第五节 对坐标的曲面积分

一、有向曲面

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

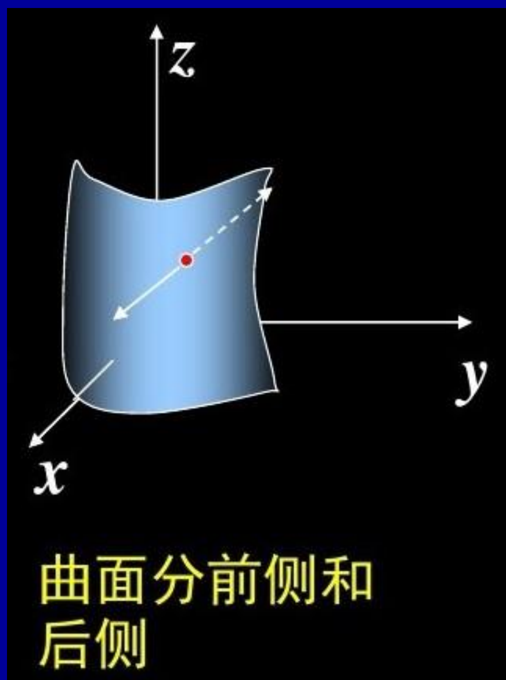
三、对坐标的曲面积分的计算法

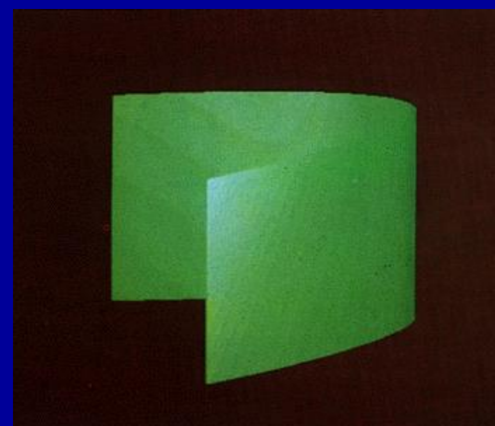
四、两类曲面积分的联系

一、曲面的侧及有向曲面

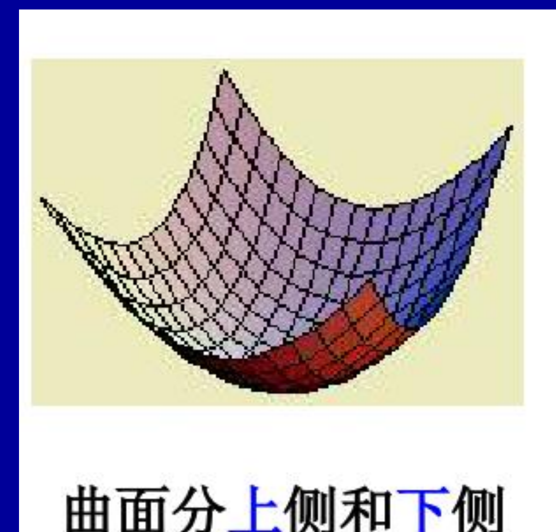
假设曲面光滑，通常遇到的曲面都是双侧的. 如:

曲面分内侧和外侧





曲面分左侧和右侧



这种有两侧的曲面叫双侧曲面.

1. 双侧曲面的侧

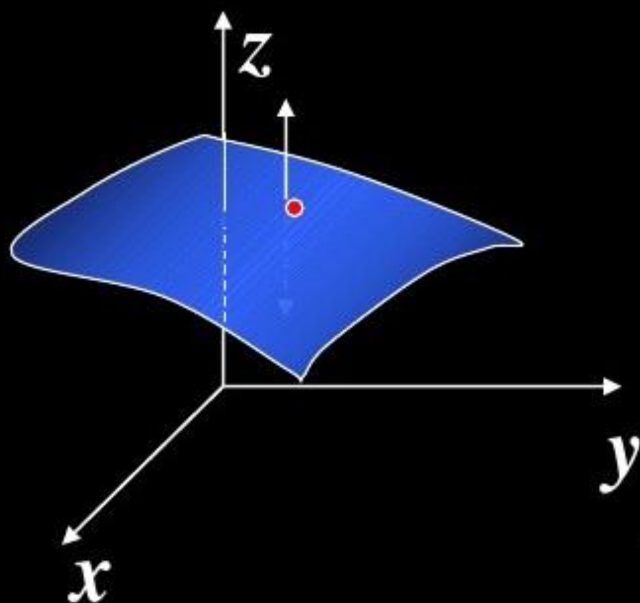
光滑曲面上任一点的法向量有两个不同的方向，可通过规定法向量的方向(指向)来区分曲面的侧.

