第一部分

1.求点(a,b,c)关于(1)各坐标面;(2) 各坐标轴(3)坐标原点的对称点的坐标.

2.自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

3.在yoz面上，求与三点$A(3,1,2),B(4,-2,-2),C(0,5,1)$等距离的点.

4.证明：以三点$A(4,1,9),B(10,-1,6),C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

5.设$\mathbf{u}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{2c},\mathbf{v}=-\mathbf{a}+\mathbf{3b}-\mathbf{c}$,试用$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$表示$\mathbf{2u}-\mathbf{3v}$.

6.如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

7.把$\triangle ABC$的BC边五等分，设分点依次为D_1, D_2, D_3, D_4,再把各分点与A连接，试以$\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}, \overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$表示向量

$\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}, \overrightarrow{D_4A}$.

8.已知两点$M_1(0,1,2)$和$M_2(1,-1,0)$,试用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$

9.设向量$\mathbf{r}$的模为4，它与$\mathbf{u}$轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$,求$\mathbf{r}$在$\mathbf{u}$轴上的投影.

10.一向量的终点在点$B(2,-1,7)$,它在x轴，y 轴和z 轴上的投影依次为$4,-4,7$,求这一向量的起点A的坐标.

11.设$\mathbf{m}=\mathbf{3i}+\mathbf{5j}+\mathbf{8k}, \mathbf{n}=\mathbf{2i}-\mathbf{4j}-\mathbf{7k}, \mathbf{p}=\mathbf{5i}+\mathbf{j}-\mathbf{4k}$,求向量$\mathbf{a}=\mathbf{4m}+\mathbf{3n}-\mathbf{p}$在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分量.

12.已知$M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1), M_3(3,1,3)$求与$\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

13.设质量为$100kg$的物体从点$M_1(3,1,8)$沿直线移动到点$M_2(1,4,2)$,计算重力所作的功（坐标长度单位为m,重力的方向为z 轴的负方向）.

14. 在杠杆上支点O的一侧与点O的距离为x_1的点P_1处，有一与$\overrightarrow{OP_1}$成角θ_1的力$\mathbf{F_1}$作用着; 在O的另一侧与点O的距离为x_2的点P_2处，有一与$\overrightarrow{OP_2}$成角θ_2的力$\mathbf{F_2}$作用着如图10.3.7所示，问$\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\mathbf{F_1}|,|\mathbf{F_2}|$符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

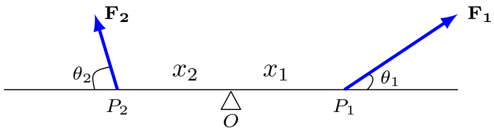

图10.3.7

15.求向量$\mathbf{a}=(4,-3,4)$在向量$\mathbf{b}=(2,2,1)$上的投影.

16.设$\mathbf{a}=(3,5,-2),\mathbf{b}=(2,1,4)$,问$\lambda$与$\mu$有怎样的关系，能使得$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$与$z$轴垂直？

17.试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

18.试用向量证明不等式:

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geq|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$,

其中a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3为任意实数，并指出等号成立的条件.

19.分别求母线平行于x轴与y轴且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2&=16,\\x^2+z^2-y^2&=0\end{cases}$的柱面方程.

20.求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2&=9,\\x+y&=1\end{cases}$在$xOy$面上的投影方程.

21,将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2&=9,\\y-x&=0\end{cases}$, (2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2&=4,\\z&=0\end{cases}$

22.求螺线$\begin{cases} x &= a\cos\theta, \\ y &= a\sin\theta, \\ z &= b\theta \end{cases}$,在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

23.求平面$2x-2y+z+5=0$与各坐标面的夹角的余弦.

24.求三平面$x+3y+z=1, 2x-y-z=0, -x+2y+2z=3$的交点.

25.求点$(1,2,1)$到平面$x+2y+2z-10=0$的距离.

26.求过点$(2,0,-3)$ 且与直线
$$\begin{cases} x-2y+4z &= 7, \\ 3x+5y-2z &= -1. \end{cases}$$
垂直的平面方程.

