

第十四章 线性动态电路的 复频域分析

14-1 拉普拉斯变换的定义

14-2 拉普拉斯变换的基本性质

14-3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

14-4 运算电路

14-5 用拉普拉斯变换法分析线性电路

14-6 网络函数的定义

14-7 网络函数的极点和零点

14-8 极点、零点与冲激响应

14-9 极点、零点与频率响应

本章重点

首页

●重点

- (1) 拉普拉斯变换的基本原理和性质
- (2) 掌握用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤
- (3) 网络函数的概念
- (4) 网络函数的极点和零点

14-1 拉普拉斯变换的定义

1. 拉氏变换法

拉氏变换法是一种数学积分变换，其核心是把时间函数 $f(t)$ 与复变函数 $F(s)$ 联系起来，把时域问题通过数学变换为复频域问题，把时域的高阶微分方程变换为频域的代数方程以便求解。应用拉氏变换进行电路分析称为电路的复频域分析法，又称运算法。

一些常用的变换

①对数变换

$$A \times B = AB$$



$$\lg A + \lg B = \lg AB$$

乘法运算变换
为加法运算

②相量法

正弦量

$$i_1 + i_2 = i$$



相量

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}$$

时域的正弦运算
变换为复数运算

拉氏变换

$f(t)$ (时域原函数)

对应



$F(s)$ (频域象函数)

2. 拉氏变换的定义

定义 $[0, \infty)$ 区间函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换式

$$\begin{cases} F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \end{cases}$$

正变换

反变换

简写 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

s — **复频率**

$$s = \sigma + j\omega$$



注意

① 积分域

$\begin{cases} 0_- & \text{积分下限从 } 0_- \text{ 开始, 称为 } 0_- \text{ 拉氏变换。} \\ 0_+ & \text{积分下限从 } 0_+ \text{ 开始, 称为 } 0_+ \text{ 拉氏变换。} \end{cases}$

今后讨论的均为 0_- 拉氏变换。

$$F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st} dt + \int_{0_+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

② 象函数 $F(s)$ 存在的条件:

$$\int_{0_-}^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty$$

$[0_-, 0_+]$ 区间

$f(t) = \delta(t)$ 时此项 $\neq 0$

如果存在有限常数 M 和 c 使函数 $f(t)$ 满足:

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad t \in [0, \infty)$$

$$\rightarrow \int_{0-}^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_{0-}^{\infty} Me^{-(s-c)t} dt = \frac{M}{s-c}$$

则 $f(t)$ 的拉氏变换式 $F(s)$ 总存在, 因为总可以找到合适的 s 值使上式积分为有限值。

③象函数 $F(s)$ 用大写字母表示, 如 $I(s)$ 、 $U(s)$ 。

原函数 $f(t)$ 用小写字母表示, 如 $i(t)$ 、 $u(t)$ 。

3. 典型函数的拉氏变换

$$F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

(1) 单位阶跃函数的象函数

$$f(t) = \varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L} [\varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \bigg|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

(2) 单位冲激函数的象函数

$$f(t) = \delta(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathbf{L} [\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) e^{-st} dt \\ &= e^{-s0} = 1 \end{aligned}$$

(3) 指数函数的象函数

$$f(t) = e^{at}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathbf{L} [e^{at}] = \int_{0_-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \bigg|_{0_-}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

14-2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性性质

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $\mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + A_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$
 $= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$

证 $\mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = \int_{0_-}^{\infty} [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] e^{-st} dt$
 $= \int_{0_-}^{\infty} A_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_{0_-}^{\infty} A_2 f_2(t) e^{-st} dt$
 $= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$



结论 根据拉氏变换的线性性质，求函数与常数相乘及几个函数相加减的象函数时，可以先求各函数的象函数再进行相乘及加减计算。

例2-1 求 $f(t) = K(1 - e^{-at})$ 的象函数。

解
$$F(s) = \mathcal{L}[K] - \mathcal{L}[Ke^{-at}] = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+a} = \frac{Ka}{s(s+a)}$$

例2-2 求 $f(t) = \sin(\omega t)$ 的象函数。

解
$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

2. 微分性质

若: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

利用 $\int u dv = uv - \int v du$

则 $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$

证 $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} df(t)$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt$$
$$= -f(0_-) + sF(s)$$

若 σ 足够大

例2-3 利用导数性质求下列函数的象函数。

(1) $f(t) = \cos(\omega t)$ 的象函数

解

$$\frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t)$$

$$\longrightarrow \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin(\omega t)\right] \\ &= \frac{1}{\omega} \left(s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(2) $f(t) = \delta(t)$ 的象函数

解 $\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right] = s \frac{1}{s} - 0 = 1$$

推广: $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s[sF(s) - f(0_-)] - f'(0_-)$

$$= s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - \cdots - f^{n-1}(0_-)$$

3. 积分性质

若: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 则 $\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{1}{s} F(s)$

证 令 $\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(t) dt\right] = \phi(s)$

应用微分性质

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \int_{0_-}^t f(t) dt\right]$$

$$\rightarrow F(s) = s\phi(s) - \int_{0_-}^t f(t) dt \Big|_{t=0_-}$$

$$\rightarrow \phi(s) = \frac{F(s)}{s}$$

例2-4 求 $f(t) = t\varepsilon(t)$ 和 $f(t) = t^2\varepsilon(t)$ 的象函数。

解

$$\mathcal{L}[t\varepsilon(t)] = \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{\infty} \varepsilon(t) dt\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2\varepsilon(t)] = \mathcal{L}\left[2\int_0^t t dt\right] = \frac{2}{s^3}$$

4. 延迟性质

若: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

则 $\mathcal{L}[f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$

证 $\mathcal{L}[f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)e^{-st}dt$

$$= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$$

令 $t-t_0 = \tau$

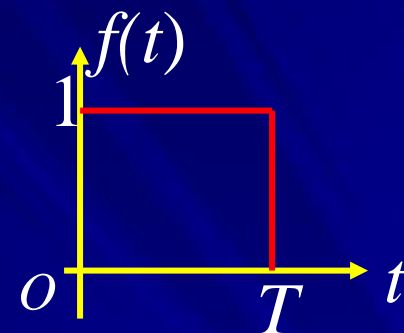
$$= \int_{0_-}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau = e^{-st_0} \int_{0_-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$
$$= e^{-st_0} F(s)$$

延迟因子

例2-5 求矩形脉冲的象函数。

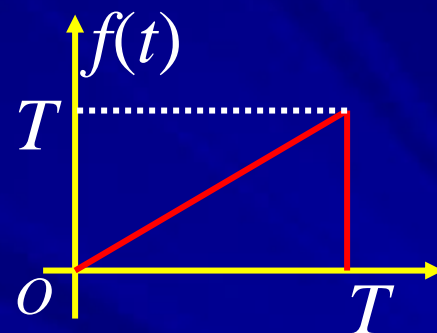
解 $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$

根据延迟性质 $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT}$



例2-6 求三角波的象函数。

解 $f(t) = t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)]$



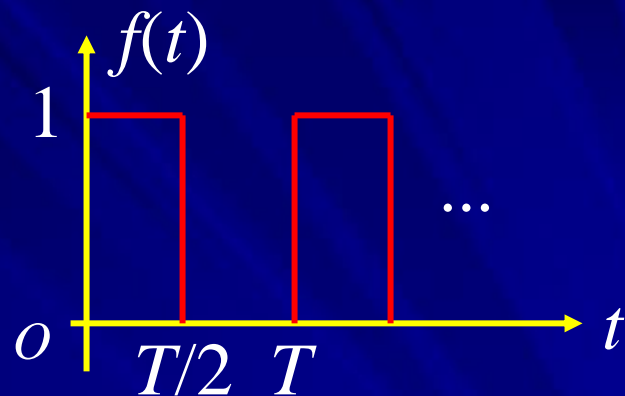
$$f(t) = t\varepsilon(t) - (t - T)\varepsilon(t - T) - T\varepsilon(t - T)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} - \frac{T}{s} e^{-sT}$$

例2-7 求周期函数的拉氏变换。

解 设 $f_1(t)$ 为一个周期的函数

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$



因为 $f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)\varepsilon(t-T) +$
 $f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T) + \dots$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F_1(s) + e^{-sT} F_1(s) + e^{-2sT} F_1(s) + \dots$$

$$= F_1(s)[e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s)$$

对于本题脉冲序列 $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{T}{2})$

$$\longrightarrow F_1(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT/2} \right)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT/2} \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1 + e^{-sT/2}} \right)$$

5. 拉普拉斯的卷积定理

若: $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

$$\begin{aligned}\text{则 } \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \mathcal{L} \int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi \\ &= F_1(s) F_2(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{证 } \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty f_1(t-\xi) \varepsilon(t-\xi) f_2(\xi) d\xi \right] dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{令 } x = t - \xi &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(x) \varepsilon(x) f_2(\xi) e^{-s\xi} e^{-sx} d\xi dx \\ &= \int_0^\infty f_1(x) \varepsilon(x) e^{-sx} dx \int_0^\infty f_2(\xi) e^{-s\xi} d\xi \\ &= F_1(s) F_2(s)\end{aligned}$$

14-3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

用拉氏变换求解线性电路的时域响应时，需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。

由象函数求原函数的方法：

(1)利用公式
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

(2)对简单形式的 $F(s)$ 可以查拉氏变换表得原函数

(3)把 $F(s)$ 分解为简单项的组合

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

部分分式
展开法

→
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (n \geq m)$$



讨论

象函数的一般形式

(1) 若 $D(s)=0$ 有 n 个单根分别为 p_1, \cdots, p_n

利用部分分式可将 $F(s)$ 分解为

待定常数

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$\rightarrow f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}$$

待定常数的确定:

方法1

$$K_i = F(s)(s - p_i) \Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$(s - p_1)F(s) = K_1 + (s - p_1) \left(\frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} \right)$$

令 $s = p_1$

方法2

求极限的方法

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{N(s)(s - p_i)}{D(s)}$$

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{N(s)(s - p_i)}{D(s)}$$
$$= \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{N'(s)(s - p_i) + N(s)}{D'(s)}$$

$$K_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

例3-1 求 $F(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6}$ 的原函数。

解法1

$$F(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1 = \left. \frac{4s+5}{s+3} \right|_{s=-2} = -3 \quad K_2 = \left. \frac{4s+5}{s+2} \right|_{s=-3} = 7$$

解法2

$$K_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} = \frac{4s+5}{2s+5} \Big|_{s=-2} = -3$$

$$K_2 = \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} = \frac{4s+5}{2s+5} \Big|_{s=-3} = 7$$

$$f(t) = -3e^{-2t}\varepsilon(t) + 7e^{-3t}\varepsilon(t)$$

$$f(t) = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} e^{p_2 t} + \cdots + \frac{N(p_n)}{D'(p_n)} e^{p_n t}$$

原函数的一般形式

(2) 若 $D(s)=0$ 具有共轭复根 $\begin{cases} p_1 = \alpha + j\omega \\ p_2 = \alpha - j\omega \end{cases}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - \alpha - j\omega)(s - \alpha + j\omega)D_1(s)} \\ &= \frac{K_1}{s - \alpha - j\omega} + \frac{K_2}{s - \alpha + j\omega} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \end{aligned}$$

$$K_{1,2} = \left[F(s)(s - \alpha \mp j\omega) \right]_{s=\alpha \pm j\omega} = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=\alpha \pm j\omega}$$



注意

K_1 、 K_2 也是一对共轭复数。

设: $K_1 = |K|e^{j\theta}$ $K_2 = |K|e^{-j\theta}$

$$\begin{aligned} f(t) &= (K_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + K_2 e^{(\alpha-j\omega)t}) + f_1(t) \\ &= (|K|e^{j\theta} e^{(\alpha+j\omega)t} + |K|e^{-j\theta} e^{(\alpha-j\omega)t}) + f_1(t) \\ &= |K|e^{\alpha t} [e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}] + f_1(t) \\ &= 2|K|e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta) + f_1(t) \end{aligned}$$

例3-2 求 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解

$s^2 + 2s + 5 = 0$ 的根: $p_{1,2} = -1 \pm j2$

$$K_1 = \frac{s+3}{s - (-1-2j)} \Big|_{s=-1+j2} = 0.5 - j0.5 = 0.5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$K_2 = \frac{s+3}{s - (-1+2j)} \Big|_{s=-1-j2} = 0.5\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$\text{或: } K_1 = \frac{N(s)}{D'(s)} = \frac{s+3}{2s+2} \Big|_{s=-1+j2} = 0.5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$f(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(2t - 45^\circ)$$