1) 如果S为封闭曲面，分为内侧 (法向量的指向朝内) 和外侧(法向量的指向朝外，即法向量指向曲面外部).

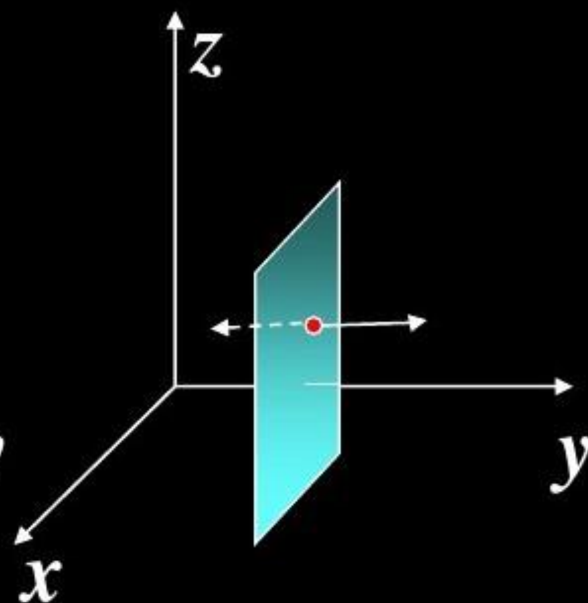
2) 单值函数曲面的侧:

曲面S	侧	曲面S的法向量指向
$z=z(x,y)$	上侧	法向量与z轴正向夹角为锐角
	下侧	钝角
$y=y(z,x)$	右侧	法向量与y轴正向夹角为锐角
	左侧	钝角
$x=x(y,z)$	前侧	法向量与x轴正向夹角为锐角
	后侧	钝角

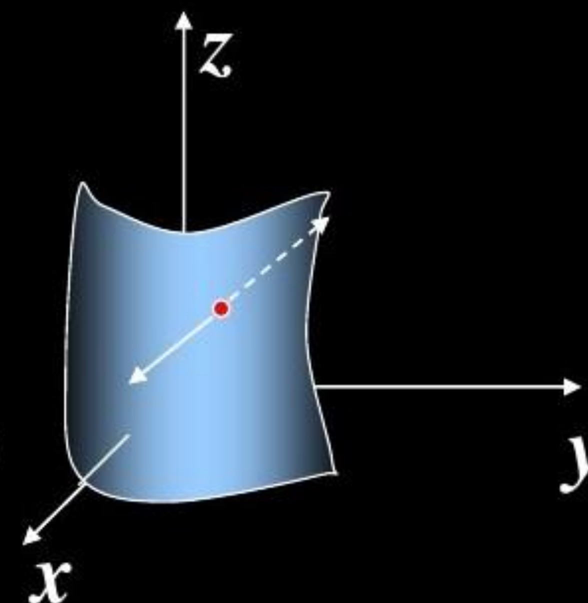
2. **有向曲面:** 取定了法向量，即选定了侧的曲面.



