第七节 斯托克斯公式 *环流量与旋度

一、斯托克斯公式

*二、空间曲线积分与路径无关的条件

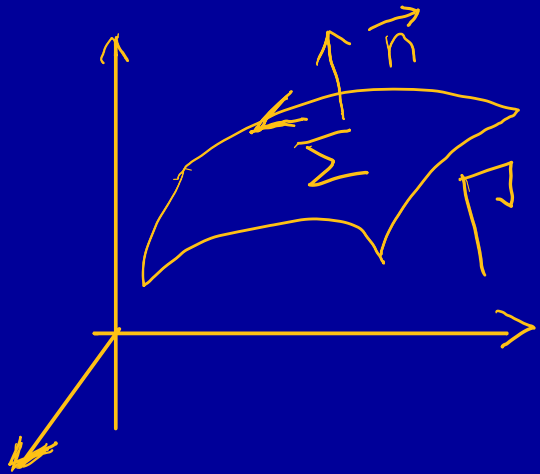
*三、环流量与旋度

问题：空间曲面Σ上的曲面积分与沿着Σ的边界曲线的曲线积分联系起来?

曲面的侧与其边界曲线的方向作如下规定：

有向曲面Σ的侧与其正向边界——符合右手法则：

当右手除拇指外的四指与Σ的边界曲线Γ的绕行方向一致，且手心对着Σ时，大拇指所指的方向与Σ上法向量的指向相同，称Γ为有向曲面Σ的正向边界曲线.



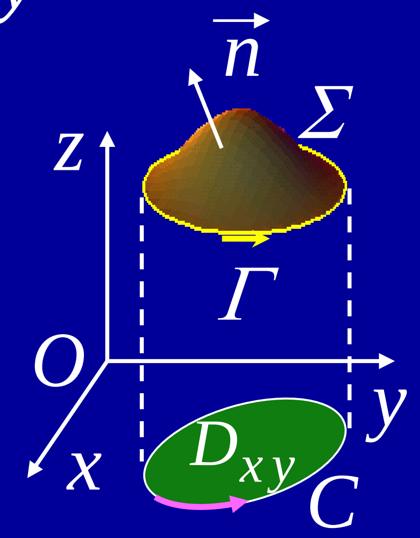
一、 斯托克斯公式

定理1 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，且Γ是Σ的正向边界曲线. 若函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在曲面(连同边界$\Gamma$)上具有一阶连续偏导数, 则有:

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$ **(斯托克斯公式)**

证: 先证 $\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$



情形1. Σ与平行 z 轴的直线只交于一点,

设其方程为 $\Sigma: z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$

设Σ取上侧 (如图).

Σ 的正向边界曲线Γ在xOy 面上的投影为D_{xy}的边界有向曲线C.

将 $\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$化成$D_{xy}$上二重积分，再由格林公式转化成其边界曲线$C$的曲线积分.

有向曲面Σ的法向量的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS$$

$$=-\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y\right)\cos\gamma\,dS$$

$$\boxed{f_y=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}}$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P\big(x,y,f(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (*)$$

化为二重积分时，将$P(x,y,z)$中的z 用$f(x,y)$代替，从而

$$\frac{\partial}{\partial y}P\big(x,y,f(x,y)\big)=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y$$

用格林公式，$(*) = \oint_C P[x, y, f(x, y)]\, dx$

设曲线C参数方程为：$x = x(t), y = y(t)$

曲线Γ参数方程为：$x = x(t),\ \ y = y(t), z = f(x(t), y(t))$

起点$t=\alpha$,终点$t=\beta$ （t单调从α变到β，画出曲线从起到终)

于是

$$\oint_\Gamma P(x, y, z)\, dx$$

$$= \int_\alpha^\beta P\left[x(t), y(t), f\big(x(t), y(t)\big)\right] x'(t)\, dt$$

$$= \oint_C P[x, y, f(x, y)]\, dx$$

因此 $\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

如果Σ取下侧，Γ也相应地改成相反方向,上式两端同时改变符号，因而上式仍成立.