(3) 若 $D(s)=0$ 具有重根

$$F(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{(s - p_1)^n}$$

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s - p_1} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1n-1}}{(s - p_1)^{n-1}} + \frac{K_{1n}}{(s - p_1)^n}$$

$$K_{1n} = [(s - p_1)^n F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1n-1} = \left[\frac{d}{ds} (s - p_1)^n F(s) \right] \Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$K_{11} = \left[\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s - p_1)^n F(s) \right] \Big|_{s=p_1}$$

例3-3 求: $F(s) = \frac{s+4}{s(s+1)^2}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解

$$F(s) = \frac{s+4}{s(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2}$$

$$K_1 = \frac{s+4}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = 4 \quad K_{22} = \frac{s+4}{s} \Big|_{s=-1} = -3$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds} [(s+1)^2 F(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s+4}{s} \right] \Big|_{s=-1} = -4$$

$$f(t) = 4 - 4e^{-t} - 3te^{-t}$$



小结

由 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的步骤:

- ① $n = m$ 时将 $F(s)$ 化成真分式和多项式之和。

$$F(s) = A + \frac{N_0(s)}{D(s)}$$

- ② 求真分式分母的根，将真分式展开成部分分式。

$$F(s) = A + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

- ③ 求各部分分式的系数。

- ④ 对每个部分分式和多项式逐项求拉氏反变换。

例3-4 求： $F(s) = \frac{s^2 + 9s + 11}{s^2 + 5s + 6}$ 的原函数。

解
$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 11}{s^2 + 5s + 6} = 1 + \frac{4s + 5}{s^2 + 5s + 6}$$

$$= 1 + \frac{-3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

$$f(t) = \delta(t) - 3e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

14-4 运算电路

1. 基尔霍夫定律的运算形式

基尔霍夫定律的时域表示：

$$\sum i(t) = 0 \quad \sum u(t) = 0$$

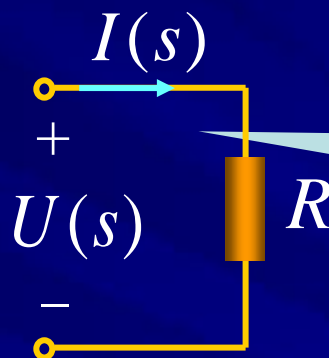
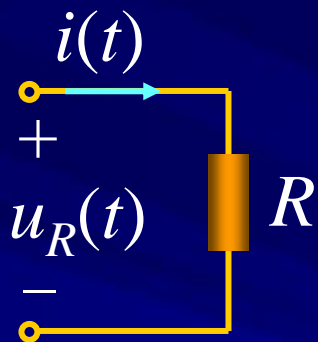
根据拉氏变换的线性性质得KCL、KVL的运算形式

对任一结点 $\sum I(s) = 0$

对任一回路 $\sum U(s) = 0$

2. 电路元件的运算形式

① 电阻 R 的运算形式



电阻的运算电路

时域形式: $u = Ri$

取拉氏变换 $U(s) = RI(s)$

$I(s) = GU(s)$

$$Z(s) = R$$

$$Y(s) = G$$

② 电感 L 的运算形式

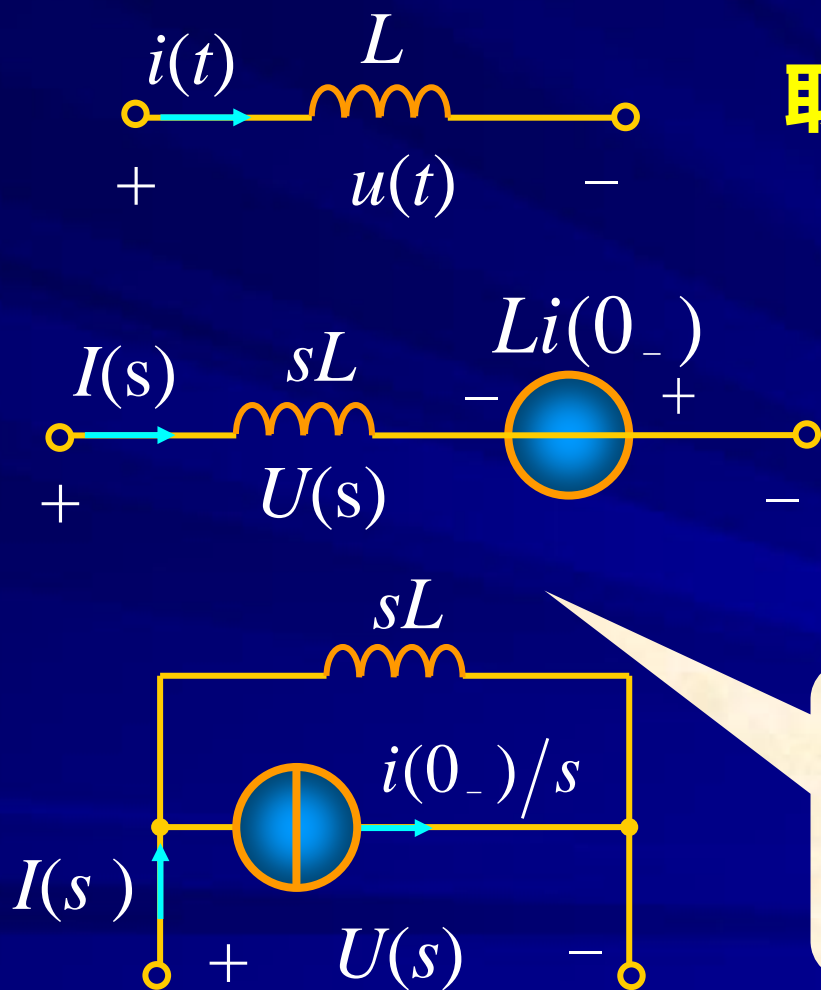
时域形式: $u = L \frac{di}{dt}$

取拉氏变换,由微分性质得

$$U(s) = L[sI(s) - i(0_-)]$$

$$= sLI(s) - Li(0_-)$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0_-)}{s}$$



L 的
运算
电路

$$Z(s) = sL$$

$$Y(s) = 1/sL$$

③ 电容 C 的运算形式

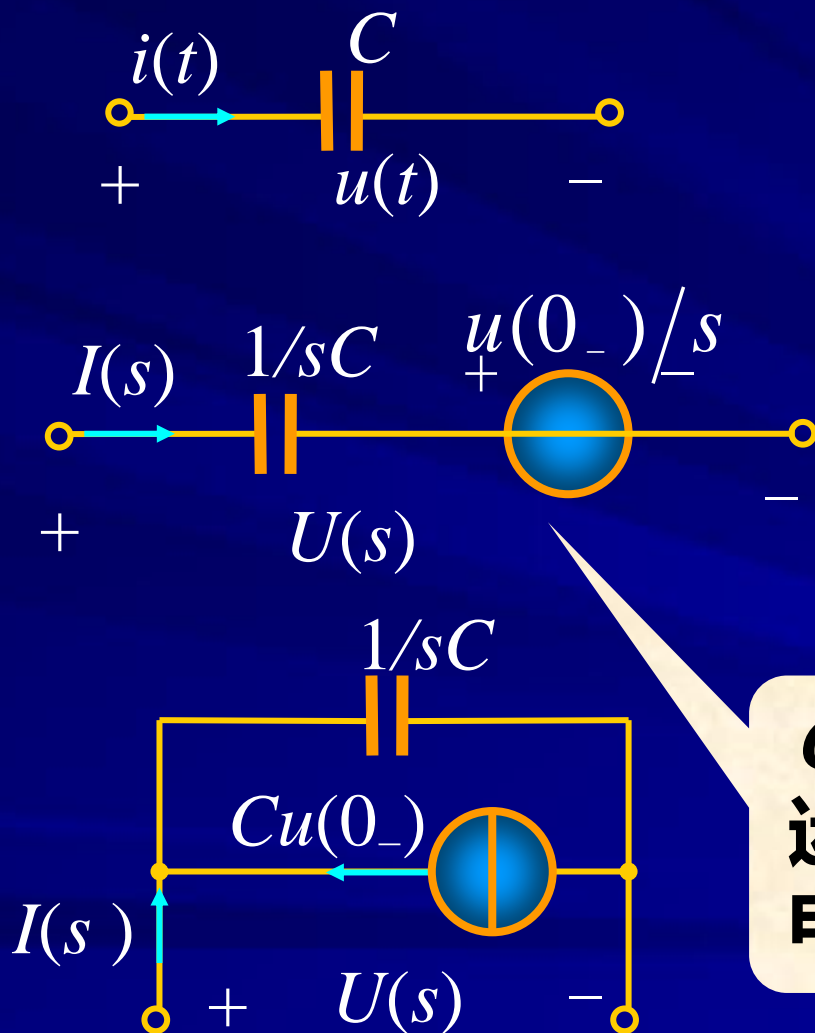
时域形式:

$$u = u(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i(\xi) d\xi$$

取拉氏变换, 由积分性质得

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0_-)}{s}$$

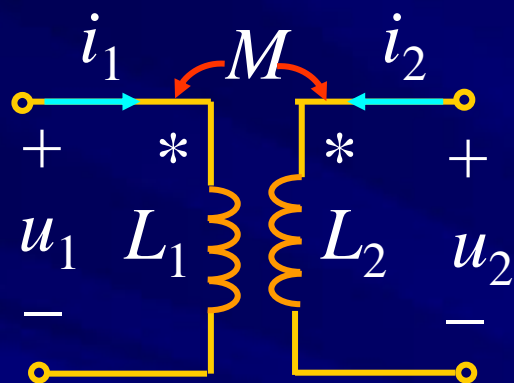
$$I(s) = sCU(s) - Cu(0_-)$$

C的
运算
电路

$$Z(s) = 1/sC$$

$$Y(s) = sC$$

④ 耦合电感的运算形式



时域形式:

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

取拉氏变换,由微分性质得

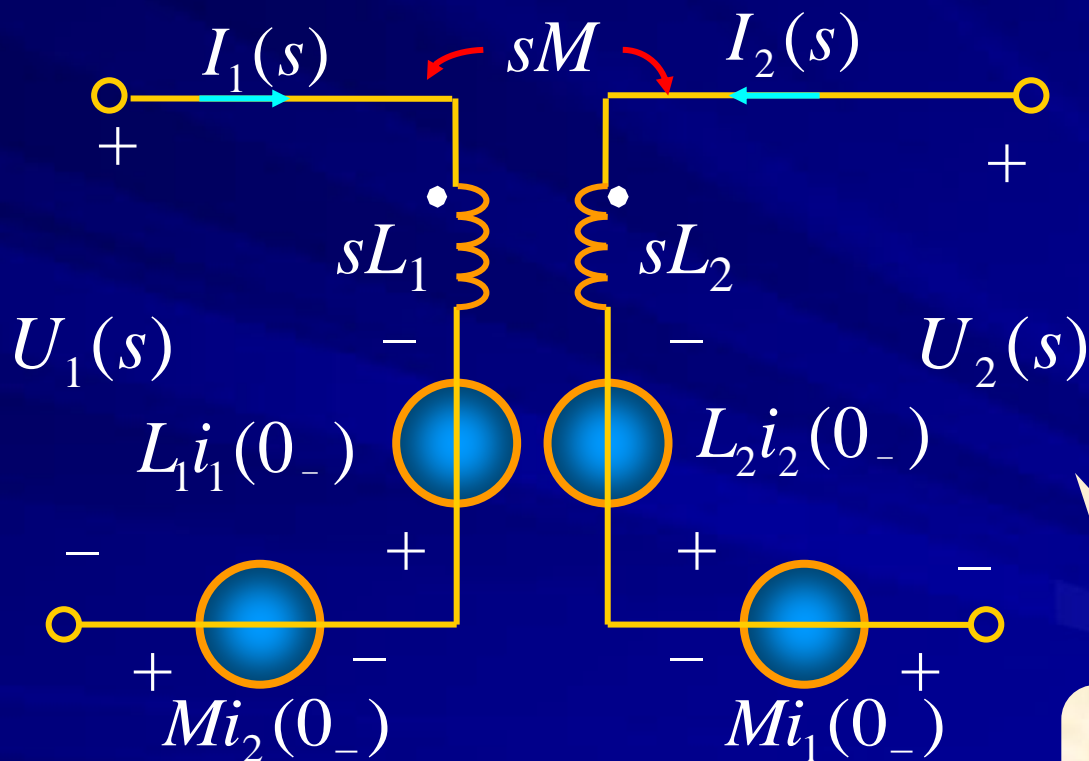
$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + sMI_2(s) - M i_2(0_-) \\ U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + sMI_1(s) - M i_1(0_-) \end{cases}$$

