第五节 曲面及其方程

一、曲面方程问题

二、旋转曲面

三、柱面

四、二次曲面

定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

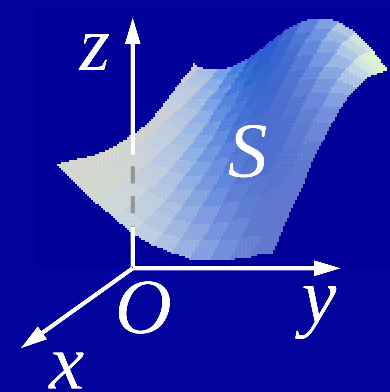
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.

$F(x, y, z) = 0$



前面讨论的平面方程问题就是曲面的一种最简单情形。

一、曲面方程基本问题

两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，

求曲面方程.

(2) 已知方程时，研究它所表示的几何形状

(必要时需作图).

例1. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

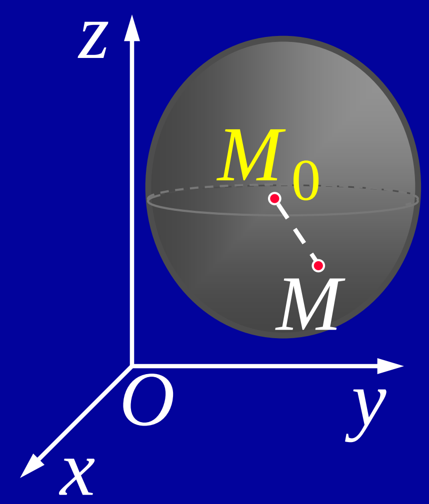
故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

特别,当M_0在原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

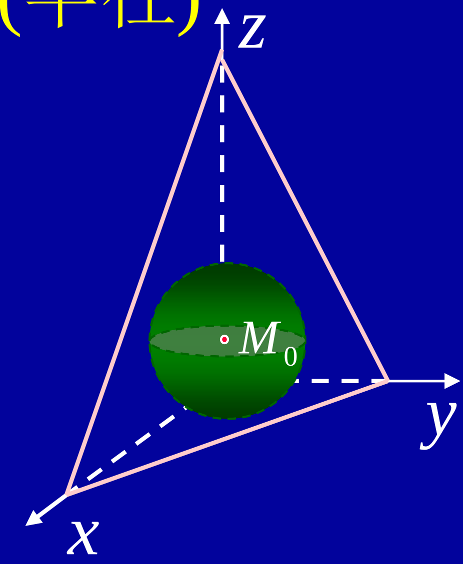
$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .



例2. 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则它位于第一卦限,且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = x_0 = y_0 = z_0 = R(\text{半径})$$



$\because x_0+y_0+z_0 \le 1,\ \therefore 1-3x_0 = \sqrt{3}\,x_0$

故 $$R = y_0 = z_0 = x_0 = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

因此所求球面方程为

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

例3. 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解: 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

可见此方程表示一个球面

球心为 $M_0(1,-2,0)$, 半径为 $\sqrt{5}$

说明: 一般地，如下形式的三元二次方程 $(A\neq 0)$

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

方程特点：缺少xy, yz, zx各项，且平方项系数相同可通过配方化成球面方程形式, 图形是一个球面.

例1 和 例2 属于基本问题 (1), 已知曲面作为点的轨迹求曲面方程.

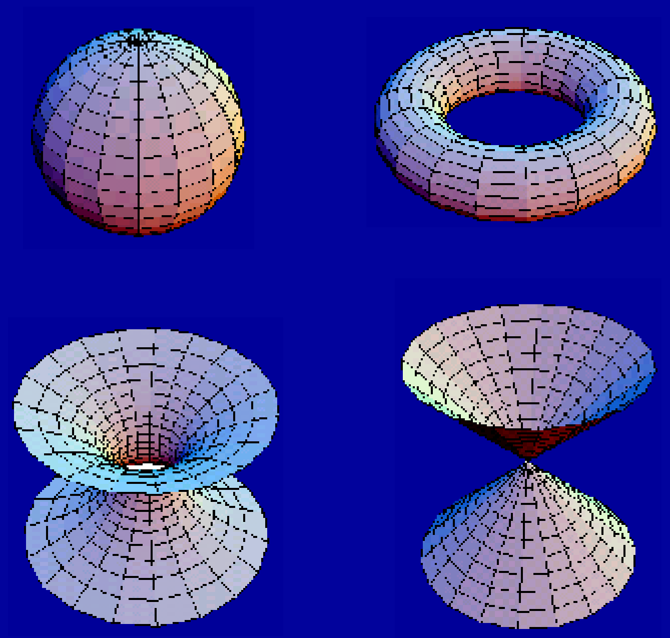
例 3 属于基本问题 (2).