曲面分上侧和
下侧



曲面分左侧和
右侧

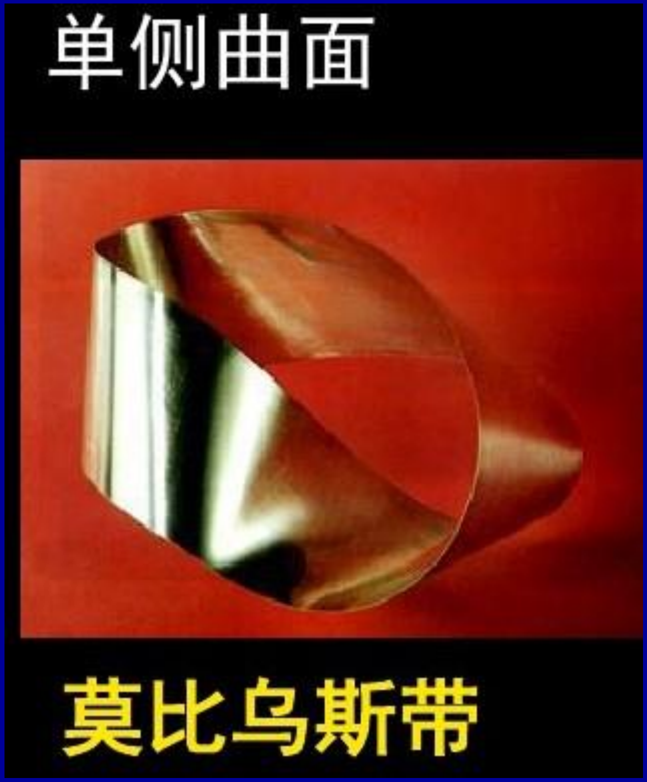


曲面分前侧和
后侧

2. 单侧曲面: 只有一侧的曲面.

构造：一矩形长纸带$ABCD$,

将它的一端旋转180^0后，与另一端粘合在一起，即A与C重合，B与D重合.



简言：带上任意一处出发涂色，不越过边界可将它全部涂满.

讨论双侧曲面.

3. 有向曲面在坐标面上的投影

设 Σ 为有向曲面，其上取一小块曲面ΔS，把ΔS投影到xOy面上，得到一投影区域，其面积为: $(\Delta\sigma)_{xy} \ge 0$.

假定ΔS上各点处的法向量与z轴的夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号(都是正的或负的).

定义**有向曲面ΔS在xOy面上的投影**$(\Delta S)_{xy}$:

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma > 0\text{时} \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma < 0\text{时} \\ 0, & \text{当}\cos\gamma \equiv 0\text{时} \end{cases}$$

类似可规定 $(\Delta S)_{yz}, (\Delta S)_{zx}$

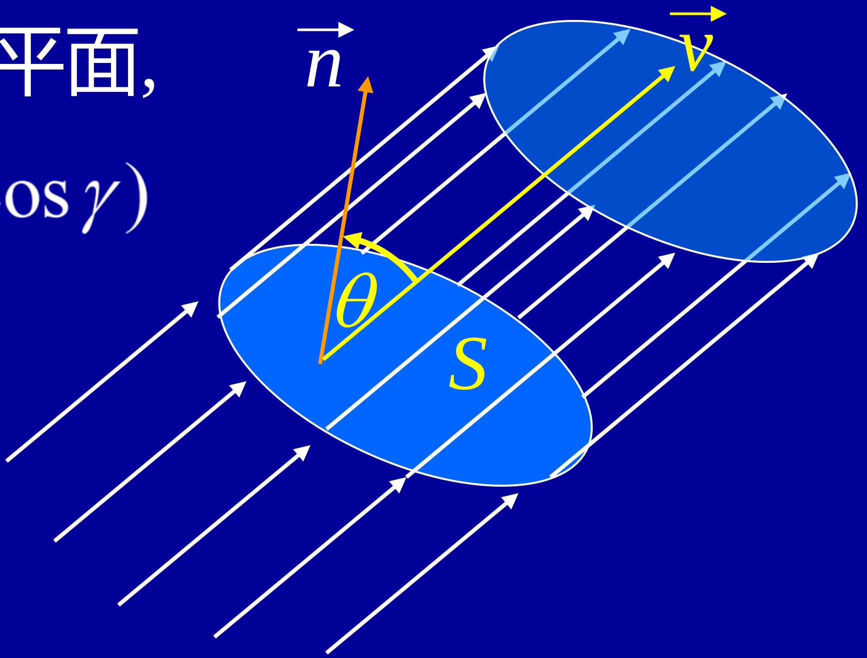
实际：投影区域面积赋予一定的正负号.

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为1)的速度场为 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

求单位时间流过有向曲面 Σ指定侧流体的质量，即流量Φ .

分析: 若 Σ 是面积为S 的平面,



法向量: $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量

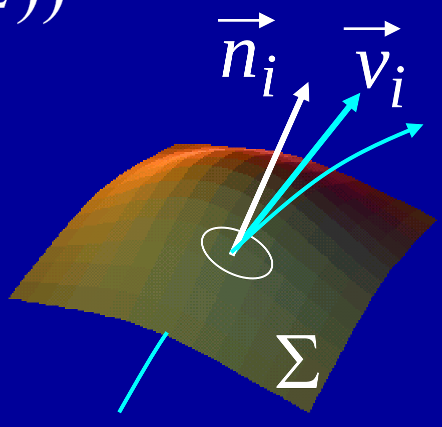
$$\Phi=S\cdot|\vec{v}|\cos\theta$$

$$=S\,\vec{v}\cdot\vec{n}$$

对一般的有向曲面Σ，对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用 "分割, 匀代变, 近似和, 取极限"