27.证明: 直线$\begin{cases} x+2y-z &= 7, \\ -2x+y+z &= 7. \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z &= 8, \\ 2x-y-z &= 0. \end{cases}$平行.

28.求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

29.求过点$(1,2,1)$而与两直线
$\begin{cases} x+2y-z &= -1, \\ x-y+z &= 1. \end{cases}$和$\begin{cases} 2x-y+z &= 0, \\ x-y+z &= 0. \end{cases}$
平行的平面方程.

30.求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

31.求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases} x+y-z &= -1, \\ 2x-y+z &= 4. \end{cases}$的距离.

第二部分

一、选择题

1. 已知非零向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$, 满足关系式$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, 则必有

$A.\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{0}, B.\mathbf{a}+\mathbf{b}=0, C.\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0, D.\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$

2.设$\mathbf{a}+\mathbf{3b}$与$\mathbf{7a}-\mathbf{5b}$垂直，$\mathbf{a}-\mathbf{4b}$与$\mathbf{7a}-\mathbf{2b}$垂直，$\mathbf{a}$ 与$\mathbf{b}$之间的夹角为

$A.\frac{\pi}{4}, B.\frac{\pi}{6}, C.\frac{\pi}{3}, D.\frac{\pi}{2}$

3.已知向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$是单位向量且适合$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$求$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=(\qquad)$

$A.0, B.1, C.3, D.-\frac{3}{2}$

4.向径$\overrightarrow{OM}$ 与x 轴成$45°$角，与y 轴成$60°$角，其模长为6，在z轴上的投影为负值，则点M的坐标为

$A.(3\sqrt{2},3,-3), B.(\sqrt{2},3,-3), C.(\frac{1}{3},-\sqrt{3},-3), D.(\sqrt{2},3,-3)$

5.已知平面π的方程为$3x+y-2z=0$及点$P(1,3,-4)$,则点P 关于平面π的对称点Q的坐标是

$A.(5,-1,0), B.(5,1,0), C.(-5,1,0), D.(-5,-1,0)$

6. 直线$\begin{cases} y & =2x-7 \\ z & =2x-5 \end{cases}$与平面$z=3x$ 的夹角为

$A.\frac{\pi}{6}, B.\frac{\pi}{3}, C.\arccos\frac{1}{3\sqrt{10}}, D.\arcsin\frac{1}{3\sqrt{10}}$

7.设平面的一般方程为$Ax+By+Cz+D=0$,若平面π通过x轴，当它不是坐标面时，它的方程中应有

$A.A=0$, 而B,C,D 均不为零，$B.D=0$, 而A,B,C, 均不为零

$C.A=B=0$, 而C,D 均不为零,$D.A=D=0$, 而B,C 均不为零

8.设直线ℓ 的方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{5}$, 平面$\pi$的方程为$3x+2y+z=1$,则

$A.$直线ℓ垂直于平面π,$B.$直线ℓ平行于平面π,

$C.$直线ℓ 在平面π上,$D.$直线ℓ与平面π斜交,

9.母线平行于x轴且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2 &= 16\\ x^2-y^2+z^2 &= 0\end{cases}$的柱面方程是

$A.$ 椭圆柱面$2x^2+2z^2=16$, $B.$ 椭圆柱面$x^2+2y^2=16$

$C.$ 双曲柱面$3y^2-z^2=16$, $D.$ 抛物柱面$3y^2-z=16$

10. 方程$(z-a)^2=x^2+y^2$表示的曲面是由

$A.xOy$面上的曲线$(z-a)^2=x^2$, 绕y 轴旋转得到的

$B.yOz$面上的曲线$(z-a)^2=y^2$, 绕x 轴旋转得到的

$C.xOz$面上的直线$z-a=x$, 绕z 轴旋转得到的

$D.yOz$面上的直线$z-a=y$, 绕y 轴旋转得到的

11.直线$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$与平面$2x+y-z+4=0$的夹角为

$A.\frac{\pi}{6}, B.\frac{\pi}{3}, C.\frac{\pi}{4}, D.\frac{\pi}{2}$

12.点$(1,1,1)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影为

$A.(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2})$ $B.(-\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2})$

