第五章微分中值定理与导数的应用

第一节中值定理

一、 **定理**5.1.1(Rolle(罗尔))定理 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,端点的函数值相同$f(a)=f(b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$.

证明: $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,则在$[a,b]$上取到最大值M和最小值m.

若最大值与最小值相等, 那么$f(x)$是常数,则在区间$[a,b]$上任意一点的导数都为零,故定理显然成立.

若$M\neq m$,则必有一个最值在区间内部达到，不妨设M在区间内达到,即存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=M$,于是有

$$\begin{aligned}
&\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leq 0,\text{当}\Delta x>0\\
&\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geq 0\text{当}\Delta x<0\\
\Longrightarrow &\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leq 0\\
&\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geq 0
\end{aligned}$$

同时成立，考虑到$f'(\xi)$存在,只有$f'(\xi)=0$.

注：Rolle定理的几何意义十分明显，即曲线$y=f(x)$若满足Rolle定理的条件，则曲线上至少有一条平行于x轴的切线，见图5.1.1

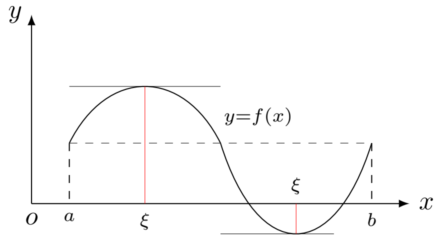


图5.1.1

注：Rolle定理告诉我们:可导函数在区间内的最值点,就是导数为零的点. 这个定理的三个条件组成了定理成立的充分条件.但是如果缺少其中一个条件结论可能不成立,例如$y=|x|$ 在$[-1,1]$上连续,端点的函数值相同,但在0点不可导,结果任意点的导数都不会为零.

$y=[x]$虽然不满足连续和端点的函数值相等的条件,但在非整点处导数却为零.

$y=x^3$在$[-1,1]$上虽然满足连续可导但不满足端点的函数值相等,却在$x=0$处导数为零.

例5.1.1 设函数f为$\mathbb{R}$上可导函数，证明：若方程$f'(x)=0$没有实根，则方程$f(x)=0$至多只有一个实根.

证明: 反证若$f(x)=0$至少有两个不同的实根$x_1,x_2(x_1<x_2)$,则在区间$[x_1,x_2]$上满足Rolle定理的条件于是方程$f'(x)=0$至少有一个实根,与假设矛盾,于是得证.

例5.1.2 设$f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$, 证明：存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$.

证明: 需要证明函数$F(x)=f(x)-x$具有导数为零的点,注意到$F(x)\in C[\frac{1}{2},1]$, $F(1)=-1<0, F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}>0$,由零点存在定理,存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使得$F(\eta)=0$,于是$F(x)$在$[0,\eta]$上满足Rolle定理的条件,因此存在$\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ 使得$F'(\xi)=0$,即$f'(\xi)=1$.

二、(Lagrange(拉格朗日))定理

定理5.1.2 (Lagrange(拉格朗日)定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

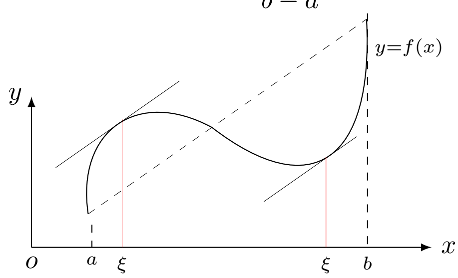


图5.1.2

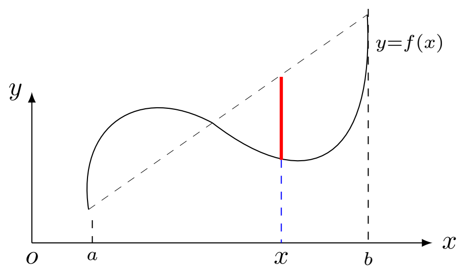


图5.1.3

证明: 由图5.1.3，注意到过点$(a,f(a)),(b,f(b))$ 的弦的方程为：$y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. 在区间$[a,b]$上任意点$x$处曲线的纵坐标与弦的纵坐标的差为$x$的函数：$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 容易验证该函数满足Rolle定理之条件,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$\varphi'(\xi)=0$，即

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

注：Lagrange 定理的几何意义也十分明显，即满足条件的曲线$y=f(x)$上至少有一点处切线与过曲

线端点的弦平行，见图5.1.2.

注：因为$\xi \in (a,b)$所以$\xi = a+\theta(b-a), 0<\theta<1$,我们称$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$为有限改变量公式,若令$b-a=h$,则$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$.

注：当$f(a)=f(b)$时，Lagrange定理就是Rolle定理,所以条件依然是充分条件.

例5.1.3 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x\le 2\end{cases}$ 问该函数是否满足Lagrange定理之条件,若满足求ξ

解: 当$x\neq 1, f(x)$显然可导,

当$x=1$时,须由定义求得

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=-1$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1$$

因此函数$f(x)$满足Lagrange定理的条件，于是有

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=f'(\xi)$而$f'(x)=\begin{cases}-x & 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{x^2} & 1<x\le 2\end{cases}$ 注意$\xi\in(0,2)$与变量x无关.因此应有

$$\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=\begin{cases}-\xi & ,\\ -\frac{1}{\xi^2} & ,\end{cases}$$

即,$\xi=\frac{1}{2}$或者$\xi=\sqrt{2}$.

例5.1.4 证明：对一切$h>-1$，则$\dfrac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$.

证明: 设$f(x)=\ln(1+x)$,则

$\ln(1+h)=\ln(1+h)-\ln 1=\frac{h}{1+\theta h}, 0<\theta<1$.

当$h>0, 1+\theta h<1+h, \frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h$;

当$-1<h<0, 1>1+\theta h>1+h>0, \frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h$.

例5.1.5证明数列$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$的极限存在.

证明:先证明该数列有界由上例中的不等式，$\forall k\in\mathbb{N}$

$\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}<\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$

$\Longrightarrow \frac{1}{1+k}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} & < \ln 2 - \ln 1 & < 1 \\
\frac{1}{3} & < \ln 3 - \ln 2 & < \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & < \ln 4 - \ln 3 & < \frac{1}{3} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{n} & < \ln n - \ln(n-1) & < \frac{1}{n-1}
\end{array}$$

相加得$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln n < \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,于是$x_n > 0$

以下自然考虑证明x_n递减

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$,因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$该极限值称为Euler 常数.

命题5.1.1 函数$f(x) = C$(C为常数) $x \in I, \Longleftrightarrow f'(x) \equiv 0$.

证明: $(\Longrightarrow)$显然

$(\Longleftarrow)\forall x_1, x_2 \in I \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$ 任意两点的函数值相等所以函数为常函数.

命题5.1.2 在区间I上，若$f(x) = g(x) + C \Longleftrightarrow f'(x) = g'(x)$

命题5.1.3 设函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续,在$\overset{\circ}{U}(x_0)$内可导,且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在,则$f'(x)$在点$x_0$处连续.

证明: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_+(x_0)$，则在区间$[x_0, x]$上，由Lagrange定理,我们有$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi), \xi \in (x_0, x)$两端取极限得

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(\xi) = f'_+(x_0)$

同理可得$f'_-(x_0)$

由于$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = k$,所以$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = k$从而$f'(x_0) = k$ 即$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$,故命题得证

例5.1.5 设$f(x) = \begin{cases} x + \sin x^2, & x \le 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

解:容易得到$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x\cos x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$ 显然$f(x)$在$x = 0$处连续，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1 + 2x\cos x^2) = 1$.

由命题5.1.3 $f'(0) = 1$.

习题5.1

1 .指出下列函数在所给区间上适合拉格朗日定理的条件，并找出存在于所给区间内的ξ值；

1)$y=x^3,[0,a]$;　　　2)$y=\ln x,[1,e]$

2.证明：方程$x^n+px+q=0,n\in\mathbf{N}$,当$n$为偶数时最多有两个实根，当$n$为奇数时，最多有三个实根；

3.设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，$a<x_1<x_2<x_3<b$,且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,求证，存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=0$

4.证明：1)若$f(x)$在$[a,b]$ 上可导，且$f'(x)\geq m$,则$f(b)\geq f(a)+m(b-a)$;

2)若$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$|f'(x)|\leq M$,则$|f(b)-f(a)|\leq M(b-a)$;

3)$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,有$|\sin x_1-\sin x_2|\leq|x_2-x_1|$

5.证明：

1)$py^{p-1}(x-y)\leq x^p-y^p\leq px^{p-1}(x-y),(0<y<x,p>1$;

2)$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi sgn(x),(|x|\geq 1)$;

3)$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x),(x>0)$;

4)$x-\frac{x^3}{6}<\sin x,(x>0)$;

5)$\tan x>x+\frac{x^3}{3},(0<x<\frac{\pi}{2})$;

6)$\sin x+\tan x>2x,(0<x<\frac{\pi}{2})$;

6.设$f(x)$在$[a,b]$上可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$,使得$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$;

