第二节 二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

二、利用极坐标计算二重积分

一、利用直角坐标计算二重积分

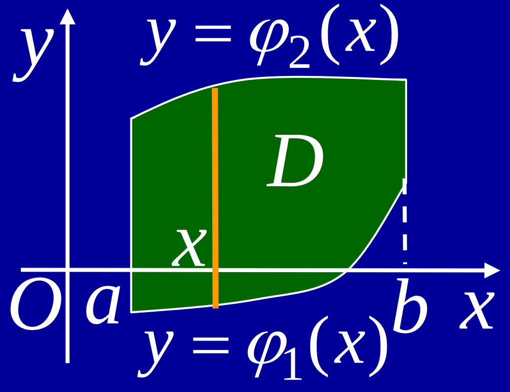
1. 公式推导

当被积函数 $f(x,y)\geq 0$ 且在D上连续时,

$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 几何意义：曲顶柱体体积

假定：D为 X - 型区域

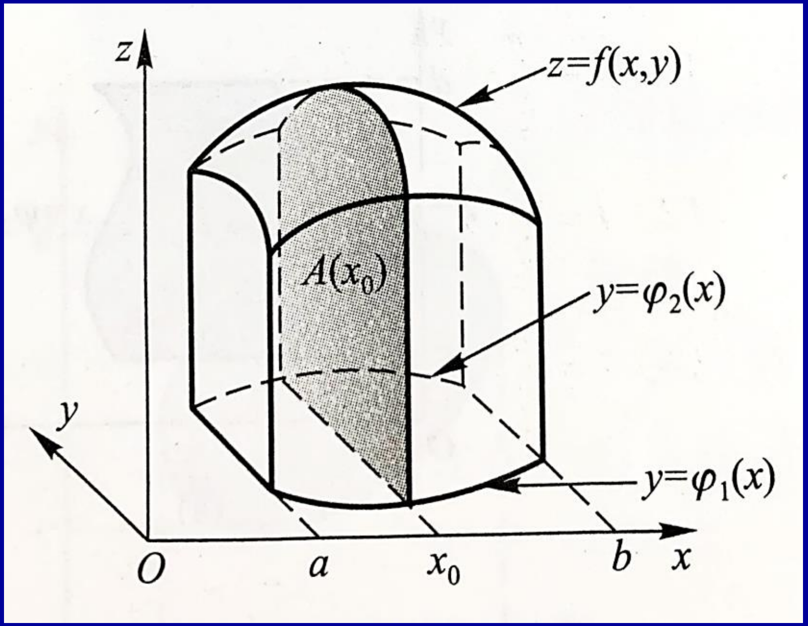
$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\\ a\leq x\leq b\end{cases}$$



方法：“平行截面面积为已知的立体的体积”

步骤： 先计算截面面积.

在$[a,b]$上任取一点x_0,过x_0作平行于yOz面的平面，截面为曲边梯形：



以$[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$为底，

以$z=f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形.

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

一般地，过$[a,b]$上任一点x且平行于yOz面的平面截

曲顶柱体所得截面面积为 $A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

柱体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

说明： (1) 先对y后对x的二次积分，或累次积分

(2) 常写为 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}\,x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(3) 此公式是对X –型区域.

特点：穿过D内部且平行于y 轴的直线与D 的边界最多有两个交点

(4) 此计算公式无论$z=f(x,y)\geq 0$与否都成立.

当被积函数 $f(x,y)$在D上**变号**时, 由于

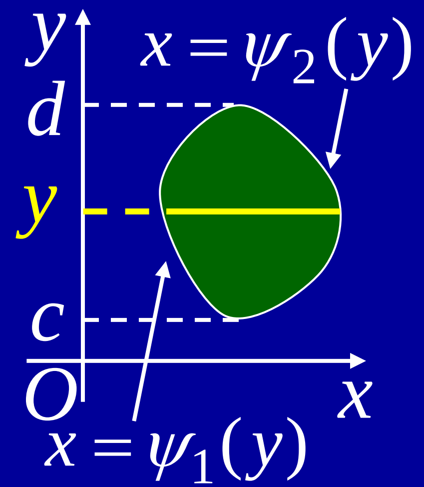
$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+|f(x,y)|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$

均非负

$$\therefore\quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此上面讨论的累次积分法仍然有效.

若D为Y - 型区域:



特点：穿过D内部且平行于x 轴的直线与D 的边界最多有两个交点

不等式表示： $D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$=\int_c^d\mathrm{d}\,y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

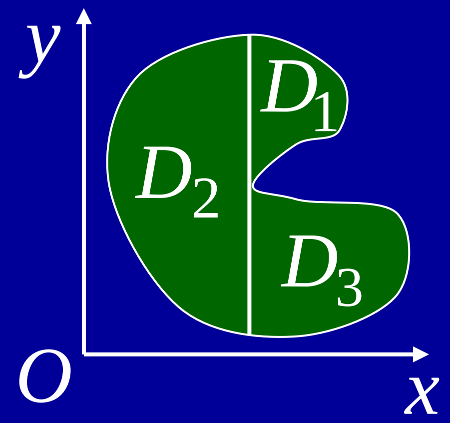
先对x后对y的累次积分

若积分域D既不是X –型,又不是Y –型:

