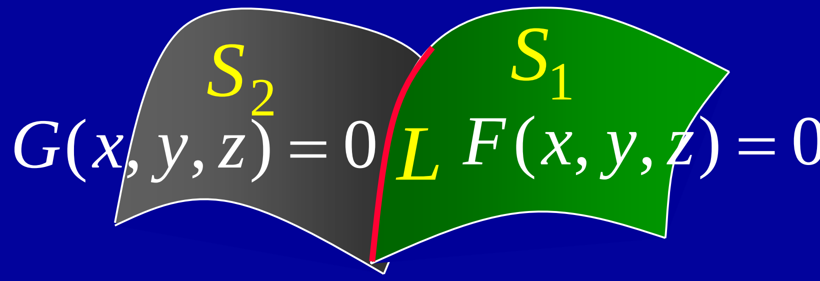
## 二、空间曲线的参数方程

## 三、空间曲线在坐标面上的投影

# 一、空间曲线的一般方程

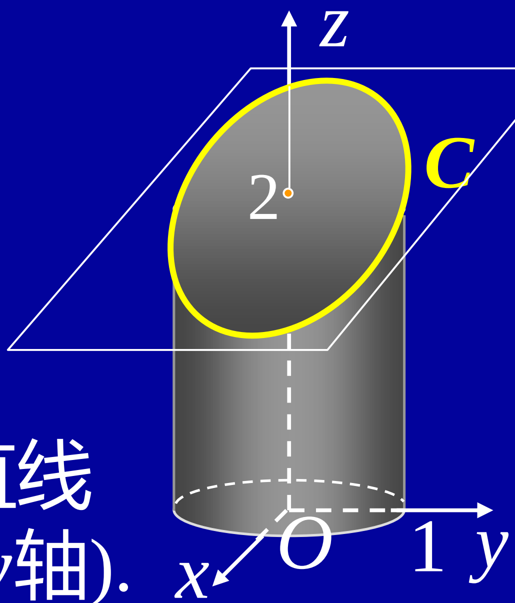
空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般式方程为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$




**例如**,方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$



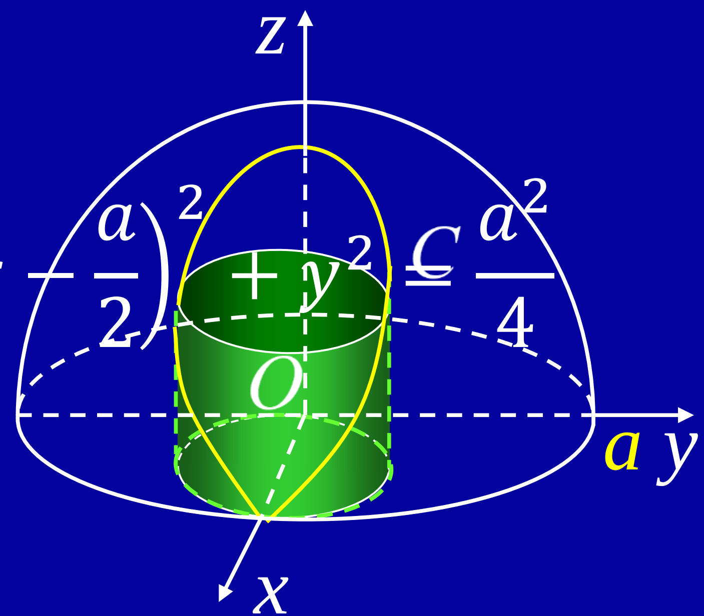

表示圆柱面与平面的交线 $C$.