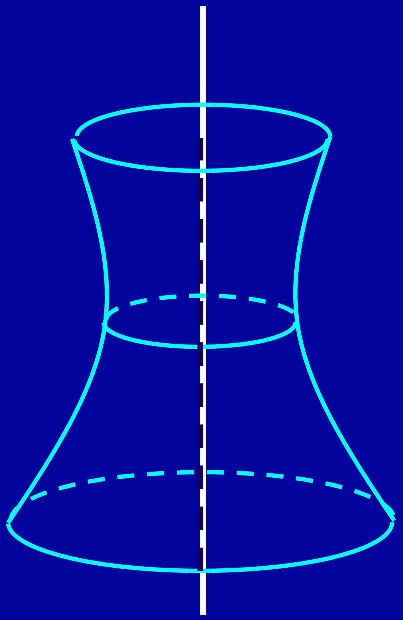
下面介绍几种常见曲面。

二、旋转曲面

1. 定义： 一条平面曲线绕其平面上一条**定直线**旋转一周 所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为旋转曲面的**旋转轴**，旋转曲线叫做旋转曲面的**母线.**

例如：





2. 建立yOz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yOz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$

若点 $M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 则有

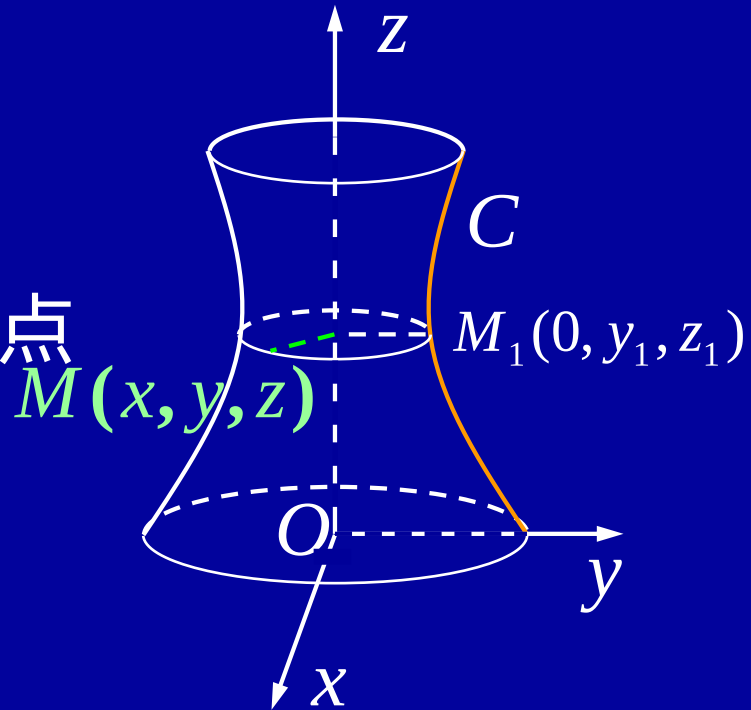
$$f(y_1,z_1)=0$$

当绕 z 轴旋转时, 该点转到另一点 $M(x,y,z)$, 则有

$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$



注：1. 曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面方程，

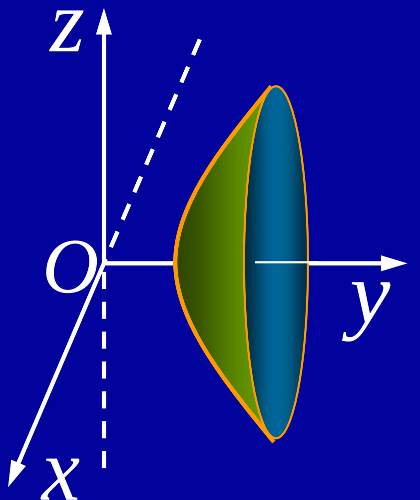
只需将 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$

2. 曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转时，

只需将 z 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$

所得曲面方程为：

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$



"绕谁，谁不变，其余作变换"

3. 圆锥面

定义：直线L绕另一条与L相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做圆锥面.

