第一部分

1. 解不等式$|x^2+3x-4|>x^2+3x-4$

解：由于$|y|>y\Longleftrightarrow y<0$

因此原不等式与以下不等式等价：

$x^2+3x-4<0\Longrightarrow(x+4)(x-1)<0,$

即$-4<x<1$

2. 解不等式$||x+1|-|x-1||<1$

解：原不等式等价于$(x+1)^2-2|x^2-1|+(x-1)^2<1$

$\Longleftrightarrow|x^2-1|>x^2+\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow x^2-1>x^2+\frac{1}{2}$或$x^2-1<-(x^2+\frac{1}{2})$

$\Longleftrightarrow 2x^2<\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$

所谓Cauchy不等式：

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3. 证明: $(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^2\leq 2n.$

证明: $(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^2=(1\cdot1+1\cdot\frac{1}{2}+\cdots+1\cdot\frac{1}{n})^2$

$\leq n(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})$

而$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 1+\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\frac{1}{(n-1)\times n}=1+1-\frac{1}{n}<2$

于是不等式得证.

4.$\forall x>-1$有$(1+x)^n\geq 1+nx.$

证明：$n=1,1+x\geq 1+x$

$n=2,(1+x)^2=1+2x+x^2\geq 1+2x$

假定$(1+x)^n\geq 1+nx$

则$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)$

$\geq(1+nx)(1+x)$

$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

由归纳原理得证.

5.证明：$|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

令$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

于是$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\varphi)| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

6.求$y = \frac{1-x}{1+x}$的反函数

解：$y(1+x) = 1-x \Longrightarrow (1+y)x = 1-y$

$x = \frac{1-y}{1+y}$

则其反函数为$y = \frac{1-x}{1+x}$

7.求$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$的反函数

见课堂讲解

8.举出如下映射的例子

(1)单射而非满射：$y = f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} = A, B = \mathbb{R}$

(2)满射而非单射：$y = f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R} = A, B = [-1,1]$

(3)即单又满的映射：$y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = A, B = [-1,1]$

9.建立映射使集合$(0,1)$与集合$(a,b), (-\infty,+\infty)$的一一对应

解：$x = a + t(b-a) : (0,1) \longrightarrow (a,b)$

令$a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$

令$f(x) = \tan x : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$

10.设$f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$求$f(x)$

解：函数的表达式与自变量的符号无关

$f(x+\frac{1}{x}) = (x+\frac{1}{x})^2 - 2$

于是$f(x) = x^2 - 2$

11.设$f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$,证明：$f(t) = f(\frac{1}{t})$

证明：令$t=\frac{1}{x}$

$f(\frac{1}{x})=\frac{2}{x^2}+2x^2+5x+\frac{5}{x}=f(x)$

12.设$f(0)=15,f(2)=30,f(4)=90$且$f(x)=a+bc^x$求a,b,c的值

解：建立关于a,b,c的方程组

$$\begin{cases} a+b & =15 \\ a+bc^2 & =30 \\ a+bc^4 & =90 \end{cases}$$

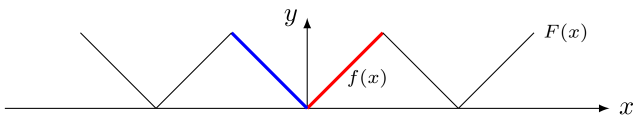
解得$a=10,b=5,c=\pm 2$

13.将函数$y=x,x\in[0,1]$延拓成周期函数

解：这是一个开放式的题，答案不唯一

例如我将其作偶延拓：$F(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ -x & x\in[-1,0] \end{cases}$