$$Z_M(s) = sM$$

$$Y_M(s) = 1/sM$$

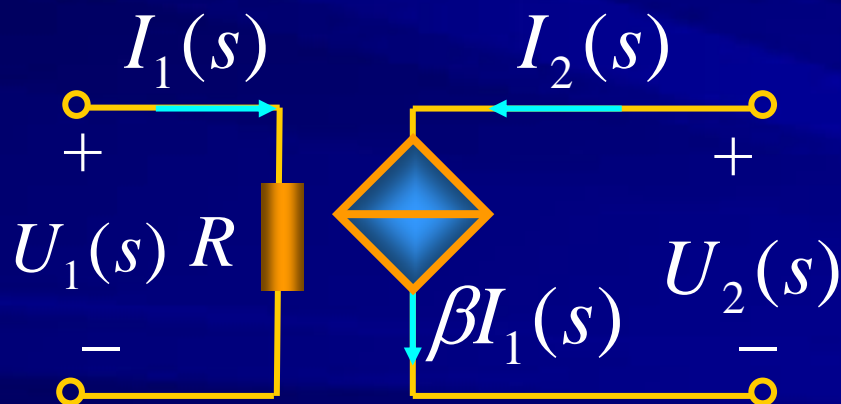
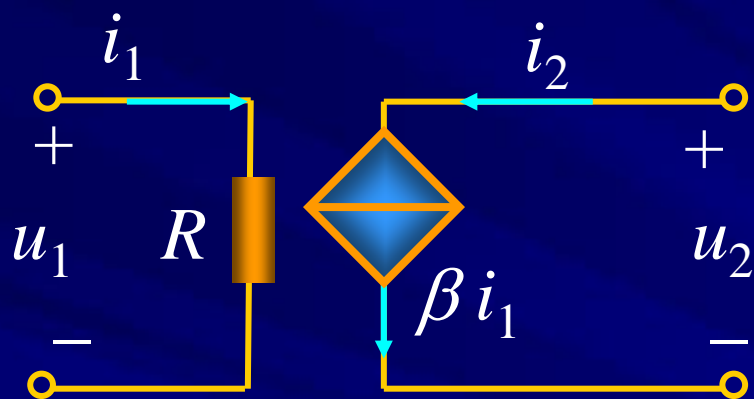
互感运算阻抗

$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + sMI_2(s) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + sMI_1(s) - Mi_1(0_-) \end{cases}$$



耦合电感
的运算电路

⑤ 受控源的运算形式



时域形式:

$$i_1 = u_1 / R$$

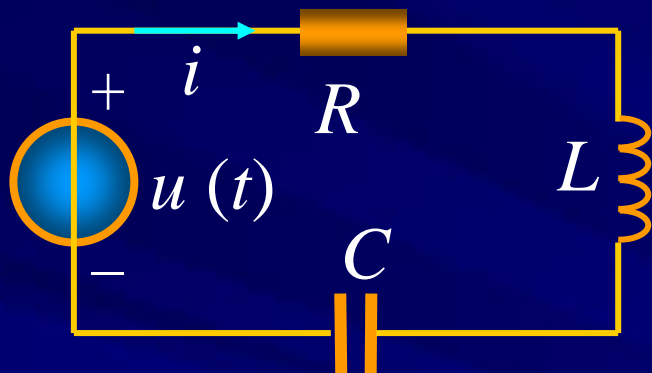
$$i_2 = \beta i_1$$

取拉氏变换

$$I_1(s) = U_1(s) / R$$

$$I_2(s) = \beta I_1(s)$$

受控源的运算电路

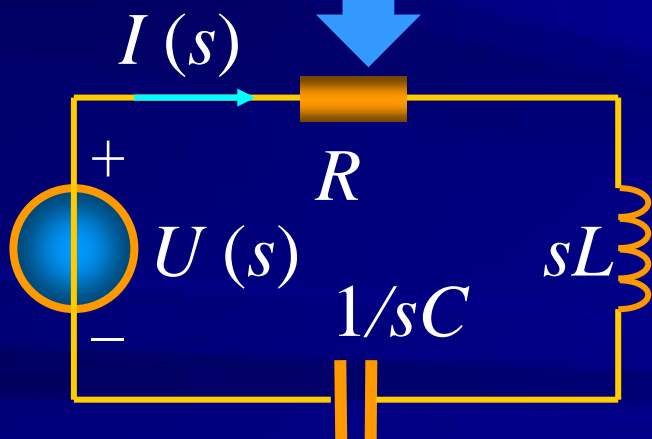
3. RLC 串联电路的运算形式若: $u_c(0_-) = 0$ $i_L(0_-) = 0$ 

时域电路

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_c dt$$

运算电路

拉氏变换



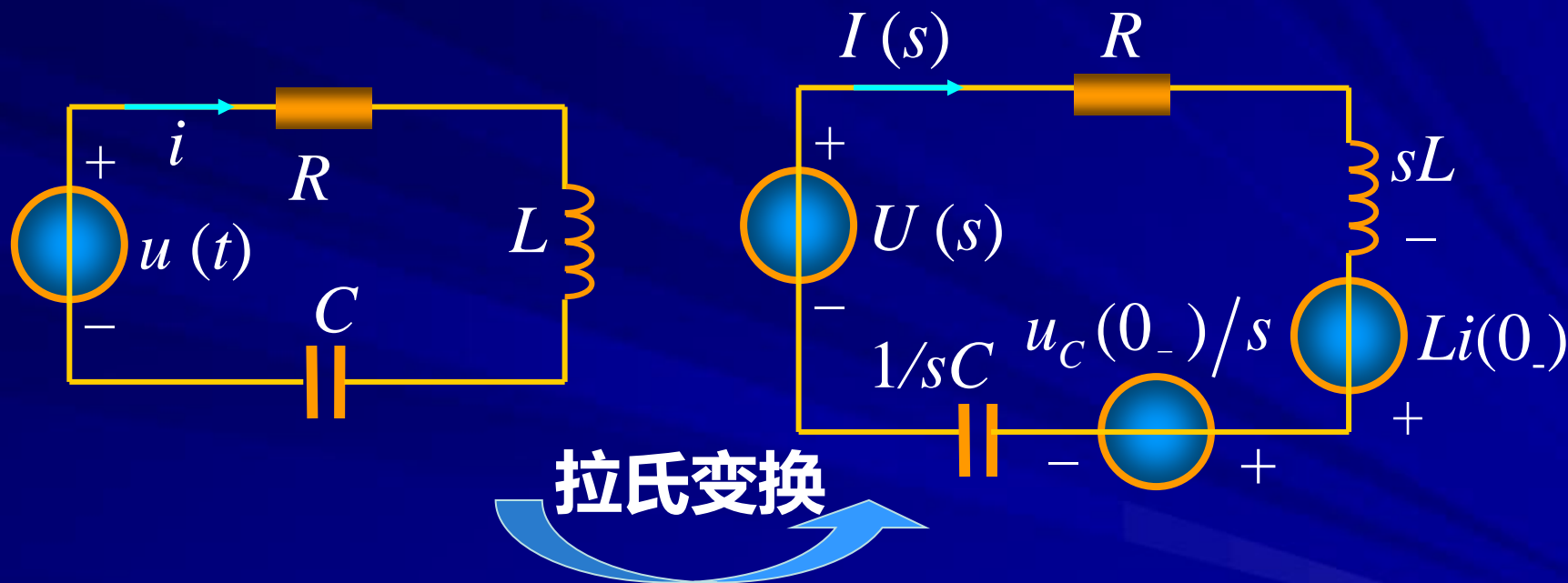
$$\begin{aligned} U(s) &= I(s)R + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s) \\ &= I(s) \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) = I(s)Z(s) \end{aligned}$$

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = R + sL + \frac{1}{sC}$$

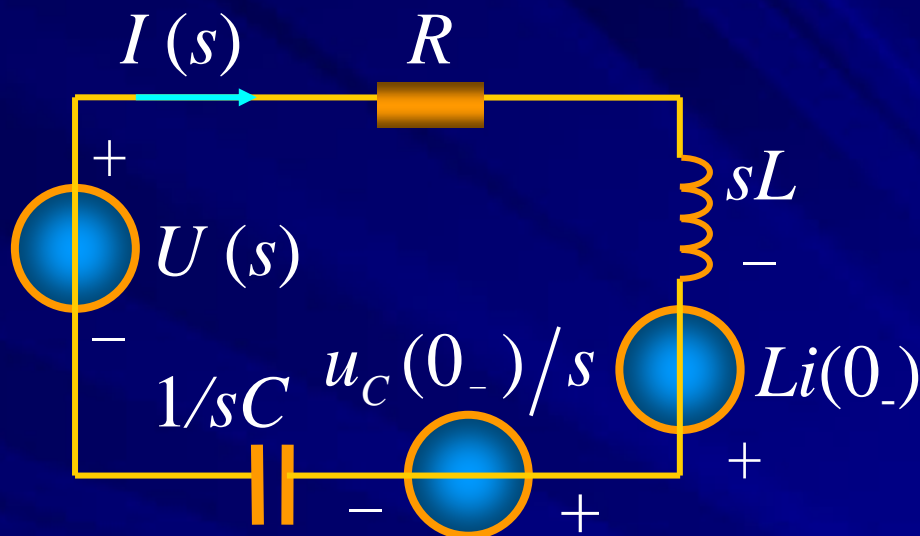
运算阻抗

$$\begin{cases} U(s) = Z(s)I(s) \\ I(s) = Y(s)U(s) \end{cases}$$

运算形式的
欧姆定律



若: $u_C(0_-) \neq 0$ $i_L(0_-) \neq 0$



$$U(s) = I(s)R + sLI(s) - Li(0_-) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$$

