

第四节

对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的算法



一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例： 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x, y, z)$, 求质量 M .

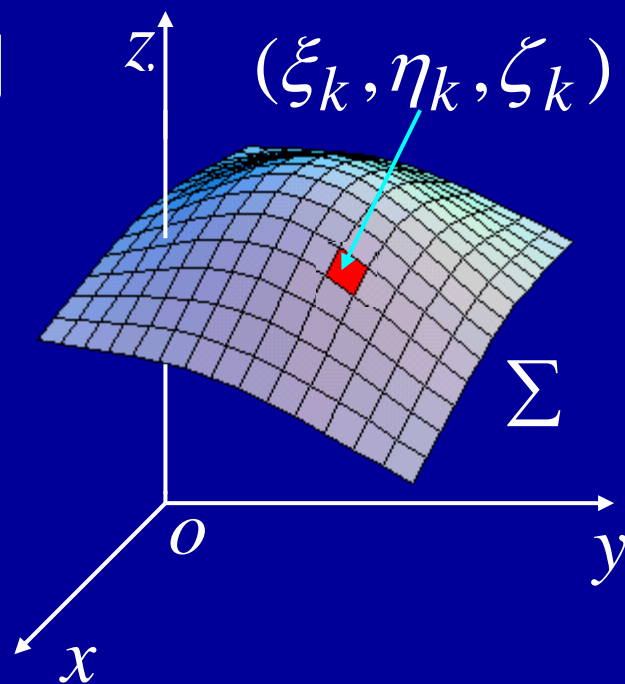
类似求平面薄板质量的思想, 采用
“分割, 匀代变, 近似和, 求极限”
的方法, 可得

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k$$

其中 ΔS_k 表示小块曲面面积.

λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值

(曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).



定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, “乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k \stackrel{\text{记作}}{=} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面. dS 为曲面面积元素.

由定义, 曲面形构件的质量为 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$

曲面面积为 $S = \iint_{\Sigma} dS$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若 $f(x, y, z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2 , 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} [k_1 f(x, y, z) \pm k_2 g(x, y, z)] dS \\ = k_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS \end{aligned}$$

二、对面积的曲面积分的计算法

定理: 设有**单值光滑**曲面

$$\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

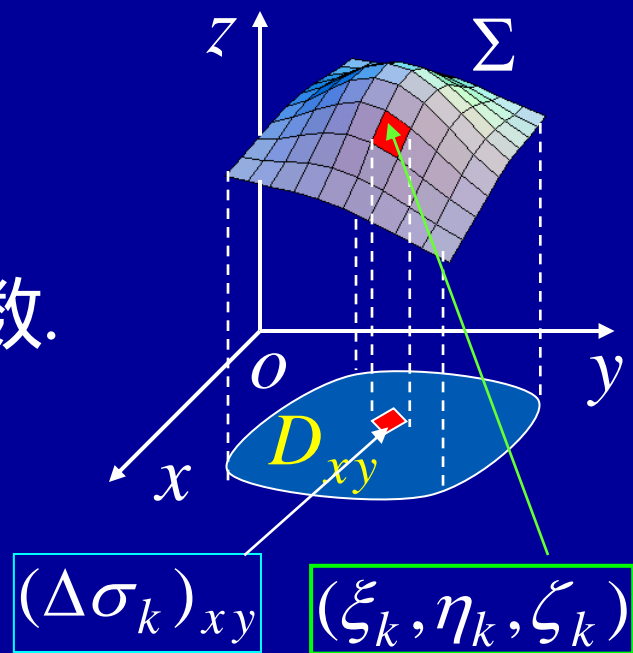
$z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数.

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续,

则 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$$

证明: $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k$



$$\text{而 } \Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{1 + z_x^2(\xi'_k, \eta'_k) + z_y^2(\xi'_k, \eta'_k)} (\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, dS$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \underline{z(\xi_k, \eta_k)}) \cdot$$

$$\sqrt{1 + z_x^2(\underline{\xi'_k}, \underline{\eta'_k}) + z_y^2(\underline{\xi'_k}, \underline{\eta'_k})} (\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi'_k, \eta'_k, z(\xi'_k, \eta'_k)) \cdot$$

(Σ 光滑)

$$\sqrt{1 + z_x^2(\xi'_k, \eta'_k) + z_y^2(\xi'_k, \eta'_k)} (\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} \, dx \, dy$$

说明:

1) 将对面积的曲面积分化成其投影域上的二重积分.

2) 如果曲面方程为 $x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$

或 $y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$

可有类似的公式.