7.设$f(x)$在点$x=a$处有二阶连续导数，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a);$$

8.设$f(x),g(x)\in C[a,b]$在(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)=0$,证明:至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

9.以$(a,f(a)),(b,f(b)),(x,f(x))$三点为顶点的三角形的面积是$x$ 的函数,证明:存在一点ξ介于a,b之间,且$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

10. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有二阶导数，$a<c<b$,证明：存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

11.证明：若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足关系式$f'(x)=f(x)$,且$f(0)=1$,则$f(x)=e^x$

第二节Cauchy中值定理和不定式的极限

一、(Cauchy中值定理)

定理5.2.1 (Cauchy中值定理)设函数$f(x),F(x)$在区间$[a,b]$ 上连续,在(a,b)内可导,且$F'(x)\neq 0$，则在(a,b)内至少存在一点ξ 使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

证明: 由Lagrange 中值定理的结论，我们看到：两个函数$f(x),x$在区间$[a,b]$端点处纵坐标差的比，恰好等于某点$\xi\in(a,b)$处两个函数导数的比.于是沿着Lagrange定理的证明思路，可以猜想，将特殊函数$g(x)=x$换成一般的函数$F(x)$并保留原来函数$g(x)=x$ 的性质，譬如导数不为零.是否也应该有相应的结论，即两个函数在区间$[a,b]$端点处函数值差的比，等于某点处导数的比？于是将证明Lagrange定理时构造的函数中的特殊函数x换成函数$F(x)$得到函数：

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}(F(x)-F(a))$$

不难验证函数$\varphi(x)$满足Rolle定理之条件,由Rolle定理得,至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$\varphi'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

或者用参数方程表示曲线$X=F(x),Y=f(x),x\in[a,b]$，于是过端点弦的方程为

$Y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}(F(x)-F(a))$,于是弦的纵坐标与曲线的纵坐标的差，恰是$x$的函数，即

$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}(F(x)-F(a))=\varphi(x)$,余下的论述同上.

注: Cauchy中值定理的特例是Lagrange定理，其条件依然是定理成立的充分条件.

例5.2.1 设函数f 在$[a,b](a>0)$上连续，在(a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证明：在Cauchy中值定理中令$F(x)=\ln x$即可证之.

例5.2.2 证明：当$b>a>0$时，存在$\xi\in(a,b)$,使得$b\ln a-a\ln b=(b-a)(\ln\xi-1)$.

证明：只要证明$\dfrac{b\ln a-a\ln b}{b-a}=\ln\xi-1$即可. 注意到等式左端分子、分母同除以$a\cdot b$得

$$\frac{b\ln a-a\ln b}{b-a}=\frac{\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

我们看到：这恰是两个函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,与$F(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$[a,b]$上端点处函数值差的比，显然两个函数满足Cauchy 中值定理之条件于是有：

$\frac{\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\ln\xi-1.$

二、不定式的极限

1.求函数的“病态”极限，即分式的分子和分母同时是无穷小：$\frac{0}{0}$或无穷大$\frac{\infty}{\infty}$,是我们经常遇到的问题，非常巧合的是对付这样的“病态”我们用“$L'Hospital$”法则.

定理5.2.2（罗必达(L'Hospital)法则）若函数$f(x),F(x)$满足：

(1) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$

(2) $f'(x),F'(x)\exists,x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$且$F'(x)\neq 0$

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A\ (\infty)$,则

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

证明: 因为$f(x)=\circ(1),F(x)=\circ(1)(x\to x_0)$，不妨补充函数$f(x),F(x)$在$x_0$处的定义，使得$f(x_0)=F(x_0)=0$.我们在区间$[x_0,x]$或$[x,x_0]$上应用Cauchy中值定理得

$\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$($\xi$介于$x_0$与$x$之间)

当$x\to x_0$时$\xi\to x_0$ 于是对上式两端求极限得

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A(\infty)$

特别提请读者注意的是在应用L'Hospital法则处理不定式极限时经常反复使用，并体会其利弊.

例5.2.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$

解法1: 所给分式符合L'Hospital法则要求的条件,这是$\frac{0}{0}$型不定式

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{3x^2\sin x+x^3\cos x}\\&=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x\sin x+x^2\cos x}\ (\frac{0}{0}\text{型，继续使用L'Hospital法则})\\&=4\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x^2}{(3-x^2)\sin x+5x\cos x}\ (\frac{0}{0}\text{型继续使用L'Hospital法则})\\&=4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-2x^2\sin x^2}{(8-x^2)\cos x-7x\sin x}\ (\text{非不定式，极限值等于函数值})\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

注:分子分母为一定阶数的无穷小,每用一次洛必达法则,分子分母同降一阶

解法2:利用重要的极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^3\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\left[\frac{\sin(\frac{x^2}{2})}{\frac{x^2}{2}}\right]^2}{4\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法3:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=&\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{3x^2\sin x+x^3\cos x}(\text{罗比达法则})\\=&2\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{3\frac{\sin x}{x}+\cos x}(\text{重要极限})\\=&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法4: 熟练利用已有结果，例如等价代换等

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}=\frac{1}{2}$$

例5.2.4 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

解法1 :利用洛必达法则，经过四次降阶可以得到结果,但是过程是相当繁琐;

解法2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=&\qquad\text{三角函数和差化积}\\=&-\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}\text{利用}\sin u\sim u\qquad u\to0\\=&-2\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x+x}{2}}{x}\cdot\frac{\frac{\sin x-x}{2}}{x^3}\\=&-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x}{x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}+1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\\=&-\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\\=&\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

注:在对付“病态”极限时，注意多种方法配合使用，才能使“疗效”更好.

定理5.2.3（罗必达(L'Hospital)法则） 若函数$f(x),F(x)$ 满足：

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x)=\infty$;

(2) 当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0), f'(x), F'(x)\exists$,且$F'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A\ (\infty)$,则

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A(\infty)$

证明: 由(3),$\forall\varepsilon>0$存在邻域(x_0,x_1) 当$x_0<x<x_1$时$\left|\dfrac{f'(x)}{F'(x)}-A\right|<\varepsilon/2$

在区间$[x,x_1]$上利用Cauchy中值定理得：

$\dfrac{f(x_1)-f(x)}{F(x_1)-F(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}(\xi\in(x,x_1))$

代入上式得：

$\left|\dfrac{f(x_1)-f(x)}{F(x_1)-F(x)}-A\right|<\varepsilon/2$

注意到：

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{F(x_1)-F(x)}\right|=\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{F(x_1)-F(x)}\right|\left|\frac{\dfrac{F(x_1)}{F(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1\right|$$

$\left|\dfrac{f(x_1)-f(x)}{F(x_1)-F(x)}\right|=O(1)$,而$\left|\dfrac{\dfrac{F(x_1)}{F(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1\right|$

对于固定的x_1令$x\to x_0^+$，由条件(1)是无穷小. 所以存在$\delta>0$当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时我们有：

$\left|\dfrac{f(x)}{F(x)}-\dfrac{f(x_1)-f(x)}{F(x_1)-F(x)}\right|<\varepsilon/2$

综合上述讨论，当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$\left|\dfrac{f(x)}{F(x)}-A\right|<\varepsilon$

注:上面的定理对于$x\to x_0^{\pm}, x\to\pm\infty$, $x\to\infty$结论同样成立. 通过适当变形，该法则还可以对付诸如$0\cdot\infty,\infty-\infty\,; 0^0;\ 0^\infty\ \infty^0;\ \infty^\infty$等不定式的极限,虽然这个法则可以处理大量不定式的极限，但它不是万能的.

例5.2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

尽管$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，但用L'Hospital 法则结果为：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 极限不存在.由此可见L'Hospital法则对这种“病态”极限失效.

2.可化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限

例5.2.6 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x(0\cdot\infty)$.

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

例5.2.7 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}(1^\infty)$.

$$\begin{aligned}\text{解：}\qquad \text{原式} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}}\\ &= e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

例5.2.8 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{k}{1+\ln x}}(0^0)$($k$为常数).

$$\begin{aligned}\text{解：}\qquad \text{原式} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{k\ln\sin x}{1+\ln x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k\cot x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}k\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}}\\ &= e^k\end{aligned}$$

.

例5.2.9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}(\infty^0)$.

$$\begin{aligned}\text{解：}\qquad \text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}}} = e\end{aligned}$$

例5.2.10 求$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})(\infty-\infty)$.

$$\begin{aligned}\text{解：}\qquad \text{原式} &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\ (\frac{0}{0})\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{2+\ln x} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例5.2.11 设$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 已知$g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$, 求$f'(0)$.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$ 于是

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}$.

例5.2.12 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$

解：由Heine归结原理，原式= $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}} = e\end{aligned}$$

注：求数列的极限可以借助Heine归结原理，利用L'Hospital法则求连续变量的导数，但是切忌对数列的变量n求导.

