

# 本章知识结构

## 1. 第一、二节：向量的定义及运算

线性运算，数量积，向量积，混合积，用坐标表示

## 2. 空间中曲面、曲线及其方程（以向量为工具）

第三节：平面及其方程

第四节：空间直线及其方程

第五节：曲面及其方程

第六节：空间曲线及其方程

平面解析几何中，平面曲线当作动点轨迹一样。

空间解析几何中，任何曲面或曲线都可看作是  
点的几何轨迹



# 第三节

## 平面及其方程

一、平面的点法式方程

二、平面的一般方程

三、两平面的夹角



# 一、平面的点法式方程

## 1. 平面的法线向量

如果一个非零向量垂直于一平面，此向量称为该平面的法线向量。

平面上的任一向量都与该平面的法线向量垂直。

## 2. 建立平面方程

过空间中一个已知点作垂直于一条已知直线的平面可以作且只能作一个。

因此，当平面上一点已知，且平面的一个法向量已知，则此平面的位置被唯一确定。



设一平面通过已知点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  且垂直于非零向量  $\vec{n} = (A, B, C)$ , 求该平面  $\Pi$  的方程.

任取点  $M(x, y, z) \in \Pi$ , 则有

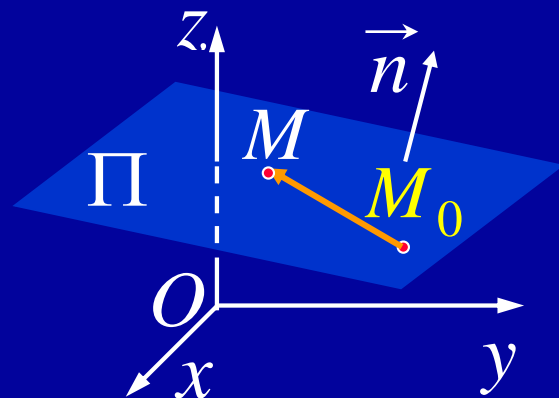
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故 
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\downarrow \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad ①$$

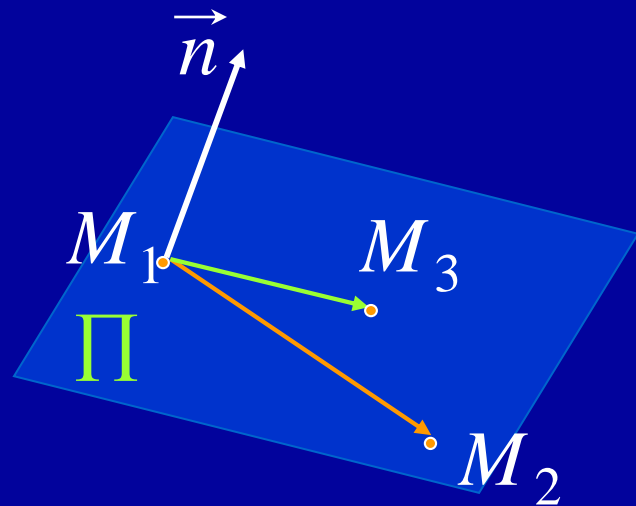
称①式为平面  $\Pi$  的**点法式方程**, 称  $\vec{n}$  为平面  $\Pi$  的**法向量**.



**例1.**求过三点  $M_1(2, -1, 4)$ ,  $M_2(-1, 3, -2)$ ,  $M_3(0, 2, 3)$  的平面  $\Pi$  的方程.

**解:** 取该平面  $\Pi$  的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (14, 9, -1)\end{aligned}$$



又  $M_1 \in \Pi$ , 利用点法式得平面  $\Pi$  的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$



**说明：** 此平面的**三点式方程**也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

**一般情况：** 过三点  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k=1,2,3$ )  
的平面方程(用到三向量共面充要条件它们混合积为零):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