同理可证 $\oint_{\Gamma} Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$\oint_{\Gamma} R\,\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得斯托克斯公式 ;

情形2 曲面Σ与平行 z 轴的直线交点多于一个, 则可通过作辅助线把 Σ分成与z 轴只交于一点的几部分,

在每一部分上应用斯托克斯公式, 然后相加, 由于沿辅助曲线方向相反的两个曲线积分相加刚好抵消, 所以对这类曲面斯托克斯公式仍成立.

证毕

注意: (1) 斯托克斯公式并**不要求Σ是单值函数曲面**.

(2) 如果Σ是 xOy 面上的一块平面区域, 则斯托克斯公式就是格林公式, 故格林公式是斯托克斯公式的特例.

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

(3) 便于记忆, 斯托克斯公式还可写作:

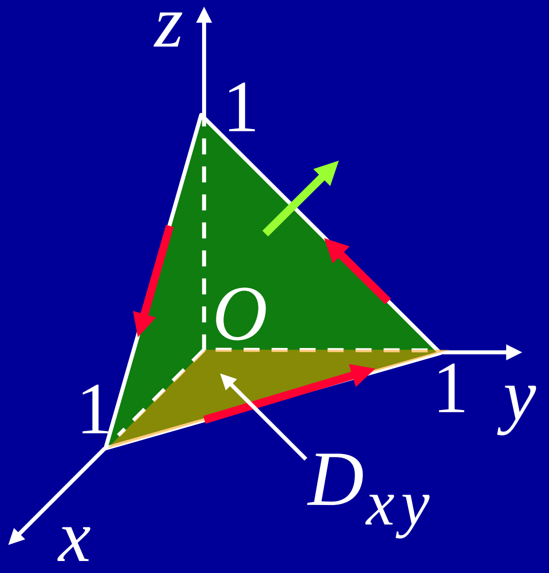
$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

其中$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$是有向曲面$\Sigma$在点$(x, y, z)$处的单位法向量.

例1. 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$
其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界, 方向如图所示.



解: 记三角形域为 Σ, 取上侧, 则

$$\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

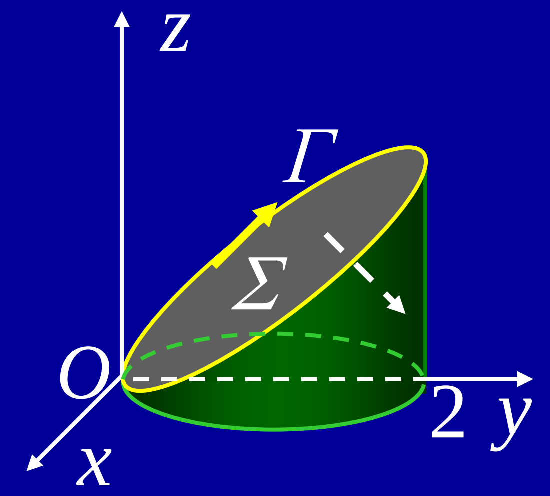
$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

利用对称性

例2. Γ为柱面$x^2+y^2=2y$与平面$y=z$的交线, 从z轴正向看为顺时针, 计算$I=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$.

解: 设Σ为平面$z=y$上被Γ所围椭圆域, 且取下侧, 则其法线方向余弦

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



利用斯托克斯公式得

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma(y-z)\,\mathrm{d}S=0$$

例 3. (2014研) 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，求$I=\oint_L z\,dx+y\,dz.$

解法一：L的参数方程为：$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=-\sin t \end{cases}$ $\quad t\in[0,2\pi]$

$$I=\int_0^{2\pi}[-\sin t(-\sin t)+\sin t(\text{-}\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt-\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt$$

$$=\pi$$

解法二：斯托克斯公式. L在平面$y+z=0$上所围成部分记为Σ(按右手法则)，法向朝上，Σ单位法向量:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)=\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$$

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} dS =\iint_{\Sigma}\cos\beta\, dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma} dS$$

Σ 面积记为σ，Σ在xOy面上投影区域面积为π，由

$\sigma\cos\gamma=\pi$，则$\sigma=\sqrt{2}\pi$. $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma} dS=\pi.$

例 4. (2001研) 求 $I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$

其中L是平面 $x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从z轴正向看，L为逆时针方向.

