第四节 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的概念与性质

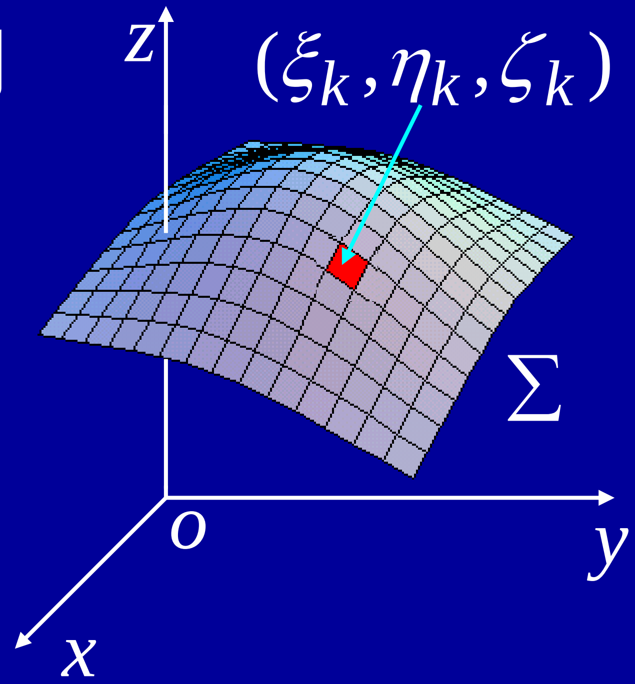
引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

"分割, 匀代变, 近似和, 求极限"

的方法, 可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$



其中ΔS_k表示小块曲面面积.

λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值

(曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面. dS为曲面面积元素.

由定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S = k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法

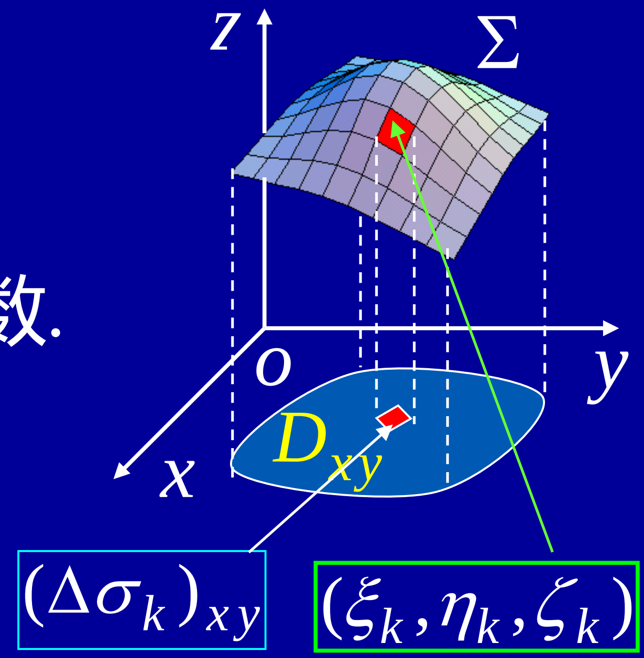
定理: 设有**单值光滑**曲面

$$\Sigma : z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$$

$z(x,y)$在 D_{xy} 上具有连续偏导数.

$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,

则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在, 且有



$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明: $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1 + z_x{}^2(x,y) + z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1 + z_x{}^2(\xi_k', \eta_k') + z_y{}^2(\xi_k', \eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{1 + z_x{}^2(\xi_k', \eta_k') + z_y{}^2(\xi_k', \eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k', \eta_k', z(\xi_k', \eta_k')) \cdot \sqrt{1 + z_x{}^2(\xi_k', \eta_k') + z_y{}^2(\xi_k', \eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x{}^2(x,y) + z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 将对面积的曲面积分化成其投影域上的二重积分.

2) 如果曲面方程为 $x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$

或 $y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$

可有类似的公式.

具体选择往哪个坐标面上投影的计算公式?

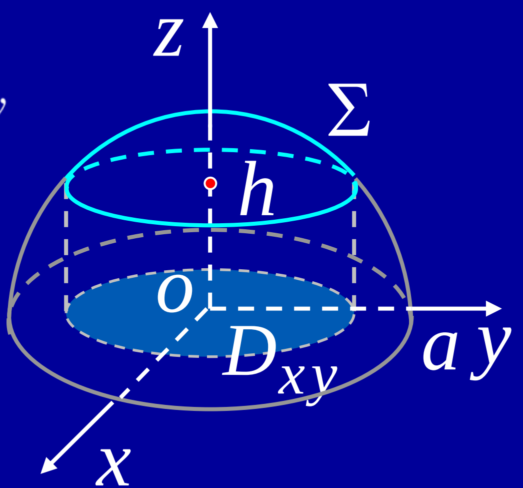
尽量选择曲面方程式简单，投影区域简单. 先由曲面形状及方程确定往哪个面投，再转化成其投影域上二重积分.