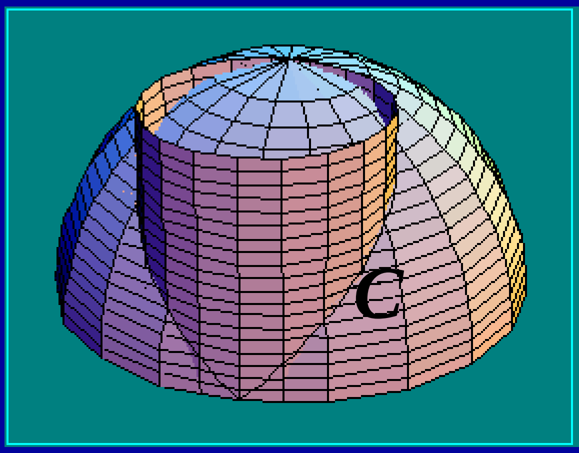
(平面也可看成柱面，以$xOz$面内直线 $2x+3z=6$为准线，母线平行于 $y$轴).

**又如**,方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

表示上半球面与圆柱面的交线$C$.



例：方程组$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ Ax + By = D \end{cases}$ （$A, B$不同时为零）

表示怎样的曲线?

分析： $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

表示$yOz$面上直线$z = y$绕$z$轴旋转一周得到的圆锥面.

$Ax + By =$D 平行于$z$轴的平面.

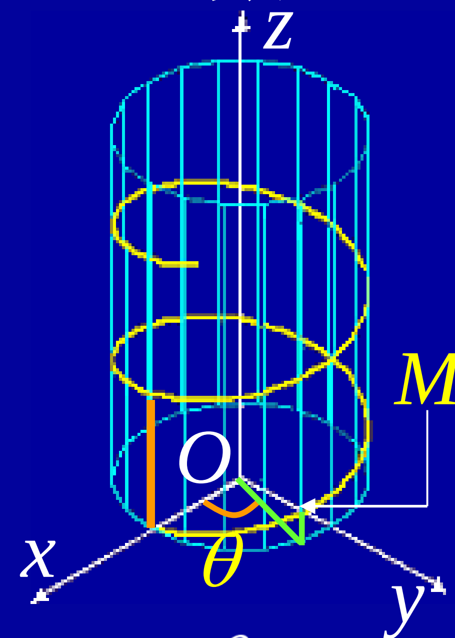
曲线为平面与圆锥面的交线.

# 二、空间曲线的参数方程

将曲线$C$上的动点坐标 $x, y, z$表示成参数 $t$ 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的**参数方程**.




例如,圆柱螺旋线 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases} \xrightarrow{\text{令}\,\theta = \omega t\,,\, b = \frac{v}{\omega}} \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当 $\theta = 2\pi$时, 上升高度 $h = 2\pi b$, 称为**螺距** .

**例1.** 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

**解:** (1) 根据第一方程引入参数，得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$，故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

**例2.** 求空间曲线 $\Gamma$: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 绕 $z$ 轴旋转时的旋转曲面方程 .

**解:** 任取点 $M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \in \Gamma$,点 $M_1$绕 $z$ 轴旋转,转过角度 $\theta$ 后到点 $M(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\,\cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\,\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

这就是旋转曲面满足的参数方程 .

分析： 固定一个$t$, 得到 $\Gamma$上一点$M_1\left(\varphi(t),\psi(t),w(t)\right)$

点$M_1$绕$z$轴旋转，得到空间的一个圆。这个圆在平面

$z=w(t)$上，其半径为$M_1$到$z$轴的距离

$\sqrt{\left(\varphi(t)\right)^2+\left(\psi(t)\right)^2}$. 因而，固定 $t$ 的方程

$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

其中$0\le\theta\le 2\pi$

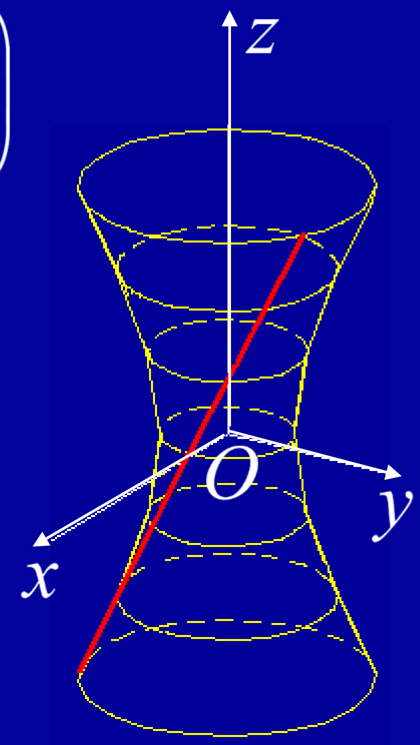
就是该圆的参数方程.