解：设Σ为平面$x+y+z=2$上L所围部分. 由L的定向，按右手法则，Σ取上侧，其单位法向量：

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

由斯托克斯公式

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[(-2y-4z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-6x-2z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x+2y+3z)\, dS$$

(将 $x+y+z=2$ 代入)

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (6+x-y)\, dS$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{D} (6+x-y)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\, dy$$

$$= -2 \iint_{D} (6+x-y)\, dx\, dy$$

$D: |x|+|y| \le 1$

$$= -12 \iint_{D} dx\, dy$$

由对称性知 $\iint_{D} (x-y)\, dx\, dy = 0$

$$= -24$$

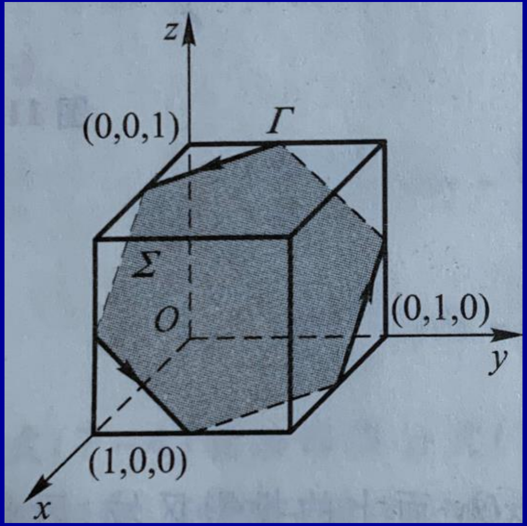
例 5. 设曲线Γ是由正方体$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$的六个表面与平面$x+y+z=\frac{3}{2}$的交线组成，由$z$轴正向往负向看，$\Gamma$的方向为逆时针方向, 求

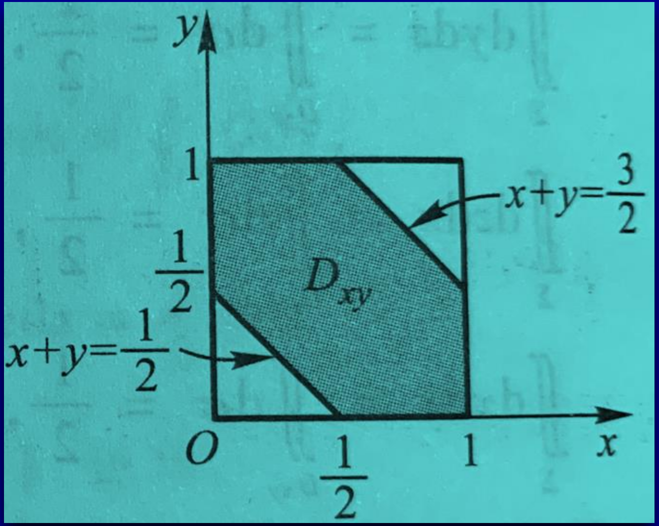
$$I=\oint_{\Gamma}(z^2-y^2)\,dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)\,dz$$

解： 取曲面Σ为：

平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$

在Γ所围的部分，其方向为上侧.





由斯托克斯公式:

$$I = \iint_{\Sigma} [(2y+2z)+(2z+2x)+(2x+2y)]\frac{1}{\sqrt{3}}\,dS$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\,dS$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma} dS$$

$$= 6\iint_{D} dx\,dy = \frac{9}{2}$$

例 6. 求 $I=\oint_{\Gamma}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$

其中Γ为椭圆，它是柱面 $x^2+y^2=a^2$和平面

$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$的交线，从$x$轴正向看去，

这椭圆是逆时针方向.