两直线的交点叫做圆锥面的顶点.

两直线的夹角$\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$叫做圆锥面的半顶角.

例：建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α 的圆锥面方程.

解: 在yOz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

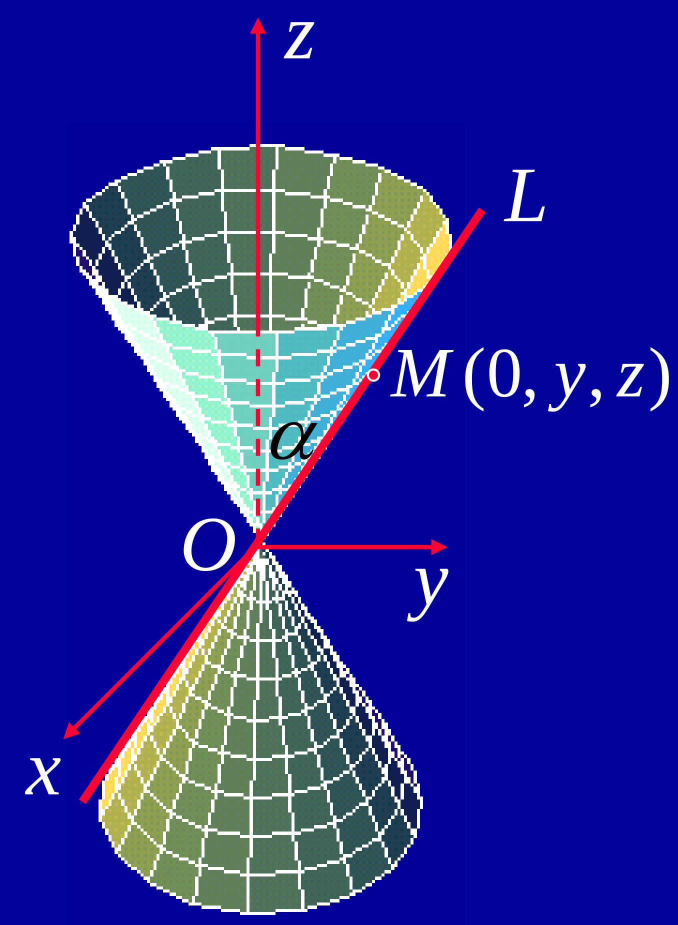
绕 z 轴旋转时,圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

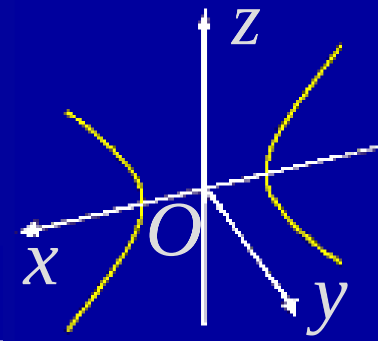
令 $a = \cot\alpha$

两边平方

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

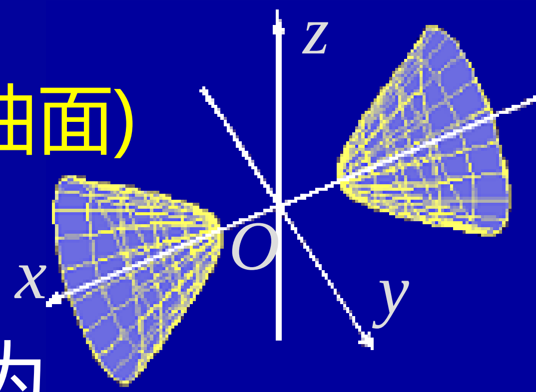


例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.