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = Z(s)I(s)$$

$$= U(s) + Li(0_-) - \frac{u_C(0_-)}{s}$$



小结

电路的运算形式

- ① 电压、电流用象函数形式。
- ② 元件用运算阻抗或运算导纳表示。
- ③ 电容电压和电感电流初始值用附加电源表示。

例4-1 给出图示电路的运算电路模型。

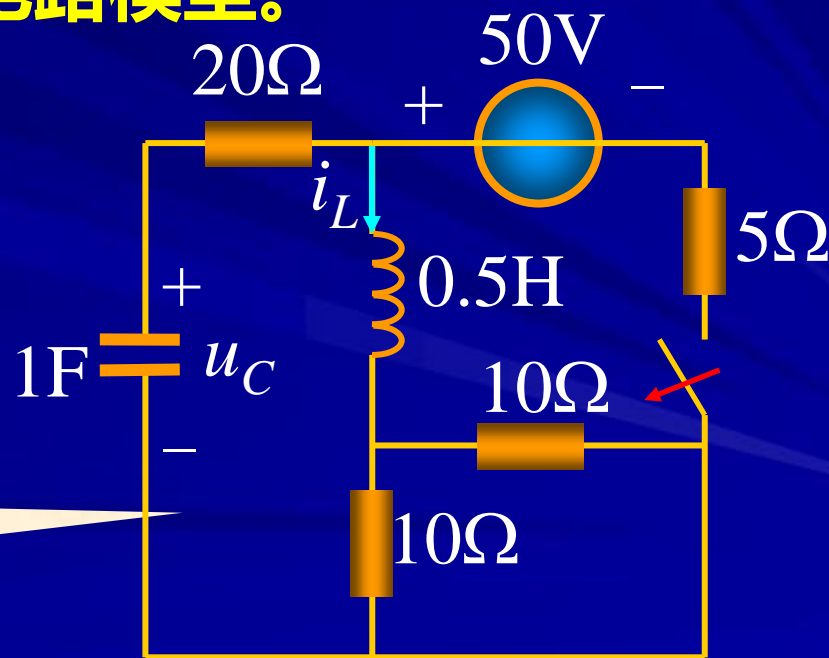
解

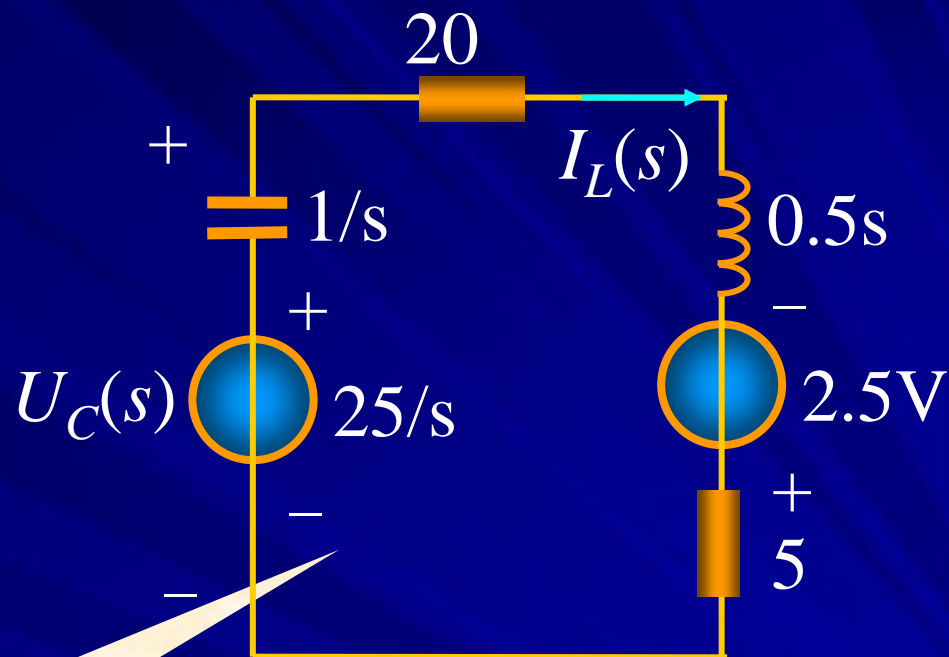
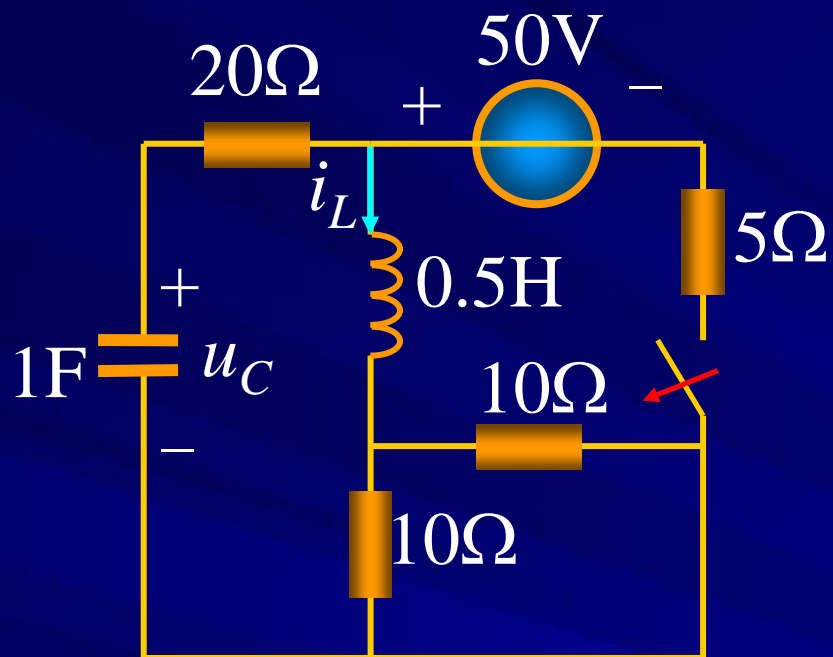
$t=0$ 时开关打开

$$u_C(0_-)=25V$$

$$i_L(0_-)=5A$$

时域电路





注意附加电源

$t > 0$ 运算电路

14-5 应用拉普拉斯变换法 分析线性电路

1. 运算法的计算步骤

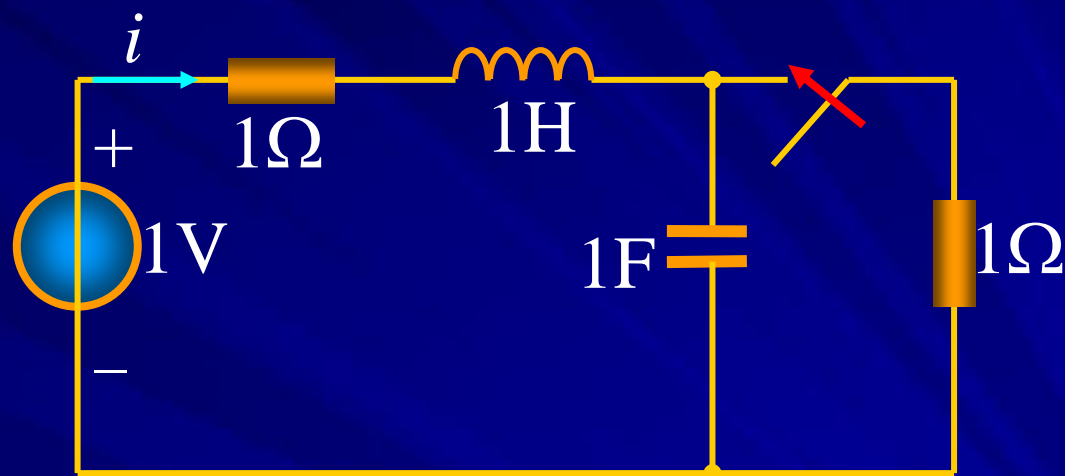
- ①由换路前的电路计算 $u_C(0_-)$, $i_L(0_-)$ 。
- ②画运算电路模型, 注意运算阻抗的表示和附加电源的作用。
- ③应用前面各章介绍的各种计算方法求象函数。
- ④反变换求原函数。

例5-1 电路原处于稳态, $t=0$ 时开关闭合, 试用运算法求电流 $i(t)$ 。

解 (1) 计算初值

$$u_C(0_-) = 1V$$

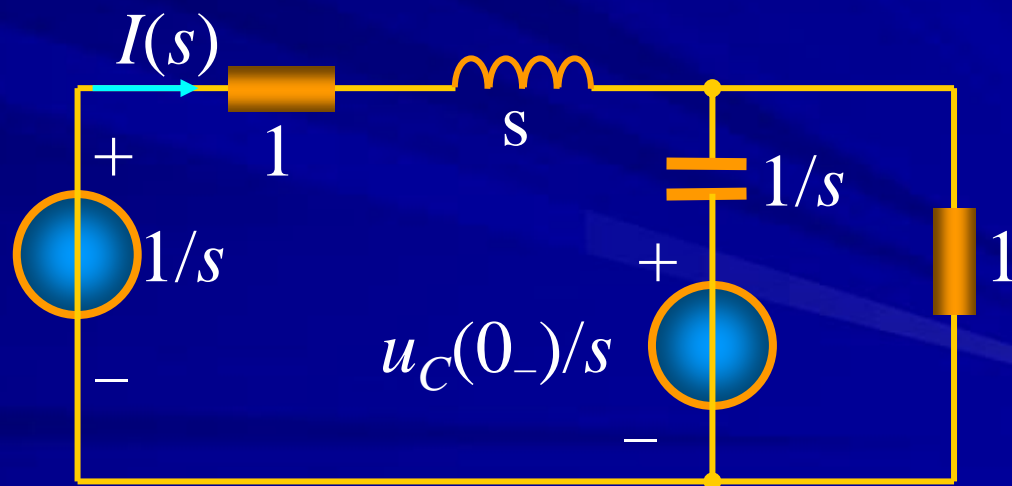
$$i_L(0_-) = 0$$



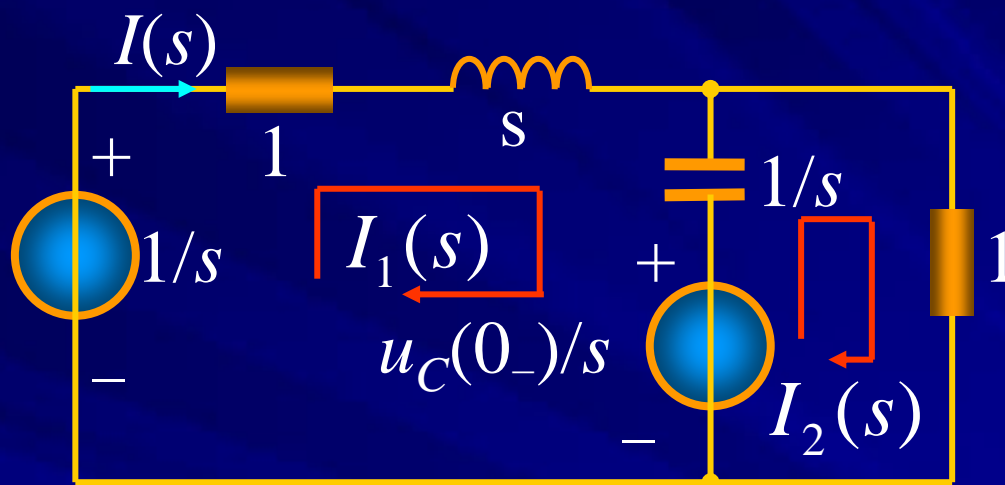
(2) 画运算电路

$$sL = 1s$$

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{s \times 1} = \frac{1}{s}$$



(3) 应用回路电流法



$$\begin{cases} (1 + s + \frac{1}{s})I_1(s) - \frac{1}{s}I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{u_C(0_-)}{s} = 0 \\ -\frac{1}{s}I_1(s) + (1 + \frac{1}{s})I_2(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$I_1(s) = I(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

(4)反变换求原函数

$D(s) = 0$ 有3个根: $p_1 = 0$, $p_2 = -1 + j$, $p_3 = -1 - j$

$$I(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j} + \frac{K_3}{s+1+j}$$

$$K_1 = I(s)s \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

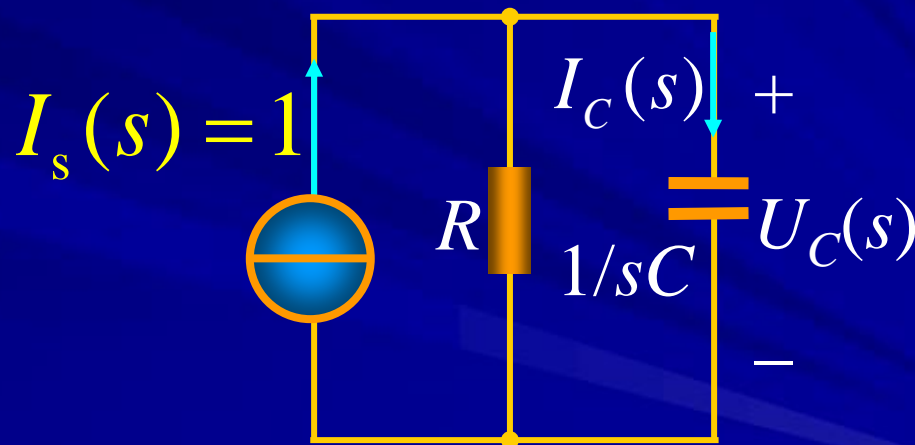
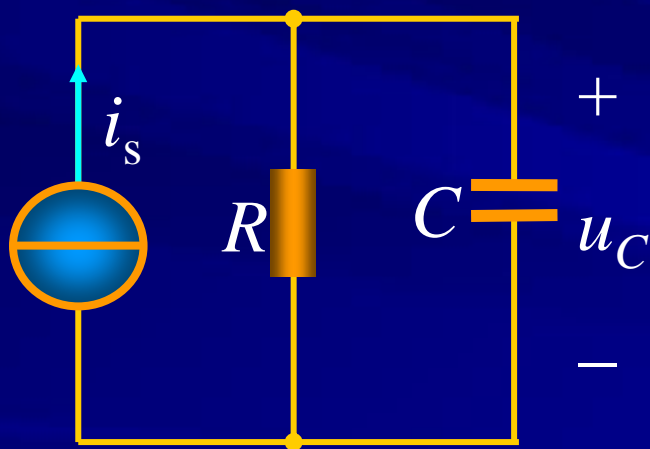
$$K_2 = I(s)(s+1-j) \Big|_{s=-1+j} = -\frac{1}{2(1+j)}$$

$$K_3 = I(s)(s+1+j) \Big|_{s=-1-j} = -\frac{1}{2(1-j)}$$

$$I(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2(1+j)}{s+1-j} - \frac{1/2(1-j)}{(s+1+j)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}I(s) = i(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t)$$

