第十一章

曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	**曲线积分**	**曲面积分**
积分域	区　间	平面域	空间域	**曲线弧**	**曲面域**

曲线积分 $\begin{cases} \text{对弧长的曲线积分} \\ \text{对坐标的曲线积分} \end{cases}$

曲面积分 $\begin{cases} \text{对面积的曲面积分} \\ \text{对坐标的曲面积分} \end{cases}$

第一节

对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

二、对弧长的曲线积分的计算法

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

1. 引例: 曲线形构件的质量 (物质曲线段质量):

假设曲线形细长构件在空间所占

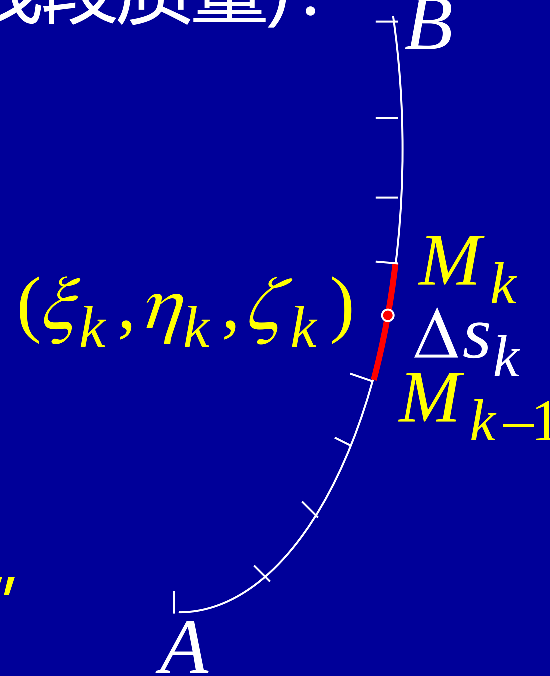
弧段为$\overset{\frown}{AB}$，其线密度为$\rho(x, y, z)$,

为计算此构件的质量，采用

“大化小, 匀代变, 近似和, 求极限”

可得

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$

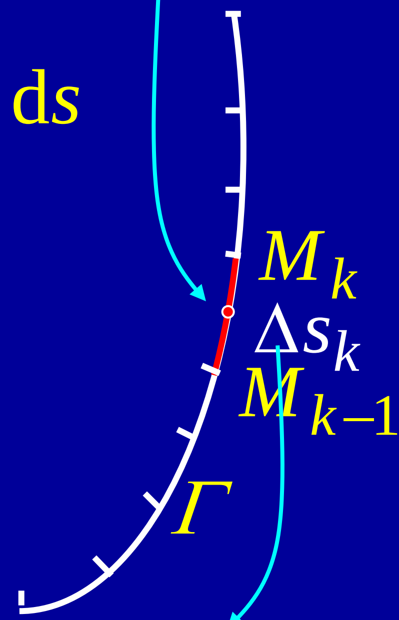


2. 定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线, $f(x,y,z)$ 是定义在 Γ 上的一个有界函数,若通过对 Γ 的任意分割和对局部的任意取点, 下列 “乘积和式极限”

(ξ_k,η_k,ζ_k)

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$



总存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上对弧长的曲线积分, 或**第一类曲线积分**.

$f(x,y,z)$ 称为被积函数, Γ 称为积分弧段 .

ds 称为弧长微元. (曲线 Γ 的弧微分)

小弧段长度

曲线形构件的质量 $M=\int_{\Gamma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

目录 上页 下页 返回 结束

如果 L 是 xOy 面上的曲线弧, 则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线 , 则记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x,y)\equiv 1$, 问 $\int_L \mathrm{d}s$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例 ?

否! 对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s \ge 0$, 但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

物理意义:

(1) $\int_L f(x,y,z)\,ds$ 或 $\int_L f(x,y)ds$ 表示以$f(x,y,z)$

或$f(x,y)$为线密度的曲线L的质量代数和.

(2) 若L是xOy面上的一曲线, $\int_L f(x,y)ds$

是以L为准线，母线平行于z轴的柱面介于xOy面与

曲面$z = f(x,y)$之间的面积的代数和.

以下假定：被积函数为连续函数，曲线是光滑

(或按段光滑).