具体选择往哪个坐标面上投影的计算公式?

尽量选择曲面方程式简单, 投影区域简单. 先由曲面形状及方程确定往哪个面投, 再转化成其投影域上二重积分.

3) 被积函数 $f(x, y, z) = 1$ 的第一型曲面积分, 就是
曲面 S 的面积:

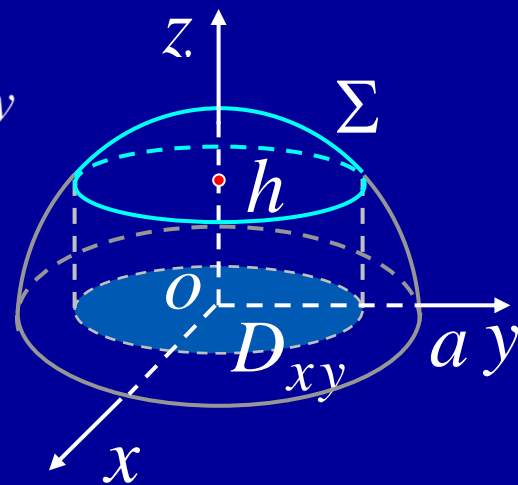
$$\iint_S dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 截出的顶部.

解: $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$



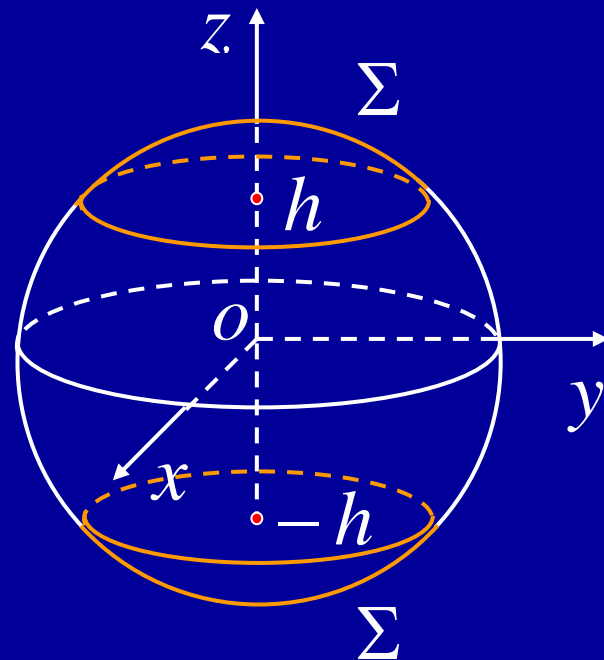
$$\begin{aligned} \therefore \iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} &= \iint_{D_{xy}} \frac{a \, dx \, dy}{a^2 - x^2 - y^2} = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{r \, dr}{a^2 - r^2} \\ &= 2\pi a \left[-\frac{1}{2} \ln(a^2 - r^2) \right]_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} = 2\pi a \ln \frac{a}{h} \end{aligned}$$

思考:

若 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平行平面 $z = \pm h$ 截出的上下两部分, 则

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} = (\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{|z|} = (\quad 4\pi a \ln \frac{a}{h} \quad)$$



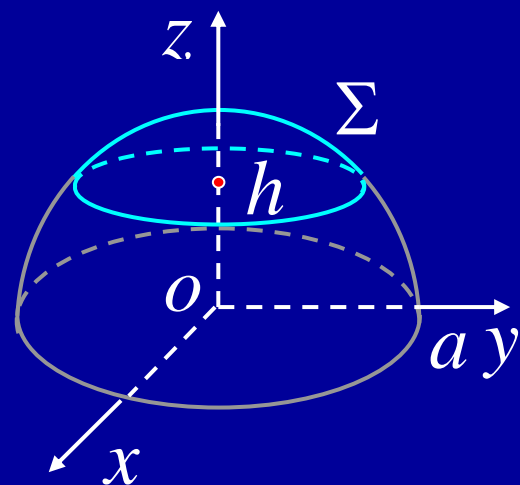
例2. 求 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, Σ 如例1.

解: Σ 关于 yOz 面对称, $\iint_{\Sigma} x dS = 0$.

同理, $\iint_{\Sigma} y dS = 0$.

$$\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D_{xy}$$

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$$



$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \iint_D dx dy = a\pi(a^2 - h^2) \end{aligned}$$

说明： 利用曲面的对称性和被积函数关于某个自变量的奇偶性可简化计算.