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$



设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

2. 定义： 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, P,Q,R 在 Σ 上有界. 将 Σ 分割成 n 块小曲面 ΔS_i, $i=1,2,\ldots n$. 同时，用 ΔS_i 表示其面积. 任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 记 $\vec{n_i}=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$ 为 Σ 在该点处指定侧的单位法向量. 用 $(\Delta S_i)_{yz}$, $(\Delta S_i)_{zx}$, $(\Delta S_i)_{xy}$ 表示 ΔS_i 在 yOz 面, zOx 面, xOy 面上的投影. 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i$ 的直径$\}$.

若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，下面极限总存在, 且为同一值,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{A}(M_i)\cdot\overrightarrow{n_i}\right)\Delta S_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\,\Delta S_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上对坐标的曲面积分，或第二型曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

P, Q, R 叫做**被积函数**； Σ 叫做**积分曲面**.

$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 称为P 在有向曲面Σ上**对坐标 y, z 的曲面积分;**

$\iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ 称为Q 在有向曲面Σ上**对坐标 z, x 的曲面积分;**

$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 称为R 在有向曲面Σ上**对坐标 x, y 的曲面积分.**

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3. 存在性

当P, Q, R在有向光滑曲面Σ上连续时，对坐标曲面积分一定存在. 分片光滑有向曲面，用积分曲面可加性.

4. 性质

具有与第二型曲线积分相类似的性质. 以$\iint_{\Sigma} R\,dx\,dy$为例.

(1) 线性性质: $\displaystyle\iint_{\Sigma}\left(k_1R_1(x,y,z)+k_2R_2(x,y,z)\right)dx\,dy$

$$=k_1\iint_{\Sigma}R_1\,dx\,dy+k_2\iint_{\Sigma}R_2\,dx\,dy$$

(2) 积分曲面可加性 $\Sigma=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Sigma_i$, 且 Σ_i 间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma}R\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{k}\iint_{\Sigma_i}Rdxdy$$

(3) 有向性. 用Σ^- 表示有向曲面Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-}Rdxdy=-\iint_{\Sigma}Rdxdy.$$

表明：当积分曲面改变为相反侧时，对坐标的曲面积分改变符号. 因此，必须注意积分曲面所取的侧.

(4) 当Σ为母线平行于z轴的柱面时, 有向曲面Σ在xOy面上的投影为0. 从而有

$$\iint_{\Sigma} R\,dx\,dy = 0.$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

——— 转化为其投影区域上的二重积分

(1) 若曲面Σ方程：$z = z(x, y)$. Σ 在xOy面上的投影区域为D_{xy}. 设$z(x, y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数（即Σ 光滑曲面）. 要求**Σ为单值函数曲面**. 设$R(x, y, z)$在 Σ 上连续, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dx\, dy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R\big(x, y, z(x, y)\big)\, dx\, dy$$

这里当有向曲面Σ取上侧时为正，当Σ取下侧时为负.

证明: $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)\,)(\Delta S_i)_{xy}$$

当Σ 取上侧时, $\cos\gamma > 0$, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = \underline{(\Delta\sigma_i)_{xy}}$

投影区域面积

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\, z(\xi_i,\eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

当积分曲面 Σ 取下侧, 则$\cos\gamma < 0$, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma_i)_{xy}$.

从而 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

注: 若 Σ 的方程在 D_{xy} 上不是单值的, 应将Σ分为几个单值曲面分片处理.

(2) 若**单值函数曲面** $\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$, 则有

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

前侧 $(\cos\alpha > 0)$ 取正号; 后侧 $(\cos\alpha < 0)$ 取负号

(3) 若**单值函数曲面** $\Sigma: y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$, 则有

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x, y(z,x), z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

右侧 $(\cos\beta > 0)$ 取正号; 左侧 $(\cos\beta < 0)$ 取负号

注: 1) 正负号取决于有向曲面侧法向量方向余弦正负值;

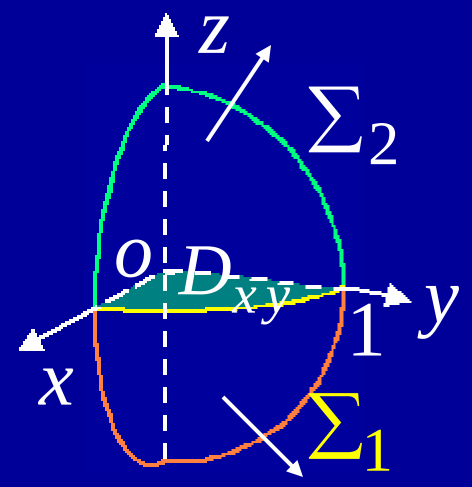
2) 注意“投影”是往哪个坐标面上投的;

3) 对不同坐标的曲面积分, 可将曲面Σ 向不同坐标面投影, 化为投影域上不同的二重积分.