再令 $t$ 在$[\alpha,\beta]$上变动，上述方程就是旋转曲面方程.

（即再加上一个条件 $\alpha\le t\le\beta$）

**例如,** 直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{1+t^2}\,\sin\theta \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\infty < t < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$




消去 $t$ 和 $\theta$, 得旋转曲面方程为

$$4(x^2 + y^2) - z^2 = 4$$

**又如,** $xOz$ 面上的半圆周 $\begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = 0 \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad (0 \le \varphi \le \pi)$

绕 $z$ 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

消去参数$\theta, \varphi$,得到曲面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$.( 球面 )

**说明:** 一般曲面的参数方程含两个参数 , 形如

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

## 三、空间曲线在坐标面上的投影

问题：设有一张曲面$S$, 求它在$xOy$面上的投影.

步骤:（1）要求投影，用一组平行于$z$轴平行光线

从$S$的正上方照射曲面 $S$，在$xOy$面出现阴影，

就是其在$xOy$面上的投影.

（2）投影形状，大小完全由阴影的边界决定，此边界

正是 $S$的边界曲线$C$在$xOy$面上的投影曲线（投影）.

（3）关键：找 $S$ 的边界曲线$C$ 在$xOy$面上的投影.

转化为：空间曲线在坐标面上的投影.

（4）如何解决(3)? 它是以$C$为准线，母线平行于 $z$ 轴的柱面与$xOy$平面的交线.

解决关键：找到以$S$的边界曲线$C$为准线，母线平行于$z$轴的柱面(投影柱面)

**1. 投影柱面：** 以空间曲线$C$为准线，母线平行于 $z$ 轴的柱面，称为曲线$C$关于$xOy$面的投影柱面.

**2. 投影曲线：** 该投影柱面与$xOy$面的交线就是曲线C在$xOy$面上的投影曲线，简称投影.

类似可定义：曲线$C$关于其它坐标面的投影柱面和投影曲线.

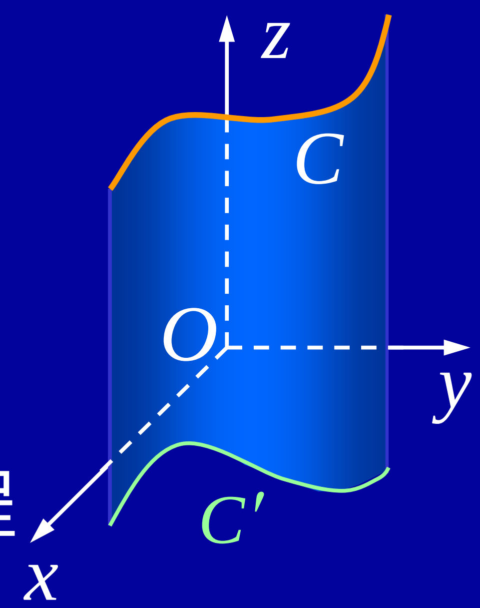
**注：** 找空间曲线在坐标面上的投影关键是找该曲线关于此坐标面的投影柱面.