方法：分成有限的几部分，使D成为若干个X –型或Y –型积分区域．再利用积分区域可加性

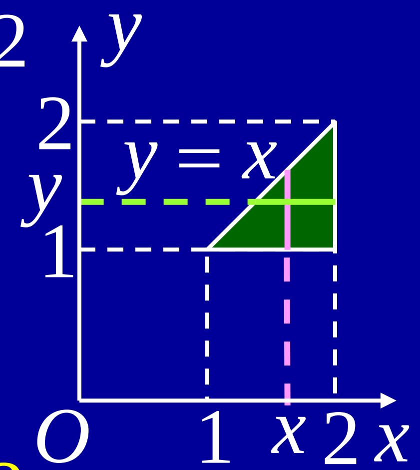
例如图示:

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$



例1. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1,\ x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X - 型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$



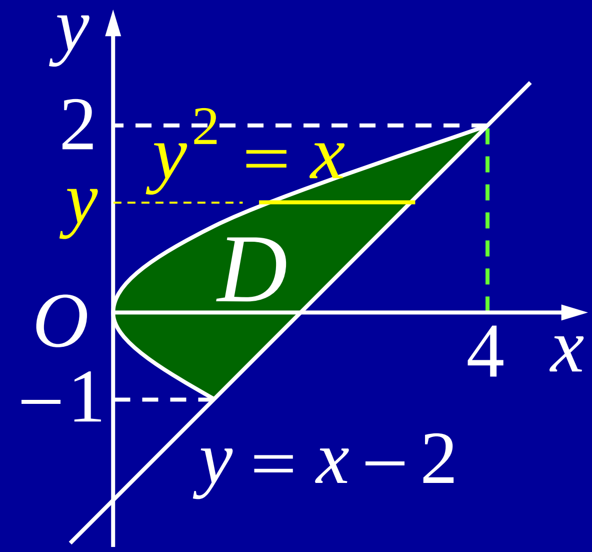
$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

解法2. 将D看作Y - 型区域, 则$D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.



解: (Y −型区域) 先对 x 后对 y 积分,

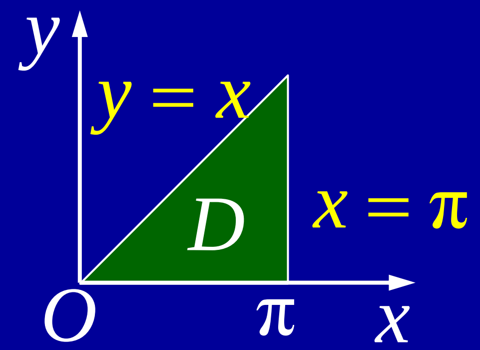
则 $D:\begin{cases} y^2\le x\le y+2 \\ -1\le y\le 2 \end{cases}$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]\mathrm{d}y=\frac{45}{8}$$

注: 也是X −型域，但D下边界不能用一个表达式表示，需分割. 应根据积分区域和被积函数选择合适积分次序.

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x,\ y=0,$ $x=\pi$ 所围成的闭区域.



解: 由被积函数可知,先对 x 积分不行,

因此，取D 为X - 型域 :

$$D:\begin{cases} 0\le y\le x \\ 0\le x\le \pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^{\pi} = 2$$

说明: 本例只能选择X - 型,先对y后对x，否则算不出来.

说明:

(1) 在直角坐标系下计算二重积分的**一般步骤**

① 先画出积分区域的草图;

② 由**被积函数与积分区域**特点选择适当积分次序;

③ 化为累次积分进行计算.

(2) 在选择积分次序时，观察被积函数的特点，应避免无法或很难计算的积分出现. 在能计算出结果的前提下，再寻求简单方法(避免分割区域).

若被积函数是$e^{x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \sin x^2, \cos x^2, \dfrac{1}{\ln x}$, $\sin \dfrac{1}{x}$等

时，需要选择先对y积分，后对x积分的次序.

说明： 二重积分化累次积分，**关键确定积分限.**

—————— **“穿线法”**

X **−型**域时，将积分区域D投影到 x轴上，得一区间$[a,b]$,任取$x\in[a,b]$, 过该点用平行于y轴的直线

y

D

自下向上穿过D，设穿入时碰到边界曲线$y=y_1(x)$

穿出时离开边界曲线$y=y_2(x)$，于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}\,x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Y –型域D时, 将D投到y轴，确定y的变化范围$[c,d]$.

平行于x轴的直线, **从左向右穿,** 穿入时碰到$x = x_1(y)$

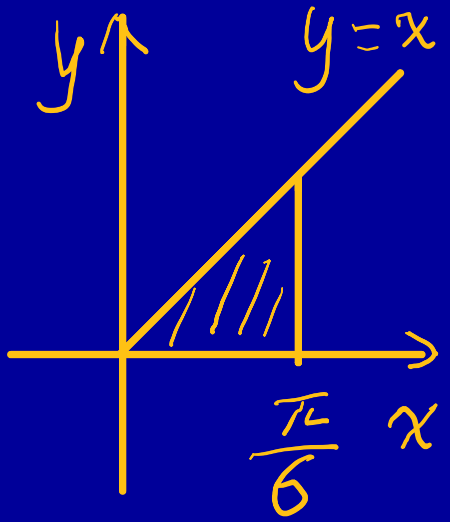
离开时碰到$x = x_2(y)$，于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}\,y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

说明： 若按照某种给定的积分次序不易计算

或根本积不出来时，就需要更换积分的次序.