3. 性质

(1) $\int_{\Gamma}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}s=\alpha\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

$+\beta\int_{\Gamma} g(x,y,z)\mathrm{d}s$ (α, β 为常数)

(2) $\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1 , Γ_2 组成)

(3) 设在 Γ 上 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s\le\int_{\Gamma} g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

特别地, $\left|\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,ds\right|\le\int_{\Gamma}|f(x,y,z)|\,ds.$

(4) $\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=l$ (l 为曲线弧 Γ 的长度)

二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路: 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

定理: 设 $f(x, y)$ 是定义在光滑曲线弧 L 上的连续函数,

$L: x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$，其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在

$[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \ne 0$,

则曲线积分 $\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s$ 存在, 且

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$(\alpha < \beta)$

证: 假定当参数 t 由 α 变到 β 时, L 上的点 $M(x, y)$ 从点 A 到点 B 描出曲线 L.

在 L 上取一列点: $A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$,

它们对应于一列单调增加的参数值

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$$

设点(ξ_k, η_k)对应参数为$\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$,

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(\tau_k') + \psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k\,, \quad \tau_k' \in [t_{k-1}, t_k]$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_k') + \psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$$

注意$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$连续

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

因此

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

说明:

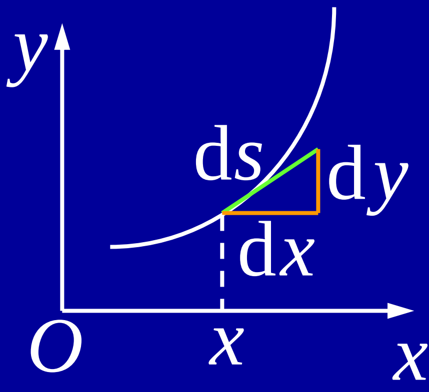
(1) $\because \Delta s_k > 0,\ \therefore \Delta t_k > 0$, 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$!

"积分上限一定要比下限大".

(2) 弧长元素ds就是弧微分:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



(3) 对弧长的曲线积分的计算转化为参变量的定积分的计算.

“参数”计算法：利用曲线的参数方程，

计算公式相当于“换元法”．

“**变量参数化，上限要比下限大**”

(4) 对弧长的曲线积分, 只与积分的路径（即弧长）有关，而于路径的方向无关.

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds = \int_{\widehat{BA}} f(x,y)\,ds$$

如果曲线 L 的方程为 $y=\psi(x)\ (a\le x\le b)$,则有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

如果方程为极坐标形式: $L: r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$$

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例1. 计算 $\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$ 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O\,(0,0)$ 与点 $B\,(1,1)$ 之间的一段弧 .

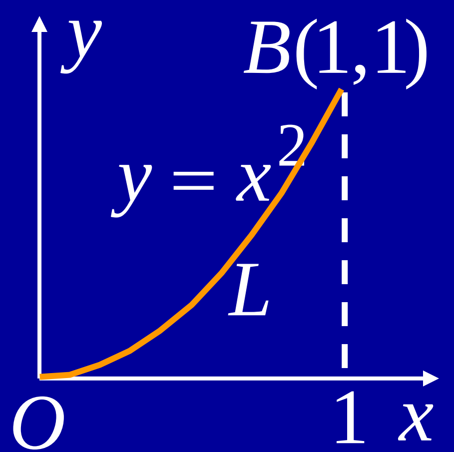
解: $\because L: y = x^2 \quad (0 \le x \le 1)$

$$\therefore \int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

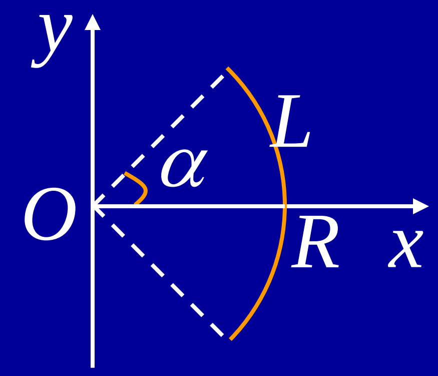
$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$



例2. 计算半径为 R ,中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度 $\mu = 1$).

解: 建立坐标系如图, 则



$$I = \int_L y^2 \,\mathrm{d}s$$

$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\alpha}$$

$$= R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

例3. 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$ 的一段弧.

解: $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

$$= \int_0^{2\pi} [(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2] \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}[a^2+k^2t^2]\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2)$$

例4. 计算 $\oint_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解: 由 曲线Γ关于x, y, z的对称性(轮换不变):

$$\oint_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} y^2\,\mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} z^2\,\mathrm{d}s$$

$$\therefore \quad \oint_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} a^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3$$

例5. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$的交线.