3. 设空间曲线$C$的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 $z$ 得投影柱面 $H(x,y)=0$,

则$C$在$xOy$ 面上的投影曲线 $C'$为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



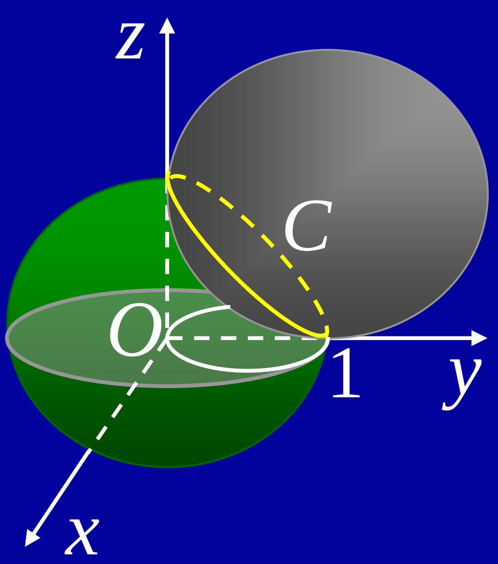

消去 $x$ 得$C$ 在$yOz$ 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去$y$ 得$C$在$zOx$ 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

**例如,**

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$




方程联立，消去$z$，得投影柱面

$$x^2+2y^2-2y=0.$$

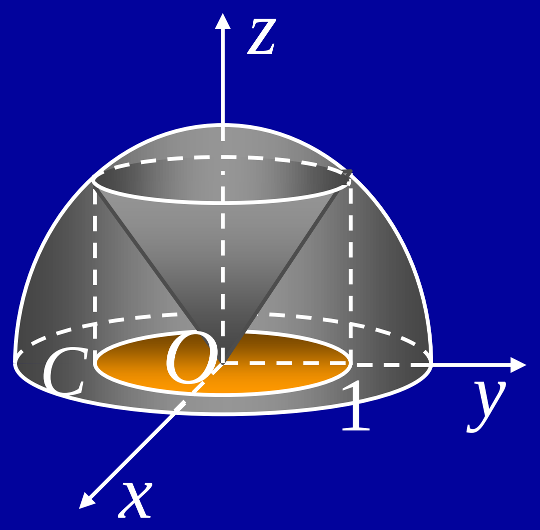
在$xOy$ 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

**又如,**

上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的立体在 $xOy$ 面上的投影区域为: 二者交线在 $xOy$ 面上的投影曲线所围之域 .

二者交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$




在 $xOy$ 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

所围圆域: $x^2+y^2\le 1,\ z=0.$

**例：** 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面$z^2=2x$所围立体在三个坐标面上的投影.

解： (1) 在$xOy$面上的投影. 联立消去$z$得$x^2+y^2=2x$.

即 $(x-1)^2+y^2=1$. 则该立体在$xOy$面上的投影区域

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$$

(2) 联立消$x$,得在$yOz$面上的投影区域为：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\le 1 \quad (z\ge 0)\\ x=0\end{cases}$$

(3) 该立体在$zOx$面上的投影为:

$$\begin{cases} x \le z \le \sqrt{2x} \\ y = 0 \end{cases}$$

投影区域为$xOz$面上的直线$z = x$与抛物线$z^2 = 2x$所围.