例5-2 图示电路 $i_s = \delta(t)$, $u_C(0_-) = 0$, 求 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 。



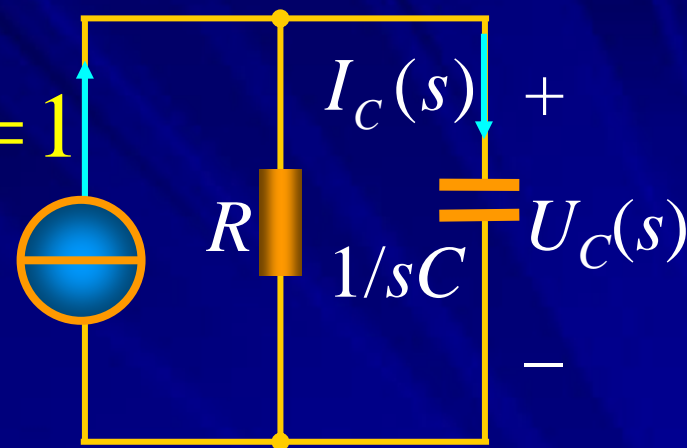
解

画运算电路

$$U_C(s) = \frac{R}{R + 1/sC} I_s(s) \frac{1}{sC}$$

$$I_s(s) = 1$$

$$= \frac{R}{RC(s + 1/RC)}$$



$$I_C(s) = U_C(s)sC = \frac{RsC}{RsC + 1} = 1 - \frac{1}{RsC + 1}$$

$$\rightarrow u_C = \frac{1}{C} e^{-t/RC} (t > 0)$$

$$i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} (t > 0)$$

例5-3 $t=0$ 时打开开关, 求电感电流和电压。

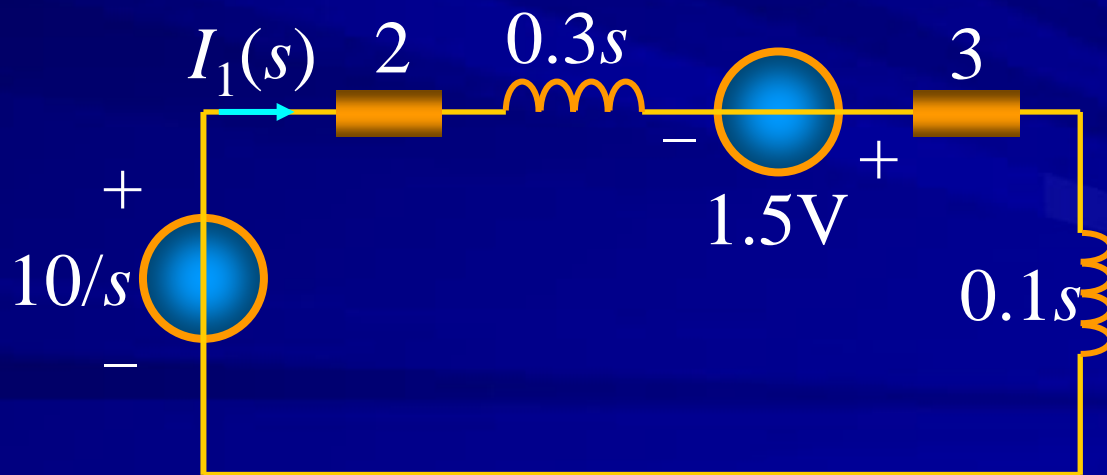
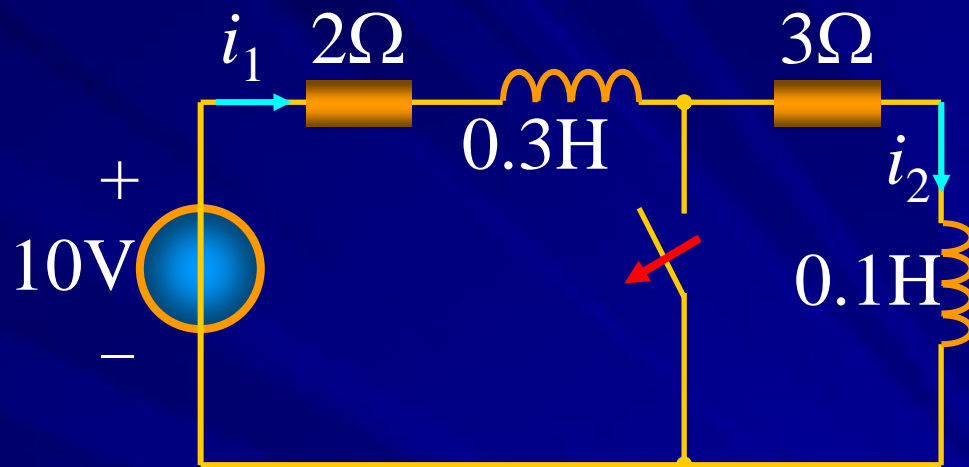
解

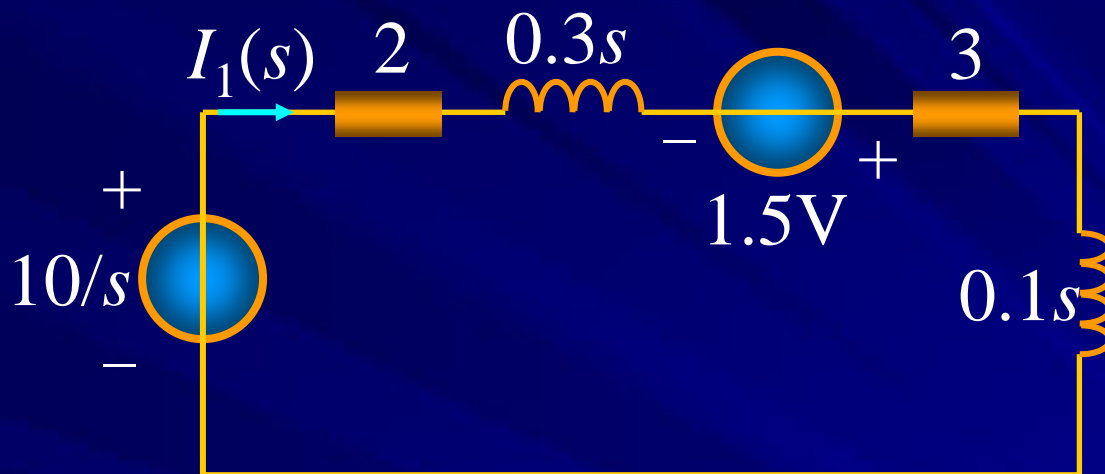
计算初值

$$i_1(0_-) = 5\text{A}$$

$$i_2(0_-) = 0$$

画运算电路





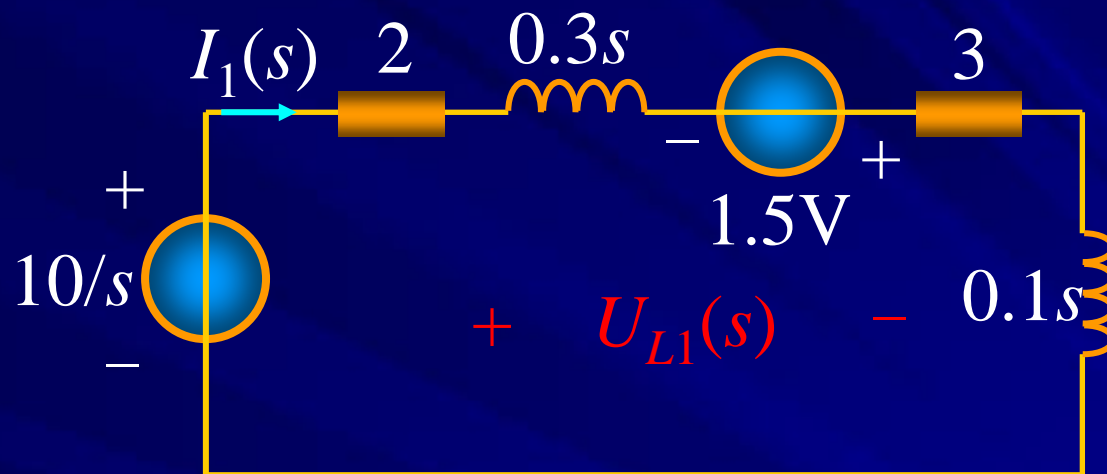
$$I_1(s) = \frac{\frac{10}{s} + 1.5}{5 + 0.4s} = \frac{10 + 1.5s}{(5 + 0.4s)s} = \frac{25 + 3.75s}{(s + 12.5)s}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{1.75}{s + 12.5} \quad \rightarrow \quad i_1 = 2 + 1.75e^{-12.5t} = i_2$$



注意

$$i_1(0_+) \neq i_1(0_-) \quad i_2(0_+) \neq i_2(0_-)$$



$$U_{L1}(s) = 0.3sI_1(s) - 1.5 = -\frac{6.56}{s+12.5} - 0.375$$

$$u_{L1}(t) = -0.375\delta(t) - 6.56e^{-12.5t}$$

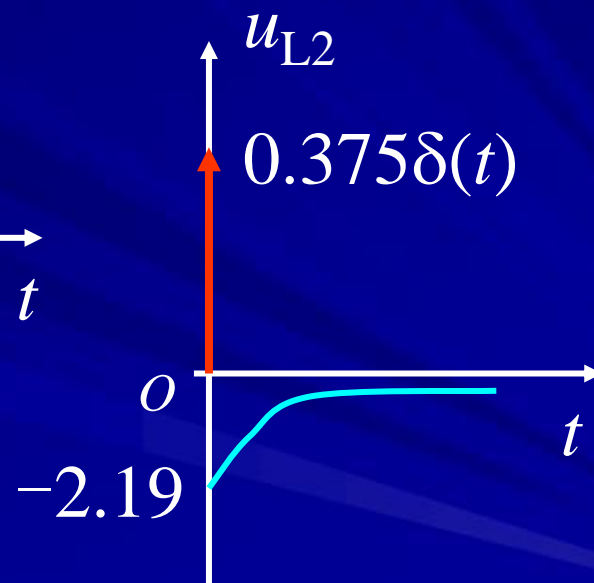
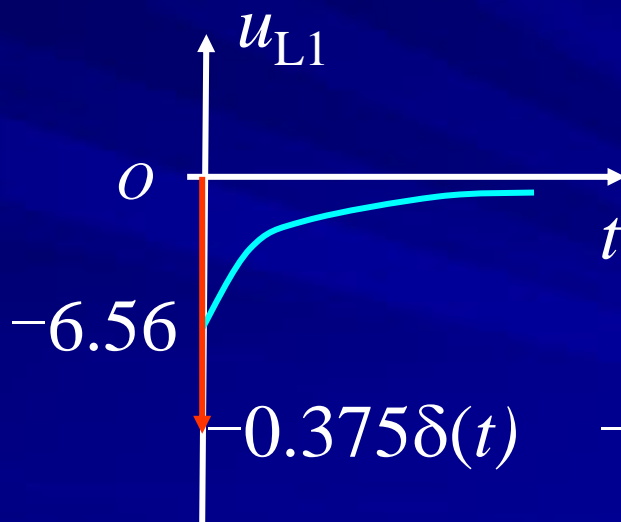
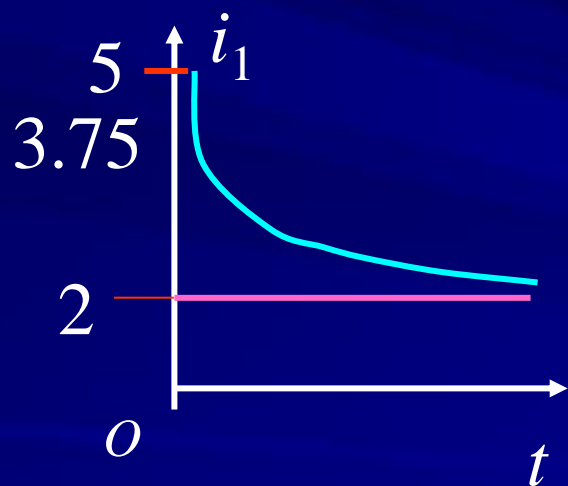
$$U_{L2}(s) = 0.1sI(s) = 0.375 - \frac{2.19}{s+12.5}$$

$$u_{L2}(t) = +0.375\delta(t) - 2.19e^{-12.5t}$$

$$i_1 = 2 + 1.75e^{-12.5t} = i_2$$

$$u_{L1}(t) = -0.375\delta(t) - 6.56e^{-12.5t}$$

$$u_{L2}(t) = +0.375\delta(t) - 2.19e^{-12.5t}$$





注意

- ① 由于拉氏变换中用 0_- 初始条件, 跃变情况自动包含在响应中, 故不需先求 $t=0_+$ 时的跃变值。
- ② 两个电感电压中的冲击部分大小相同而方向相反, 故整个回路中无冲击电压。