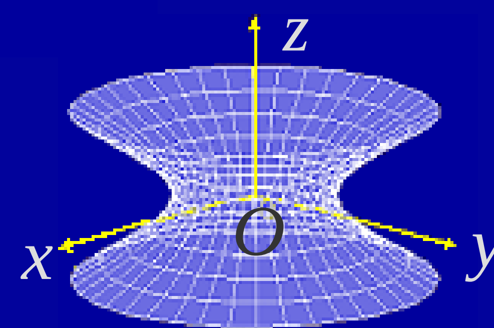
解: 绕 x 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \text{ (双叶双曲面)}$$



绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(单叶双曲面)}$$

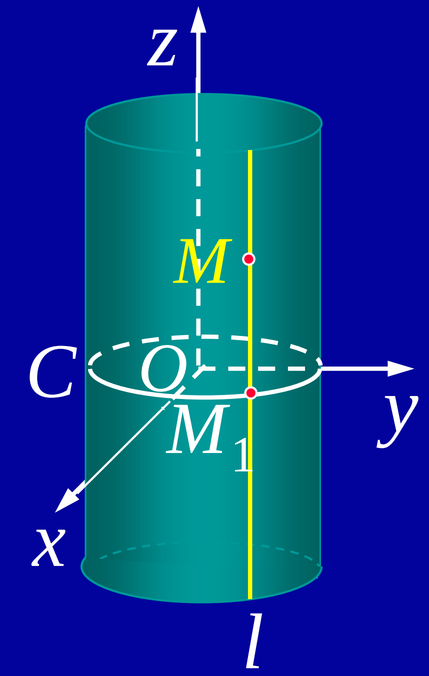


这两种曲面都叫做旋转双曲面.

三、柱面

引例. 分析方程 $x^2+y^2=R^2$

表示怎样的曲面 .



解: 在 xOy 面上, $x^2+y^2=R^2$表示圆C,

在圆C上任取一点$M_1(x,y,0)$, 过此点作

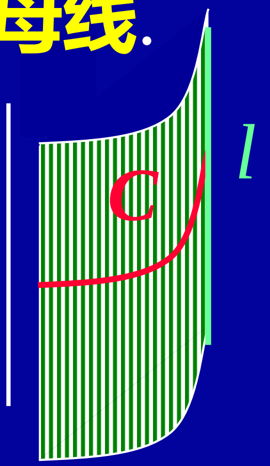
平行 z 轴的直线 l , 对任意 z , 点$M(x,y,z)$

的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

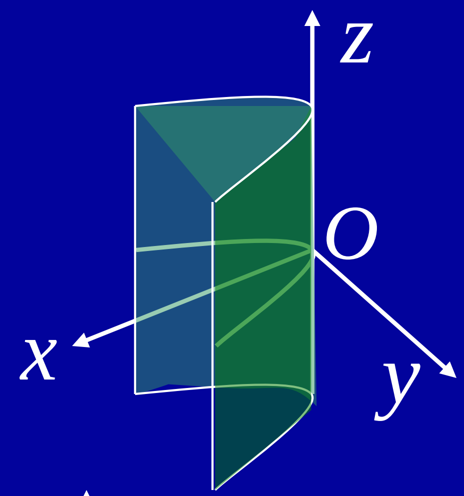
沿圆周C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面**. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$$x^2+y^2=R^2 \text{ 表示}\textbf{圆柱面}$$

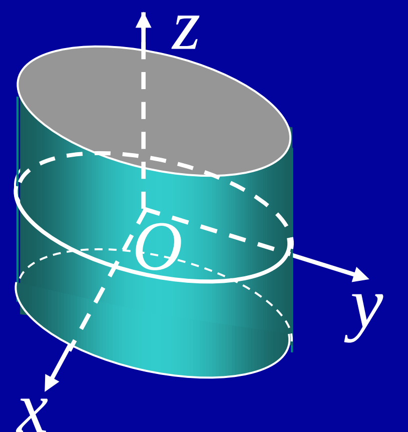
定义. 直线 l 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹叫做**柱面**.
定曲线 C 叫做柱面的**准线**, 动直线 l 叫做柱面的**母线**.



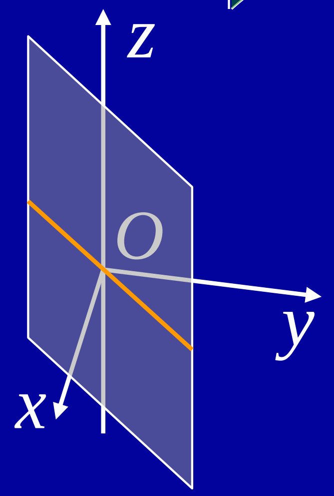
- $y^2 = 2x$ 表示**抛物柱面**,
  母线平行于 z 轴;
  准线为xOy 面上的抛物线.



- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$表示母线平行于 z 轴的**椭圆柱面**.



- $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的**平面**.
  (且 z 轴在平面上)



- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (双曲柱面)

- $x^2=ay$ (抛物柱面)

结论：一般地,在空间直角坐标系中，任何一个二元方程都表示一个柱面，并且母线一定平行于某一坐标轴.

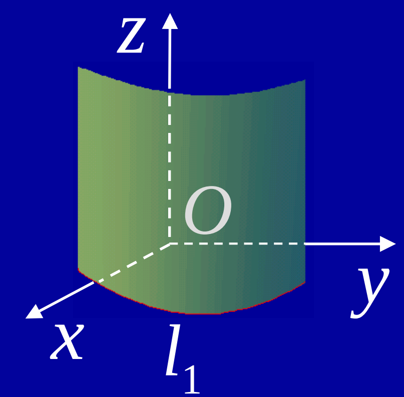
"缺谁，母线平行于谁"

一般地,在三维空间

- 方程 $F(x,y)=0$ 表示**柱面**,

  母线 平行于 z 轴;

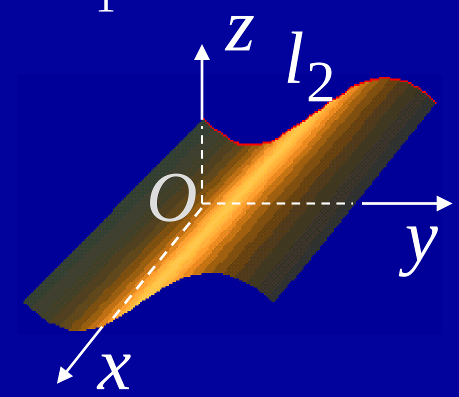
  准线 xOy 面上的曲线 $F(x,y)=0$.



- 方程 $G(y,z)=0$ 表示 **柱面**,

  母线 平行于 x 轴;

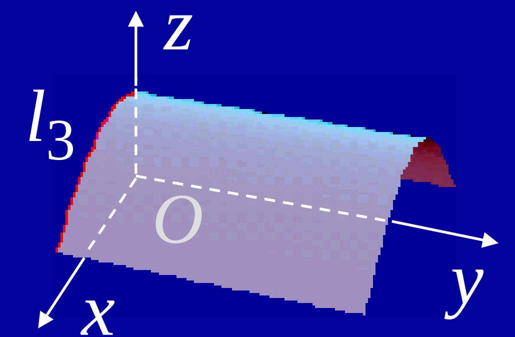
  准线 yOz 面上的曲线$G(y,z)=0$.



- 方程 $H(z,x)=0$ 表示**柱面**,

  母线 平行于 y 轴;

  准线 xOz 面上的曲线$H(z,x)=0$.



四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形统称为**二次曲面**. 其基本类型有:

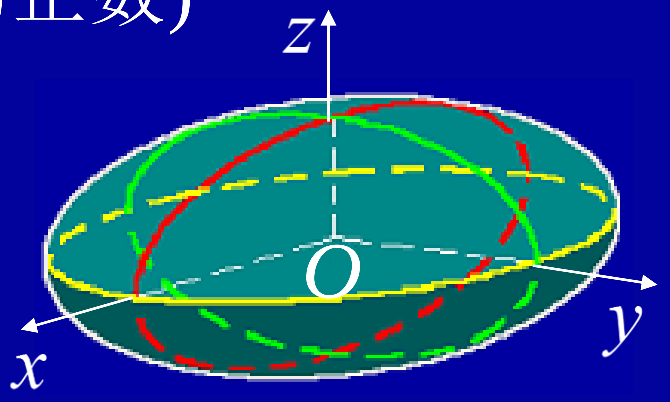
椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: **截痕法**

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



(1) 范围:

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

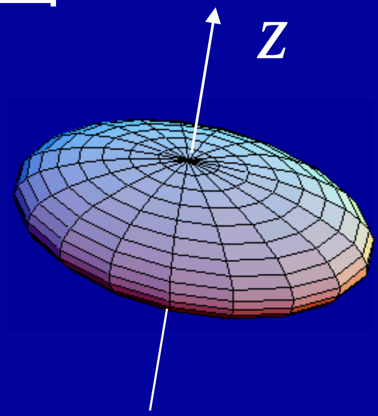
(2) 与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(3) 截痕: 与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$



同样 $y=y_1\,(|y_1|\le b)$ 及 $x=x_1\,(|x_1|\le a)$的截痕

也为椭圆.