解: $\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$, 化为参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\qquad(0\le\theta\le2\pi)$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\qquad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}\theta=18\pi$$

例6. 计算 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中$L$ 为圆周$x^2+y^2=ax$.

解： L参数方程为：$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

$$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{a}{2}\mathrm{d}\theta$$

原式$=\int_L\sqrt{ax}\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sqrt{a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)}\,d\theta=2a^2$

注：对弧长曲线积分，因被积函数定义在积分曲线L上，即其定义域是所给曲线，满足L 的方程. 因此, 积分时可将曲线L的表达式直接代入积分式，简化计算.

例7. 计算$\int_L \left(xe^{y^2}+y\right)ds$,其中L为平面曲线$y=x^2$, $x\in[-1,1]$.

解： 由对称性,

$$原式=\int_L y\,ds=\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

注： 对称性简化计算.

若积分路径L关于y轴对称，被积函数关于x奇函数，则

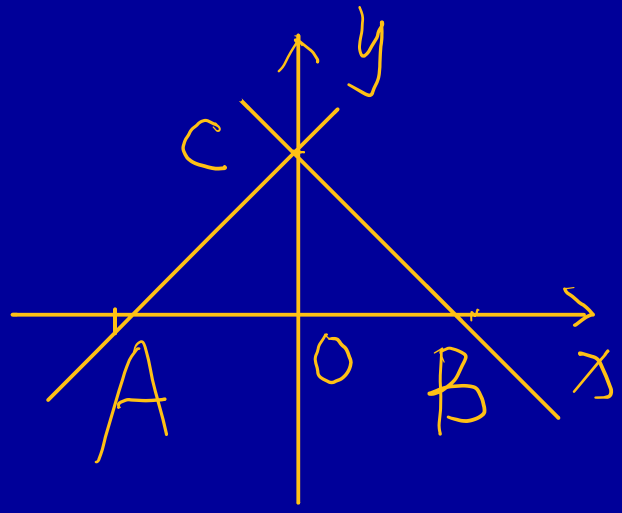
$$\int_L f(x,y)\,ds = 0.$$

若积分路径L关于y轴对称，被积函数关于x偶函数，则

$$\int_L f(x,y)\,ds = 2\int_{L_1} f(x,y)\,ds.$$

L_1为曲线L落在y轴一侧的部分.

例8. 计算 $\int_L x^2 \mathrm{y}\, \mathrm{ds}$, L是以$A(-1,0), B(1,0), C(0,1)$为顶点的三角形的周界.



解：原式 $= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{AC}$

$$= \int_{AB} + 2\int_{BC}$$

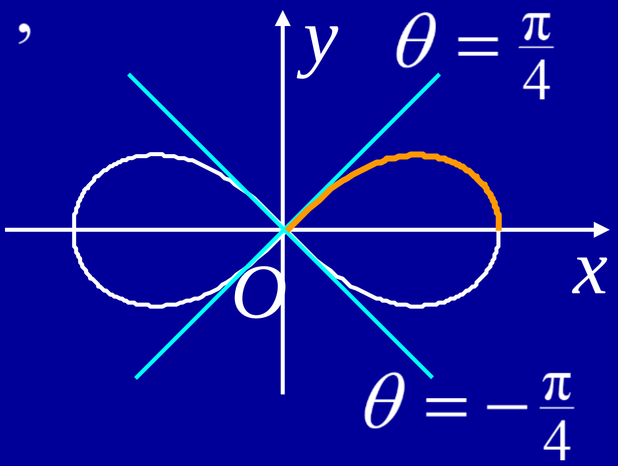
$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 x^2(1-x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}$$

例9. 计算 $I=\int_L |x|\,\mathrm{d}s$，其中$L$为双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$$

解: 在极坐标系下 $L: r^2=a^2\cos 2\theta$，



它在第一象限部分为

$$L_1: r=a\sqrt{\cos 2\theta}\quad(0\le\theta\le \pi/4)$$

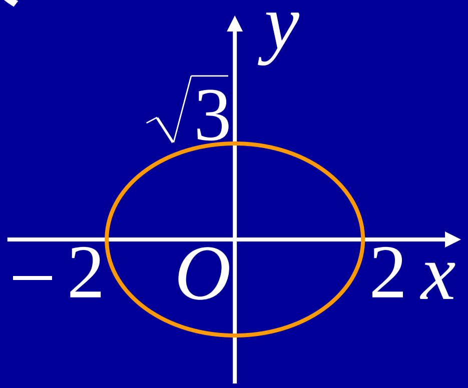
利用对称性，得

$$I=4\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\pi/4} r\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4} a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\,a^2$$