## 内容小结

- 空间曲线 $\longleftrightarrow$ 三元方程组
  或参数方程 (如, 圆柱螺线)
- 求投影曲线

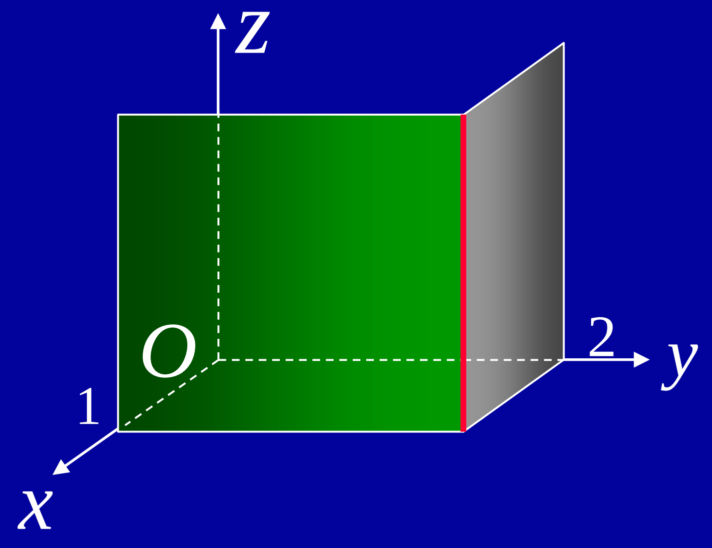
## 思考与练习

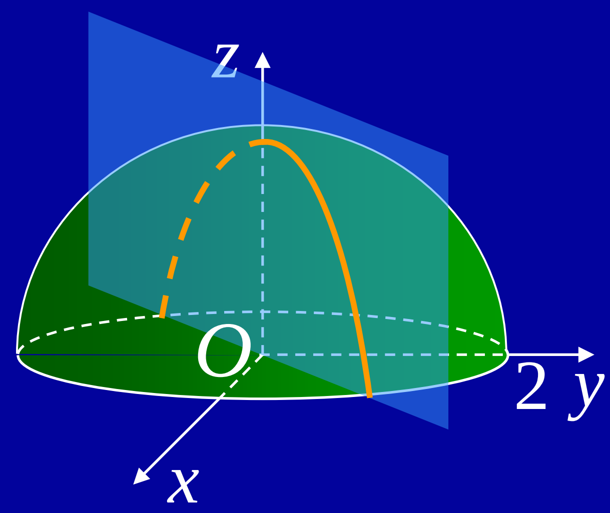
P51　题 1，2，7（展示空间图形）

## 答案：P51　题1

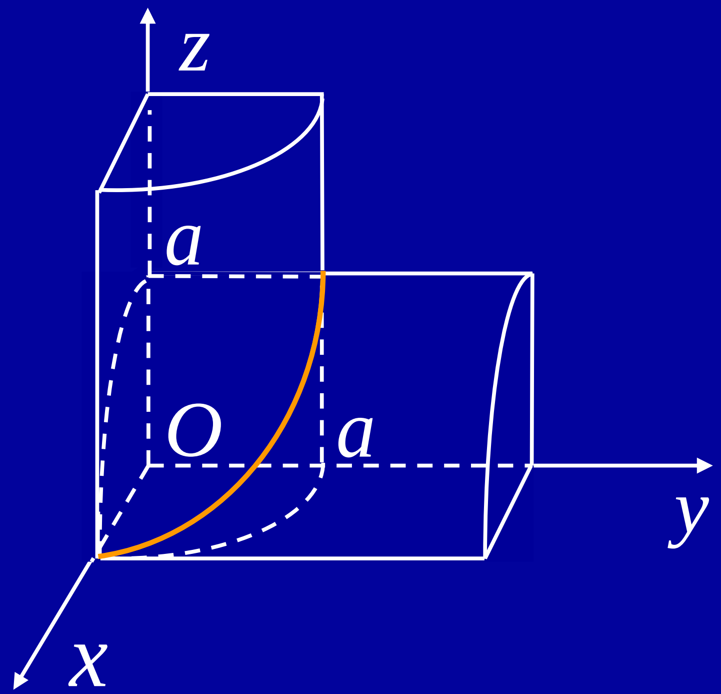
(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$