习题5.2

1.若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且　$a\geq 0$,则在(a,b)内存在三点x_1,x_2,x_3 有

$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$

2.求下列不定式极限

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^n(n>0)$;　　2) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}$;

3) $\lim\limits_{k_2\to k_1}\dfrac{k_2}{k_1-k_2}(e^{-k_2t}-e^{-k_1t})$;　　4) $\lim\limits_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$;　　6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2})^{\sin x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)]^x$;　　8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16)}{x^2+x-20}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;　　10) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan x+\sec x-1}{\tan x-\sec x+1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}$;　　12) $\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}]$;

13) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^{x^x}-1)$;　　14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

15) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$;　　16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln chx}{\sqrt[m]{chx}-\sqrt[n]{chx}}$;　　18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

3. $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$, 证明：存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

4.设$f(x)$在$U(0)$内可导，且$f(0)=1,f'(0)=2$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\frac{1}{n})\right)^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}$

5.设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：在(a,b)内有一点ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}$$

6.设函数$y=f(x)$在$x=0$的某邻域内具有n阶导数，且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$,试用Cauchy中值定理证明：

$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$

7.讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leq 0\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性.

第三节Taylor公式

众所周知:多项式函数是运算最简单的函数，因为它仅含有加法、减法和乘法运算，当函数的表达形式比较复杂时例如求超越函数的函数值,计算往往比较复杂. 是否可以在一定的误差限制内,找到一个运算比较简单的近似表达式来计算复杂函数值呢？事实上，我们在讨论微分在近似计算中的应用时,已经考虑过当x很小时，用多项式x代替超越函数：$\sin x \approx x; \tan x \approx x; \ln(1+x) \approx x$. 但当$x$较大时,这种误差是很大的，即便$x$很小,误差的精度也相当粗.为达到上述目的,我们寻找便于进行机器运算的多项式$P_n(x)$来替代函数$f(x)$,并试图将误差确定下来.

为实现这个目标，借助于一个常识，即如果两个函数在某点x_0处函数值相等,各阶导数值相等,至少在这一点的附近两个函数是十分“密切”的,按照这个思路我们寻找代替函数$f(x)$的多项式$P_n(x)$ ，即满足：$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$,

由于多项式$P_n(x)$的一般表达式为$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$根据我们的要求代入得$a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots n$于是

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n1}(x-x_0)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

令$f(x) - P_n(x) = R_n(x)$，其中$R_n(x)$是误差.

定理5.3.1（泰勒（Taylor）公式) 设函数在包含点x_0的某邻域(a,b)内有直到n+1阶的导数,则对于(a,b)中的任意x,可以找到一个n次多项式$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$,使得误差$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$，其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,$\xi$介于$x_0$ 与x之间

证明 只需证$\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$注意$n$取零时,利用Lagrange定理,即可得到结论成立. 我们对函数$R_n(x)$和$(x-x_0)^{(n+1)}$考虑到$R_n^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$ 反复利用Cauchy中值定理得:

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{(n+1)}} &= \frac{R'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} (\xi_1\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间}) \\ &= \cdots = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

称Taylor多项式$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的$n$次近似多项式，其中$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$叫 Lagrange余项.当$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ 时，$R_n(x) = \circ((x-x_0)^n)$,这时我们称$\circ((x-x_0)^n)$为Peano余

项.

注：如果用Peano余项，我们实际上默认了$|x-x_0|<1$,也就是说这时Taylor公式在x_0的附近成立.

当$x_0=0$，这时的Taylor公式为

$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},(0<\theta<1)$我们称其为麦克劳林（Maclaurin）公式

例5.3.1　写出函数$f(x)=e^x$的Maclaurin公式.

解：因为$f^{(k)}(0)=1,k=0,1,\ldots,n,f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ 于是

$e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$

例5.3.2　写出函数$f(x)=\sin x$的Maclaurin公式.

解：因为$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})\Rightarrow f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1,f^{(4)}(0)=0,f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1},f^{(2k)}(0)=0,k=1,2,\ldots$ 所以

$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m},n=2m$ 其中

$R_{2m}(x)=\frac{\sin(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0<\theta<1)x\in(-\infty,+\infty)$

或$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\circ(x^{2m})$;

同理我们可以得到：$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},0<\theta<1,x\in(-\infty,+\infty)$

或$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\circ(x^{2m+1})$;

对于$f(x)=\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x},f''(x)=-(1+x)^{-2},f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},0<\theta<1,x>-1$;

注意$|x|<1$

或$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\circ(x^n)$;

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1};0<\theta<1,x>-1\end{aligned}$$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}(0<\theta<1,x<1)$;

或$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$;

或$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\circ(x^n)$;

例5.3.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\arctan x-x^2}{x^6}$.

解:如果用L'Hospital法则,需进行6次求导,如用Taylor公式,问题就变得比较简单: 因为

$$\begin{aligned}\tan x =& x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\circ(x^6)\\ \arctan x =& x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\circ(x^6)\\ \text{原式}=&\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\circ(x^6))(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\circ(x^6))-x^2}{x^6}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{9}x^6+\circ(x^6)}{x^6}=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

例5.3.4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解：利用Taylor公式$\sin u=u-\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{5!}u^5+\circ(u^5),\cos u=1-\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{4!}u^4+\circ(u^4)u\to 0$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}=\\ &\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^4}{4!}+\circ(\sin^4 x)-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\circ(x^4)}{x^4}\\ &\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)\right)^2+\frac{1}{24}(x+\circ(x))^4+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)}{x^4}\\ &\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{3}x^4)+\frac{1}{24}x^4+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)}{x^4}\\ &\qquad=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{6}+\frac{\circ(x^4)}{x^4})=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

注意到$\circ(x^n)\cdot\circ(x^n)=\circ(x^{m+n}),\circ(x^n)+\circ(x^m)=\circ(x^{\min\{m,n\}})$, 利用Taylor公式时所取得项数要保证在分子中出现比分母高阶的无穷小.

例5.3.5 设$f''(x)>0,x_i\in[a,b],i=1,2,\ldots,n$.

证明: $f\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}\right)\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)$并由此证明几何平均值不大于算术平均值.

证明: 令$x_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}$,那么

$$\begin{aligned}
f(x_i)=&f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_i-x_0)^2+\circ((x_i-x_0)^2)\\
\geq&f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0) \qquad \text{(不等式两端对i求和)}\\
\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geq&nf(x_0)+f'(x_0)\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)\\
=&nf(x_0)+f'(x_0)[\sum_{i=1}^{n}x_i-nx_0]\\
=&nf(x_0)
\end{aligned}$$

取$f(x)=-\ln x \quad x>0$，则$f''(x)>0$,于是

$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=-\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$即

$\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{n}x_k/n\geq\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}x_k}$.

例5.3.6 设$f(x)$在$[0,1]$上二次可微, $|f(x)|\leq a, |f''(x)|\leq b, 0\leq x\leq 1.$

证明: $|f'(x)|\leq 2a+\frac{b}{2}$.

证明：$\forall x\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
f(0)=&f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x)^2 \qquad 0\leq\xi\leq x\\
f(1)=&f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \qquad x\leq\eta\leq 1
\end{aligned}$$

上式相减得

$$\begin{aligned}
|f'(x)|=&|f(1)-f(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2-\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2|\\
\leq&2a+\frac{b}{2}(x^2+(1-x)^2)\\
\leq&2a+\frac{b}{2}\max_{0\leq x\leq 1}(x^2+(1-x)^2)\\
\leq&2a+\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

三个函数$y=x,\sin x,x-\frac{1}{6}x^3$ 的图像：

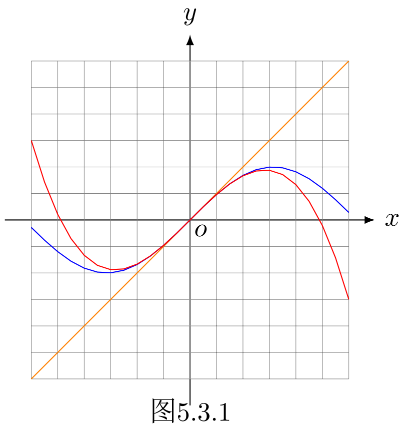


图5.3.1

习题5.3

1.求下列函数带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;

2)$f(x)=xe^x$,展开到含x^5 的项;

3) $f(x)=\tan x$,展开到含x^5的项;

2. 求下列函数在指定点处带拉格朗日余项的泰勒公式:

1)$f(x)=x^3+4x^2+5$,在$x=1$处;

2)$f(x)=\ln x$, 在$x=2$处;

3)$f(x)=\frac{1}{x}$, 在$x=-1$处;

4)$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$,在$x=4$处;

3. 利用泰勒公式,求下列函数的极限:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$;

2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1+x)]}$;

3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$;

4. 设$f(x)$在区间I上恒有非负二阶导数,证明:$\forall\lambda\in(0,1),x_1,x_2\in I$ 有

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

5.设$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内具有连续的二阶导数,且$f''(x)\neq 0$,, 证明:若$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)(0<\theta<1)$,则$\theta\to\frac{1}{2}(h\to 0)$

第四节函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数的单调性

单调的函数未必是可导的，但如果函数是可导的，即函数所表示的曲线上处处有切线，从函数的图形可以看到，当函数递增时，其导数大于零，反之导数小于零，这就启发我们，通过函数的导数来研究函数的单调性.