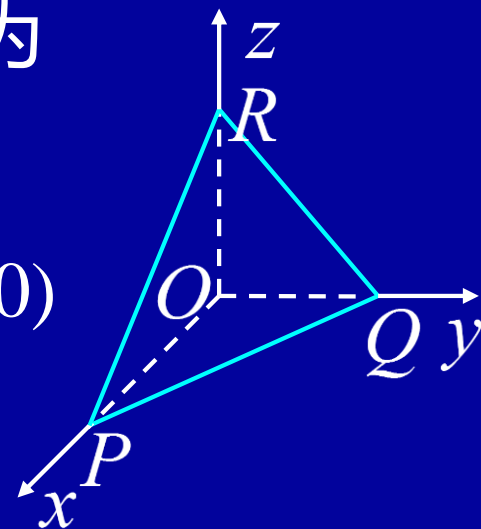
**特别,** 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0), Q(0,b,0), R(0,0,c)$$

时, 平面方程为  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  ( $a, b, c \neq 0$ )

此式称为平面的**截距式方程**.

称 $a, b, c$ 依次为平面在 $x, y, z$ 轴上的截距.



分析:

利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

按第一行展开得  $(x-a)bc - y(-a)c + zab = 0$

即  $bcx + acy + abz = abc$



## 二、平面的一般式方程

分析：平面的点法式方程是一个三元一次方程，而任何一个平面都可用它上面的点及它的法向量来确定。因此，任何一个平面都可用三元一次方程来表示。

另一方面：





设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad \textcircled{2}$$

任取一组满足上述方程的数  $x_0, y_0, z_0$ , 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

以上两式相减, 得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

显然方程②与此点法式方程等价, 因此方程②的图形是法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$  的平面, 此方程称为**平面的一般方程**.



$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

## 特殊情形

- 当  $D = 0$  时,  $Ax + By + Cz = 0$  表示**通过原点**的平面;
- 当  $A = 0$  时,  $By + Cz + D = 0$  的法向量  
 $\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$ , 平面平行于  $x$  轴;
- $Ax + Cz + D = 0$  表示 **平行于  $y$  轴** 的平面;
- $Ax + By + D = 0$  表示 **平行于  $z$  轴** 的平面;
- $Cz + D = 0$  表示平行于  $xOy$  面的平面;
- $Ax + D = 0$  表示平行于  $yOz$  面的平面;
- $By + D = 0$  表示平行于  $zOx$  面的平面.



**例2.** 求通过  $x$  轴和点  $(4, -3, -1)$  的平面方程.

**解:** 因平面通过  $x$  轴, 故  $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点  $(4, -3, -1)$  得  $C = -3B$

化简, 得所求平面方程

$$y - 3z = 0$$

**例3.** 用平面的一般式方程导出平面的截距式方程.

(P27例4, 自己练习)



### 三、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常锐角或直角)称为两平面的夹角.

设平面 $\Pi_1$ 的法向量为  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

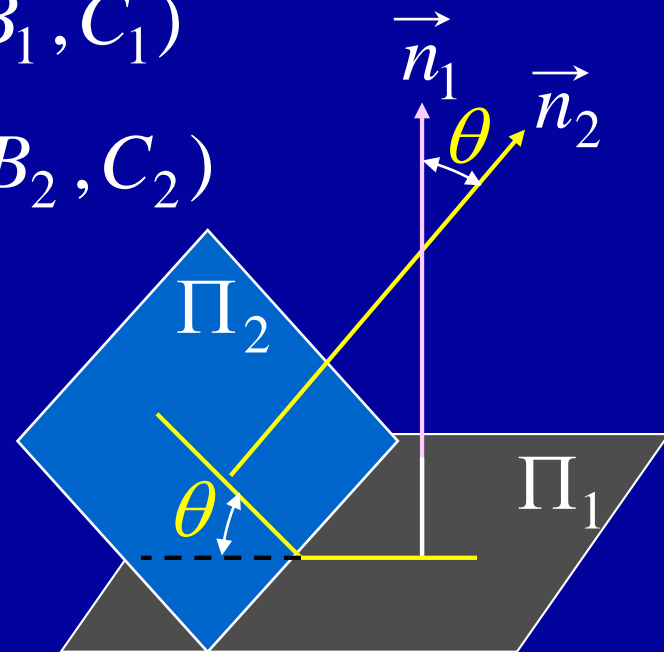
平面 $\Pi_2$ 的法向量为  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