(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面; 当$a=b=c$ 时为球面.

例： 判定 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$表示怎样的曲面?

分析： 可看成是xOz面内的曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转椭球面。

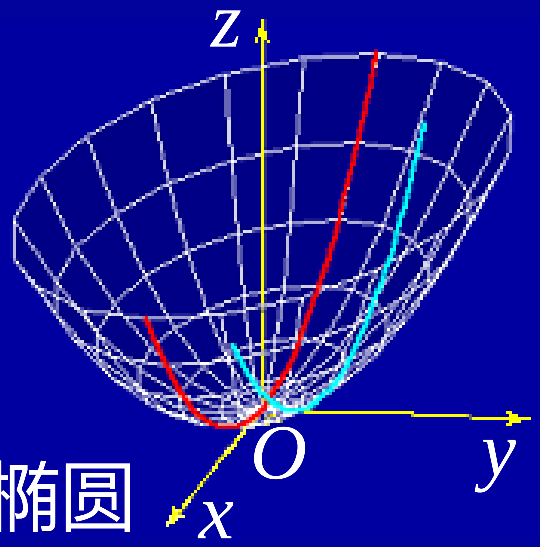
$$\frac{x^2}{4}+\frac{\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}{9}=1$$

即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{9}=1.$

也可看成是xOy面内的曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转椭球面。

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$



分析：显然 $z \geq 0$,图像在xoy面上方

用$z=z_0$截此曲面，得到 此平面上一个椭圆

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{z_0}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{z_0}\right)^2}=1$$

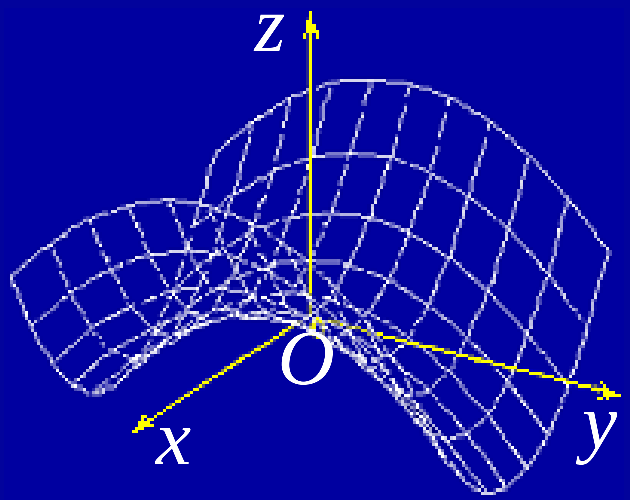
用 $x=x_0$截此曲面，得到抛物线 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$.

同理，用 $y= y_0$截得抛物线.

特别,当 $a = b$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

(2) 双曲抛物面（又称马鞍面）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

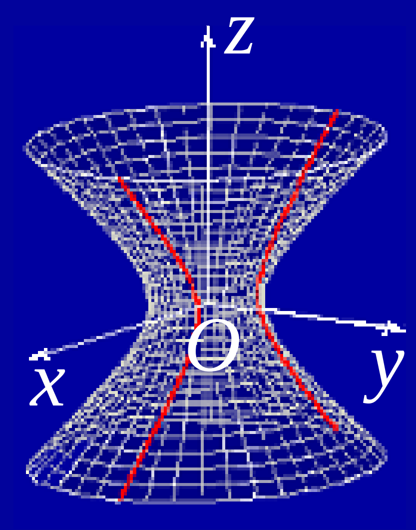


用截痕法讨论其形状.

3. 双曲面

(1)单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\ 为正数)$$



平面 $z=z_1$ 上的截痕为 椭圆.