解：平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$上$L$所围的区域记为$\Sigma$，取上侧，

有向曲面Σ的法向量为：$(h,0,a)$

$$I=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=-2\iint_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy$$

$$= -2\iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h+0+a)\,dS$$

$$= -2\iint_D \frac{h+a}{\sqrt{a^2+h^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\mathrm{dy}$$

$$= -2\frac{h+a}{a}\iint_D dx\,dy$$

$$= -2\pi a(h+a)$$

$$(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h,0,a)$$

Σ在xOy面上投影域为 D： $x^2+y^2 \le a^2$

$$\mathrm{dS} = \frac{\mathrm{dx}\,\mathrm{d}y}{\cos\gamma}$$

*二、空间曲线积分与路径无关的条件

定理2. 设 G 是空间一维单连通域，函数 P,Q,R 在G内具有连续一阶偏导数，则下列四个条件相互等价:

(1) 对G内任一分段光滑闭曲线Γ，有

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

(2) 对G内任一分段光滑曲线Γ，$\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 与路径无关

(3) 在G内存在某一函数 u，使 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

(4) 在G内任何一点处，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

证: $(4) \Rightarrow (1)$ 由斯托克斯公式可知结论成立;

$(1) \Rightarrow (2)$ (自证)

$(2) \Rightarrow (3)$ 设函数

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} P\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} p(x + \Delta x, y, z)$$

$$= P(x, y, z)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z),\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z)$

故有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$

$(3)\Rightarrow(4)$ 若(3)成立, 则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R$$

因P, Q, R 一阶偏导数连续，故有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

同理 $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\quad \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$

证毕

例7. 验证曲线积分 $\int_{\Gamma}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$ 与路径无关，并求函数

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$$

解: 令 $P=y+z$，$Q=z+x$，$R=x+y$

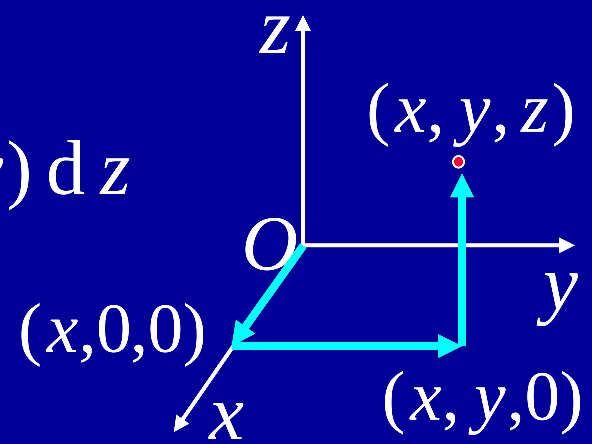
$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$\therefore$ 积分与路径无关, 因此

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y+\int_0^z (x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=xy+(x+y)z$$

$$=xy+yz+zx$$



*三、 环流量与旋度

1. **定义**：设 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 为一向量场，P,Q,R连续，Γ是向量场的定义域内的一条分段光滑的有向闭曲线，称 $\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 为向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线的**环(流)量**.

$$\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dr}=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds$$

有向曲线元：$\overrightarrow{dr}=\vec{\tau}\,ds=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$

$\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的单位切向量.

2. 环量密度(旋度)

由向量场$\vec{A}$沿一闭曲线的环流量可引出向量场$\vec{A}$在一点的环量密度或旋度. 是一个向量，定义如下：

设有一向量场$\vec{A}=(P,Q,R)$, 函数P,Q,R均具有一阶连续偏导数, 则向量

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

称为向量场$\vec{A}$的**旋度**. rotation

若向量场$\vec{A}$的旋度$\mathrm{rot}\,\vec{A}$处处为零，则称向量场$\vec{A}$为**无旋场**.