则两平面夹角 $\theta$ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

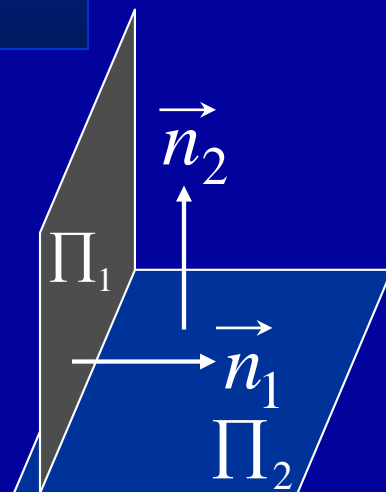


$$\begin{aligned} \Pi_1 : \vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1) \\ \Pi_2 : \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2) \end{aligned} \quad \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

**特别有下列结论：**

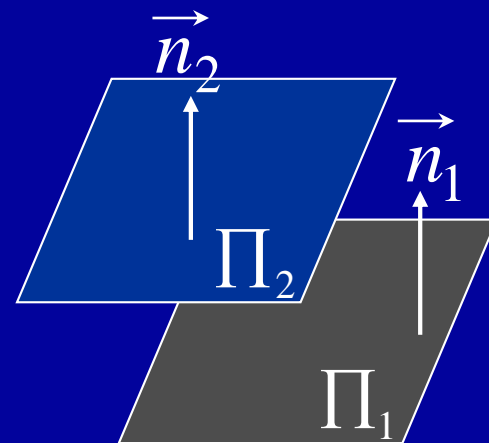
$$(1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



$$(2) \quad \Pi_1 // \Pi_2 \iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2$$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



**例4.** 一平面通过两点  $M_1(1, 1, 1)$  和  $M_2(0, 1, -1)$ , 且垂直于平面  $\Pi: x + y + z = 0$ , 求其方程.

**解:** 设所求平面的法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$ , 则所求平面方程为  $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \implies -A + 0 \cdot B - 2C = 0, \text{ 即 } A = -2C$$

$$\vec{n} \perp \Pi \text{ 的法向量} \implies A + B + C = 0, \text{ 故}$$

$$B = -(A + C) = C$$

$$\text{因此有 } -2\cancel{C}(x-1) + \cancel{C}(y-1) + \cancel{C}(z-1) = 0 \quad (C \neq 0)$$

$$\text{约去 } C, \text{ 得 } -2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

$$\text{即 } 2x - y - z = 0$$

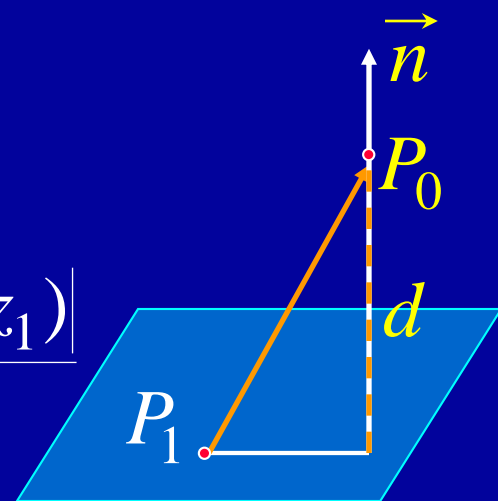
(另方法: 一般式方程)



**例5.** 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  外一点, 求  $P_0$  到平面的距离  $d$ .

**解:** 设平面法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$ , 在平面上取一点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 则  $P_0$  到平面的距离为

$$\begin{aligned} d &= \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &\quad \downarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$



(点到平面的距离公式)



# 内容小结

## 1. 平面基本方程:

一般式  $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$

三点式 
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$





## 2.平面与平面之间的关系

平面  $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面  $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

垂直:  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行:  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

夹角公式:  $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$



# 作业

P29 1, 2, 6, 7, 9



## 备用题

求过点  $(1,1,1)$  且垂直于二平面  $x - y + z = 7$  和  $3x + 2y - 12z + 5 = 0$  的平面方程.

**解:** 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (3, 2, -12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (10, 15, 5)$$

则所求平面方程为

$$10(x-1) + 15(y-1) + 5(z-1) = 0$$

化简得  $2x + 3y + z - 6 = 0$