$C.(1,-1,0)$ $D.(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})$

13.曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$是

$A.zOy$平面上的曲线$z=x$, 绕z 轴旋转而成的曲面

$B.zOy$平面上的曲线$z=|y|$, 绕z 轴旋转而成的曲面

$C.xOz$平面上的曲线$z=x$, 绕x 轴旋转而成的曲面

$D.yOz$平面上的曲线$z=|y|$, 绕y 轴旋转而成的曲面

14.旋转曲面$x^2-y^2-z^2=1$是

$A.xOy$平面上的双曲线, 绕x 轴旋转而成的曲面

$B.xOy$平面上的双曲线, 绕z 轴旋转而成的曲面

$C.xOy$平面上的椭圆, 绕x 轴旋转而成的曲面

$D.xOz$平面上椭圆, 绕x 轴旋转而成的曲面

15. 直线$\begin{cases} x-2y+z & =0 \\ x+y-2z & =0 \end{cases}$与平面$x+y+z=1$ 的位置关系是

$A.$直线在平面上, $B.$平行但不在平面上, $C.$垂直，$D.$相交但不垂直

16.设有三个非零向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$若$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0,\mathbf{a}\times\mathbf{c}=0,$则$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=$

$A.0,B.-1,C.1,D.3$

17.直线$\ell_1:\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{3}$与$\ell_2:\begin{cases} -x+y-1 & =0 \\ x+y+z-2 & =0 \end{cases}$的夹角是

$A.\frac{\pi}{4},B.\frac{\pi}{3},C.\frac{\pi}{2},D.0$

18.将xoz坐标面上的抛物线$z^2=4x$绕z轴旋转一周，所得旋转曲面的方程是

$A.z^2=4(x+y)\quad B.z^2=4\sqrt{x^2+y^2}$

$C.y^2+z^2=4x\quad D.y^2+z^2=\pm 4x$

19.平面$2x-2y+z+6=0$与xoy平面的夹角的余弦是

$A.-\frac{1}{3},B.\frac{1}{3},C.-\frac{2}{3},D.\frac{2}{3}$

二、填空题

1.直线ℓ_1的方程为$\begin{cases} x+y+z & =0 \\ 31x-30y-29z & =0 \end{cases}$, 直线$\ell_2$的方程为$\begin{cases} x+y+z & =0 \\ 30x-31y-30z & =0 \end{cases}$,则$\ell_1$与$\ell_2$的

位置关系是

2.过点$(0,2,4)$且与平面$x+2z=1$和$y-3z=2$都平行的直线方程是

3.过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases} x-2y+4z-7 & =0 \\ 3x+5y-2z+1 & =0 \end{cases}$垂直的平面方程是

三、解答题

1.求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程

2.求过点$(1,1,-1)$且平行于向量$\mathbf{a}=(2,1,1)$和$\mathbf{b}=(1,-1,0)$的平面方程

3.试求通过点$(2,-3,4)$,且与y轴垂直相交的直线方程

4.求平行于x轴且过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$的平面方程

5.求过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1, y-3z=2$平行的直线方程

6.求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程

7.求直线$\begin{cases} x+y+3z & =0 \\ x-y-z & =0 \end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角

8.求点$(3,-1,2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1 & =0 \\ 2x-y+z-4 & =0 \end{cases}$的距离

9. 过z 轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$的平面方程

10.已知两向量$\overleftarrow{a}=\{1,2,2\}$, $\overleftarrow{b}=\{3,0,4\}$ 求(1) $\overleftarrow{a}\cdot\overleftarrow{b}$,(2) $\overleftarrow{a}\times\overleftarrow{b}$,(3)$(\widehat{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}})$,(4)$Prj_{\overleftarrow{b}}\ \overleftarrow{a}$,(5) 与$\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$ 同时垂直的单位向量，(6) $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$夹角平分线上的单位向量。

11.已知一向量与向量$\overleftarrow{a}=\{3,6,8\}$垂直，又与$yOz$平面平行，且模长为2，求该向量

12. 设向量$\overleftarrow{a}=\{4,-3,2\}$,轴$u$与三个坐标轴的正向构成相等的锐角，试求(1) $\overleftarrow{a}$在轴u 上的投影；(2) $\overleftarrow{a}$ 与轴u 的夹角

13. 试求以向量$\overleftarrow{a}=\{2,1,-1\}$, $\overleftarrow{b}=\{1,-2,1\}$ 为边的平行四边形对角线的夹角.