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

从而，斯托克斯公式的向量形式：

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

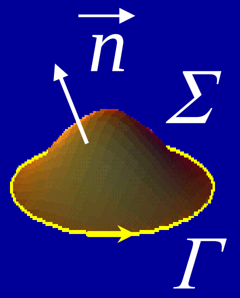
($\vec{n}$ 为有向曲面Σ指定侧的单位法向量)

或 $\iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}\,\vec{A})_n\,\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} A_{\tau}\,\mathrm{d}s$ ①

$\vec{A}$ 的旋度 在 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 上的投影: $\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_n$

$\vec{A}$在 Γ 的切向量 $\vec{\tau}$ 上的投影: A_{τ}

斯托克斯公式①的物理意义:



$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{A})_n \,\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \vec{A}_\tau \,\mathrm{d}s$$

向量场 $\vec{A}$ 产生的旋度场穿过 Σ 的通量

向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量

这里，Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则!

例8. 求向量场 $\vec{A} = (z + \sin y)\vec{i} - (z - x\cos y)\vec{j}$ 的旋度 .

解:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z + \sin y & -(z - x\cos y) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} + \vec{j}$$

例9. 设 $\vec{A}=(2y,3x,z^2)$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4$, $\vec{n}$ 为Σ的外法向量, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$.

解:
$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 3x & z^2\end{vmatrix}=(0,0,1)$$

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\therefore\quad I=\oiint_{\Sigma}\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma_上}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oiint_{\Sigma_下}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

说明： 平面向量场

$$xOy\text{面上向量场}\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

定义：向量场$\vec{F}$沿着有向闭曲线C的环量为$\oint_C P\,dx+Q\,dy.$

定义：xOy面上向量场的旋度 $\operatorname{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$

此时，斯托克斯公式变成Green公式：

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

物理意义： 沿平面曲线(闭的有向曲线)C的环量等于C所包围的平面区域内各点旋转的总积累.

练习 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=\underline{\ {}^{2}\!/\!_{r}\ };\quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=\underline{\ \vec{0}\ }.$$

提示: $\operatorname{grad} r=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\cdot {}^{x}\!/\!_{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

三式相加即得 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r}\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

作 业

P248　2: (1), (3) ;　3: (1) ;　5：(1)

总习题作 业

P249　1,　2,　3: (1)(5)(6),　4: (2)(3),

5,　7,　11

场论总结:

一、场论中的三个“度”

设 $u=u(x,y,z)$, $\vec{A}=(P,Q,R)$, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, 则

梯度: $\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\nabla u$

散度: $\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$

旋度: $\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$

二、常见的几种场

连续向量场 $\vec{A}=(P, Q, R)$,

1. 保守场： 满足 $\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ 与路径无关,

称$\vec{A}$为保守场.

2. 有势场： 若存在某个可微函数$u(x, y, z)$,使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z,$$

即： $\vec{A} = \operatorname{grad} u$. 即$\vec{A}$是数量场$u$的梯度场.

3. 无旋场： $\vec{A}=(P, Q, R)$, 各点旋度为0. 即$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$.

连续可微，空间一维单连通向量场$\vec{A}$:

保守场$\Leftrightarrow$ 有势场 $\Leftrightarrow$无旋场

4. 无源场：

若在向量场$\vec{A}(M)$中每一点都有$\operatorname{div}\vec{A}(M)=0$，

称$\vec{A}$为无源场

5. 调和场： 既无源又无旋的场

三、1）旋度场是无源场

向量场$\overrightarrow{A}=(P,\ Q,\ R)$, P, Q, R 具有二阶连续偏导, 则

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_x'+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)_y'+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)_z'=0.$$

2）梯度场是无旋场

对于数量场$u=u(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，

其梯度场为$\vec{F}$，即 $\vec{F}=\text{grad}u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$，则

$$\text{rot}(\text{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=\vec{0}$$