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第五卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

$$\boxed{\text{根据对称性} \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0}$$



解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

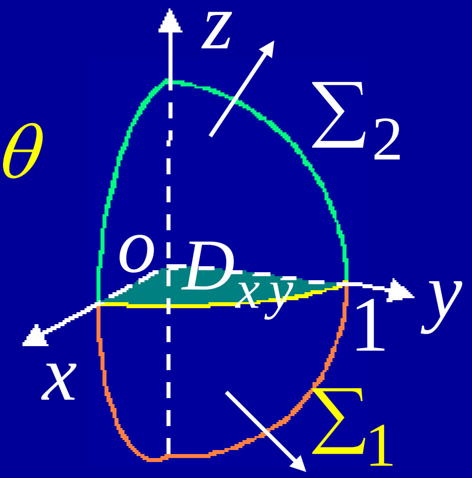
$$= -\iint_{D_{xy}} xy\,(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

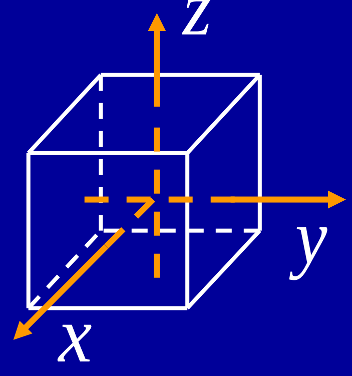
$$= \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2/15$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

$$\text{原式}=3\iint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2})$ 取下侧

$$=3\left[\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=3\left[\iint_{D_{xy}}\left(\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=3a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3a^3$$

例3. 求 $\iint_\Sigma x^2\,dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2 dx\,dy$, Σ是柱面

$x^2 + y^2 = 1$ 与平面$z = 0, z = 1$ 所围空间区域的边界曲面，方向向外.

解：有向曲面 Σ 分成三部分：

Σ_1: $z = 0\ (x^2 + y^2 \le 1)$ 下侧

Σ_2: $z = 1\ (x^2 + y^2 \le 1)$ 上侧

Σ_3: $x^2 + y^2 = 1\ (0 \le z \le 1)$ 外侧

所以 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma_3} x^2\,dy\,dz$

$= \iint_{D_1} (1 - y^2) dy\,dz - \iint_{D_1} (1 - y^2) dy\,dz = 0$

$D_1: -1 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$ (Σ_1, Σ_2在yOz面上的投影为0)

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2\, dz\, dx = \iint\limits_{\Sigma_3} y^2\, dz\, dx =$$

$$\iint_{D_2} (1 - x^2)\, dzdx - \iint_{D_2} (1 - x^2)\, dzdx = 0.$$

$D_2: -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

(Σ_1, Σ_2在xOz面上的投影为0)

$$\iint_{\Sigma} z^2\, dx\, dy = \iint_{\Sigma_1} z^2\, dx\, dy + \iint_{\Sigma_2} z^2\, dx\, dy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} 0\, dx\, dy + \iint\limits_{D_{xy}} dx\, dy = \pi$$

(Σ_3在xOy面上的投影为0)

故原式$=\pi$.

说明： 计算一个完整的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q dz\,dx + R dx dy$$ 需向各个坐标面

分别投影,为避免向各坐标面投影，也可利用两类曲面积分间的联系公式，化成第一型曲面积分，将其统一成一种形式，即将对三个坐标面上投影的积分转化为投影到一个坐标面上的积分.

为此，研究两类曲面积分之间的联系.

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\, P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\,\big]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\, P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\big]\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\underline{\mathrm{d}S}$$ 面积微元

其中$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$是有向曲面Σ指定侧的法向量的方向余弦.