例：如曲面关于 xOy 面对称，

若 $f(x, y, z)$ 关于 z 奇函数, $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$

则
$$\iint_S f(x, y, z) dS = 0$$

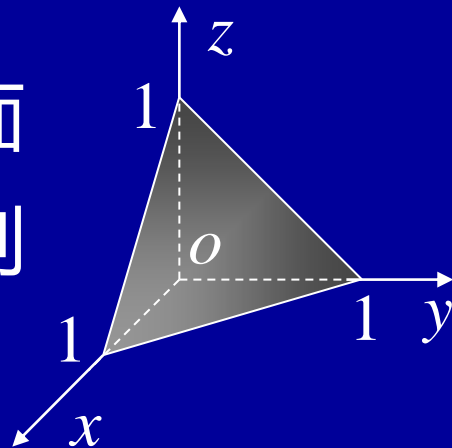
若 $f(x, y, z)$ 关于 z 偶函数, $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = 2 \iint_{S_0} f(x, y, z) dS$$

其中 S_0 是 S 位于 xOy 面上方的部分.

例3. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中 Σ 是由平面 $x + y + z = 1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.

解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示 Σ 在平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 上的部分, 则



$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} \right) xyz dS$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz dS$$

$$\left| \begin{array}{l} \Sigma_4 : z = 1 - x - y, \quad (x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) dy = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

例4. 计算 $\iint_S (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS$, 其中

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

分析: 若黎曼积分的积分区域 Ω 的表达式中, 将 x, y, z 轮换后表达式不变(即积分区域不变), 则称 Ω 对 x, y, z 对等(可轮换), 这时 Ω 上任何可积函数 $f(x, y, z)$ 的积分与 x, y, z 轮换后的函数 $f(y, z, x), f(z, x, y), f(y, x, z)$ 等结果一样(一样的结果, 一样的数值.).

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \iint_S (x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3x^2 + 2y^2 + z^2) dS$$

$$= \iint_S (4x^2 + 4y^2 + 4z^2) dS$$

$$= 2a^2 \iint_S dS$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4\pi a^2$$

$$= \pi a^4$$

例5. 设 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 求 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS$.

解: 对称性知: $\oiint_{\Sigma} x dS = 0$.

由变量的轮换对称性:

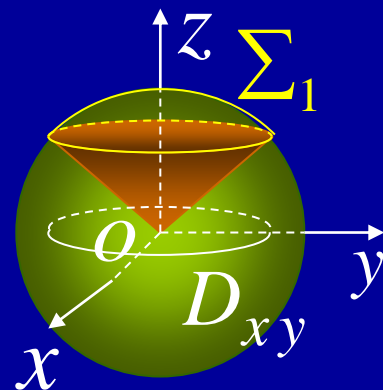
$$\oiint_{\Sigma} |y| dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} dS$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 8 \iint_{\Sigma_1} dS = \frac{8}{3} \iint_{D_1} \sqrt{3} dx dy$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

例6. 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{当 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & \text{当 } z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$



计算 $I = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$.

解: 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的交线为 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2, z = \frac{1}{2}a$.

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分, 它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy} = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}a^2 \}$, 则

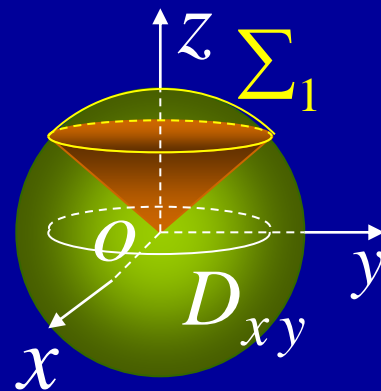
$$I = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS$$

$$I = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) \, dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} \frac{a r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr$$

$$= \frac{1}{6} \pi a^4 (8 - 5\sqrt{2})$$



例7. 求 $\iint_S \frac{dS}{r^2}$ 其中 S 是介于平面 $z = 0, z = H (H > 0)$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 的侧面, r 为 S 上点到原点的距离.

解: S 垂直于 xOy 面, 故不能将 S 投影到 xOy 面上,
可投到 yOz 面上.

$$D_{yz}: -R \leq y \leq R, \quad 0 \leq z \leq H.$$

S 分成两片: $S_1: x = \sqrt{R^2 - y^2}, \quad S_2: x = -\sqrt{R^2 - y^2}$

$$\text{均有 } dS = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy dz$$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{S_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} + \iint_{S_2} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} \\
 &= \iint_{D_{yz}} \left(\frac{1}{R^2 + z^2} + \frac{1}{R^2 + z^2} \right) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy dz \\
 &= 2R \int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_0^H \frac{dz}{R^2 + z^2} \\
 &= 2\pi \arctan \frac{H}{R}
 \end{aligned}$$

例8. 求半径为 R 的均匀半球壳 Σ 的重心.