定理5.4.1 设函数$y=f(x)$在区间I上可导,若$f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$,则函数单调递增(单调递减).

证明: $\forall x_1<x_2, x_j\in I$ 由Lagrange定理

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\begin{cases}>0 & f'(x)>0\\ <0 & f'(x)<0\end{cases}$$

定理5.4.2 设函数$y=f(x)$在区间I上可导且单调递增(递减), 则其导数非负(非正)

证明: 反证若$f'(x)<0$,则由定理5.4.1$f(x)$在I上递减，与题设矛盾，所以命题真.

注:函数不可导但可以单调,例如$y=[x]$.

例5.4.1 求函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间

解:我们应该在该函数的定义域上考虑,因为$f'(x)=6(x-1)(x-2)$列表如下:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	递增		递减		递增

例5.4.2 求函数$y=\sqrt[3]{x^2}$的单调区间.

解:该函数的定义域是实数轴,但在$x=0$处不可导,在$x\neq 0$处$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ 在$(-\infty,0)$ 上单调递减,在$(0,\infty)$上单调递增.

例5.4.3 证明当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x>2x$.

证明：设$f(x)=\sin x+\tan x-2x$则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x+\sec^2 x-2\\&\geq\cos x+\frac{1}{\cos x}-2\\&=\left(\sqrt{\cos x}-\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)^2>0\end{aligned}$$

所以$f(x) > f(0) = 0 \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2})$,即$\sin x + \tan x > 2x$.

例5.4.4 讨论方程$\ln x = ax$ (其中$a > 0$)有几个根.

解:设$f(x) = \ln x - ax$,则$f'(x) = \dfrac{1}{x} - a = \dfrac{a}{x}(\dfrac{1}{a} - x)$

x	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	递增		递减

函数值（最大值）$f(\frac{1}{a})$只可能有三种情况:

(1)$f(\frac{1}{a}) > 0$,即$\ln \frac{1}{a} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} > e \Longrightarrow 0 < a < \frac{1}{e}$

由于$f(x) \in C(0, \frac{1}{a})$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x - ax = -\infty < 0$由保号性，存在$\delta > 0$使得$f(\delta) < 0$ 由零点存在定理，存在$\xi_1 \in (\delta, \frac{1}{a})$使得$f(\xi_1) = 0$ 而由

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - ax = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\frac{\ln x}{x} - a) = -\infty < 0$

再由零点存在定理，存在$\xi_2 \in (\frac{1}{a}, +\infty)$使得$f(\xi_2) = 0$注意到函数的单调性,只有这两个根.

(2)$f(\frac{1}{a}) = 0$ 由单调性$f(x) < f(\frac{1}{a}) = 0$于是仅有一个根此时$a = \frac{1}{e}$

(3)$f(\frac{1}{a}) < 0$由单调性$f(x) < f(\frac{1}{a}) < 0$,此时可以推证$a > \frac{1}{e}$ 时，方程无根.

二、函数的凹凸性

定义5.4.1 设函数$f(x)$定义在区间I上，若$\forall x_1, x_2 \in I$和$\forall \lambda \in [0, 1]$,有

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$,

则称函数f 为I 上的凹函数，反之如果

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$,则称函数$f$ 在I 上是凸函数.

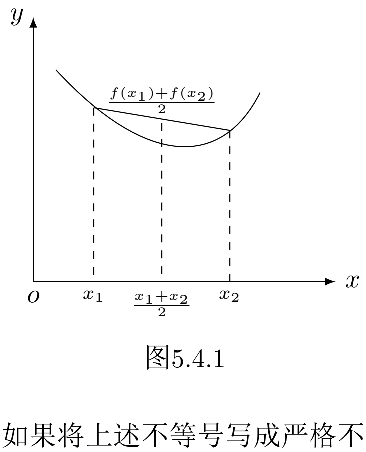


图5.4.1

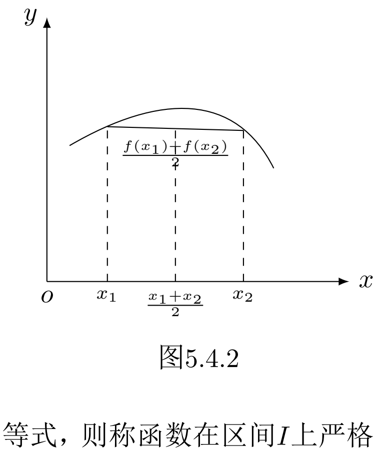


图5.4.2

如果将上述不等号写成严格不等式，则称函数在区间I上严格凸或凹.函数的凹凸性是介于连续和可

导之间的一种重要的分析性质.

*关于函数凹凸性定义的注记:

所谓函数凹凸性，就是函数所对应的图形出现了凹凸，若函数在区间I上凹凸，直观上我们可以看到，曲线上任意两点确定的弦在曲线上（当曲线凹时）或弦在曲线下（当曲线是凸的情形），这样我们给定区间I上定义的曲线$y = f(x)$ 上任意两点$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$，则过这两点的弦的方程为:

$Y - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$,若弦在曲线下，于是有

$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) \leq f(x)$,其中$x$介于$x_1$与$x_2$之间. 这样$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in (0, 1)$,于是我们有

$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

即$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(1-\lambda)(x_2 - x_1) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

整理得$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$,这正是我们对凸函数的定义，同理可以定义凹函数.

例5.4.5 (詹森(Jensen)不等式) 若函数f在$[a, b]$上是凹函数，则$\forall x_i \in [a, b], \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$有$f(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

证明: 当$n = 2, \lambda_2 = 1 - \lambda_1$,由凹函数的定义知命题成立，假定$n = k$时命题真，即$f(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$

当$n = k + 1$时令$\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) &= f((1-\lambda_{k+1})\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k}{1-\lambda_{k+1}} + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{k+1}) f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

由归纳原理得证.

定理5.4.3 f在区间I上凹$\Longleftrightarrow$ 对于I上的任意三点$x_1 < x < x_2$,恒有$\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

证明: ($\Longrightarrow$) 令$\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$,则$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 由f 的凹性,我们有

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$
$$= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

两端同乘以$x_2 - x_1$整理得$(x_2-x_1)f(x)+xf(x)-xf(x) \leq (x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$从而有$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

($\Longleftarrow$) 在I上任取两点$x_1, x_2(x_1 < x_2)$在区间$[x_1, x_2]$上任取一点$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in (0,1)$ 令$\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$由于$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \Rightarrow f(x)(x_2-x_1) \leq (x-x_1)f(x_2) + (x_2-x)f(x_1)$ 于是$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$，即$f(x)$在$I$上凸.

推论5.4.1 f在区间I上凹的充分必要条件是对于区间I上任意三点$x_1 < x_2 < x_3$ 恒有不等式$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

定理5.4.4 设f 为区间I 上的可导函数,则以下结论彼此等价:

(1) f在区间I上凹

(2)$f'(x)$在区间I上递增

(3)对于区间I上任意两点x_1, x_2,有$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2)在区间I上任取两点$x_1, x_2(x_1 < x_2)$以及充分小的正数h,由于$x_1 - h < x_1 < x_2 < x_2 + h$由推论5.4.1 我们有

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

注意到f可导,令$h \to 0^+$得到$f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$所以$f'(x)$在区间$I$上递增.

(2) $\Rightarrow$ (3) $f'(x)$ 在I 上递增,根据Lagrange中值定理$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$ 移项后得到(3)

(3) $\Longrightarrow$ (1) 对于区间I上任意两点$x_1 < x_2$，对区间$[x_1, x_2]$上任意一点$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in (0,1)$由(3),我们有

$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x) = f(x) + (1-\lambda)f'(x)(x_1 - x_2)$

$f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x) = f(x) + \lambda f'(x)(x_2 - x_1)$

分别给以上两个式子乘以λ和$(1-\lambda)$然后相加得$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ 故f在区间I 上凹.

注:由定理5.4.4 的结论(3) 看到,可导的凹函数$y = f(x)$，其曲线总是在它的切线的上方,对于凸函数$y = f(x)$ 其曲线在它的切线的下方.

定理5.4.5 函数f 在区间I上有二阶导数,则f在I上凸(凹)的充要条件是$f''(x) \leq 0 (f''(x) \geq 0)$

证明: ($\Longrightarrow$) 若f在I上凹，由定理5.4.4的(2)得$f'(x)$单调递增，由于二阶导数存在，所以$f''(x) \geq 0$.

($\Longleftarrow$) 因为$f''(x) \geq 0$所以$f'(x)$在I上单调不减,由定理5.4.4 f 在区间I上凹.

例5.4.6 设$a_i, b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$证明：当$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 0$时，有$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}$.