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S \qquad (*)$$

有向曲面Σ指定侧的单位法向量

令 $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

曲面面积微元向量

$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

向量形式 $\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

$A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}$ ($\vec{A}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影)

$$= \iint_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}S$$

例：若假设$\Sigma: z = z(x,y)$给出，光滑单值函数曲面.

在xOy面上投影区域为D_{xy}. 假定Σ取上侧. 故

$$(*) = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} [P\left(x,y,z(x,y)\right)\left(-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) +$$

$$\mathrm{Q}\left(x,y,z(x,y)\right)\left(-\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) +$$

$$\mathrm{R}\left(x,y,z(x,y)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{dxdy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[-P\left(x,y,z(x,y)\right)z_x - Q\left(x,y,z(x,y)\right)z_y + R\left(x,y,z(x,y)\right)\right] dx\mathrm{dy}$$

Σ取下侧：

$$(*) = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} \Big[P\big(x, y, z(x, y)\big)z_x + Q\big(x, y, z(x, y)\big)z_y - R\big(x, y, z(x, y)\big)\Big]\,dx\mathrm{dy}$$

注：这是把第一型曲面积分转化成投xOy面上的二重积分. 若方便可类似考虑投影到yOz面，zOx面，同时注意选定的侧.

例4. 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.

解:

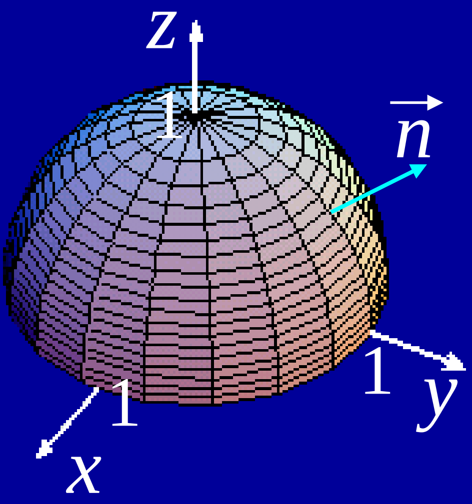
$$I=\iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

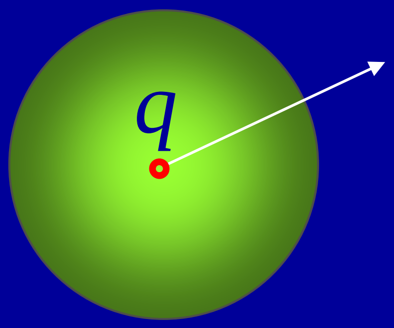
$$=\frac{\pi}{2}$$



例5. 位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z)\quad\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

求$\vec{E}$通过球面 $\Sigma: r=R$ 外侧的电通量 Φ .



解:

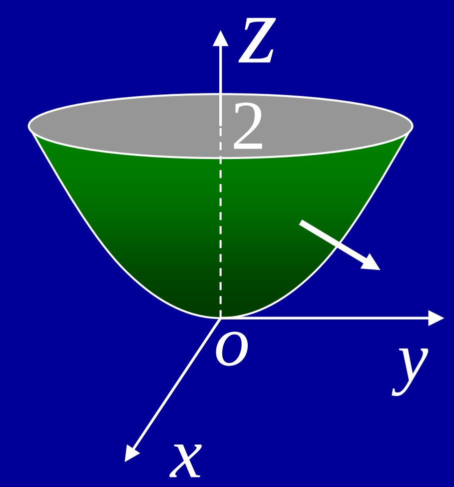
$$\Phi=\iint_\Sigma \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$=\iint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma \frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma \frac{q}{r^2}\,\mathrm{d}S=\frac{q}{R^2}\iint_\Sigma \mathrm{d}S$$

$$=4\pi q$$

例6. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

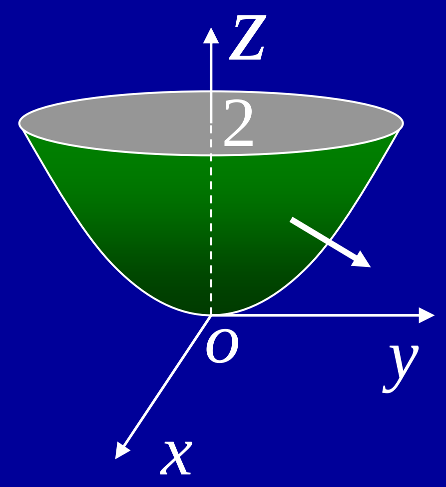
$$= \iint_\Sigma (z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_\Sigma (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\end{aligned}}$$

$$\therefore\ \text{原式} = \iint_\Sigma [(z^2+x)(-x) - z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入, 得



$$原式 = -\iint_{D_{xy}}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x](-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$= 8\pi$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例7. 求$\iint_{\Sigma} xy\,dy\,dz + z^2 dz\,dx + (x^2+y^2)dx\,dy$

Σ为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$在柱面$x^2+y^2=x$内的部分，

其法向量与OZ轴的夹角为锐角.