例4. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$



解： 积分区域D: $0 \le y \le \frac{\pi}{6}$, $y \le x \le \frac{\pi}{6}$

看成X-型, 则D表示为

$$0 \le x \le \frac{\pi}{6}, \quad 0 \le y \le x$$

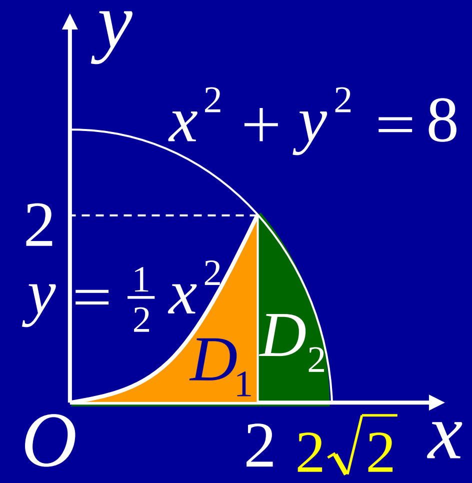
原式$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_0^{x} \frac{\cos x}{x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx = \frac{1}{2}$

注: 更换积分次序的本质是把积分区域看成另一种类型区域，在这种类型的区域下化成新的累次积分.

例5. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$

将 $D=D_1+D_2$ 视为Y - 型区域，则

$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le\sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

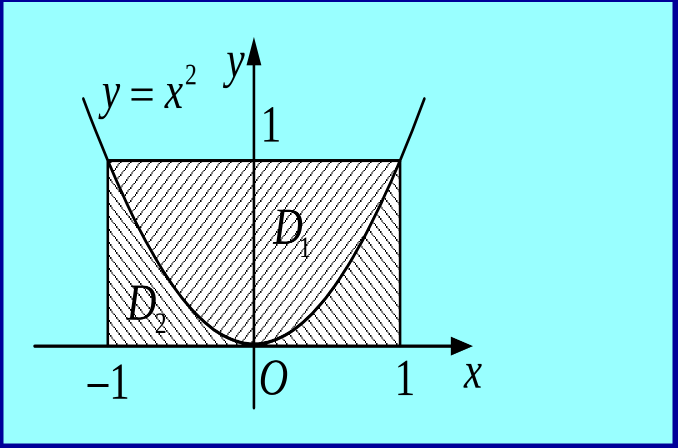
例6. $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$，其中D: $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

分析：去掉被积函数绝对值，据绝对值内式子特点对积分区域进行分割. 使各部分区域上被积函数有确定符号.

解：原式$=\iint_{D_1}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy+\iint_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy$,

$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}\sqrt{y-x^2}\,dy$

$+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$



注： 被积函数含绝对值，去掉绝对值号；

被积函数为分段函数式，一般对积分区域进行分割.

二、利用极坐标计算二重积分

有时，积分区域D的边界曲线用极坐标方程来表示比较简单，且被积函数用极坐标变量r,θ表达比较简便.

考虑利用极坐标来计算二重积分. 按定义：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

现研究这个和的极限在极坐标系中的形式.

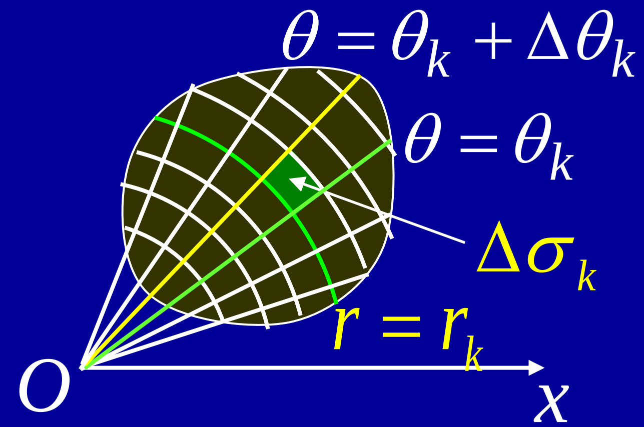
1. 推导: 假定从极点O出发且穿过闭区域D内部的射线与D的边界曲线相交最多两点. (简单区域)

(1) 曲线网划分D:

极点为中心的一族同心圆 $r=$常数

极点出发的一族射线 $\theta=$常数,

分成小闭区域 $\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$

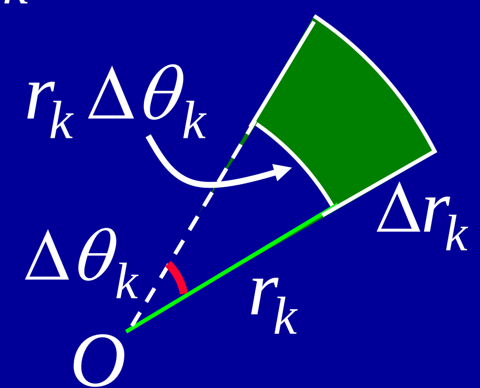


除包含边界点的小区域外,小区域的面积

(2) $$\Delta\sigma_k=\tfrac{1}{2}(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k-\tfrac{1}{2}r_k{}^2\cdot\Delta\theta_k$$

$$=r_k\Delta r_k\Delta\theta_k+\frac{1}{2}(\Delta r_k)^2\Delta\theta_k$$

$$\approx r_k\Delta r_k\Delta\theta_k$$



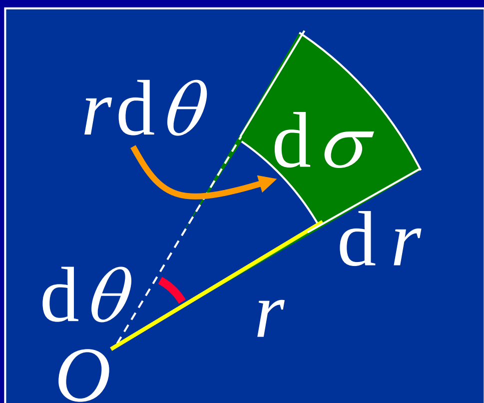
(3) $\Delta\sigma_k$ 内任取点 $(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$, 对应于