3) 被积函数$f(x,y,z)=1$的第一型曲面积分，就是曲面S的面积：

$$\iint_S dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\mathrm{dy}$$

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ , (x,y)\in D_{xy}$



$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

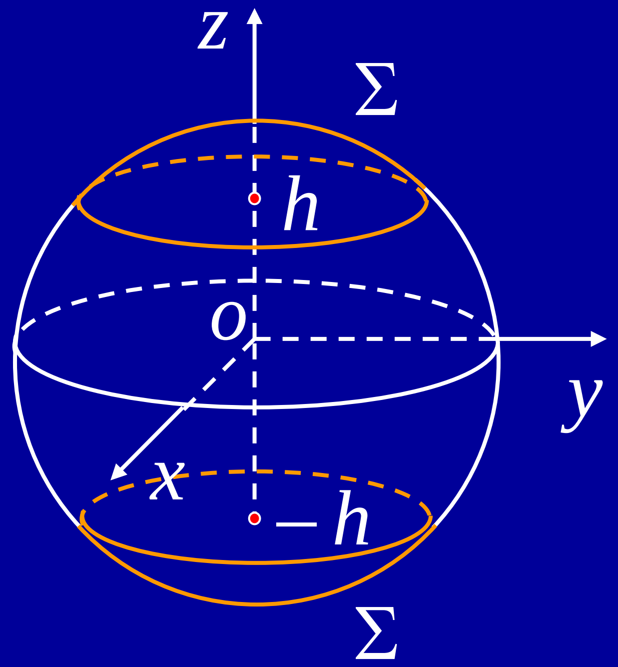
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\qquad 0\qquad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{\mathrm{h}}\quad)$$



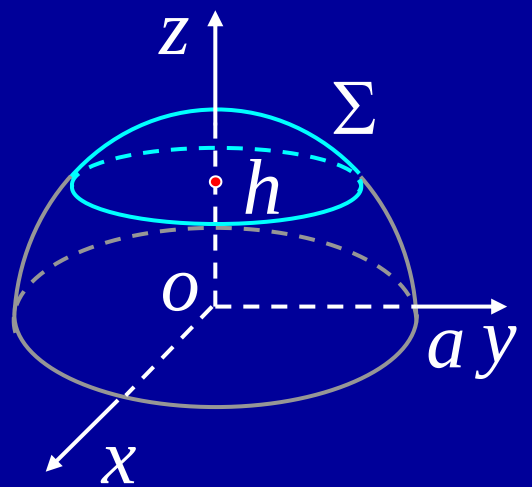
例2. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,dS$, Σ 如 例1.

解: Σ关于yOz面对称, $\iint_{\Sigma} x\,dS = 0$.

同理, $\iint_{\Sigma} y\,dS = 0$.

$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$

$D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2-h^2$



$$\iint\limits_{\Sigma} z dS = \iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= a\iint\limits_{D} dx\,dy = a\pi(a^2-h^2)$$

说明： 利用曲面的对称性和被积函数关于某个自变量的奇偶性可简化计算.

例：如曲面关于xOy面对称，

若 $f(x,y,z)$关于z奇函数，$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$

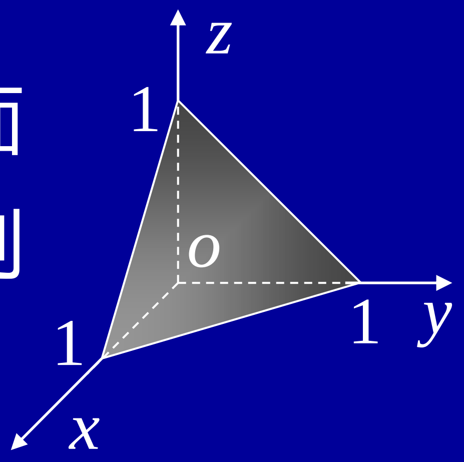
则 $$\iint_S f(x,y,z)\,dS=0$$

若 $f(x,y,z)$关于z偶函数，$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=2\iint_{S_0} f(x,y,z)\mathrm{dS}$$

其中S_0是S位于xOy面上方的部分.

例3. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$ 在平面 $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1-x-y,\ \ (x,y)\in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\big/120$$

例4. 计算 $\iint_S (x^2+2y^2+3z^2)\,dS$，其中

$$S: x^2+y^2+z^2=a^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$$

分析：若黎曼积分的积分区域Ω的表达式中，将x, y, z轮换后表达式不变(即积分区域不变), 则称Ω对x, y, z对等(可轮换)，这时Ω上任何可积函数$f(x, y, z)$的积分与x, y, z轮换后的函数$f(y, z, x), f(z, x, y), f(y, x, z)$等结果一样(一样的数值.).

$$原式= \frac{1}{2}\iint\limits_{S}(x^2+2y^2+3z^2+3x^2+2y^2+z^2)\,dS$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{S}(4x^2+4y^2+4z^2)\,dS$$

$$=\ 2a^2\iint\limits_{S}dS$$

$$=2a^2\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi a^2$$

$$=\pi a^4$$

例5. 设 Σ: $|x|+|y|+|z|=1$，求 $\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\,dS$.