证明: 设$f(x) = \ln x \Rightarrow f'' < 0$,所以$f(x)$在定义区间上凸. 由Jensen不等式，$\forall x, y > 0$有

$\ln(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y = \ln x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \Rightarrow x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$

令$x = a_i^p / \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p, y = b_i^q / \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q$代入上述不等式得

$$\frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}$$

对此不等式两端关于i求和得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) / \left[(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}\right] \leq \frac{1}{p} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

于是，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

注：这就是著名的Höder（赫尔德）不等式，其中，$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y (x > 0, y > 0)$是著名的Yung（扬）不等式.

定理5.4.6 设f在$[a, b]$上凹，则$\forall x \in [a, b]$ f既有左导数又有右导数，即$f'_-(x), f'_+(x)$都存在(在端点处仅有$f'_+(a), f'_-(b)$存在)，且满足

(1) $f'_-(x) \leq f'_+(x), x \in (a, b)$

(2)$f'_-(x)$与$f'_+(x)$在区间$[a, b]$单调不减

证明: 不妨令$x_0 \in (a, b), a < x_1 < x_0 < x_2 < b$,则由定理5.4.3 $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$于

是$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$单调不减，且有上界$\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$ 于是$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)$ 由推论5.4.1当$x\to x_0^+$时$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$单调不增有下界$f'_-(x_0)$ 于是

$f'_-(x_0)\le\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$ 这样(1)得证，在上面的推证中注意到当$a\le x_1<x_2\le b$我们有

$$f'_-(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'_-(x_2),f'_+(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'_+(x_2)$$

于是(2)得证.

推论5.4.2 若f在区间$[a,b]$上凹(凸)，则f在$[a,b]$上连续.

证明: 因为对于任意的$x_0\in[a,b]$,在x_0处有左导数必左连续，有右导数必右连续，所以f在x_0处连续，由x_0的任意性，我们有$f\in C[a,b]$

定义5.4.2 在曲线$y=f(x)$上,上凸与下凸的分界点称为曲线的拐点.

注：如果函数可导,在拐点处曲线与其过拐点的切线是相交的.

定理5.4.7 若函数$y=f(x)$,在点a处有$f''(a)=0$或者$f''(a)$ 不存在，若其二阶导函数$f''(x)$ 在经过该点$x=a$, 变号，则点$(a,f(a))$是曲线的一个拐点.

例5.4.7 求函数$y=e^{-x^2}$(高斯（Gaussion）曲线)的拐点和上凸和下凸区间.

$$\begin{aligned}\text{解：}y'=&-2xe^{-x^2}\\ y''=&4e^{-x^2}(x-\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

x	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$	0	$(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	凸增		凹增		凹减		凸减

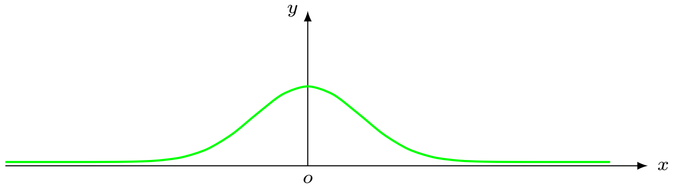


图5.4.3

习题5.4

1. 求下列各函数的单调区间

1)$f(x)=x^3-3x^2-9x+14$; 2)$f(x)=x^2e^{-x}$;

3)$f(x)=\frac{x}{\ln x}$; 4)$f(x)=x+\cos x$;

2. 若连续函数$f(x)$在点x_0取得极大值，试问是否存在$\delta>0$,使$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$ 内单调增加，在$(x_0,x_0+\delta)$内单调减少？研究函数$f(x)=\begin{cases}x^2(\sin^2\frac{1}{x}-1), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$x_0=0$点附近的极值性质；

3. 证明:若f,g是区间I上的凸函数，则$\forall\lambda\geq 0,\lambda f,f+g$ 为I上的凸函数，若g 为J上的凸增函数，且$J\subset f(I)$,则$g\circ f$ 为I 上的凸函数；

4.设函数$f(x)$在定义域内可导，$y=f(x)$的图形如图5.4.4所示，则导函数$f'(x)$的图形为以下4个图形中的哪一个？

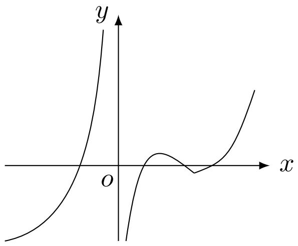
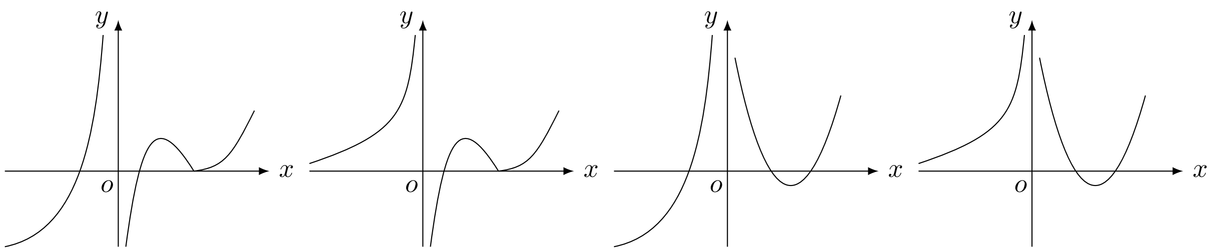


图5.4.4



(A) (B) (C) (D)

5.证明下列不等式：

1)$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x(x>0)$;

2)$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}(x>0)$;

3)$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x(x>0)$;

6. 设$f(0)=0,f'(x)$单调增,证明:$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$单调增;

7.试决定$y=k(x^2-3)^2$中的k值，使曲线的拐点处的法线通过原点；

8.设$y=f(x)$在$U(x_0)$内具有连续的三阶导数，如果$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$,试问$(x_0, f(x_0))$是否是拐点？为什么？

9.证明：$\forall a, b\in\mathbf{R}$有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

10.试证明：曲线$y=\frac{x-1}{x^2+1}$有三个拐点位于同一直线上.

11.试决定曲线$y=ax^3+bx^2+cx+d$中的a, b, c, d，使得$x=-2$处曲线有水平切线，$(1,-10)$为拐点，且点$(-2,44)$在曲线上.

第五节函数的极值和最值

一、极值

定义5.5.1 设函数$f(x)$在区间(a,b)上有定义,若存在x_0 的某邻域$U(x_0)$ 当$x \in U(x_0)$时，有$f(x) \leq f(x_0)$或$f(x) \geq f(x_0)$,则称$f(x)$在x_0 处有极大值$f(x_0)$或极小值$f(x_0)$，x_0被称为极值点见图5.5.1.

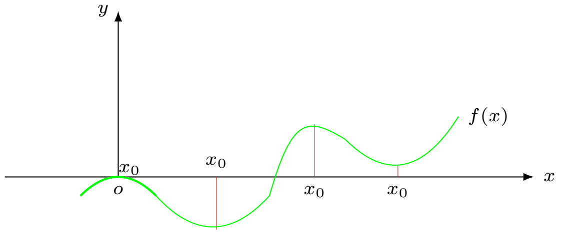


图5.5.1

注:函数在一点处的极值是函数的一个局部性质,函数在定义区间上的极值点不一定唯一,但极值点总在定义的区间内部,极小值也未必小于极大值,函数的极大值不一定是最大值，同样极小值不一定是最小值.

定理5.5.1(费尔玛（Fermat）定理) (极值存在的必要条件) 设函数$f(x)$在x_0处可导, 且在x_0处有极值,则$f'(x_0)=0$.

证明:不妨设在x_0处有极大值,由于

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad x > x_0$$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad x < x_0$$

不等式两端取极限得$f'_+(x_0) \leq 0, f'_-(x_0) \geq 0$ 由于$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ 故$f'(x_0)=0$.

注: 这个定理并未回答,$f(x_0)$是不是极值,我们称一阶导数为零的点为驻点或稳定点. 可导函数若有极值，驻点即为极值点.

驻点可能是极值点，也可能不是例如函数$y=x^3, x=0$是其驻点，但却不是极值点,见图5.5.2.

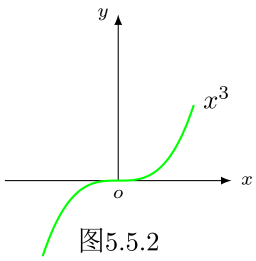


图5.5.2

定理5.5.2 (第一充分判别条件)设函数$f(x)$在x_0的某邻域内可导，且$f'(x_0)=0$,则

(1)若在x_0的左邻域$(x_0-\delta,x_0)$有$f'(x)>0$,而在x_0的右邻域$(x_0,x_0+\delta)$有$f'(x)<0$,则$f(x_0)$是极大值;

(2)若在x_0的左邻域有$f'(x)<0$,而在x_0的右邻域有$f'(x)>0$,则$f(x_0)$是极小值;

(3)若在的x_0的左右邻域$f'(x)$不变号,则x_0不是极值点.

证明: 利用函数在点x_0左右邻域一阶导数的正负号和函数分别在左右邻域的单调性容易证明，恕不赘述.

