第三节 全微分

一元函数 $y = f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$$

本节内容:

一、全微分的定义

***二、全微分在数值计算中的应用**

一、引入

二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时，因变量相对于该自变量的变化率. 由一元函数微分与增量的关系有：

$$\underline{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)} \approx \underline{f_x'(x, y)\Delta x}$$

$$\underline{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)} \approx \underline{f_y'(x, y)\Delta y}$$

$f(x,y)$对x的偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$

$\Delta_x z$的线性主部

$f(x,y)$对x的偏增量

$f(x,y)$对y的偏增量

$f(x,y)$对y的偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$

$\Delta_y z$的线性主部

然而，在许多实际问题中，常需考虑：当多元函数的每个自变量都获得增量时，函数的增量，即全增量是多少?

定义：(全增量) 设函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$的某邻域内有定义，$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为此邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

为函数在点P对应于自变量增量Δx和Δy的全增量Δz.

一般来说，计算Δz比较复杂, 例如：设$f(x,y)=x^y$,

求函数在(1,2)点处，对应于$\Delta x=0.04$, $\Delta y=0.02$时，

函数的全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$= f(1+0.04, 2+0.02) - f(1,2)$$

$$= 1.04^{2.02} - 1^2$$

为简化计算，希望找到Δz既易计算，近似程度较好的近似值. 类似一元情形：

问：全增量能否用自变量的增量$\Delta x, \Delta y$的线性函数来近似代替？

二、全微分的定义

1. 定义： 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义. 若函数在点 (x_0, y_0) 的全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

可表示成

$$\Delta z = \boxed{A\Delta x + B\,\Delta y} + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 Δx, Δy, 仅与 x_0, y_0 有关, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处**可微分**, 称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的**全微分**, 记作: dz

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

或记为：$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$

$$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$$

2. 若函数在区域 D 内各点处都可微, 则称此函数**在D 内可微，**或称此函数为区域**D内的可微函数.**

三、可微与连续的关系

定理： 函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微，

$\longrightarrow$ 函数在该点连续.

证明: （即证$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$）

由可微: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$

注意： **连续** $\not\Rightarrow$ 可微.

四、可微与偏导数存在的关系

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系:

(1) 函数可微 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 函数可微

定理1 (必要条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)**可微**，

则该函数在该点关于x, y的偏导数必存在,且有

$$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} \Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 令 $\Delta y = 0$,

得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}$ =B.

证毕

说明： （1）与一元一样，自变量的增量等于自变量的微分，$\Delta x = dx$，$\Delta y = dy$.

因此，$dz = f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy$

（2）若函数$z = f(x, y)$在区域D上是可微函数，则在D上的全微分，记为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

可见，二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和，称为微分的叠加原理.

(3) 定理1 的逆定理不成立 . 即:

偏导数存在函数不一定可微 !

反例: 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 $(0,0)$ 不可微 .

注： 虽偏导存在，形式上可写出 $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，但它与 Δz 之差不一定是$o(\rho)$，因而不一定是全微分.

故：偏导数存在函数不一定可微.

上例：**连续 $\nRightarrow$ 可微.** 由于当$x^2+y^2\neq 0$时，

$$0\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0).$$

因此，$f(x,y)$ 在(0,0)点连续, 但上面已证该点处不可微.

偏导存在 $\nRightarrow$ 可微

问：什么条件下可微？即偏导存在+ ?$\Rightarrow$可微.

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 则函数在该点可微分.

分析：即证 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

其中 A, B 不依赖于Δx, Δy.

证明：由偏导在$P(x, y)$连续，可知两个偏导数在P的某邻域内存在. 设点$(x + \Delta x, y + \Delta y)$为此邻域内任意一点，考虑全增量：

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)]$$

$$+[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y'(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

由偏导在P处连续, 其中$0<\theta_1, \theta_2 < 1$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x'(x,y)$$

所以 $f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x'(x,y)+\alpha$

同理 $f_y'(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y'(x,y)+\beta$

$\alpha \to 0, \beta \to 0$(当$\rho \to 0$)

于是 $\Delta z = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

而 $0 \le \left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\right|$

$$\le \frac{|\alpha\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\beta\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$\le \frac{|\alpha\Delta x|}{|\Delta x|} + \frac{|\beta\Delta y|}{|\Delta y|} = |\alpha| + |\beta| \to 0 \quad (\text{当}\rho \to 0)$$

所以 $\Delta z = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y + o(\rho)$

从而函数$z = f(x,y)$在P点可微.

推广：类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例1. **求**函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分，及在该点处，当$\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$ 时的微分.

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = e^2, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$\therefore \quad \left.\mathrm{d}\,z\right|_{(2,1)} = e^2\,\mathrm{d}\,x + 2e^2\,\mathrm{d}\,y = e^2(\mathrm{d}\,x + 2\mathrm{d}\,y)$$

$\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$ 时的微分 $dz = \dfrac{1}{2}e^2$

例2. 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}u = 1\cdot\mathrm{d}x + (\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz})\mathrm{d}y + ye^{yz}\mathrm{d}z$

例3. 求 $u = y\sin(x + y^2 - e^z)$ 的全微分

解: $du = y\cos(x + y^2 - e^z)\,d\mathrm{x}$

$+[\sin(x + y^2 - e^z) + 2y^2\cos(x + y^2 - e^z)]\mathrm{dy}$

$-ye^z\cos(x + y^2 - e^z)\,dz$

例4. 求 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$ 在点(1,1,1)处的全微分.

