第二节

数量积 向量积 *混合积

一、两向量的数量积

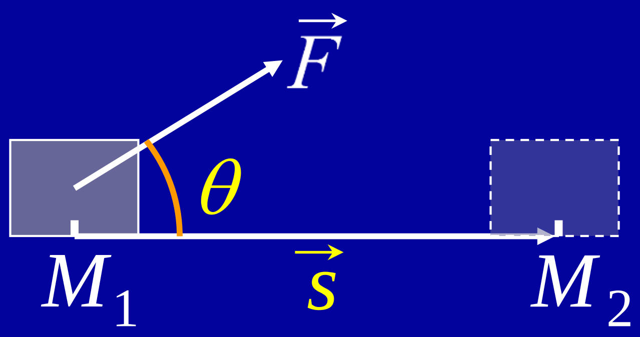
二、两向量的向量积

*三、向量的混合积

一、两向量的数量积

引例. 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$, 则力$\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

1. 定义

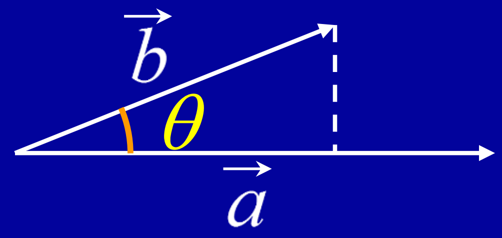
设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 θ, 称

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

为$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的**数量积** (点积、点乘) .

当$\vec{a}\neq\vec{0}$时, $\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为

$$|\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$



故 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

同理, 当$\vec{b}\neq\vec{0}$时, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$

2. 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a},\vec{b}$ 为两个非零向量, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

(零向量与任何向量垂直, 因此无论 $\vec{a},\vec{b}$ 是否为零向量都成立)

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\Updownarrow$$

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta}$$

3. 运算律

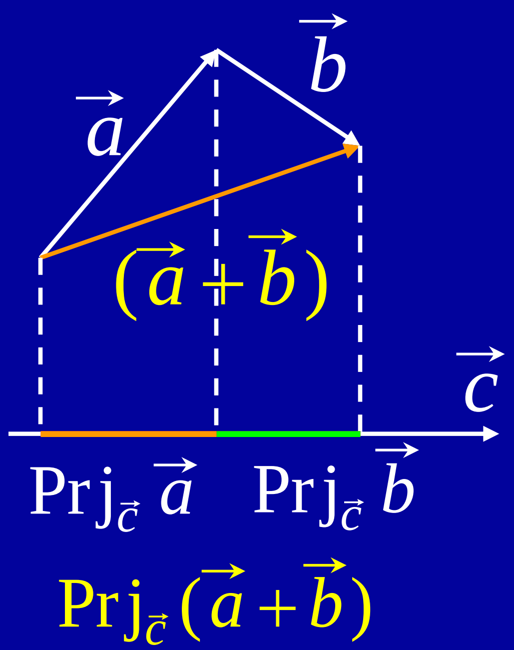
(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 $(\lambda,\mu$为实数$)$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b}))$$

$$=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$



(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

事实上, 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立 ; 当$\vec{c}\neq\vec{0}$时

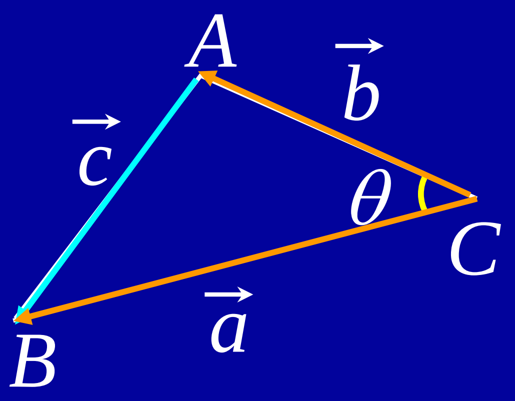
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b})$$

$$=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

例1. 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

证: 如图 . 设



$$\overrightarrow{CB} = \vec{a},\quad \overrightarrow{CA} = \vec{b},\quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

则 $\quad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$a = |\vec{a}|,\ b = |\vec{b}|,\ c = |\vec{c}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

4. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

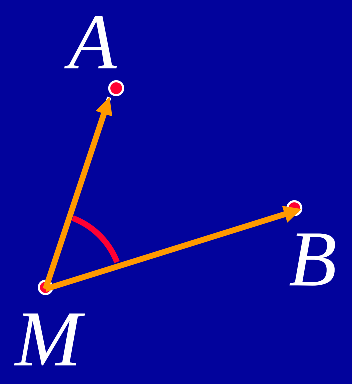
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

两向量的夹角公式

当 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量时, 由于 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

例2. 已知三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.