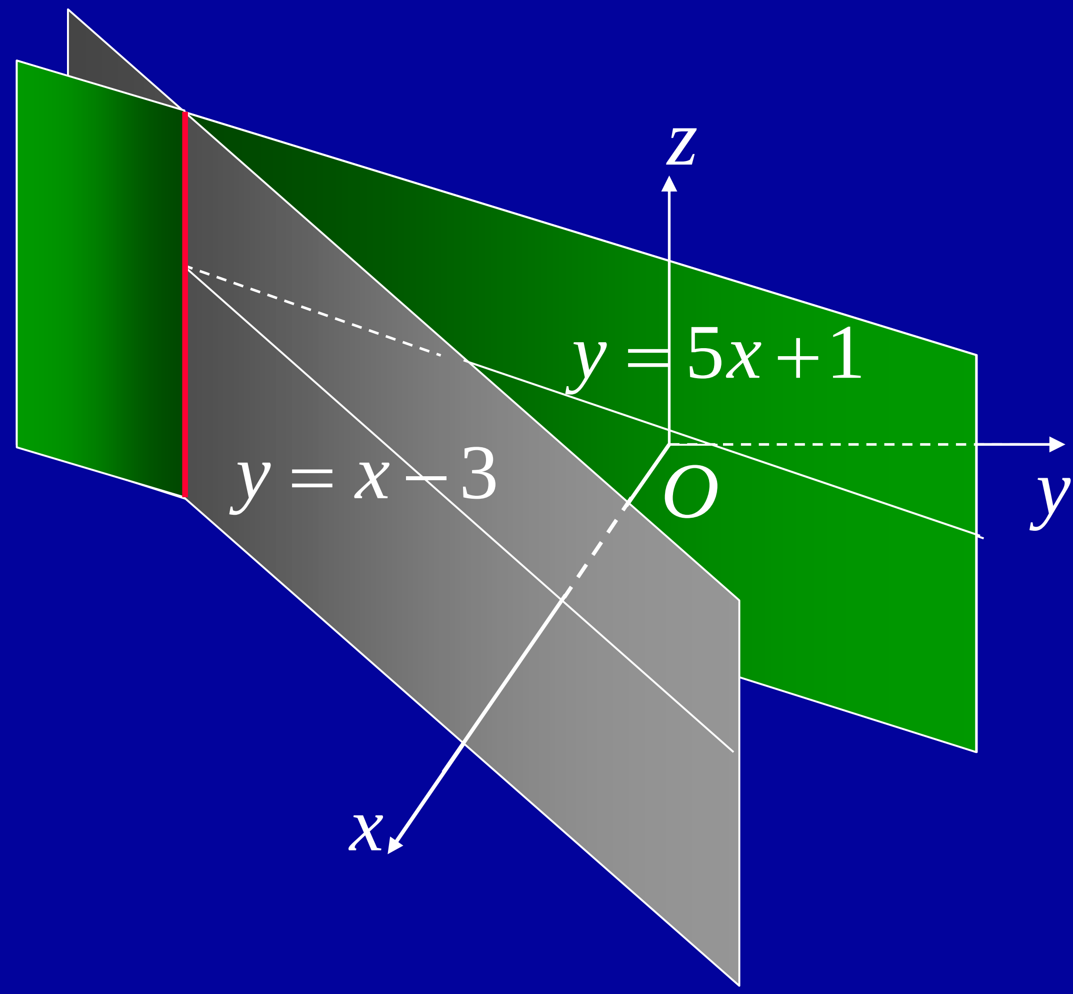



(3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$



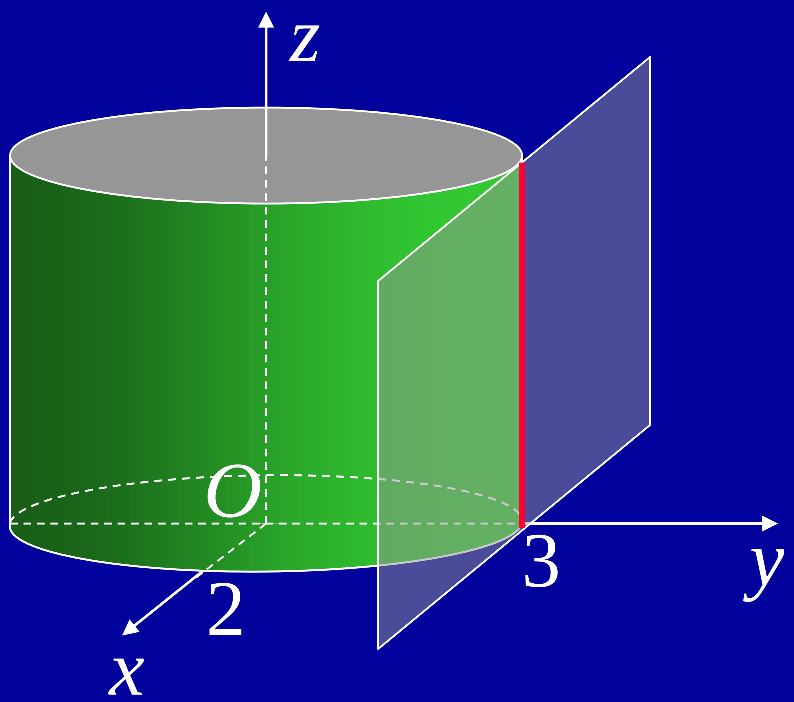
# P51 题2 (1)