直角坐标点 $\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\ \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$

$$\iint_D f(x,y)\boxed{dxdy} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

直角坐标面积元素

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k})\overline{r_k}\Delta r_k\Delta\theta_k$$



$$= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\boxed{r\,d\,r\,d\,\theta}$$

极坐标中面积元素

积分区域D的面积:

直角坐标系下 $S=\iint_D dx\,dy$，极坐标系下 $S=\iint_D r\,dr\,d\theta$

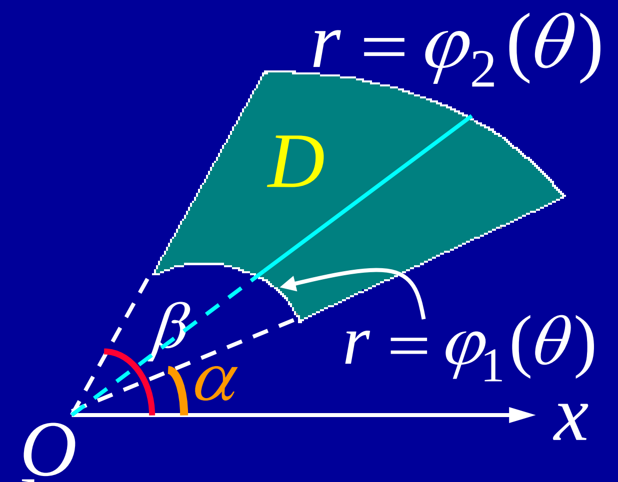
2. 极坐标下计算

化成累次积分：一般化为**先对r，再对θ**的累次积分

设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$，则

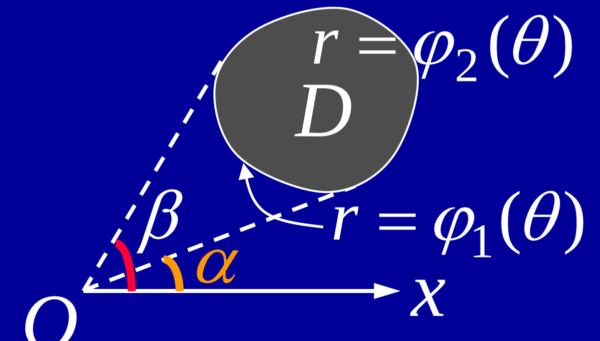
$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$



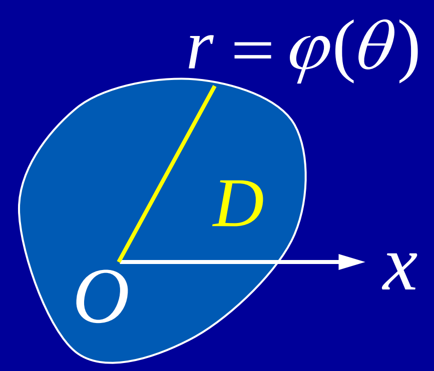
特别, 极点在D的内部

$$D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



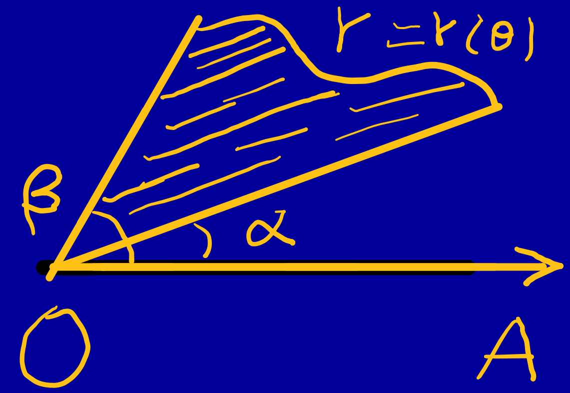
$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$



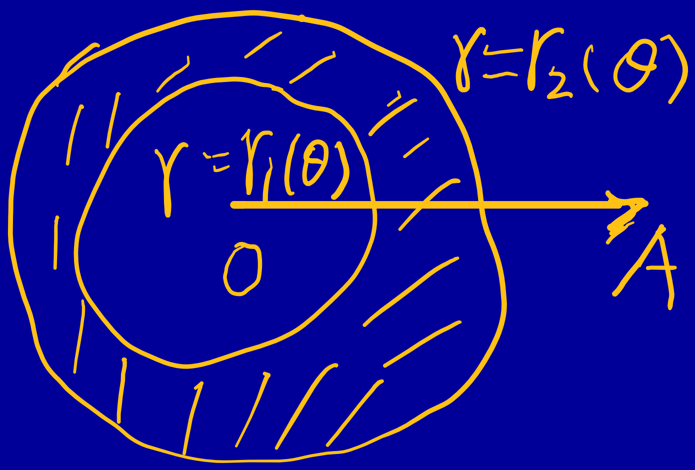
极点在D的边界上

$$D=\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ 0\le r\le r(\theta)\end{cases}$$