15. 求分别满足下列条件的平面方程

（1）过点$M_1(4,1,2), M_2(-3,5,-1)$且与平面$6x-2y+3z+7=0$垂直

(2) 通过直线$\ell_1:\begin{cases} x-2y+z-1 &=0, \\ 2x+y-z-2 &=0 \end{cases}$,且平行于直线$\ell_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.

16.求分别满足下列条件的直线方程

（1）通过平面$x+y+z=1$和直线$\begin{cases} y &=1 \\ z &=1 \end{cases}$的交点，并在已给的平面上与已给的直线相垂直

(2) 求过点$M(-4,-5,3)$且与两直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$和$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ 都相交的直线方程。

(3)求过点$M(-1,0,4)$ 且平行于平面$3x-4y+z-10=0$,且与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程

17. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程

18. 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

19.求平行于平面$2x+y+2z+5=0$, 且与三坐标面构成的四面体体积为1的平面

20. 求通过直线ℓ : $\begin{cases} 2x-4y+z & =0 \\ 3x-y-2z-9 & =0 \end{cases}$且垂直于平面$\Pi$: $4x-y+z=1$的平面方程，并求直线ℓ在平面Π上的投影直线方程.

四、选做题

1.设$\overleftarrow{c}$ 是非零向量,证明:若$\overleftarrow{a}\cdot\overleftarrow{c}=\overleftarrow{b}\cdot\overleftarrow{c}$,且$\overleftarrow{a}\times\overleftarrow{c}=\overleftarrow{b}\times\overleftarrow{c}$,则$\overleftarrow{a}=\overleftarrow{b}$

2. 设一平面垂直于平面$z=0$, 并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases} y-z+1 & =0 \\ x & =0 \end{cases}$的垂线，求平面方程.

‘

3.已知直线$\ell_1:\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}, \ell_2:\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$

(1)求两直线之间的距离

(2)求两直线的公垂线方程

4. 设准线的方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2 &=2 \end{cases}$,母线的方向数为$-1,0,1$，求该柱面的方程

5.通过直线$\ell_1:\begin{cases} x-2y+z-1 &=0, \\ 2x+y-z-2 &=0 \end{cases}$,且平行于直线

$\ell_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.的平面方程

6.设一平面垂直于平面$z = 0$,并通过从点$(1, -1, 1)$到直线$\begin{cases} y - z + 1 & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}$的垂线，求平面方程

7.求在平面$\pi : x + y + z = 1$上，且与直线$L : \begin{cases} y & = 1 \\ z & = -1 \end{cases}$垂直相交的直线方程

8.已知直线$L_1:\begin{cases}2x+y-1&=0\\3x+z-2&=0\end{cases}$和$L_2:\frac{1-x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$,证明：$L_1//L_2$,并求$L_1,L_2$确定的平面方程

9.已知$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$为两非零向量，问t取何值时，向量模$|\mathbf{a}+t\mathbf{b}|$最小

10 .设一平面垂直于平面$z=0$,并过从点$(1,-1,1)$到直线$l:\begin{cases}y-z+1&=0\\x&=0\end{cases}$的垂线，求此平面的方程

11.求过点$(-1,0,4)$,且平行于平面$3x-4y+z-10=0$又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程

12 .设$|\overleftarrow{a}|=4,|\overleftarrow{b}|=3$, $\overleftarrow{a}$与$\overleftarrow{b}$的夹角为$\theta=\frac{\pi}{6}$求以$\overleftarrow{a}+2\overleftarrow{b}$和$\overleftarrow{a}-3\overleftarrow{b}$为边的平行四边形的面积

13 设M_0是直线L外一点，M是直线L上任意一点，且直线的方向向量为$\overleftarrow{S}$ 试证点M_0到直线L的距离$d=\frac{|\overleftarrow{M_0M}\times\overleftarrow{S}|}{|\overleftarrow{S}|}$