$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



P51 题2(2)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$$

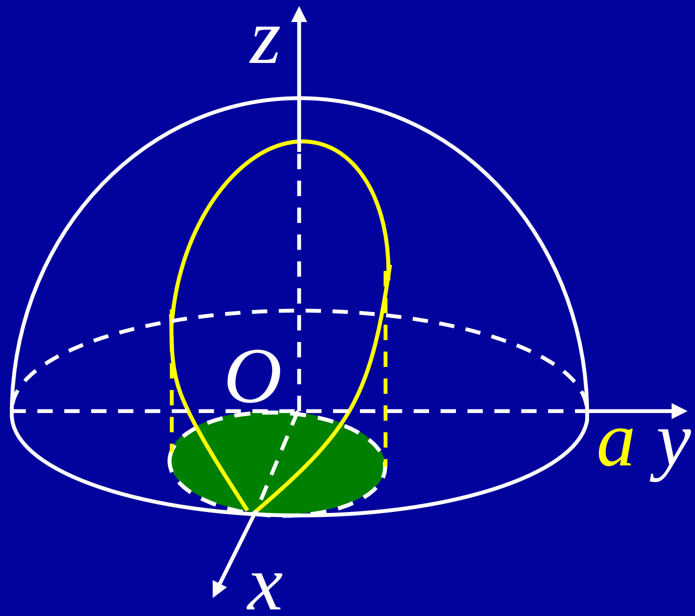


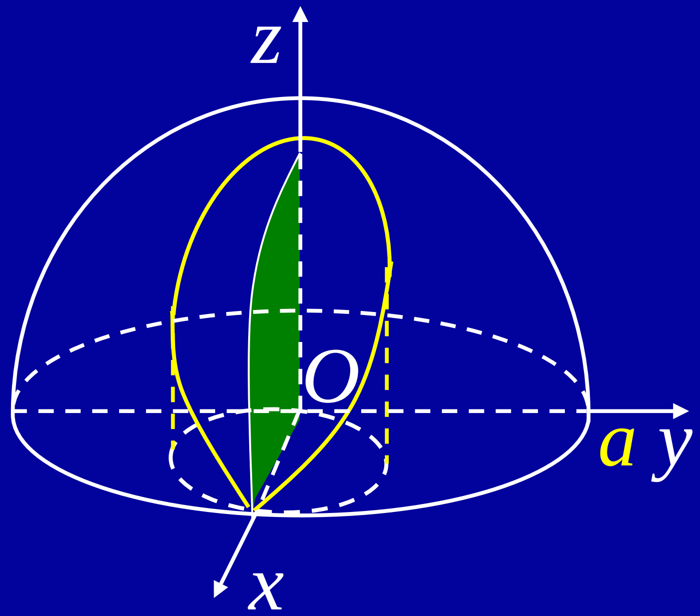

**思考:** 对平面 $y=b$

当 $|b|<3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b|>3$ 时, 交线情况如何?

## P51 题 7




$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le ax \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le a^2 \quad (x \ge 0,\ z \ge 0) \\ y = 0 \end{cases}$$

**作业** 习题8-6

P51　3，4，5(1)，6

**总习题八**

写课本上：1，2

作业本上：8，11，12，17，18，19

**备用题** 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转的曲面与平面 $x + y + z = 1$的交线在 $xOy$ 平面的投影曲线方程.

**解:** $\because$ 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$,它与所给平面的交线为

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向 $xOy$ 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 $xOy$ 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$