D为环形域

$$D=\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\end{cases}$$

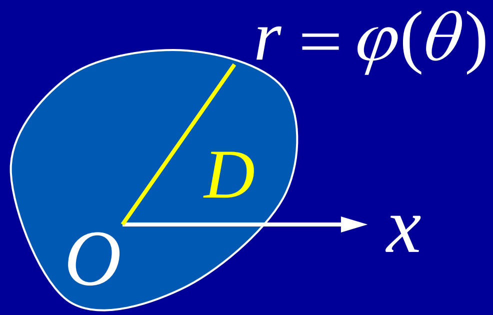


D为圆环域

$$D=\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ r_1\le r\le r_2\end{cases}$$

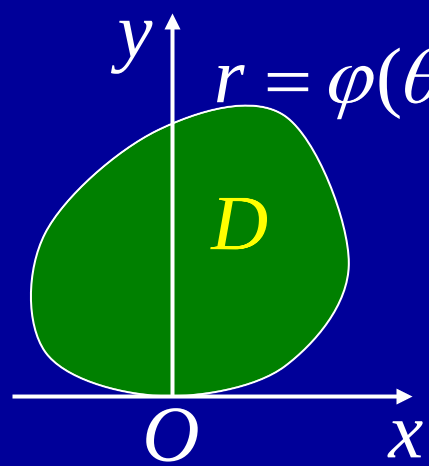
此时若 $f\equiv 1$ 则可求得 D 的面积

$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

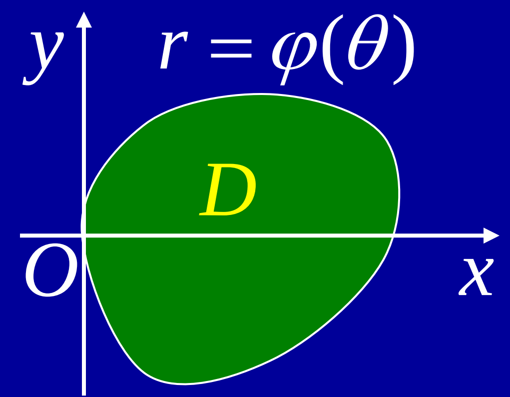


思考: 下列各图中域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)

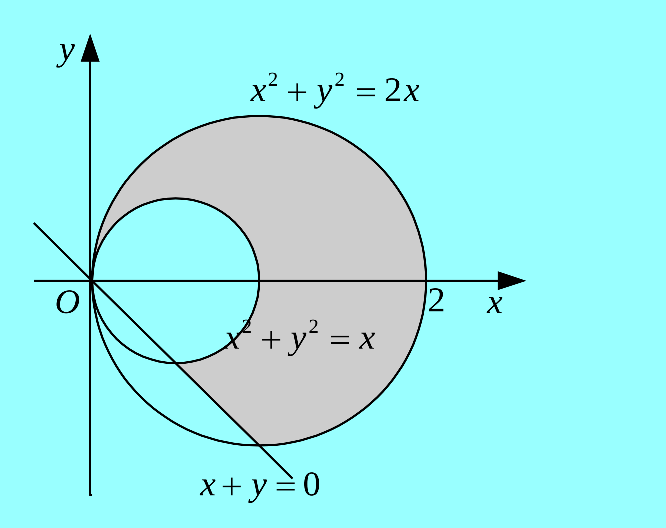


答: (1) $0\le\theta\le\pi$; (2) $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

例7. 求 $\iint\limits_D x^2 y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$，其中

$$D:\ x+y\ge 0,\ \ x\le x^2+y^2\le 2x$$

分析： 被积函数和积分区域易用极坐标表示，用极坐标计算



解： $D:\ -\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\theta\le r\le 2\cos\theta$$

$$\text{原式}=\iint\limits_D r^5\cos^2\theta\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^5\,dr=\frac{7\sqrt{2}}{192}$$

目录 上页 下页 返回 结束

一般化为**先对r，再对θ**的累次积分．“**穿线法**”

(1) 首先确定极角θ的变化范围，$\theta \in [\alpha, \beta]$, θ的积分下限为α，上限为β.

(2) 任取$\theta \in [\alpha, \beta]$, 对于此$\theta$从极点出发引射线穿过积分区域$D$, 穿入时碰到的边界曲线为$r = r_1(\theta)$, 穿出时离开的边界曲线$r = r_2(\theta)$, 从而对$r$的积分下限为$r_1(\theta)$, 积分上限为$r_2(\theta)$. 特别地，当极点在$D$ 的内部时，对r的积分下限为0.

若坐标系选择的不适当甚至会影响到计算能否进行.

在计算二重积分时优先考虑极坐标, 再考虑直角坐标

从被积函数和积分区域两方面考虑:

被积函数用极坐标简单.

D 即积分区域为圆域、环域、扇形区域或圆环域

被从原点出发的两条射线所截得的部分区域等

例8. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$.

解: 在极坐标系下 $D:\begin{cases}0\le r\le a\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$, 故

原式 $=\iint_D e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2}\,dr$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \pi(1-e^{-a^2})$$

---

e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，本题无法用直角坐标计算.

当被积函数为两一元函数的乘积，且各变量的上、下限都为常数时，把重积分化为累次积分后，可分别各自独立地计算定积分，然后将结果相乘.