解： 对称性知: $\oiint_{\Sigma} x\,dS = 0.$

由变量的轮换对称性:

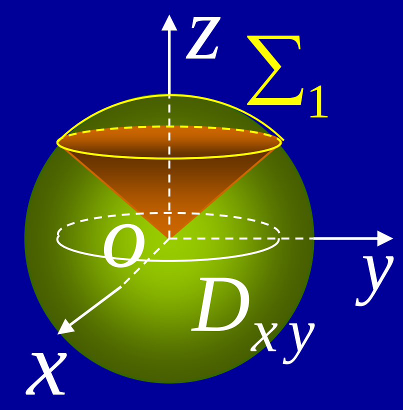
$$\oiint_{\Sigma}|y|\,dS = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\,dS = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}dS$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 8\iint_{\Sigma_1}dS = \frac{8}{3}\iint_{D_1}\sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

例6. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2,\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$,则

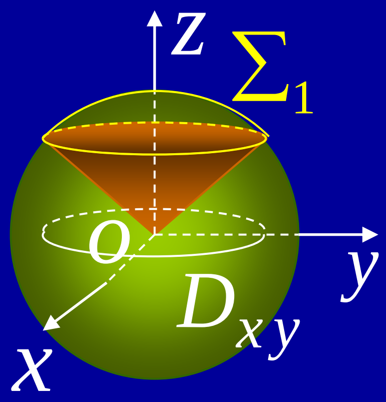
$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a} \frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{6}\pi a^4 (8 - 5\sqrt{2})$$



例7. 求 $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$ 其中S是介于平面$z=0, z=H(H>0)$之间的圆柱体$x^2+y^2\le R^2$的侧面，r为S上点到原点的距离.

解：S 垂直于xOy面，故不能将S投影到xOy面上,

可投到yOz面上.

$D_{yz}: -R\le y\le R, \quad 0\le z\le H.$

S 分成两片：$S_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$，$S_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}$

均有 $dS=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dy\,dz$

$$原式=\iint\limits_{S_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\left(\frac{1}{R^2+z^2}+\frac{1}{R^2+z^2}\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dy\,dz$$

$$=2R\int_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi arc\tan\frac{H}{R}$$

分析: 若将曲面分为前后(或左右)

两片，则计算较繁.

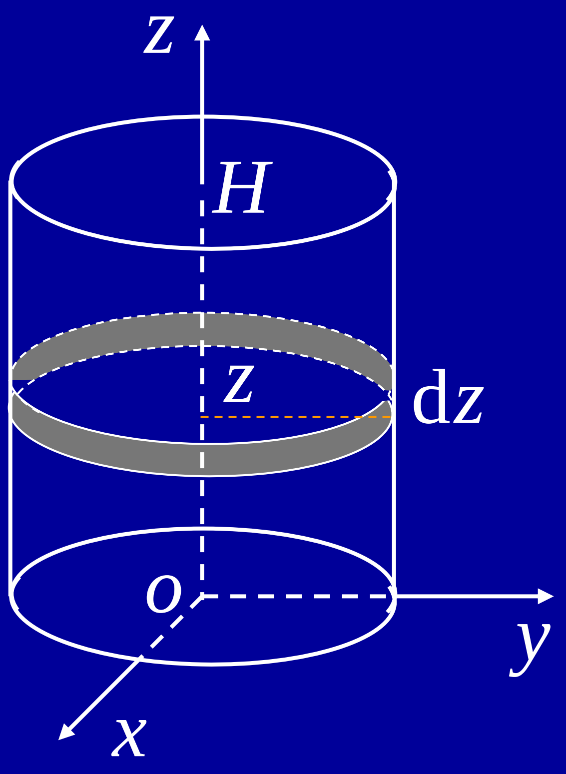
解法二: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S = 2\pi R\,\mathrm{d}z$$

则

$$I = \int_0^H \frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2 + z^2}$$

$$= 2\pi \arctan\frac{H}{R}$$



例8. 计算 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 显然球心为 $(1,1,1)$, 半径为$\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=4\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=4\cdot\bar{x}\cdot\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\cdot1\cdot4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

利用重心公式

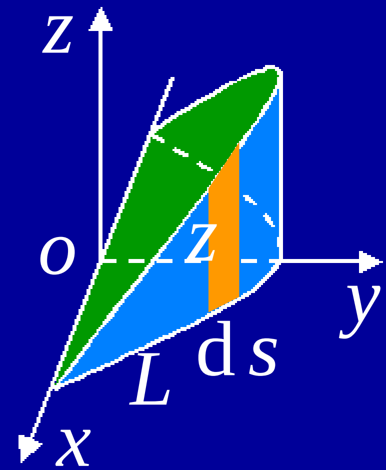
$$\bar{x}=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S\Big/\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

例9. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xoy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S .