- ③ 满足磁链守恒。
$$L = \frac{\Psi}{i}$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) + \frac{0.375}{0.1} \text{ A} = 3.75 \text{ A}$$

$$i_1(0_+) = \frac{0.3 \times 5 - 0.375}{0.3} \text{ A} = 3.75 \text{ A}$$

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i(0_+)$$

$$0.3 \times 5 + 0 = 0.4 \times 3.75$$

14-6 网络函数的定义

1. 网络函数 $H(s)$ 的定义

线性时不变网络在单一电源激励下，其零状态响应的象函数与激励的象函数之比定义为该电路的网络函数 $H(s)$ 。

$$H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{L} [\text{零状态响应}]}{\mathcal{L} [\text{激励函数}]} = \frac{\mathcal{L} [r(t)]}{\mathcal{L} [e(t)]} = \frac{R(s)}{E(s)}$$



注意

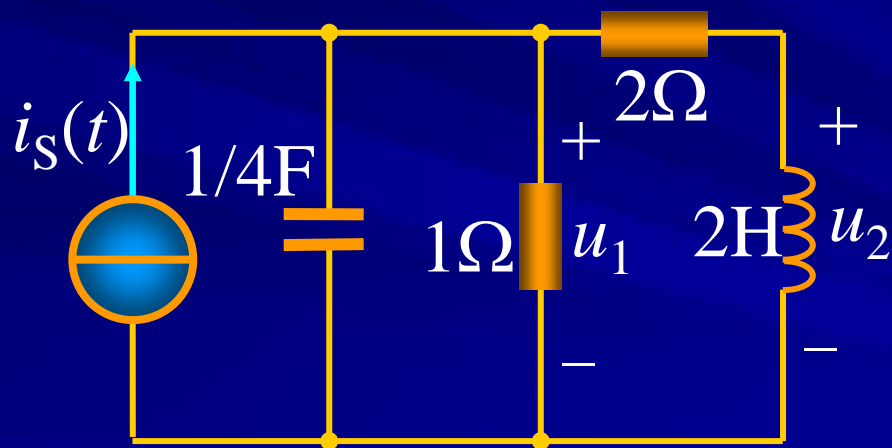
- ①由于激励 $E(s)$ 可以是电压源或电流源，响应 $R(s)$ 可以是电压或电流，故 s 域网络函数可以是驱动点阻抗(导纳)、转移阻抗(导纳)、电压转移函数或电流转移函数。
- ②若 $E(s)=1$ ，响应 $R(s)=H(s)$ ，即网络函数是该响应的象函数。网络函数的原函数是电路的冲激响应 $h(t)$ 。

2.网络函数的应用

由网络函数求取任意激励的零状态响应

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \longrightarrow R(s) = H(s)E(s)$$

例6-1 图示电路, $i_s(t) = \varepsilon(t)$, 响应为 u_1 、 u_2 , 求阶跃响应 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$ 。

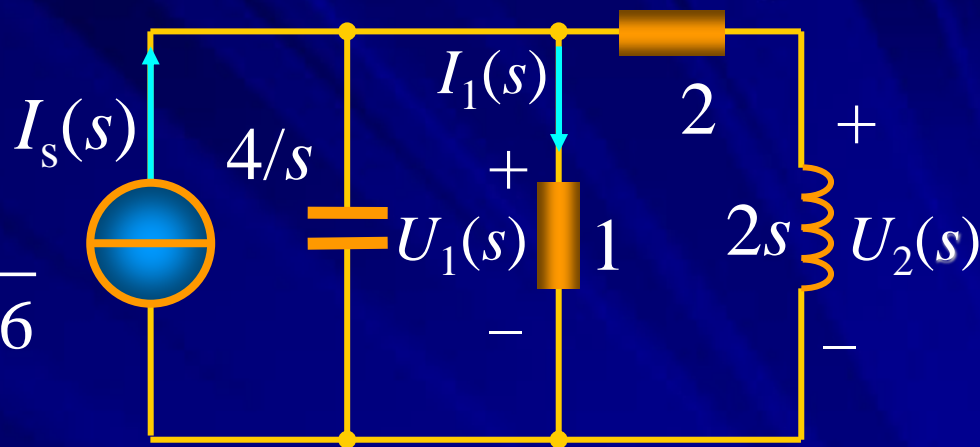


解

画运算电路

$$H_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_s(s)}$$

$$= \frac{1}{\frac{s}{4} + 1 + \frac{1}{2+2s}} = \frac{4s+4}{s^2+5s+6}$$



$$H_2(s) = \frac{U_2(s)}{I_s(s)} = \frac{2s}{2+2s} \frac{U_1(s)}{I_s(s)} = \frac{4s}{s^2+5s+6}$$

$$U_1(s) = H_1(s)I_s(s) = \frac{4s+4}{s(s^2+5s+6)} \quad S_1(t) = \frac{2}{3} + 2e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t}$$

$$U_2(s) = H_2(s)I_s(s) = \frac{4s}{s(s^2+5s+6)} \quad S_2(t) = 4e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

例6-2 电路激励为 $i_s(t) = \delta(t)$, 求冲激响应 $u_C(t)$ 。

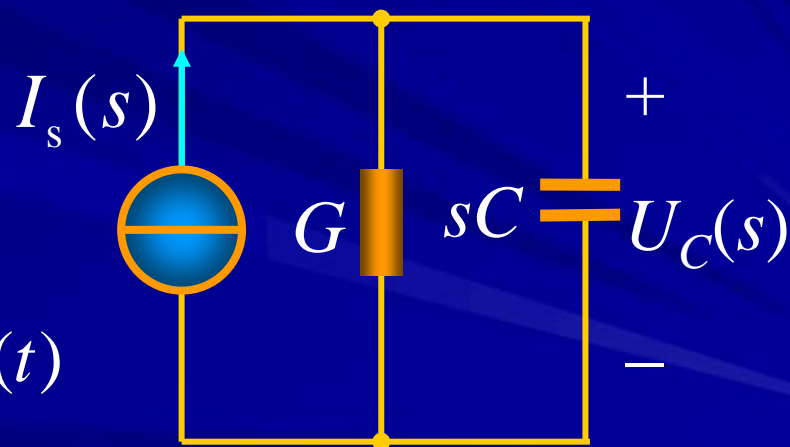
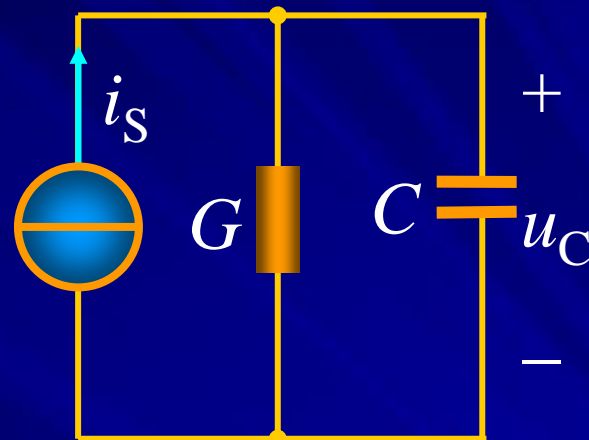
解 画运算电路

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{U_C(s)}{1} = Z(s)$$

$$= \frac{1}{sC + G} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = u_C(t) = \mathcal{L}^{-1} H(s)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right] = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



3. 应用卷积定理求电路响应

$$R(s) = H(s)E(s)$$

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} [E(s)H(s)] = e(t) * h(t)$$

$$= \int_0^t e(t-\xi)h(\xi)d\xi = \int_0^t e(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

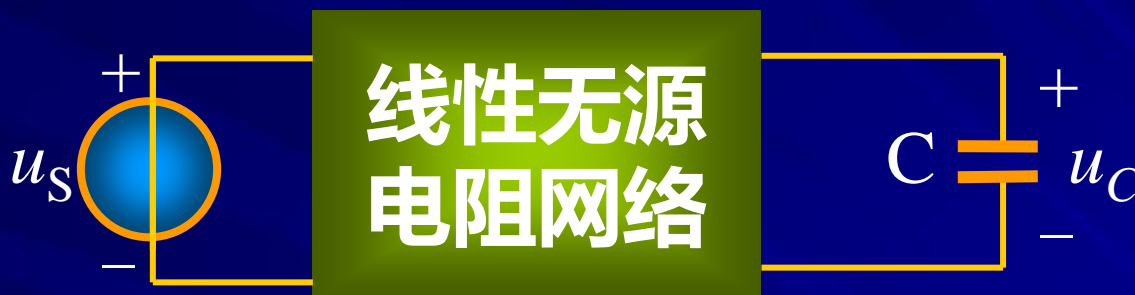


结论

可以通过求网络函数 $H(s)$ 与任意激励的象函数 $E(s)$ 之积的拉氏反变换求得该网络在任何激励下的零状态响应。

例6-3

图示电路 $u_S = 0.6e^{-2t}$, **冲激响应** $h(t) = 5e^{-t}$, **求** $u_C(t)$ 。



解

$$u_C(t) = r(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)E(s)]$$

$$U_C(s) = \frac{5}{s+1} \cdot \frac{0.6}{s+2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1=3, K_2=-3$$

$$u_C = (-3e^{-2t} + 3e^{-t})\text{V}$$

14-7 网络函数的极点和零点

1. 极点和零点

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{H_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

$$= H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

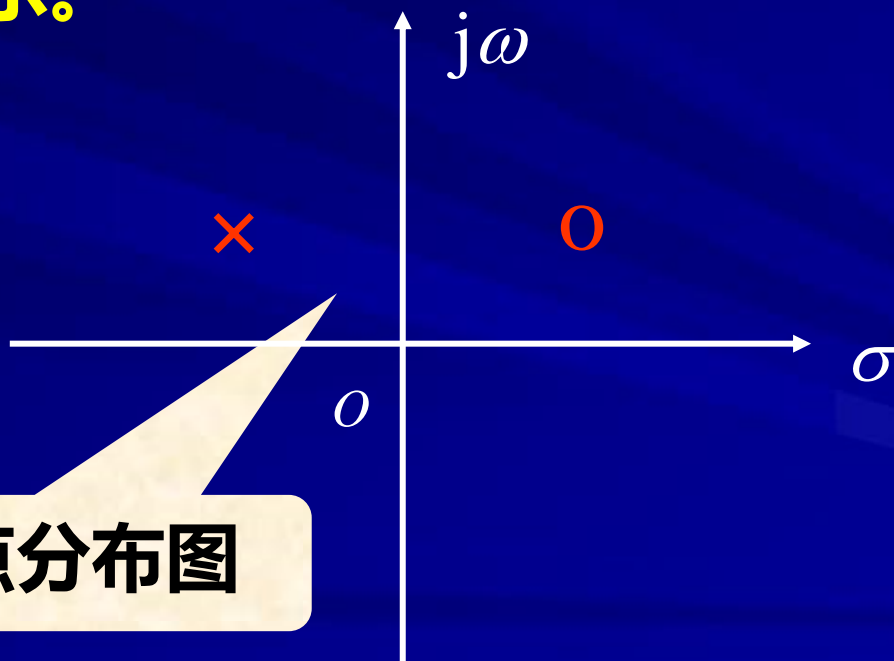
**当 $s = z_i$ 时, $H(s) = 0$,
称 z_i 为零点; z_i 为重根,
称为重零点。**