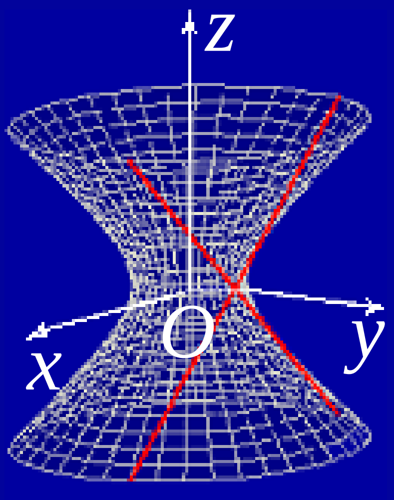
平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^{\,2}}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

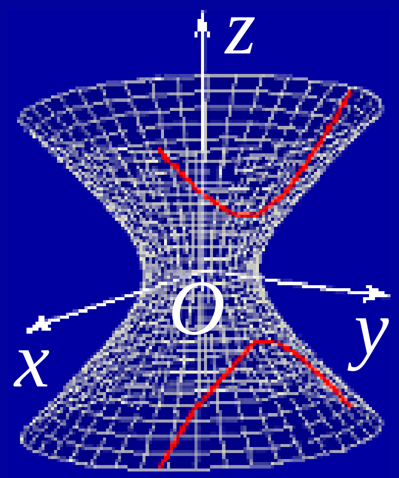
2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为两条相交直线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow z = \pm \dfrac{c}{a} x \\ y = b \,(\text{或} -b) \end{cases}$$

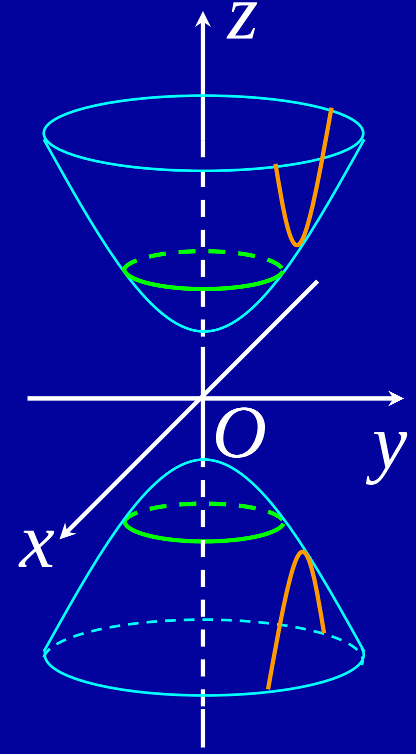


3) $|y_1| > b$ 时, 截痕为 双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{y_1{}^2}{b^2}} \quad < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$



(2) 双叶双曲面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$

平面 $y=y_1$ 上的截痕为**双曲线**

平面 $x=x_1$ 上的截痕为**双曲线**

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为**椭圆**

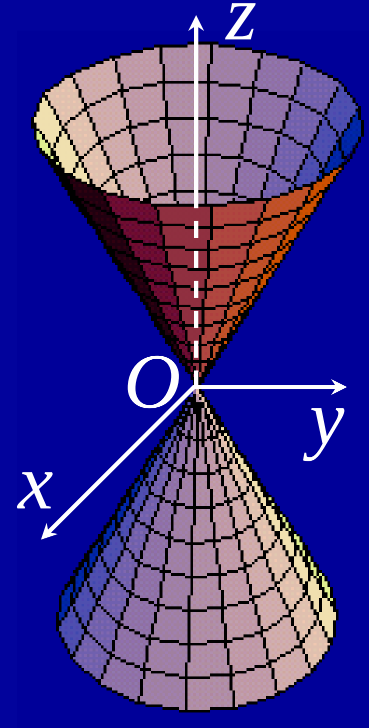
注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1 & \text{单叶双曲面}\\ -1 & \text{双叶双曲面}\end{cases}$$

图形

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ \ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到, 见 P42)

内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z)=0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: 椭圆抛物面 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

- 双曲面: 单叶双曲面 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

思考与练习

1. 指出下列方程的图形:

方　程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yOz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

例题：xOz面上双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$分别绕$x$轴，$z$轴旋转一周所生成的曲面方程.

解：绕x轴，将z换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$，于是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$ (旋转双叶双曲面)

绕z轴，将x换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，于是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$ (旋转单叶双曲面)

P45： 题10 答案:

在 xOy 面上

(1) 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周;

(2) 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周;

(3) 双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周;

(4) 在 yOz 面上,直线 $z=y+a$ 绕 z 轴旋转一周.

或 xOz 面上,直线 $z-a=x$ 绕 z 轴旋转一周 .

作业

P44　2，4，7，10