解: $S=\iint_\Sigma \mathrm{d}S$

$L: x=\sqrt{5}\cos t\,,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le\pi)$

取 $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$



$$=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^\pi 3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^\pi\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

作 业

P222　　4: (1), 5: (2), 6: (1)(3), 7

内容小结

1. 定义: $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设$\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

备用题 1. 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu=x^2+y^2+z$，求此曲面壳在平面 $z=1$ 以上部分 Σ 的质量 M.

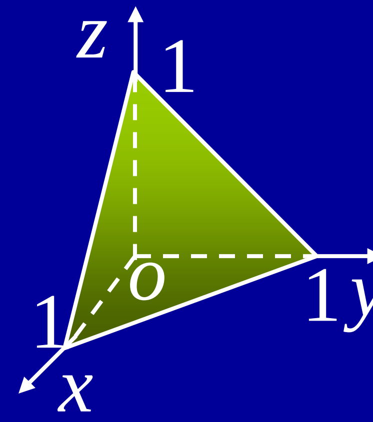
解: Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$，故

$$M=\iint_\Sigma \mu\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)=13\pi$$

2. 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ 的表面, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S.$



解: 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$

$$\therefore I=(\sqrt{3}+1)\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}\,y+$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$

3. 求半径为R 的均匀半球壳 Σ 的重心.

解: 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z}=\frac{\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S}$$

用球坐标

$z=R\cos\varphi$

$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

4. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R)$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$.

解: 取球面坐标系, 则 $\Sigma: z=R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\phi}{\lambda-R\cos\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\phi)}{\lambda-R\cos\phi}$$

$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$

5. 设有一颗地球同步轨道通讯卫星, 距地面高度 $h = 36000$ km, 运行的角速度与地球自转角速度相同, 试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比. (地球半径 $R = 6400$ km)

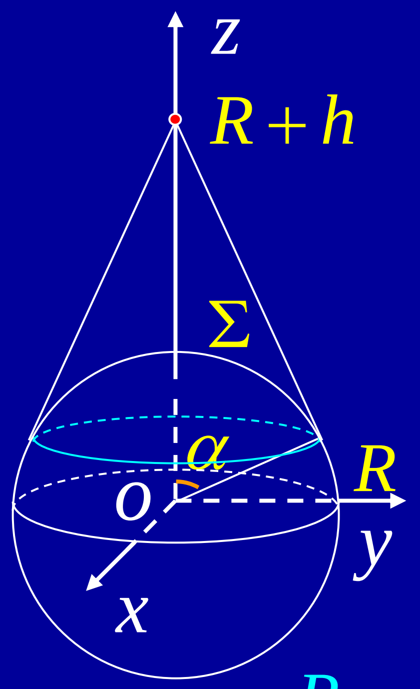
解: 建立坐标系如图, 覆盖曲面 Σ 的半顶角为 α, 利用球坐标系, 则

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

卫星覆盖面积为

$$A = \iint_\Sigma \mathrm{d}S = R^2 \int_0^{2\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\alpha} \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha) = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h}$$

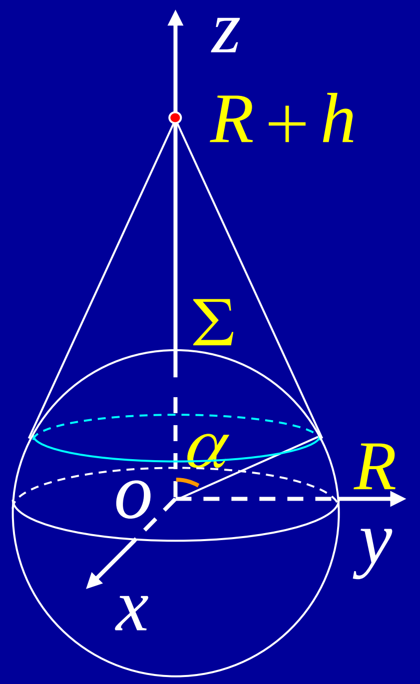


$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2}=\frac{h}{2(R+h)}$$

$$=\frac{36\cdot 10^6}{2(36+6.4)\cdot 10^6}\approx 40.5\,\%$$



由以上结果可知, 卫星覆盖了地球 $1/3$ 以上的面积, 故使用三颗相隔 $2\pi/3$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A