然后做周期延拓，显然选择周期为2，$F(x+2k)=F(x)$



14.设$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为奇函数，已知$f(1)=a$,

对$x\in(-\infty,+\infty)$

有$f(x+2)=f(x)+f(2)$,试求

(1) $f(5)$

(2)若$y=f(x)$以$T=2$为周期，则a为何值？

解：$f(-1)=-f(1)=-a$

$f(-1+2)=f(-1)+f(2)\Longrightarrow f(2)=2a$

(1).$f(5)=f(3+2)=f(3)+f(2)$

$=f(1+2)+f(2)=f(1)+2f(2)=5a$

(2) $f(x+2)=f(x)+f(2)\Longrightarrow f(2)=0$

即$a=0$

第二部分

1. 设映射$f:X\longrightarrow Y$,若存在一个映射$g:Y\longrightarrow X$,使

$g\circ f=I_X, f\circ g=I_Y$,

其中I_X,I_Y分别是X,Y上的恒等映射，即对于每一个

$x\in X$, 有$I_Xx=x$;对每一个$y\in Y$有

$I_Yy=y$,

证明：f是双射，且g是f的逆映射：$g=f^{-1}$

证明：欲说f是双射，须说f既单又满，

先证f是单射：$\forall x_1,x_2\in X$，若$f(x_1)=f(x_2)$，则$x_1=x_2$,事实上，

若$f(x_1)=f(x_2)$,

则$g\circ(f(x_1))=g\circ(f(x_2))$

这是因为$f(x_j)\in Y$而g是Y上的映射，

于是有$I_Xx_1=I_Xx_2$,即$x_1=x_2$.

f是满射：即证明$f(X)=Y$事实上，

$\forall y\in Y$由于g 是Y 到X 的映射，故存在

$x\in X$使得$g(y)=x\Longrightarrow f\circ(g(y))=f(x)$

于是，$I_Yy=f(x)$ 那么$y=f(x)$,

此即$Y\subseteq f(X)$ 又显然$f(X)\subseteq Y$故f是双射.

X与Y 是一一对应的，于是$g=f^{-1}$

2.已知函数$y=f(u)$的定义域是区间$[0,1]$,求函数

$f(x+a)+f(x-a),a>0$的定义域.

解：由题意，我们有

$$\begin{cases}0 & \le x+a\le 1\\ 0 & \le x-a\le 1\end{cases}\text{即}$$

$$\begin{cases}-a & \le x\le 1-a\\ a & \le x\le 1+a\end{cases}$$

(1)若$1-a<a,\Longrightarrow a>\frac{1}{2}$上述不等式组无解,函数的定义域是空集.

(2)若$a\le 1-a,\Longrightarrow a\le\frac{1}{2}\Longrightarrow a\le x\le 1-a$

于是当$0<a\le\frac{1}{2}$所求函数的定义域是$a\le x\le 1-a$.

3. 设$f(x)=\dfrac{x}{1-x},x\ne 1$，求函数$f(f(x))$的定义域.

解：$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$

因此所求函数的定义域为：$\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2},1\}$

4. 设函数$y=f(x)$定义在实数轴上，其图形关于直线

$x=a,x=b,(a<b)$对称，证明: $y=f(x)$是周期函数.

证明: 由对称性$f(a+x)=f(a-x),f(b+x)=f(b-x)$

$$\begin{aligned}\text{所以}f(x)&=f(a-(a-x))\\&=f(a+(a-x))=f(2a-x)\\&=f(b-(b+x-2a))=f(b+b+x-2a)\\&=f(x+2(b-a))\end{aligned}$$

$\Longrightarrow T=2(b-a)$

5.证明：如果$f:E\to F$,且$A\subset F,B\subset F$,则下列不等式成立：

1) $f^{-1}(A\bigcap B)=f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$;

2)$f^{-1}(A\bigcap B^C)=f^{-1}(A)\bigcap(f^{-1}(B))^C$;

3)$f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$

证明：

(1)$\forall x\in f^{-1}(A\bigcap B)$,$\exists y\in A\bigcap B$

使得$y=f(x),\Longrightarrow y\in A$且$y\in B$

那么$x\in f^{-1}(A)$,且$x\in f^{-1}(B)$

于是$f^{-1}(A\bigcap B)\subset f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$

反之$\forall x\in f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$

$\Longrightarrow x\in f^{-1}(A)$且$x\in f^{-1}(B)$

$y=f(x)\in A$且$y=f(x)\in B$

$\Longrightarrow y\in A\bigcap B$,即$x\in f^{-1}(A\bigcap B)$

于是等式成立

(2)由(1)式即补集的定义易得，此不赘述

(3)f^{-1}作为一个由像集到原像集的映射，当然满足映射的性质，课堂已经证明对于映射f有

$f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$，于是容易得到

6.求联系华氏温度（用F表示）和摄氏温度（用C表示）的转换公式，并求

(1) $90°F$的等价摄氏温度和$-5°C$的等价华氏温度；

(2)是否存在一个温度值，使得华氏温度计和摄氏温度计的度数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

其中华氏温度规定为：一定浓度的盐水的凝点为$0°F$，标准大气压下纯净水的冰点为$32°F$,标准大气压下纯净水的沸点为$212°F$,等分冰点到沸点为$1°F$,

摄氏度的规定为:标准大气压下纯净水的沸点为$100°C$,冰点为$0°C$.