解: 设 Σ 的方程为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D_{xy}$
利用对称性可知重心的坐标 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 而

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z \, dS}{\iint_{\Sigma} dS}$$

用球坐标

$$z = R \cos \varphi$$

$$dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi} = \frac{\pi R^3}{2\pi R} = \frac{R}{2}$$

例9. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{\lambda - z}$ ($\lambda > R$), $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解: 取球面坐标系, 则 $\Sigma: z = R \cos \phi$,

$$dS = R^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin \phi}{\lambda - R \cos \phi} d\phi$$

$$= 2\pi R \int_0^{\pi} \frac{d(\lambda - R \cos \phi)}{\lambda - R \cos \phi}$$

$$= 2\pi R \ln \frac{\lambda + R}{\lambda - R}$$

例10. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y + z)$.

解: 显然球心为 $(1,1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$

$$\therefore I = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{4}{3} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$$

$$\left| \begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dS &= \iint_{\Sigma} y dS = \iint_{\Sigma} z dS \end{aligned} \right.$$

$$= 4 \iint_{\Sigma} x dS = 4 \cdot \bar{x} \cdot \iint_{\Sigma} dS$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot 4\pi (\sqrt{3})^2 = 48\pi$$

利用重心公式

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x dS}{\iint_{\Sigma} dS}$$

例11. 计算 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是介于平面 $z = 0, z = H$ 之间的圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$.

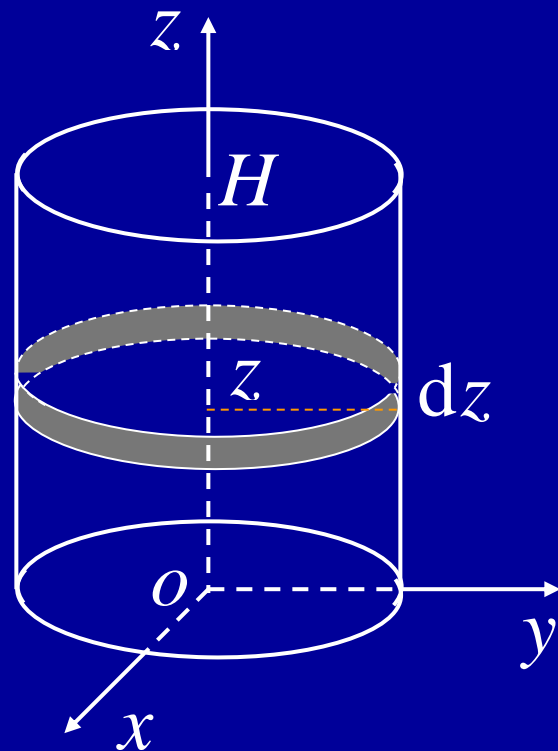
分析: 若将曲面分为前后(或左右)两片, 则计算较繁.

解: 取曲面面积元素

$$dS = 2\pi R dz$$

则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^H \frac{2\pi R dz}{R^2 + z^2} \\ &= 2\pi \arctan \frac{H}{R} \end{aligned}$$



例12. 求椭圆柱面 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 位于 xoy 面上方及平面 $z = y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S .

解: $S = \iint_{\Sigma} dS$

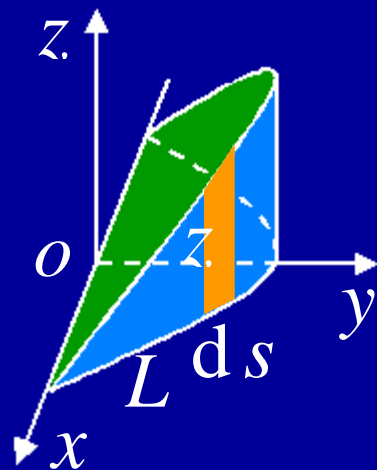
$L: x = \sqrt{5} \cos t, y = 3 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$

取 $dS = z ds$

$$= \int_L z ds = \int_L y ds$$

$$= \int_0^{\pi} 3 \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt$$

$$= -3 \int_0^{\pi} \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} d \cos t = 9 + \frac{15}{4} \ln 5$$