解: $\overrightarrow{MA}=(1,\ 1,\ 0\ )$, $\overrightarrow{MB}=(\ 1,\ 0,\ 1\ )$

则 $$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right|}$$

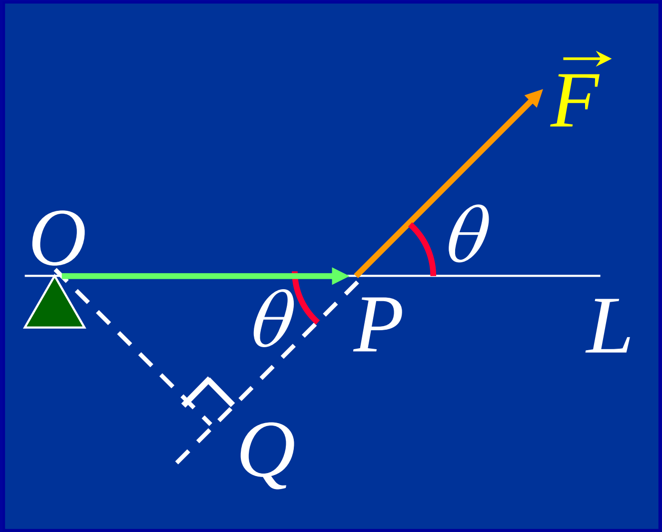
$$=\frac{1+0+0}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

故 $$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$$

二、两向量的向量积

引例. 设O 为杠杆L 的支点 , 有一个与杠杆夹角为θ的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P点上 , 则力 $\vec{F}$ 对支点力O的力矩是一个向量 $\overrightarrow{M}$:

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = |OQ|\,|\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\,\sin\theta$$

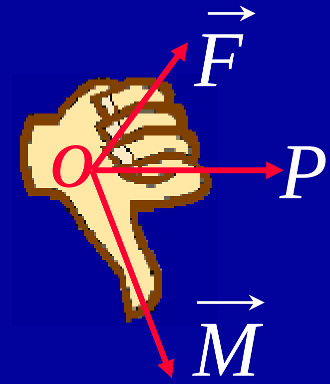


$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \overrightarrow{M}$ 符合右手规则

$\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{M} \perp \vec{F}$



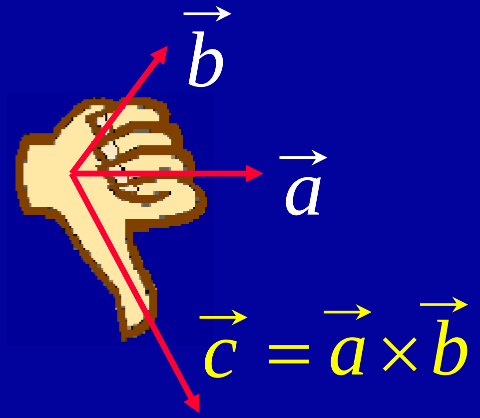
1. 定义

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ，定义

$$\text{向量}\ \vec{c} \begin{cases} \text{方向}: \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}\ \text{且符合右手规则} \\ \text{模}: |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta \end{cases}$$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**，记作

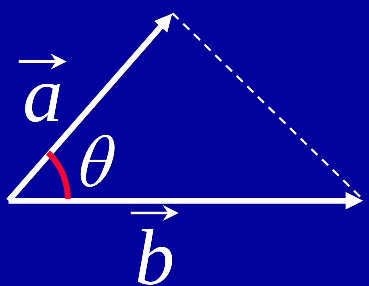
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{(叉积、叉乘)}$$



引例中的力矩 $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

思考: 右图三角形面积

$$S = \underline{\ \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|\ \ \ \ \ \ }$$



$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

(2) $\vec{a}, \vec{b}$为非零向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} /\!/ \vec{b}$

证明: 当$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta = 0,\text{即 }\theta = 0\text{ 或 }\pi \Longleftrightarrow \vec{a} /\!/ \vec{b}$$

3. 运算律

(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (反交换律)

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(证明略)