注: 一阶导数不存在的点可能是极值点，例如$y=|x|, x=0$是极小值点，使得一阶导数变号的点必是函数的极值点.

定理5.5.3 (第二充分判别条件) 设$f(x)$在 x_0的某邻域$U(x_0)$ 内有二阶导数，且$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$; 则在$x=x_0$处

(i)如果$f''(x_0)<0$,则$f(x_0)$是极大值，

(ii)如果$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$是极小值.

证明: 由条件和Taylor公式，我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\circ((x-x_0)^2)\\&=f(x_0)+[\frac{1}{2}f''(x_0)+\circ(1)](x-x_0)^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)$与$f''(x_0)$同号，于是定理成立.

例5.5.1 (达布(Daubox)定理） 设函数f在$[a,b]$上可导，且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$, k为介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间的任意数，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=k$.

证明: 令$F(x)=f(x)-kx$问题转化成求函数F的稳定点，不妨设$f'_+(a)<k<f'_-(b)$

$F'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = f'_+(a) - k > 0$

$F'_-(b) = \lim\limits_{x\to b^-} \frac{F(x)-F(b)}{x-b} = f'_-(b) - k < 0$

由保号性存在$\delta_1 > 0, x \in (a, a+\delta_1), F(x) > F(a)$，存在 $\delta_2 > 0, x \in (b-\delta_2, b), F(x) > F(b)$注意到 $F(x) \in C[a,b]$，在区间$[a,b]$上必有最大值，由以上推证$F(a), F(b)$ 不是最大值,因此存在$\xi \in (a,b)$使得$F(\xi)$是极大值，由Fermat定理$F'(\xi) = 0$,即$f'(\xi) = k$.

例5.5.2设$f(x) \in C^1[a,b]$,且存在$c \in (a,b]$满足：$f'(c) = 0$，证明：存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

证明：考虑函数$F(x) = f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}$,则问题转化成求$F(x)$ 的零点存在问题，显然直接利用$F(x)$在区间$[a,b]$上的连续性是不妥的，根据条件有一点$c \in (a,b]$使得$f'(c) = 0$,于是c 点可能是极值点也可能不是，若c点是极值点，于是$F(c) = -\frac{f(c)-f(a)}{b-a}$的符号可以确定，这就引导我们在区间$[a,c]$上寻找使得$F(x)$变号的点，注意到$f(x) \in C[a,c]$于是$f(x)$ 在$[a,c]$上可以达到最值，设$M = \max\limits_{x\in[a,c]}\{f(x)\}, m = \min\limits_{x\in[a,c]}\{f(x)\}$

若$M = m$ 则$\forall \xi \in (a,c)$ 都有$F(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a} = 0$

若$M \neq m$,则$f(a)$不会同时是M 与m, 不妨设$f(a) \neq M$, 则存在$x_2 \in (a,c]$使得$f(x_2) = M$,那么$f'(x_2) = 0$,于是$F(x_2) = -\frac{M-f(a)}{b-a} < 0$,在区间$[a,x_2]$上有$f(x_2) - f(a) = f'(x_1)(x_2-a)$,那么

$$
\begin{aligned}
F(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(x_1)-f(a)}{b-a} &= \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} - \frac{f(x_1)-f(a)}{b-a} \\
&> \frac{M-f(a)}{b-a} - \frac{f(x_1)-f(a)}{b-a} \\
&= \frac{1}{b-a}(M - f(x_1)) > 0
\end{aligned}
$$

,于是由零点存在定理，至少存在一点$\xi \in (x_1, x_2)$, 使得$F(\xi) = 0$, 即$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

二、最大值和最小值

在实际生活当中我们会经常遇到诸如使某项工程做到原材料使用最省，收益最大这样的问题.也就是归结为求目标函数$y = f(x)$在某区间上的最大值和最小值问题，我们知道若函数$f(x) \in C[a,b]$时，一定可以达到最大值和最小值.以下的问题就是如何求目标函数及其最值.

根据前一部分的讨论，我们发现函数的最值点只可能在极值点或区间的端点处取得.所以求一个函数

的最值归结为如下三个部分：

（1）求出目标函数$y=f(x)$及其定义区间I上的驻点$x_1,x_2,\ldots,x_n$及一阶导数不存在的点；

(2)计算区间的端点处的函数值和驻点及不可导的点处的函数值，然后比较这些函数值，最大者即是所求的最大值，最小者即是最小值；

（3）如果在某开区间上极值点是唯一的，则极大值就是最大值，极小值就是最小值.

例5.5.3 初速度为v_0的炮弹，从与水平线夹角为φ 的炮口射出，射程为R ,且$R=\dfrac{v_0^2\sin 2\varphi}{g}$ (g 重力加速度)，当炮口与水平线夹角φ为何值时射程最远.

解：实际上求当$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 目标函数$R=R(\varphi)$的最大值

$\dfrac{dR}{d\varphi}=\dfrac{2v_0^2\cos 2\varphi}{g}$;

令$\dfrac{2v_0^2\cos 2\varphi}{g}=0$ 得驻点：$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2}=-\frac{4v_0^2\sin 2\varphi}{g}$$
$$\left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=-\frac{4v_0^2}{g}<0$$

当$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 射程$R(\frac{\pi}{4})=\dfrac{v_0^2}{g}$

在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$ 端点处有$R(0)=R(\frac{\pi}{2})=0$ 于是最大值是$R(\frac{\pi}{4})$.

例5.5.4 甲火车站正南方向20千米处有一个工厂，而工厂的原料恰在甲火车站正东方向100千米处的乙火车站堆放，已知铁路与公路的运费之比为3：5，问在铁路线何处修建一个铁路转运站向工厂运送原料使运费最省？见示意图5.5.3

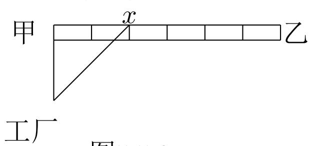


图5.5.3

解：设在甲火车站正东方向x千米处修建转运站，总运费为y元.于是我们有

目标函数$y=5a\sqrt{20^2+x^2}+3a(100-x), x\in[0,100]$ 这样问题转化成求目标函数y在闭区间$[0,100]$上的最值问题.

$y'=a\left(5\frac{x}{\sqrt{20^2+x^2}}-3\right)=a\left(\frac{5x-3\sqrt{20^2+x^2}}{\sqrt{20^2+x^2}}\right)$ 令$y'=0,\Longrightarrow 5x=3\sqrt{20^2+x^2},\Longrightarrow x=15.$

由于驻点是唯一的,根据实际情况得到在距离甲火车站正东15千米处建转运站运费最省.

例5.5.5 证明不等式$\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1$,当$x \in [0,1], p > 1$

证明：目标函数为$F(x) = x^p + (1-x)^p \in C[0,1]$可以达到最大值和最小值.

$F'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$，令$F'(x) = 0$得唯一的稳定点：$x = \frac{1}{2}$

由于$F(0) = F(1) = 1, F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$

所以$\min\limits_{x\in[0,1]} F(x) = \frac{1}{2^{p-1}}, \max\limits_{x\in[0,1]} F(x) = 1$

于是，$\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1.$

例5.5.6 底边长度和面积为常数的一切三角形中，求怎样的三角形，周长最小？

解：我们选择适当的坐标系，将底边设为x轴，不妨设底边的长度为$2a$,于是问题变成顶点在何处边长之和最小.

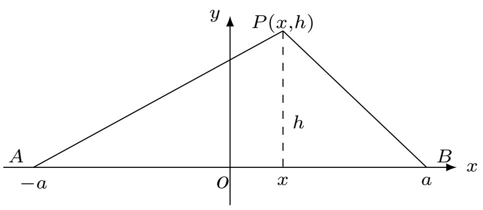


图5.5.4

注意到面积一定，于是h为常数，这样三角的周长由两条边长AP, BP及底边长$2a$确定令

$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + h^2}$

$$f'(x) = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-(x+a)^2}{\sqrt{[(x+a)^2+h^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} \\ &\quad + \frac{-(x-a)^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}} \\ &= \frac{h^2}{\sqrt{[(x+a)^2+h^2]^3}} + \frac{h^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h^2]^3}} \end{aligned}$$

于是$x = 0$为极小值点，即等腰三角形，边长和最小.

注：同理我们还可以发现底边长度及三边长之和一定时，等腰三角形面积最大.

例5.5.7 在给定直线上求一点，使得该点到两个固定点的距离之和最小.

解：建立适当的坐标系如下，不妨设固定点都在给定直线的同侧.

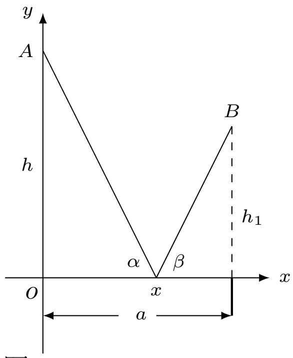


图5.5.5

令$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}$,其中$h,h_1$ 为常数

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}$

$f''(x)=\frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}+\frac{h_1^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}}>0$

稳定点ξ满足

$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+h^2}}=\frac{a-\xi}{\sqrt{(\xi-a)^2+h_1^2}}$,

即$\cos\alpha=\cos\beta$,$f''(x)>0$表明距离之和最小.