**当 $s = p_j$ 时, $H(s) \rightarrow \infty$,
称 p_j 为极点; p_j 为重根,
称为重极点。**

2. 复平面 (或 s 平面)

$$s = \sigma + j\omega \longrightarrow z_i, P_j \text{ 为复数。}$$

在复平面上把 $H(s)$ 的极点用 “ \times ” 表示，零点用 “ \circ ” 表示。



零、极点分布图

例7-1 $H(s) = \frac{2s^2 - 12s + 16}{s^3 + 4s^2 + 6s + 3}$ 绘出其极零点图。

解

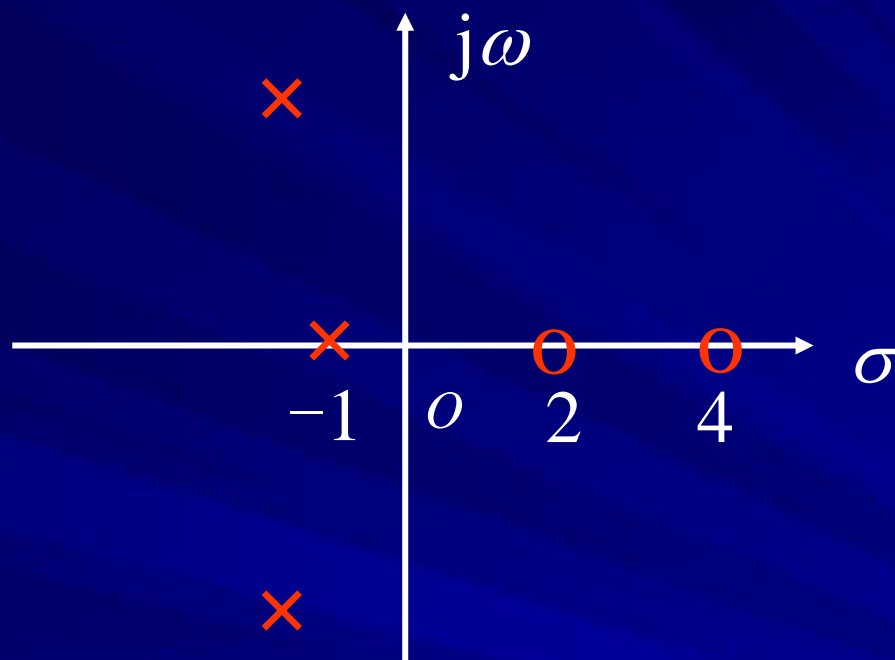
$$N(s) = 2s^2 - 12s + 16 = 2(s - 2)(s - 4)$$

$H(s)$ 的零点为: $z_1 = 2, z_2 = 4$

$$D(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 3$$

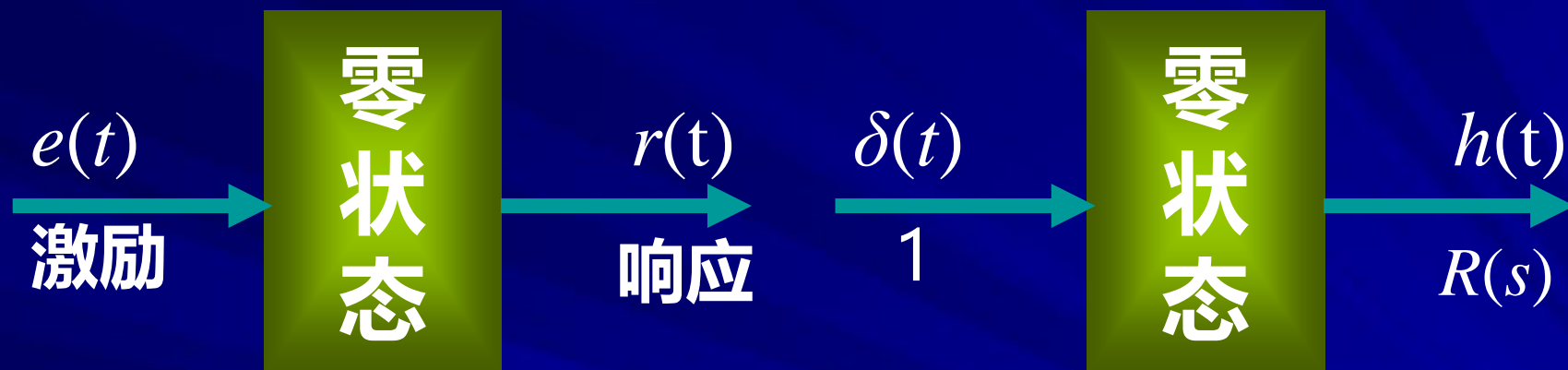
$$= (s + 1)\left(s + \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$H(s)$ 的极点为: $p_1 = -1, p_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$



14-8 极点、零点与冲激响应

1. 网络函数与冲激响应



$$R(s) = H(s)E(s)$$

当 $e(t) = \delta(t)$ 时, $E(s) = 1$

冲击响应

$$R(s) = H(s) \longrightarrow r(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$



结论 $H(s)$ 和冲激响应构成一对拉氏变换对。

例8-1 已知网络函数有两个极点为 $s=0$ 、 $s=-1$ ，一个单零点为 $s=1$ ，且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 10$ ，求 $H(s)$ 和 $h(t)$ 。

解 由已知的零、极点得

$$H(s) = \frac{H_0(s-1)}{s(s+1)} \longrightarrow H(s) = \frac{-10(s-1)}{s(s+1)}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_0(s-1)}{s(s+1)}\right] = -H_0 + 2H_0 e^{-t}$$

$$\text{令: } \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 10 \longrightarrow H_0 = -10$$

2. 极点、零点与冲激响应

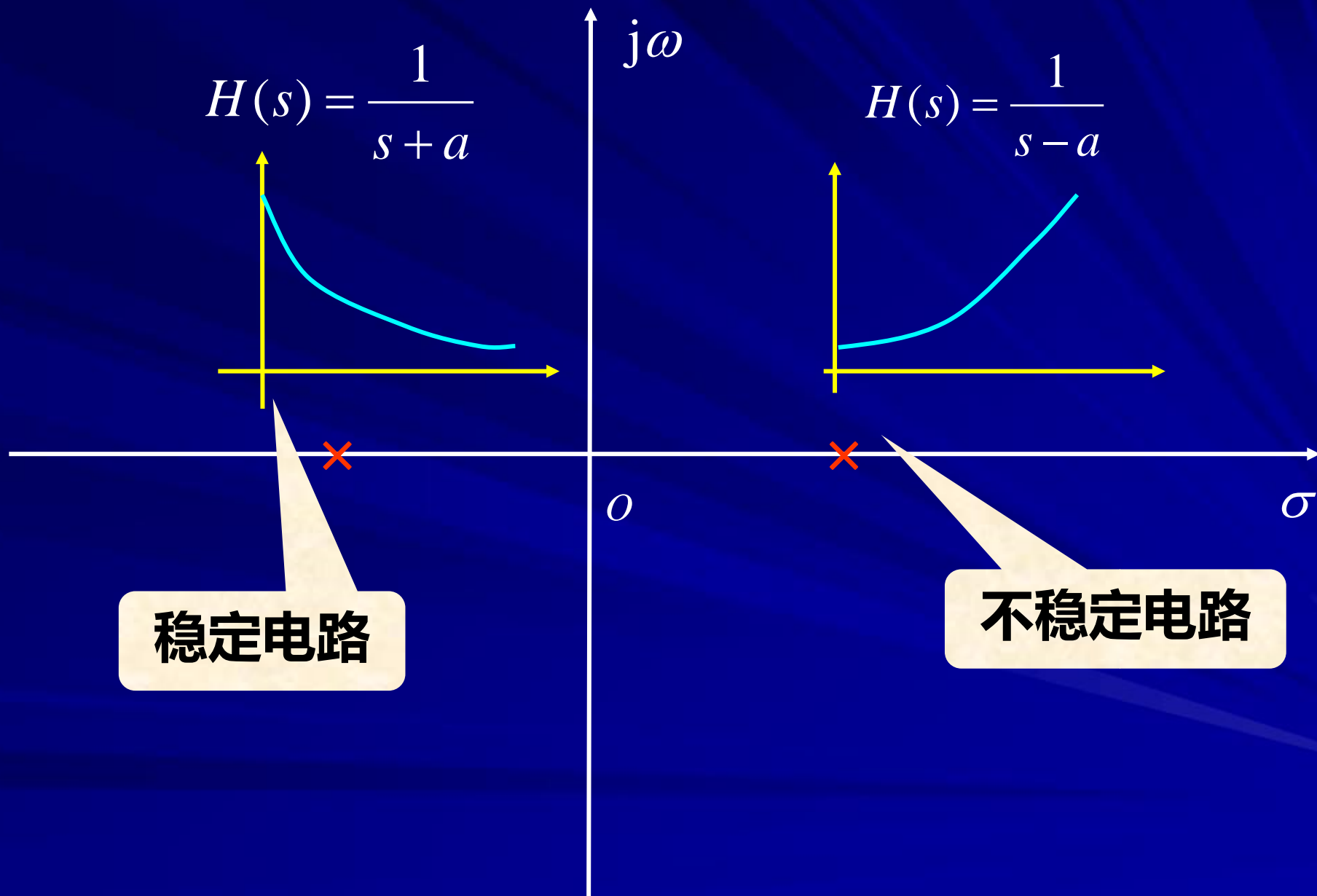
若网络函数为真分式且分母具有单根，则网络的冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

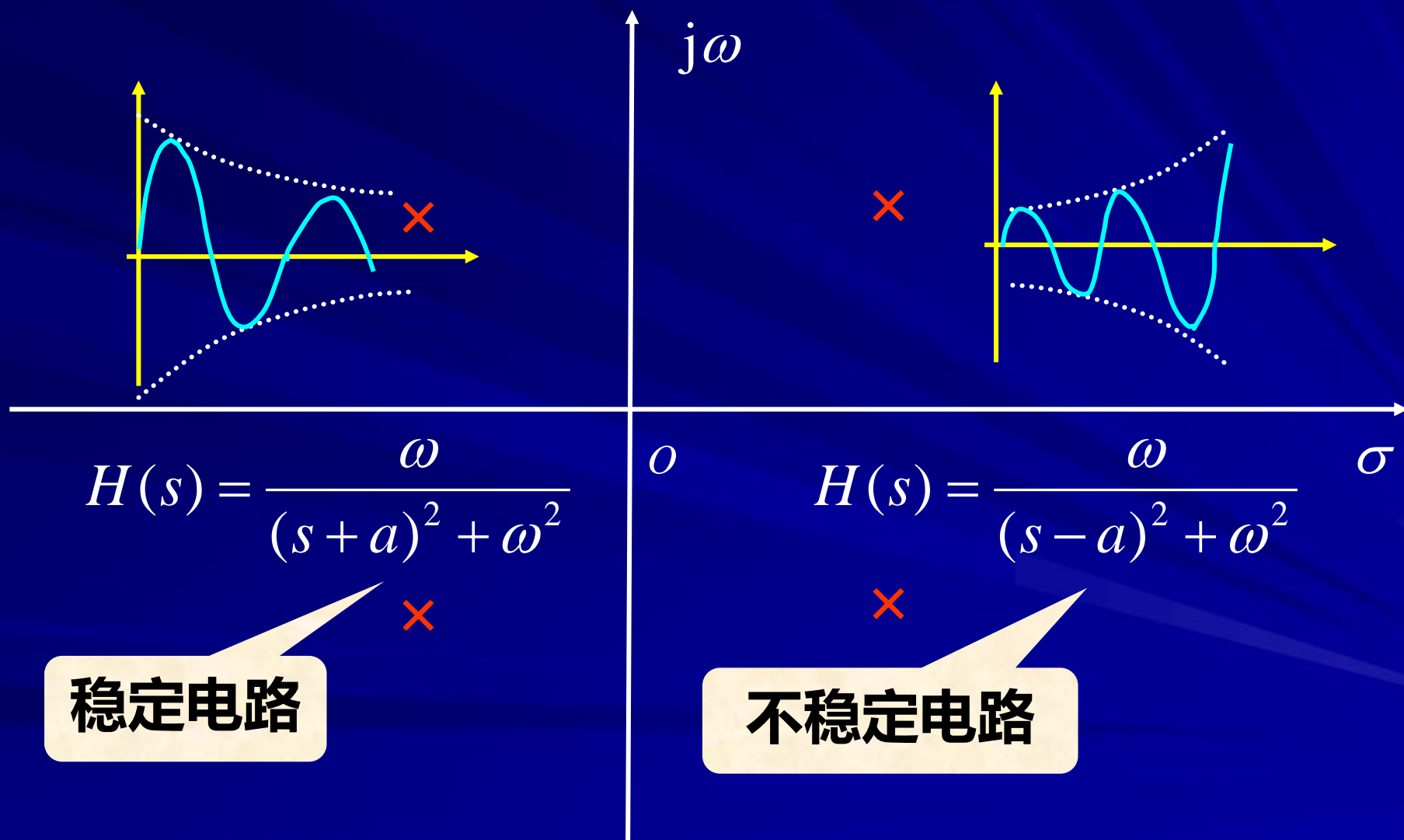
 **注意** 极点位置不同，响应性质不同，极点反映网络响应动态过程中自由分量的变化规律。