注: 利用上题可得一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上，

$$\iint_{\mathrm{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

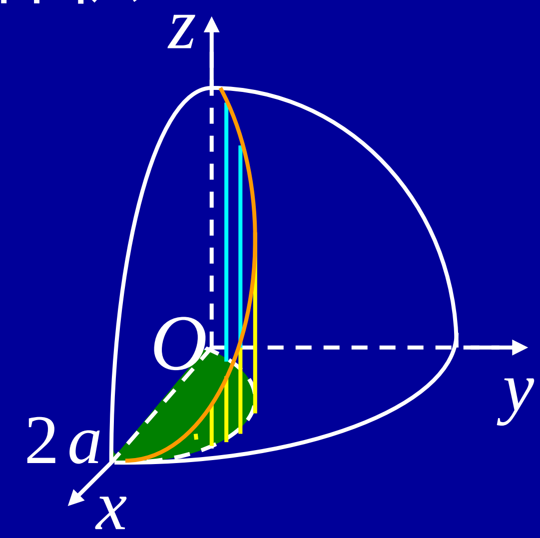
又

$$\iint_{\mathrm{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{a\to+\infty} \iint_{x^2+y^2\le a^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \pi\,(1-\mathrm{e}^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立 .

例9. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.



解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

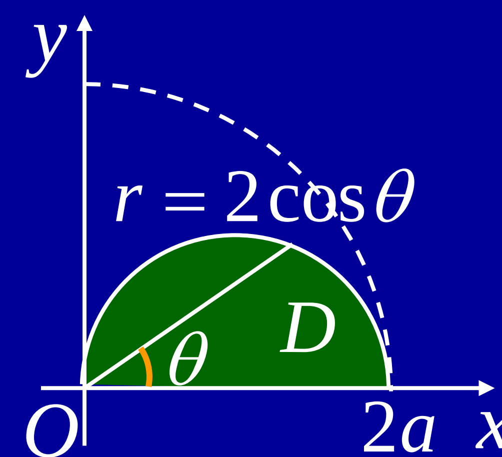
由对称性可知

$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

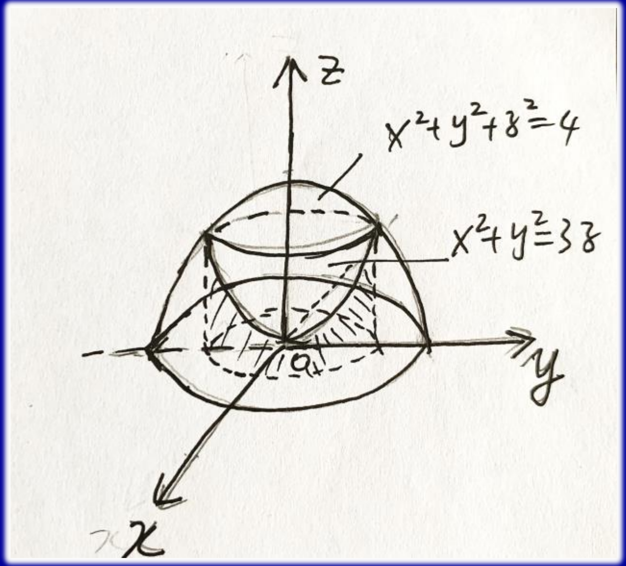
$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$



例10. 求球面$x^2+y^2+z^2=4$与旋转抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的满足$z\geq 0$的部分立体的体积.



解: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$

消去z, 得投影柱面 $x^2+y^2=3$

该立体在xOy面上投影区域

$$D:\ x^2+y^2\leq 3$$

$$V=\iint_D\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dx\mathrm{dy}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)r\,dr=\frac{19}{6}\pi$$

利用对称性或奇偶性简化二重积分

积分区域的对称性及被积函数的奇偶性，必须同时考虑.

(1) 积分区域D关于x轴对称，被积函数$f(x,y)$满足

1^0 $f(x,y)$关于y的奇函数，$f(x,-y)=-f(x,y)$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=0$$

2^0 $f(x,y)$关于y的偶函数，$f(x,-y)=f(x,y)$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中D_1为D位于x轴上方的部分.

(2) 积分区域D关于y轴对称，被积函数$f(x,y)$奇偶性

(3) 积分区域D关于原点对称，被积函数$f(x,y)$满足:

1^0 $f(x,y)$是同时关于变量x,y的奇函数,即

$$f(-x,-y)=-f(x,y)$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=0$$

2^0 $f(x,y)$是同时关于变量x,y的偶函数,即

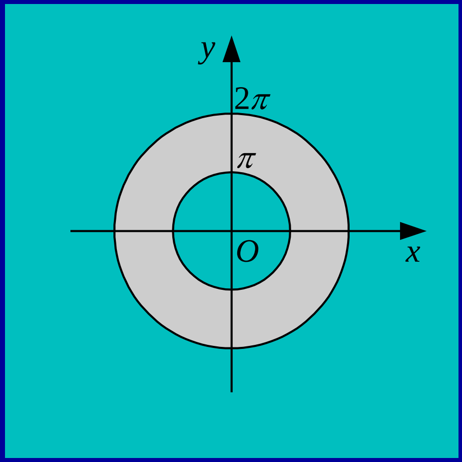
$$f(-x,-y)=f(x,y)$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中D_1为D位于x轴上方的部分.

例11. 求$I = \iint_D \left(ye^{x^2+y^2} + \cos\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$,

其中$D = \{(x,y) | \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$



解: $I_1 = \iint\limits_D ye^{x^2+y^2}\,dx\,dy$,

$$I_2 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

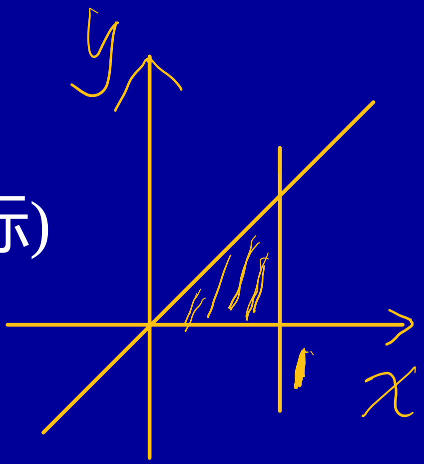
看I_1, 被积函数关于y奇函数， D关于x轴对称. 故 $I_1 = 0$.