例10. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 周长为 a，求

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$$



提示: 利用对称性 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s = 0$

$$\text{原式} = 12\oint_L \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s = 12\oint_L \mathrm{d}s = 12a$$

分析: $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s = \int_{L_{上}} 2xy\,\mathrm{d}s + \int_{L_{下}} 2xy\,\mathrm{d}s$

$$= \int_{-2}^{2} 2x\sqrt{\cdots}\,\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} 2x(-\sqrt{\cdots})\,\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

例11. 若L是圆域D: $x^2+y^2\le a^2$的边界,则下列式子中不正确的是(C).

A. $\oint_L (x^2+y^2)^2\,ds=\oint_L a^4\,ds$

B. $\oint_L (x^2+y^2)^2\,ds=2\pi a^5$

C. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\,dxdy=\iint\limits_D a^4\,dxdy$

D. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\,dxdy=\frac{\pi}{3}a^6$

例12. 求柱面$x^2+y^2=2x$介于xOy平面与曲面$z=x^2+y^2$

之间的那部分的面积S.

解：$S=\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{ds}$, L: xOy面上的曲线$x^2+y^2=2x$.

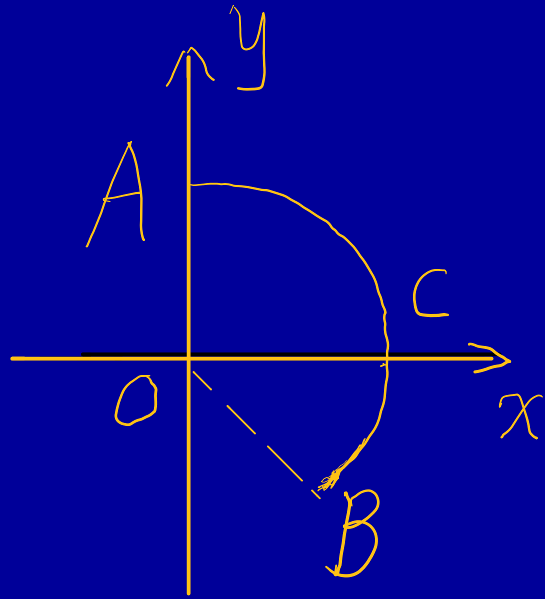
L的参数方程为: $\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$

$x'^2(\theta)+y'^2(\theta)=1.$

$s=\int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

$=2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\,d\theta\ =4\pi$

例13. 求 $\int_L x\,ds$，其中L为如图圆周 $x^2+y^2=1$上从点 $A(0,1)$ 到$B(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$的一段劣弧.



解法一： L 的参数方程:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = dt$$

$$\int_L x\,ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解法二： $\overset{\frown}{AC}$: $y=\sqrt{1-x^2}$,

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\overset{\frown}{CB}:\ y=-\sqrt{1-x^2},\quad ds=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_L x\,ds=\int_{\overset{\frown}{AC}} x\,ds+\int_{\overset{\frown}{CB}} x\,ds$$

广义积分

$$=\underline{\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}+\underline{\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

注：对弧长曲线积分化为定积分时，注意曲线方程的单值性.

目录 上页 下页 返回 结束

例14. 设均匀螺旋形弹簧L的方程为$x = a\cos t,\ y = a\sin t,$
$z = kt\ \ (0 \le t \le 2\pi),$

(1) 求它关于 z 轴的转动惯量 I_z ;

(2) 求它的质心 .

解: 设其密度为 ρ (常数).

(1) $$I_z = \int_L (x^2 + y^2)\rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2\rho\sqrt{a^2 + k^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\pi a^2\rho\sqrt{a^2 + k^2}$$

(2) L的质量 $m = \int_L \rho\,\mathrm{d}s = 2\pi\rho\sqrt{a^2 + k^2}$

而 $$\int_L x\rho\,\mathrm{d}s = a\rho\sqrt{a^2 + k^2}\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_L y\rho\,\mathrm{d}s = a\rho\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_L z\rho\,\mathrm{d}s = k\rho\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = 2\pi^2 k\rho\sqrt{a^2+k^2}$$

故重心坐标为 $(0, 0, k\pi)$

作业

P193　3: (3)(4)(5)(6)(7)，4