 **讨论**

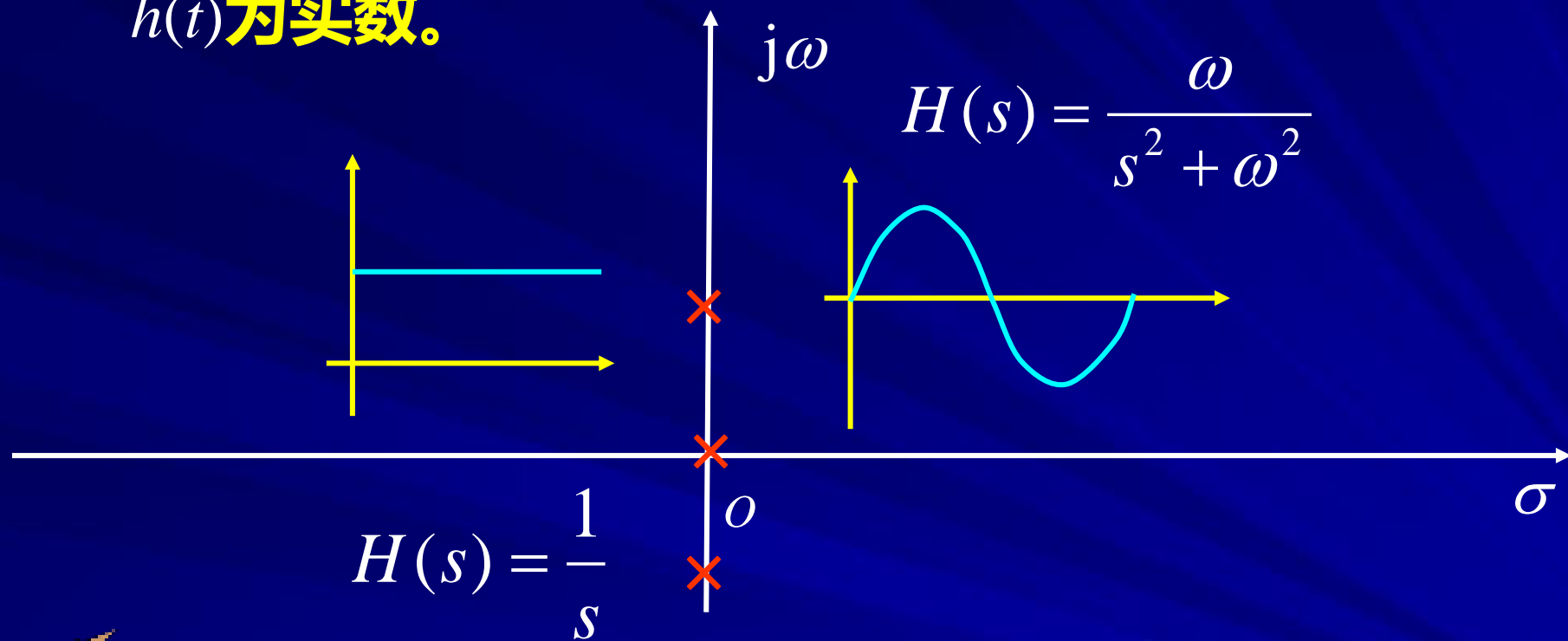
① 当 p_i 为负实根时， $h(t)$ 为衰减的指数函数；当 p_i 为正实根时， $h(t)$ 为增长的指数函数。




②当 p_i 为共轭复数时， $h(t)$ 为衰减或增长的正弦函数。



③当 p_i 为虚根时, $h(t)$ 为纯正弦函数, 当 P_i 为零时, $h(t)$ 为实数。



 **注意** 一个实际的线性电路是稳定电路, 其网络函数的极点一定位于左半平面。根据极点分布情况和激励变化规律可以预见时域响应的全部特点。

14-9 极点、零点与频率响应

令网络函数 $H(s)$ 中复频率 $s = j\omega$, 分析 $H(j\omega)$ 随 ω 变化的特性, 根据网络函数零、极点的分布可以确定正弦输入时的频率响应。

对于某一固定的角频率 ω

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi}$$

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m |(j\omega - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(j\omega - p_j)|}$$

幅频特性

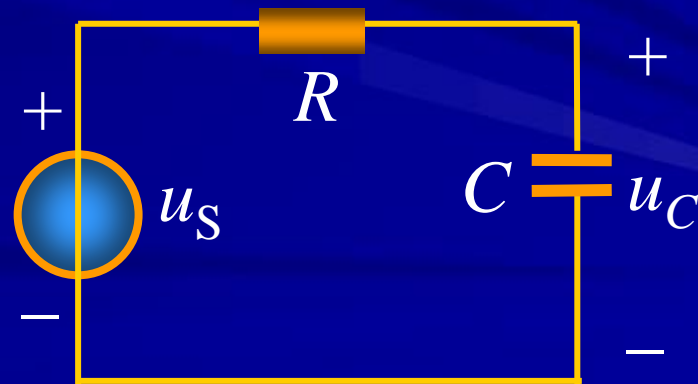
相频特性

$$\varphi = \arg[H(j\omega)] = \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(j\omega - p_j)$$

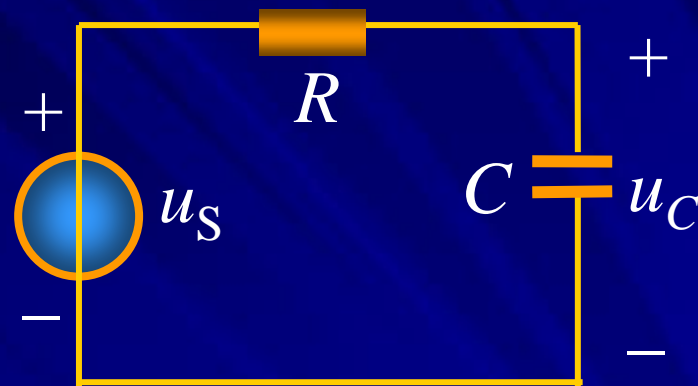
例9-1 定性分析RC串联电路以电压 u_C 为输出时电路的频率响应。

解

$$H(s) = \frac{U_C(s)}{U_s(s)}$$



$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

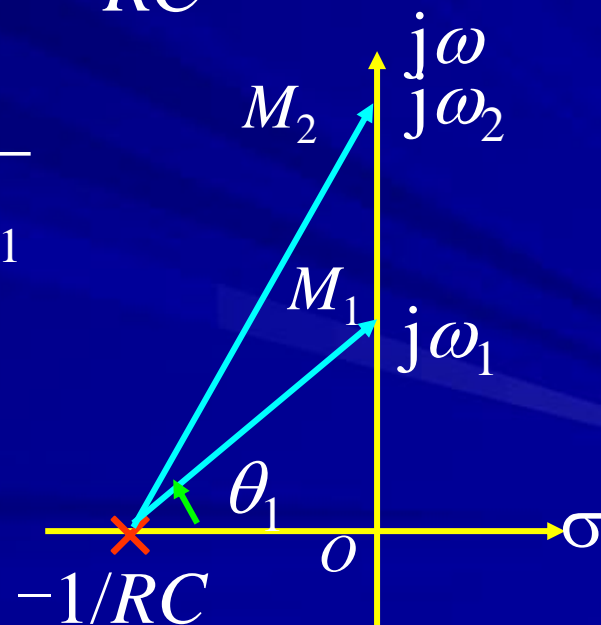


一个极点 $s = -\frac{1}{RC}$ 设 $H_0 = \frac{1}{RC}$, $s = j\omega$

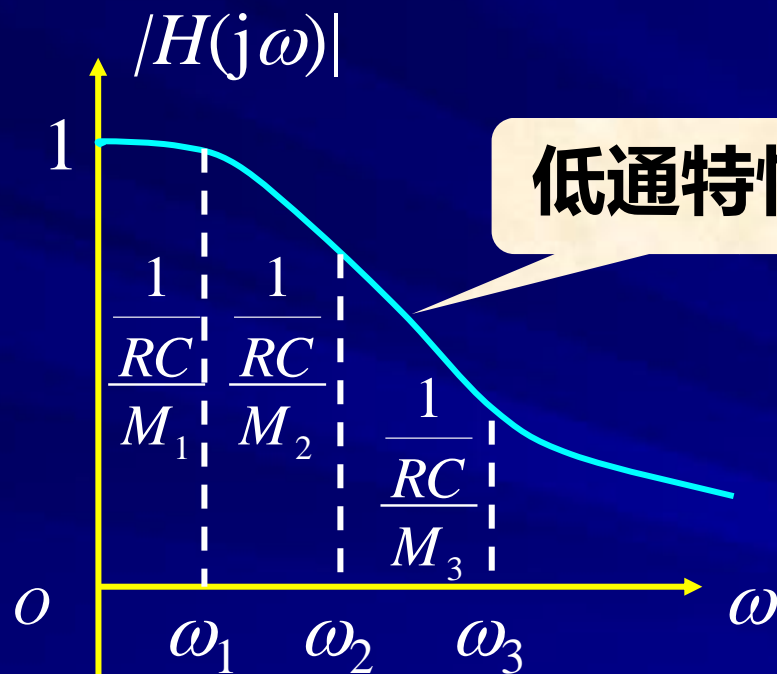
$$H(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega + 1/RC} = \frac{H_0}{j\omega - p_1}$$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{Me^{j\theta}}$$

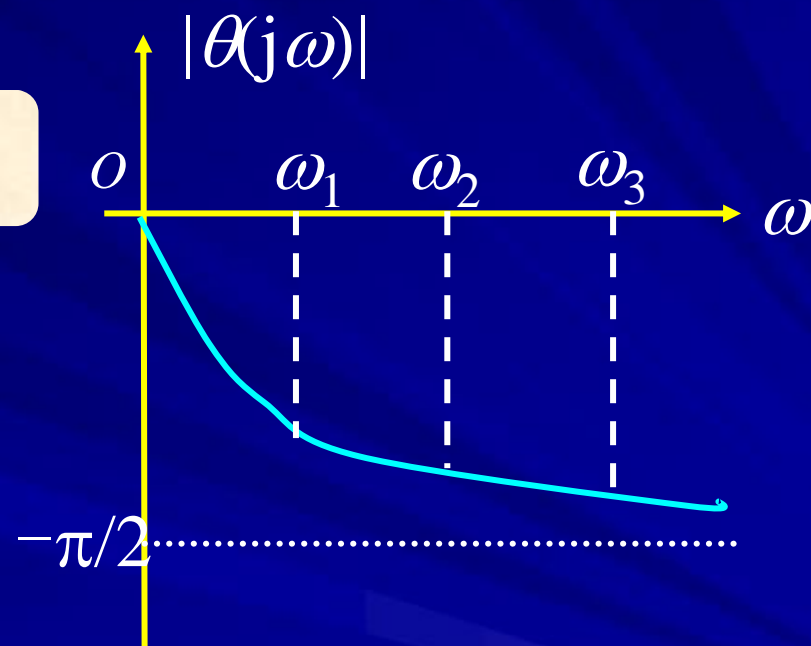
用线段 M_1 表示



$$H(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega + 1/RC} = |H(j\omega)| \angle \theta(j\omega)$$



幅频特性



相频特性

若以电压 u_R 为输出时电路的频率响应为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_s(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{Ne^{j\varphi}}{Me^{j\theta}}$$