4. 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\underline{a_x\vec{i}} + \underline{a_y\vec{j}} + \underline{a_z\vec{k}})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

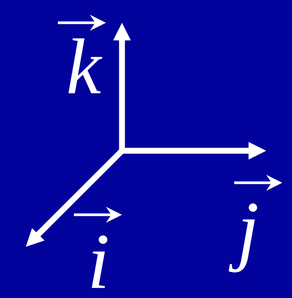
$$= \cancel{a_x b_x(\vec{i}\times\vec{i})} + \underline{a_x b_y(\vec{i}\times\vec{j})} + \underline{a_x b_z(\vec{i}\times\vec{k})}$$

$$+ \underline{a_y b_x(\vec{j}\times\vec{i})} + \cancel{a_y b_y(\vec{j}\times\vec{j})} + \underline{a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k})}$$

$$+ \underline{a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i})} + \underline{a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j})} + \cancel{a_z b_z(\vec{k}\times\vec{k})}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j}$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$



向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

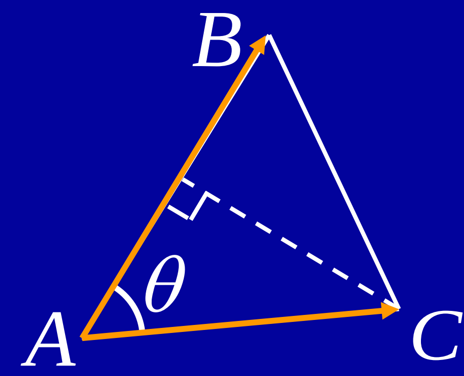
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{aligned}}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

(行列式计算见上册 P355 ~ P358)

例3. 已知三点 $A(1,2,3),\ B(3,4,5),\ C(2,4,7)$, 求三角形 ABC 的面积 .



解: 如图所示,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(4,-6,\ 2)\right|$$

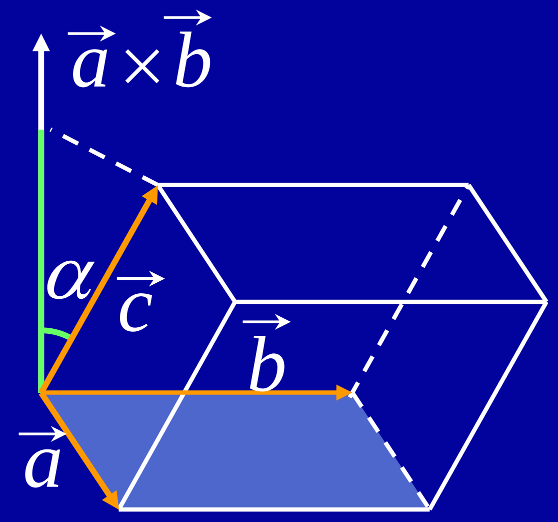
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

*三、向量的混合积

1. 定义 已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \xlongequal{\text{记作}} [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**.



几何意义

以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$, 高 $h=|\vec{c}|\,|\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V=Ah=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,|\cos\alpha|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$=|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$$

2. 混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\ \vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

3. 性质

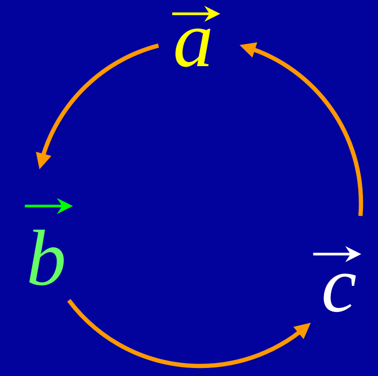
(1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}] = 0$$

(2) 轮换对称性 :

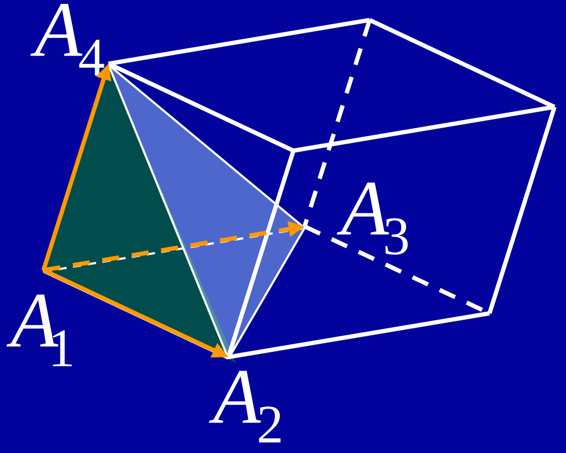
$$[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}] = [\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{a}] = [\vec{c}\;\vec{a}\;\vec{b}]$$

(可用三阶行列式推出)



例4. 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3,4)$, 求该四面体体积 .