注：这个问题的解与光学中著名的Fermart的最短时间原理密切联系：光线经一点射入一点经反射后沿耗时最少的路径，即入射角等于反射角.

例5.5.8（Snell 折射定律）一束光线由空气中A点经过水面折射后到达水中B点（如图5.5.4所示）已知光在空气中和水中传播的速度分别是v_1和v_2,光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播，试确定光线传播的路径.

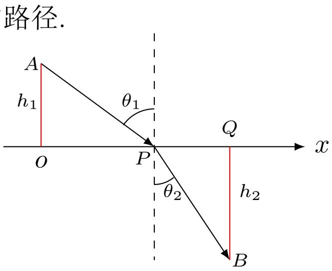


图5.5.6

解: 设A点到水面的垂直距离为$AO=h_1$, B点到水面的垂直距离为$BQ=h_2$, x轴沿水面过点O,Q,OQ的长度为ℓ

由光学原理光线总是沿着耗时最少的路径传播，因此光线在同一均匀介质中必沿着直线传播，设光线的传播路径与x轴的交点为$P, OP = x$,则光线从A到B的传播必为折线APB,其所需的传播时间为

$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2+(\ell-x)^2}}{v_2}, x \in [0, \ell]$

于是问题转化成，求函数$T(x)$在闭区间$[0, \ell]$上的最小值问题

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{\ell-x}{\sqrt{h_2^2+(\ell-x)^2}}, x \in [0, \ell] \\ T''(x) &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{h_1^2}{(h_1^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{h_2^2}{[h_2^2+(\ell-x)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

$T'(0) < 0, T'(\ell) > 0$,注意到$T'(x) \in C[0, \ell]$ 于是存在唯一一点$x_0 \in (0, \ell)$ 使得$T'(x_0) = 0$而$T''(x_0) > 0$因此$T(x)$在$[0, \ell]$上有唯一极小值点.由$T'(x_0) = 0$得到

$\frac{x_0}{v_1\sqrt{h_1^2+x_0^2}} = \frac{\ell-x_0}{v_2\sqrt{h_2^2+(\ell-x_0)^2}}$

记$\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2+x_0^2}} = \sin\theta_1, \frac{\ell-x_0}{\sqrt{h_2^2+(\ell-x_0)^2}} = \sin\theta_2$

于是得到折射定律：$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$,其中$\theta_1, \theta_2$分别是入射角和折射角.

注：如果函数$f(x)$在区间I的内部达到最值，且极值点x_0唯一，则极小值$f(x_0)$即为最小值，极大值$f(x_0)$即为最大值

例5.5.9若某工厂生产某产品x千件的成本是$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$,售出产品x千件的收入是$r(x) = 9x$,问是否存在一个能取得最大利润的生产水平？如果存在的话找出这个生产水平.

解：售出x千件产品的利润为$L(x) = r(x) - c(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x$

$L'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = -3(x^2 - 4x + 2) = -3(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$

$L''(x) = -6x + 12, L''(2 + \sqrt{2}) < 0, L''(2 - \sqrt{2}) > 0$

于是当产量为$2 + \sqrt{2}$千件时利润最大.

注：在经济学中称$c'(x)$为边际成本，$L'(x)$为边际利润，$r'(x)$为边际收益

习题5.5

1. 求下列函数的极值:

1) $f(x)=2x^3-9x^2-24x-12$;　　　2)$y=\dfrac{6x}{x^2+1}$;

3) $y=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$;　　　4)$y=\sin^3 x+\cos^3 x$;

2.求下列函数在所给区间上的最大值、最小值：

1) $f(x)=x+2\sqrt{x}$　　$[0,4]$;　　　2)$y=\sin 2x-x$,　　$[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$;

3) $y=|x^2-3x+2|$　　$[-10,10]$;　　　4)$y=\sqrt{x}\ln x$　　$(0<+\infty)$;

3.试证明：如果函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$满足条件$b^2-3ac<0$,那么这函数没有极值.

4.试问a为何值时，函数$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$在$x=\frac{\pi}{3}$处取得极值？它是极大值还是极小值？并求极值。

5. 设矩形内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,求其中面积最大的矩形的边长；

6.设圆锥体内接于半径为a的球，求出其中体积最大的圆锥体的高；

7.设$f''(x)$在　$[0,1]$上连续，且$f''(x)>0, f(0)=f(1)=0$, 若　$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$,证明：　$\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8$

8. 在抛物线$y^2=2px$哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短；

9.从一个半径为R的圆形铁片，剪去一个扇形，做成一个圆锥形漏斗，问剪去圆心角为多少的扇形，使圆锥形漏斗的容积最大；

10.一房地产公司有50套公寓要出租，当月租金定位1000元时，公寓会全部租出去，当月租金每增加50元时，就会多一套公寓租不出去，而租出去的公寓每月需花费100元的维修费，试问房租定为多少可获得最大收入？

11.已知制作一个背包的成本为40元，如果每一个背包的售价为x 元，售出的背包数由

$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$

给出，其中a,b为正常数，问什么样的售出价格能带来最大利润？

第六节函数的图形及其绘制

用图像描述函数的性态是研究函数最为直观的方法，通过前面的准备，概括起来函数作图有如下步骤：

(1) 确定函数的自然定义域;

(2)确定函数的不连续点和某些特殊的点;

(3)确定函数的有界性、周期性、奇偶性；

(4) 确定函数的单调区间；

(5) 确定函数的稳定点、极值点和一阶导数不存在的点;

(6) 确定函数的凹凸区间、二阶导数不存在的点、拐点;

(7) 求出函数的渐近线；

(8)列表描点绘制图象；

例5.6.1 绘制函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$的图形.

解: (1) 函数的定义域为$-\infty<x<+\infty$,注意到$x<0,y<0$ 且$x>0,y>0$,

(2) 函数是连续的,

(3) $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 令$y'=0$ 解得驻点为$x_1=-1,x_2=1$,

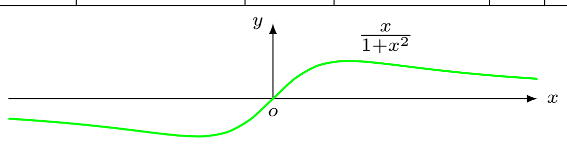
(4) 在区间$(-\infty,-1)$上递减,在$(-1,1)$上递增,在$(1,+\infty)$上递减.

(5) $y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$令$y''=0$

得到$x_1=-\sqrt{3},x_2=0x_3=\sqrt{3}$ 在$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(0,\sqrt{3})$上凹, 在$(-\sqrt{3},0)$和$(\sqrt{3},+\infty)$上凸.

(6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$,则$y=0$ 是仅有的渐进线.

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	凹减		凸减		凸增		凹增		凹减		凸减



例5.6.2 绘制曲线$y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}(a>0)$ 的图象.

解: (1) 定义域是实数轴,

(2) 函数处处连续,

(3) $y'=\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}$令$y'=0$解得驻点和导数不存在的点:$x_1=0,,x_2=2a,x_3=\frac{4a}{3}$.

当$x\to 0^-$ $x\to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=-\infty,\lim_{x\to 0^+}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=+\infty$$

$x<0,y'<0$, 且$x>0,y'>0$ $x=0$ 是极小值点.

$x_2=2a$, 当$x\to 2a^{\pm}$ 导数不变号

在$x=\frac{4a}{3}$ 导数为零,当$x<\frac{4a}{3},y'>0$ 当$x>\frac{4a}{3},y'<0$

因此$x=\frac{4a}{3}$ 是极大值点.

(4) 在$-\infty<x<0$上函数递减,

在$0<x<\frac{4a}{3}$ 上函数递增,

在$\frac{4a}{3}<x<+\infty$上函数递减.