看I_2, 被积函数关于x, y偶函数，D关于y,x轴对称,

$$\mathrm{I}{=}I_2 = 4\iint_{D_1} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\pi}^{2\pi} r\cos r\,\mathrm{d}r = 4\pi$$

例12. (2010研) 求 $I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,dr\,d\theta$,

其中D: $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $0\le r\le\sec\theta$.



解: (从表达式看，极坐标计算不方便，换直角坐标)

由$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则

$$I=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\;r\,dr\,d\theta$$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$$

D的边界曲线 $y=0, y=x, x=1$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x y\sqrt{1 - x^2 + y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3}(1 - x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[1 - (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}$$

作 业

P157 2: (3),(4) , 4: (2), 6: (4),(5),

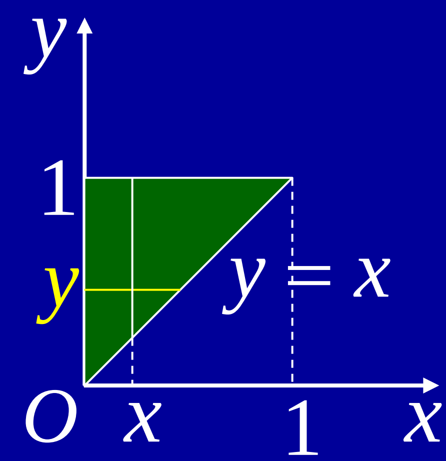
7, 10, 12: (2), 13: (1),(2),

14: (2), 15: (2), 16, 18

思考与练习

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,

求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.



提示: 交换积分顺序后, x , y互换

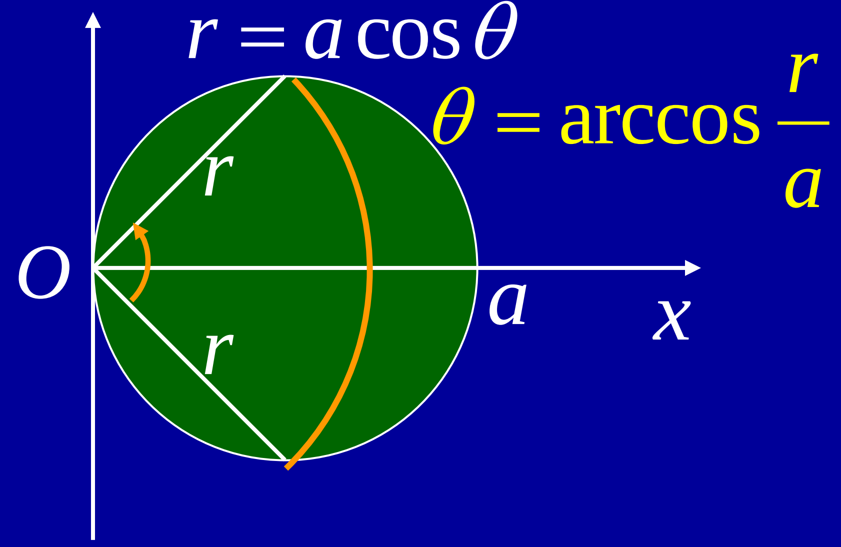
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=A^2$$

2. 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\,\mathrm{d}r\quad(a>0)$

提示: 积分域如图



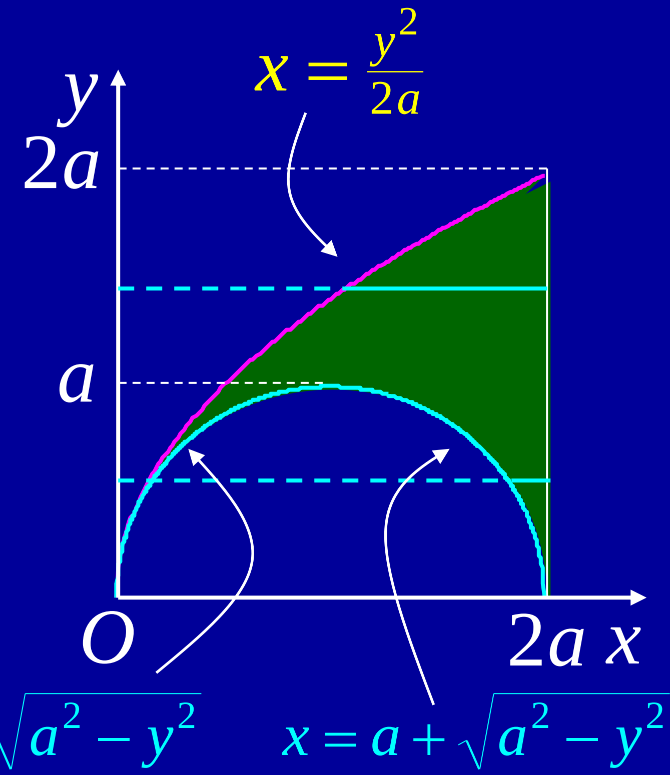
$$I=\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

3. 给定 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\quad(a>0)$
改变积分的次序.