解: 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$, 故

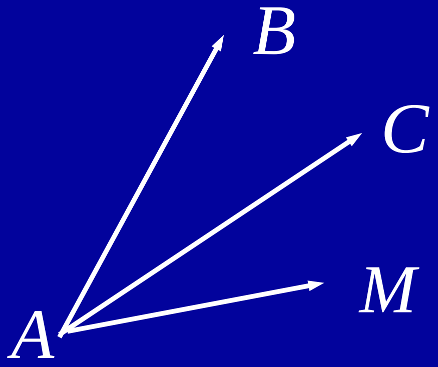


$$V=\frac{1}{6}\left|\,[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}]\,\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

例5. 已知 $A\,(1,2,0)$、$B\,(2,3,1)$、$C\,(4,2,2)$、$M(x,y,z)$ 四点共面, 求点 M 的坐标 x、y、z 所满足的方程.

解: A、B、C、M 四点共面



$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 三向量共面

$\Longleftrightarrow$ $[\,\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\,] = 0$

即
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式即得点 M 的坐标所满足的方程

$$2x + y - 3z - 4 = 0$$

内容小结

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

混合积: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 向量关系:

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\text{共面} \Longleftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

思考与练习

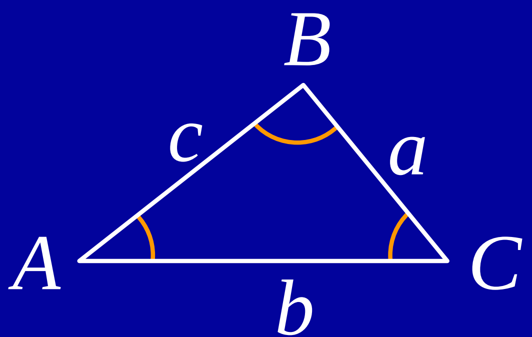
1. 设 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, 计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$, 并求 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角 θ 的正弦与余弦 .

答案: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\quad \vec{a}\times\vec{b}=(1,1,3)$

$$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{11}{12}}$$

2. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



证: 由三角形面积公式

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|$$

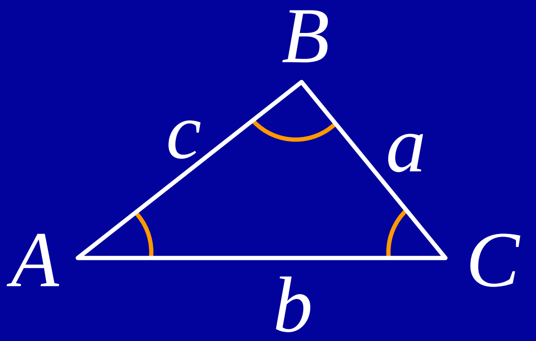
$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|$$

因

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = b\cdot c\cdot\sin A$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = c\cdot a\cdot\sin B$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right| = a\cdot b\cdot\sin C$$



所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

作业

P23　3，4，6，7，

9 (2)，10

备用题

1. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$,且 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, 求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

解： $\because\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

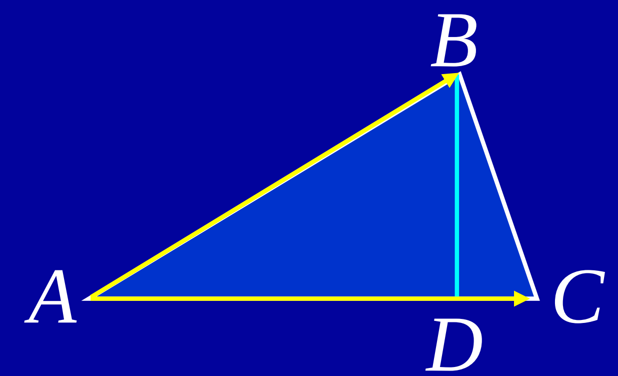
$$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$$

$$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+3^2$$

$$=17$$

$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$

2. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD .



解： $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}=1$$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$

故有 $1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD|\qquad\therefore\quad |BD|=\frac{2}{5}$