解：一定浓度的盐水的凝固点为$0°F$,

蒸馏水的冰点为$32°F$,沸点为$212°F$

规定:从冰点到沸点的180分之一为$1°F$,

而摄氏度为标准大气压从蒸馏水冰点到沸点的百分之为$1°C$

设x为摄氏度，y为华氏度，令$t\in[0,1]$,从冰点到沸点的温度满足如下关系：

$x=100t,y=32+180t\Longrightarrow\frac{x}{100}=\frac{y-32}{180}$,即

$x=\frac{5}{9}(y-32)$或$y=32+\frac{9}{5}x$

当$y=90,\Longrightarrow x=\frac{5}{9}\times 58\approx 32.2^{\circ}C$

当$x=-5,\Longrightarrow y=32-\frac{9}{5}\times 5=23^{\circ}F$

令$x=y$得$9x=5x-160\Longrightarrow x=y=-40\begin{cases}^{\circ}F\\ ^{\circ}C\end{cases}$

7.设$f(x)$为定义在$(-\ell,\ell)$内的奇函数，若$f(x)$在$(0,\ell)$ 内单调增加，证明：$f(x)$在$(-\ell,0)$内也单调增加.

证明：$\forall x_1,x_2\in(-\ell,0),x_1<x_2$

$\Longrightarrow -x_1>-x_2,-x_j\in(0,\ell),j=1,2\Longrightarrow f(-x_1)>f(-x_2)$

$\Longrightarrow -f(x_1)>-f(x_2)$即$f(x_1)<f(x_2)$命题得证

8.证明：若函数$f(x)$与$g(x)$分别以T_1,T_2 为周期，且$T_1/T_2=a\in\mathbb{Q}$, 则$f(x)+g(x),f(x)\cdot g(x)$是周期函数.

证明：$\frac{T_1}{T_2}=a\in\mathbb{Q}$

$\Longrightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{p}{q}$

$\Longrightarrow T_1q=T_2p$

注意到$\forall k\in\mathbb{Z},f(x+kT_1)=f(x),g(x+kT_2)=g(x)$

令$F(x)=f(x)+g(x)$

$\Longrightarrow F(x+T_1q)=f(x+T_1q)+g(x+T_1q)$

$=f(x)+g(x+T_2p)=f(x)+g(x)=F(x)$

同理令$G(x)=f(x)\cdot g(x)$可得$G(x+T_1q)=G(x)$

9.设$f(x)=\frac{x}{x-1}$,求$f(f[f[f(x)]]),f\left(\frac{1}{f(x)}\right)(x\neq 0,1)$

解：注意到复合函数的定义域及内函数的值域与外函数的交集非空

$f(f(f[f(x)]))=f(f(f\left(\frac{x}{x-1}\right)))$

$= f(f\left(\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}\right))= f(f(x))$

$= f\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x, x \neq 1$

$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

$= f\left(\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\right)$

$= f(\frac{x-1}{x})$

$= \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}$

$= 1 - x, x \neq 0, 1$

10.利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测2010年的世界人口.

年份	人口数（百万）	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4936	
1987	5023	1.0176
1988	5111	1.0175
1989	5201	1.0176
1990	5329	1.0246
1991	5422	1.0175

解：86年人口：$4936 = Q_1$

87年人口：$Q_2 = 4936 + 4936 \cdot q = Q_1(1+q) = 5023,$

$\Longrightarrow q \approx 0.018$

第n 年人口为$Q_n = Q_1(1+q)^{n-1}$

2010年，$n = 25, Q_{25} = Q_1(1+q)^{24} \approx 76$ (亿)