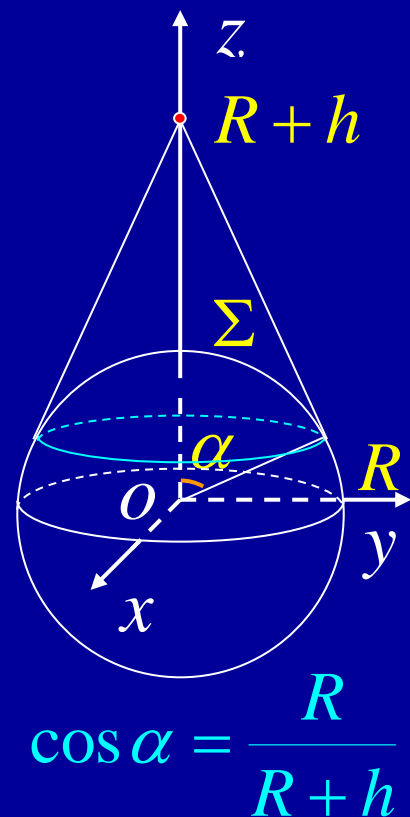
例13. 设有一颗地球同步轨道通讯卫星, 距地面高度 $h = 36000$ km, 运行的角速度与地球自转角速度相同, 试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比.
(地球半径 $R = 6400$ km)

解: 建立坐标系如图, 覆盖曲面 Σ 的半顶角为 α , 利用球坐标系, 则

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

卫星覆盖面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Sigma} dS = R^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \\ &= 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi R^2 \frac{h}{R + h} \end{aligned}$$

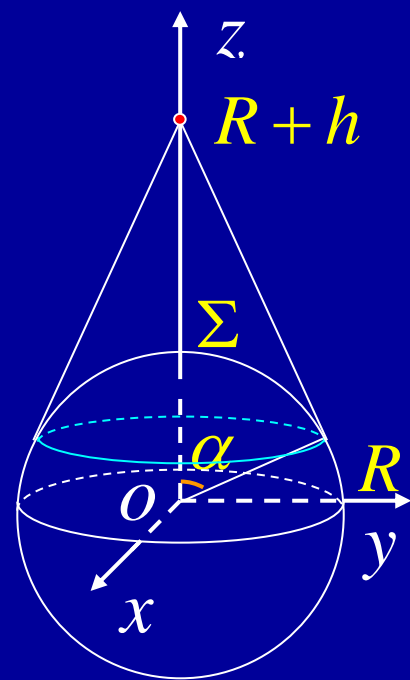


故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\begin{aligned}\frac{A}{4\pi R^2} &= \frac{h}{2(R+h)} \\ &= \frac{36 \cdot 10^6}{2(36 + 6.4) \cdot 10^6} \approx 40.5\%\end{aligned}$$

由以上结果可知, 卫星覆盖了地球 $\frac{1}{3}$ 以上的面积, 故使用三颗相隔 $\frac{2\pi}{3}$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A



作业

P222 4: (1), 5: (2), 6: (1)(3), 7

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$

2. 计算: 设 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S \\ = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \end{aligned}$$

(曲面的其他两种情况类似)

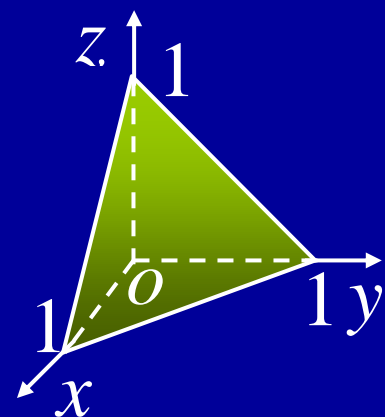
- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

备用题 1. 已知曲面壳 $z = 3 - (x^2 + y^2)$ 的面密度 $\mu = x^2 + y^2 + z$, 求此曲面壳在平面 $z = 1$ 以上部分 Σ 的质量 M .

解: Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2$, 故

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Sigma} \mu \, dS = \iint_{D_{xy}} 3\sqrt{1+4(x^2+y^2)} \, dx dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1+4r^2} \, dr \\ &= 6\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} \, d(1+4r^2) = 13\pi \end{aligned}$$

2. 设 Σ 是四面体 $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的表面, 计算 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$.



解: 在四面体的四个面上

平面方程	dS	投影域
$z = 1 - x - y$	$\sqrt{3} dx dy$	$D_{xy} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$
$z = 0$	$dx dy$	同上
$y = 0$	$dz dx$	$D_{zx} : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - z$
$x = 0$	$dy dz$	$D_{yz} : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - z$

$$\begin{aligned}
\therefore I &= (\sqrt{3} + 1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy + \\
&\quad + \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\
&\quad + \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+y)^2} dy \\
&= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1) \ln 2
\end{aligned}$$