(5) $y''=-\frac{8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a-x)^{\frac{5}{3}}}$

二阶导数不存在的点：$x_1=0,x_2=2a$

当$x<0$,$y''<0$ 曲线凹

当$0<x<2a,y''<0$ 曲线凹;

当$x>2a$, $y''>0$ 曲线凸;

于是,点$(2a,0)$ 是拐点

(6)

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}}{x}=-1$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right]=\frac{2a}{3}$$

渐进线:$y=-x+\dfrac{2a}{3}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{4a}{3})$	$\frac{4a}{3}$	$(\frac{4a}{3}, 2a)$	$2a$	$(2a, +\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	凹减		凹增		凹减		凸减

习题5.6

按函数作图步骤，作出下列函数的图像：

1)$y = x - 2\arctan x$;　　2)$y = xe^{-x}$;　　3)$y = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$;

4)$y = x^2 + \frac{1}{x}$;　　5)$y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$;　　6)$y = |x|^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$;

第七节曲率

一、弧微分

作为曲线$y=f(x)$,如果我们规定x增大的方向为曲线的正向，从曲线的始点$M_0(x_0,f(x_0))$ 到曲线上任意点$M(x,f(x))$的弧长为S，不难发现$S=S(x)$随着x的增大单调递增，我们记弧长：$\Delta S=\widehat{MM'}$,弦长：$|MM'|$,见图5.7.1

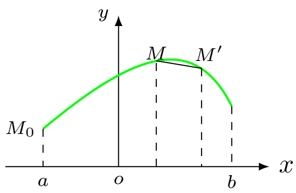


图5.7.1

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2} \\
&= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \\
&= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

考虑到当$\Delta x\to 0$时,$M'\to M$,我们有

$\widehat{MM'}\sim|MM'|$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$

$\dfrac{dS}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2}$

注意到弧长随变量x递增,我们有$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$，我们称其为弧微分公式,若曲线由参数方程$x=\varphi(t),y=\psi(t),t\in[\alpha,\beta]$,给出，则弧微分$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

注:对于可求长的光滑曲线C,通过以上分析,我们用一段弦长$\Delta S=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 代替对应的一段弧长$\widehat{\Delta S}$,这种以“直”代“曲”的思想，是微积分中经常用到的.

二、曲率及其计算公式

直观的感觉告诉我们：直线不弯，半径较小的圆弧弯曲的程度比半径较大的圆弧弯曲的程度大.同一曲线上不同的地方弯曲的程度可能不同.弧长一定的情况下，当曲线上的动点沿曲线从一点到另一点其切

线的转角变化较大的曲线，弯曲的程度较大. 转角变化小的曲线弯曲的程度就会小一点.在转角改变量确定的情况下，弧长越长曲线弯曲程度越小,越短弯曲的程度越大.

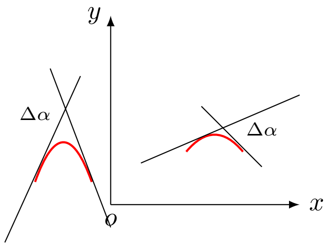


图5.7.2

曲线从点M 到M' 的弯曲程度如果用$\overline{k}$表示，那么由以上分析$\overline{k}$ 与这段弧的弧长ΔS成反比，与两点处切线的转角$\Delta\alpha$ 成正比,我们称这段弧的平均弯曲程度$\overline{k}$为这段弧的平均曲率,于是我们有$\overline{k}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right|$,称$\lim\limits_{\Delta S\to 0}\overline{k}=k$ 为点M处的曲率.

即$k=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$由于$\tan\alpha=y'$

对此式两端关于变量x求导,得到$\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dx}=y''$

于是$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2}$

那么$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}dx$,而弧微分$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$

于是，我们得到曲率公式:$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

如果曲线由参数方程给出:$\begin{cases}x&=\varphi(t)\\y&=\psi(t)\end{cases}$,则弧微分$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}dt$

利用曲率公式得：$k=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}$

从曲率公式我们可以看到：直线的曲率为零,半径为a的圆周上任一点处的曲率为$\frac{1}{a}$

例5.7.1 抛物线$y=ax^2+bx+c$上哪一点处的曲率最大?

解：$y'=2ax+b,y''=2a$代入得

$k=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}]}$ 显然当分母最小时，曲率最大即$x=-\frac{b}{2a}$ 时曲率最大，也就是说在抛物线的顶点处曲率最大.以上的例子与我们的常识完全吻合.

在实际应用中当$|y'|\ll 1, 1+y'^2\approx 1$,我们有近似公式$k\approx|y''|$

三、曲率圆和曲率半径

设曲线$y=f(x)$在$M(x,y)$ 点处的曲率为$k\neq 0$ ，若在过点M的法线上沿曲线凹的一侧处取一点D，使得$DM=\frac{1}{k}$, 则以D点为圆心，以$\frac{1}{k}$为半径的圆称为，过点M 的曲率圆，圆心D叫曲率中心，见图5.7.3.

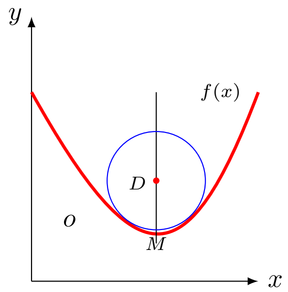


图5.7.3

这样在点M处曲线的弯曲程度与过该点的曲率圆的弯曲程度是相同的.

例5.7.2 设工件内表面的截线为抛物线$y=0.4x^2$,现在要用砂轮打磨其表面，问直径多大的砂轮才能适合用来打磨工件.

解：为了使打磨时不损伤工件的表面，选择的砂轮半径应当小于曲率最大处的曲率圆的半径.设曲率为k由例1抛物线曲率最大处在其顶点，即在$(0,0)$处曲率最大，于是$k=0.8$, 那么砂轮的半径为$R=5/4$单位长.

四、曲率中心的计算公式

若曲线$y=f(x)$的二阶导数在x处不为零，设在点$M(x,y)$处的曲率中心为$D(\alpha,\beta)$ ，于是曲率圆的方程为：

$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1+y'^2}{y''^2}$

由于点M在曲率圆上所以$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\dfrac{1+y'^2}{y''^2}$ (1)

注意到曲率圆的半径与过M点的切线垂直，所以$y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}$ (2)

由(1)和(2)式解得$(y-\beta)^2=\dfrac{1+y'^2}{y''^2}$

注意到:当$y''>0$,曲线为凹弧，则$y-\beta<0$;

当$y''<0$,曲线为凸弧，则$y-\beta>0$,所以$(y'')(y-\beta)<0$

所以$y-\beta=-\dfrac{1+y'^2}{y''}$,而

$x-\alpha=-y'(y-\beta)=\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}$

曲率中心的坐标为：

$$\begin{cases}\alpha &= x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta &= y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$

当点M沿曲线$C:y=f(x)$移动时,相应的曲率中心D的轨迹G称为曲线C的渐屈线,而曲线C称为曲线G 的渐伸线,于是曲线C的渐屈线参数方程为曲率中心的轨迹方程(3), 其中$x,y=f(x),y'=f'(x),y''=f''(x)$为参数.

习题5.7

1.设$f(x)=\frac{4x+4}{x^2}-2$,求拐点处的曲率和曲率中心；

2.求曲线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$在$t=t_0$处的曲率；

3.一飞机沿抛物线$y=\dfrac{x^2}{10000}$(y轴铅直向上，单位为m)作俯冲飞行，在坐标原点O处飞机的速度为$v=200m/s$,飞行员体重$G=70kg$,求飞机俯冲至最低点,即原点处时座椅对飞行员的压力.

4.求抛物线$y^2=2px$的渐屈线方程.

练习五

1 .设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上有二阶导数，且满足：$f(a)=A>0, f'(a)<0$,当$x\in(a,+\infty)$ 时$f''(x)<0$,证明：$f(x)$在$(0,+\infty)$上恰有一个零点；

2.求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$(其中$a_j>0, j=1,2,\cdots,n$);

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$;

3.设$h>0$, 函数f在$U(a,h)$内有$n+2$阶导数，且$f^{(n+2)}(a)\neq 0$, f在$U(a,h)$内的Taylor公式为:

$f(x+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, 0<\theta<1,$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+2}$;

4.设f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi),$

5.$f'(x)\in C[a,b]$,存在$c\in(a,b]$,使得$f'(c)=0$,证明：存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

6.设$f''(x)\in C[0,1], f(0)=f(1)=0, \exists A>0$,使得$|f''(x)|\le A$证明：$\forall x\in[0,1], |f''(x)|\le\frac{A}{2}$

7.证明：若函数$f(x)$在区间$(a,+\infty)$内可导，且$\forall x\in(a,+\infty)$有$|f'(x)|\le M, M$是常数，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

8.证明：若函数$f^{(3)}(x)\in C\mathbb{R})$,且$\forall h>0$有$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$，则函数$f(x)$是二次多项式；

9.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi$

10.证明：函数$f(x)$ 在(a,b)内有二阶导数，且存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)>0$,则$\exists x_1,x_2$,使得$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$;

11.证明下列不等式：

(1)当$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$;

(2)当$x>0$时，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$;

(3)当$e<a<b<e^2$ 时，$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

12.设$a>1, f(x)=a^x-ax$在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$x(a)$,问a为何值时，$x(a)$ 最小？并求出最小值.

13.求椭圆$x^2-xy+y^2=3$上纵坐标最大和最小点.

14.求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

15.曲线弧$y=\sin x,(0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

16.设$f''(x_0)$ 存在，证明：

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$

17.设$f^{(n)}(x_0)$存在，且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots f^{(n)}(x_0)=0$,证明：

$f(x)=\circ[(x-x_0^n)](x\to x_0)$

18.设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且$f''(x_0)\geq 0$,证明：对于(a,b)内任意两点x_1,x_2及$0\leq t\leq 1$有

$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$

19.试确定常数a和b,使$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当$x\to 0$ 时关于x的5阶无穷小.