解： $y=\sqrt{2ax}\Rightarrow x=\dfrac{y^2}{2a}$

$y=\sqrt{2ax-x^2}$

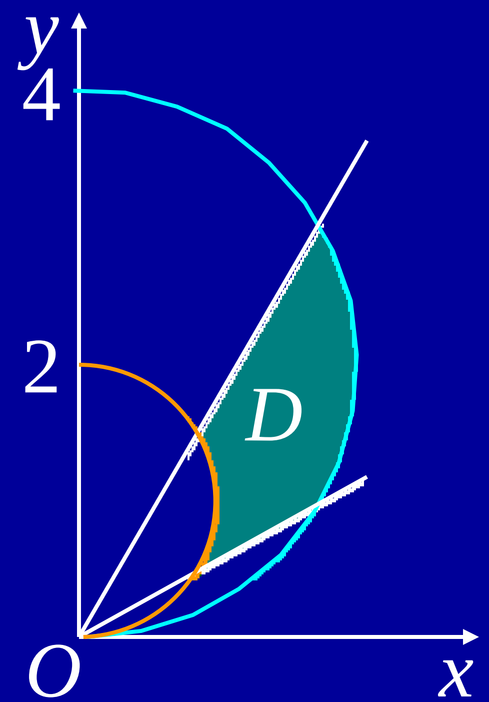
$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$



$$原式=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

4. 计算 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$ 为由圆$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



解: $x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$

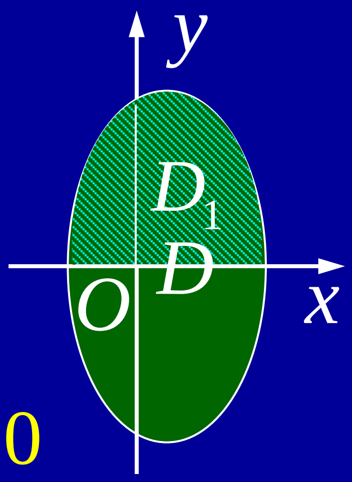
$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$

$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$

5. 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域上连续, 域 D 关于 x 轴对称, D 位于 x 轴上方的部分为 D_1, 在 D 上



(1) $f(x, -y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$$

(2) $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$

当区域关于 y 轴对称, 函数关于变量 x 有奇偶性时, 仍有类似结果.

例如, D_1 为圆域 $D: x^2 + y^2 \le 1$ 在第一象限部分, 则有

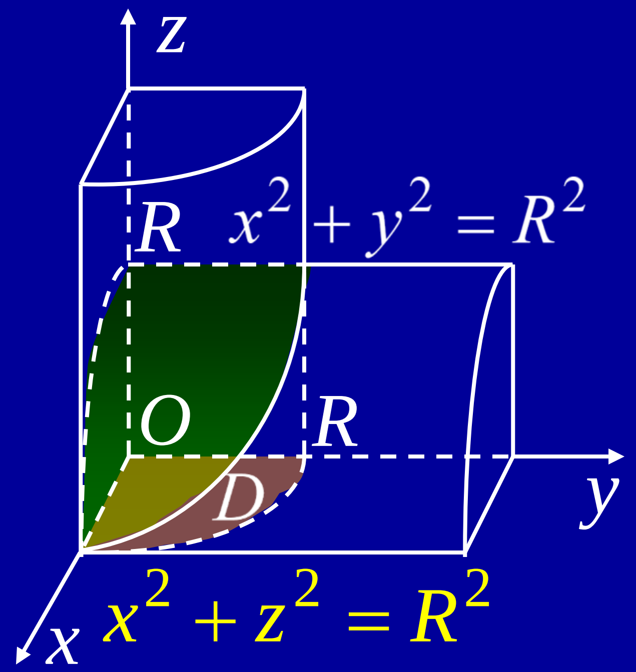
$$\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

6. 求两个底圆半径为R的直交圆柱面所围的体积.

解: 设两个直圆柱方程为

$$x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2$$



利用对称性, 考虑第一卦限部分,

其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(x,y)\in D:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\\0\le x\le R\end{cases}$$

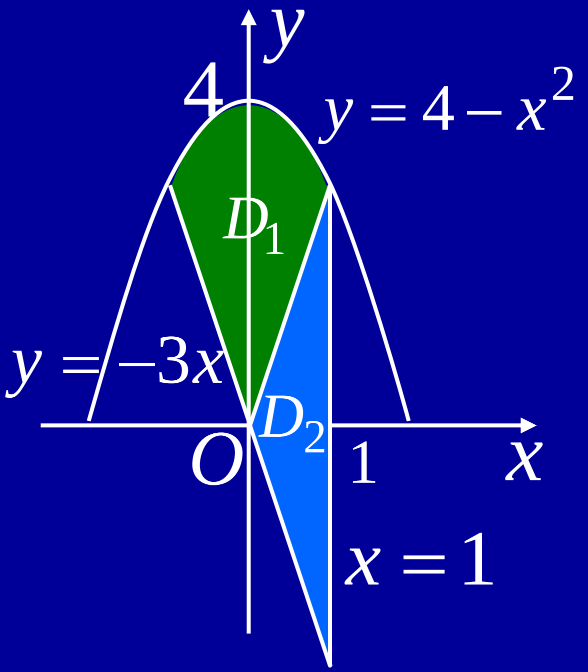
则所求体积为

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}R^3$$

7. 计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由 $y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$ 所围成.

解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$



$$D=D_1\cup D_2\quad (\text{如图所示})$$

显然, 在 D_1上, $f(-x,y)=-f(x,y)$

在 D_2上, $f(x,-y)=-f(x,y)$

$$\therefore\quad I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$