解: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{df(x,1,1)}{dx}\right|_{x=1}=1$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{df(1,y,1)}{dy}\right|_{y=1}=\left.\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right)\right|_{y=1}=-1.$

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{df(1,1,z)}{dz}\right|_{z=1}=\left.\frac{d(1)}{dz}\right|_{z=1}=0.$

$du|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}dx+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}dy+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}dz=dx-dy.$

五、全微分的应用

在近似计算和误差估计中具有重要作用.

由$z=f(x,y)$在$P_0\ (x_0,y_0)$可微,

$$\Delta z=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)=dz+o(\rho)$$

当$|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 充分小时，近似有 $\Delta z\approx dz$.

于是 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$

$$\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y.$$

可利用上式计算 Δz及$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$的近似值及进行误差估计.

例5. 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解： 设 $f(x,y)=x^y$，即求 $f(1.04,2.02)$.

取 $x_0=1,\ y_0=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02,$

则 $f(1,2)=1.$

$$f'_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f'_y(x,y)=x^y\ln x$$

$$f'_x(1,2)=2,\qquad f'_y(1,2)=0.$$

$$(1.04)^{2.02}\approx 1+f'_x(1,2)\Delta x+f'_y(1,2)\,\Delta y=1.08.$$

内容小结

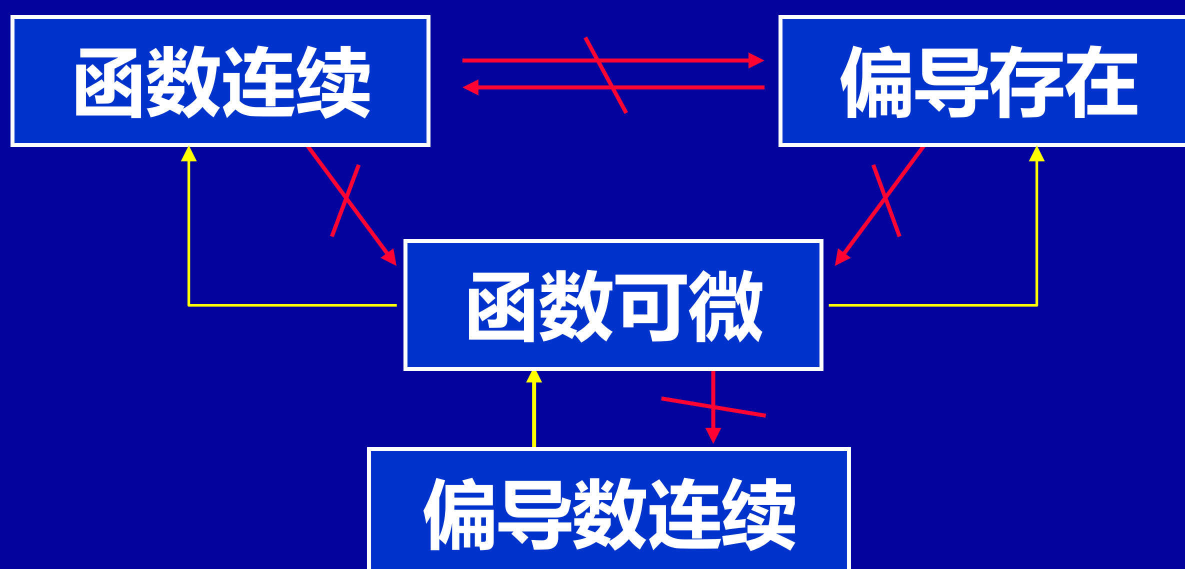
1. 微分定义: ($z = f(x, y)$)

$$\Delta z = \underline{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y} + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}\, z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



说明： 上面的关系图表对于三元及三元以上的函数也成立．全微分的定义，可微的充分条件, 可微的必要条件，微分的叠加原理等都成立.

例题: 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在，但偏导数在点 (0,0) 不连续，而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

证: 1) 因 $\left| xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le |xy| \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0=f(0,0)$

故函数在点 (0, 0) 连续 ;

2) $\because\ f(x,0)\equiv 0,\ \therefore\ f_x(0,0)=0$; 同理 $f_y(0,0)=0.$

3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当点$P(x,y)$沿射线 $y=|x|$ 趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(|x|\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right)$$

极限不存在, $\therefore\ f_x(x,y)$ 在点$(0,0)$不连续;

同理, $f_y(x,y)$在点$(0,0)$也不连续.

4) 下面证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微：

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|$$

$$=\left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|\Delta x|\xrightarrow{\rho\to 0}0$$

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

说明： 此题表明, 偏导数连续只是可微的充分条件.

作业

P77　1: (3) (4)， 2， 3， 5