解：原式$=\iint\limits_{D}\left[xy\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right.$

$\left.+(x^2+y^2)\right]dxdy$

(D: $x^2+y^2\le x$)

$$=\iint_D\left(\frac{y-y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+x^2+y^2\right)dx\mathrm{dy}$$

对称性

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\,dr=\cdots$$

例8. 设$f(x,y,z)$为连续函数,Σ为平面$x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧，求

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,dy\,dz+[2f(x,y,z)+y]dz\,dx$$
$$+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

解：平面Σ上侧法向量的方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I=\iint_{\Sigma}([f(x,y,z)+x]\frac{1}{\sqrt{3}}+[2f(x,y,z)+y](-\frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$+[f(x,y,z)+z]\frac{1}{\sqrt{3}})\,\mathrm{dS}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\,dS=\frac{1}{2}$$

例9. 求 $\mathrm{I}=\iint_{\Sigma} x^2 dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2 dxdy$

Σ为半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$的上侧.

解: $\iint_{\Sigma} x^2 dy\,dz=0$, 因$\Sigma$关于$yOz$面对称， x^2关于x偶函数,

化为二重积分是，由前后侧两张曲面，正负号抵消.

同理，$\iint_{\Sigma} y^2 dz\,dx=0$.

$$I=\iint_{\Sigma} z^2 dxdy \quad =\iint_{D}(a^2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$4\iint_{D_1}(a^2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}a^4$$

注：曲面对变量字母不具有轮换对称性.

$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$与$y^2+z^2+x^2=a^2(x\geq 0)$

并非同一曲面.

例10. 求 $I=\iint_{\Sigma} x dy\,dz+y dz dx+z\,dx\mathrm{d}y$,

Σ: $x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$，正法线方向朝上.

解： 积分平面具有轮换对称性，轮换时正法线方向不变.

$$I=3\iint_{\Sigma} z\,dxdy=3\iint_{D}(1-x-y)\,dxdy=\frac{1}{2}$$

$$D=\{(x,y)|x+y\leq 1\,,x\geq 0,y\geq 0\}$$

法二：化为第一型曲面积分，向上单位法向量$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\,ds=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma} dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

例11. $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 \mathrm{dzdx} + z^3 \mathrm{dxdy}$, 其中$\Sigma$为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$的外侧.

解：Σ对变量具有轮换对称性.

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dydz = \oiint_{\Sigma} y^3 \mathrm{dzdx} = \oiint_{\Sigma} z^3 \mathrm{dxdy}$$

$$\oiint_{\Sigma} z^3 \mathrm{dxdy} = \iint_{D} (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx\, dy$$

$$- \iint_{D} -(R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx\, dy$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} r\, dr = \frac{4}{5}\pi R^5$$

原式$=3 \oiint_{\Sigma} z^3 \mathrm{dxdy} = \frac{12}{5}\pi R^5$

注： 利用对称性可简化计算，对于数量值函数积分

(黎曼积分：二重、三重积分，第一型曲线、曲面积分)

利用积分区域对称性和被积函数奇偶性.

向量值函数积分（第二型曲线、曲面积分), 还需要考虑积分曲线、曲面的方向性. 在利用对称性时，易出错.

一般情形下，建议先化成定(二重)积分后，用对称性.

当然，在易于判断情况下，直接利用对称性简化计算.

备用题 求 $I=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}\right)$, 其中

$\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 取外侧.

解: $\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}=\frac{2}{c}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

注意±号

$D_{xy}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$=\frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{c^2}\cdot 4\pi abc$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$

利用轮换对称性

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\therefore \quad I = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

＊二重积分的广义极坐标变换

当积分区域为椭圆或椭圆的一部分时，可考虑用如下的广义极坐标变换：

$$T:\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi,$$

并计算得 $\quad d\sigma = abrdrd\theta.$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\, abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

P152—P156 “二重积分的换元法”

作 业

P231　　3，4