第五节

隐函数的求导方法

一、一个方程所确定的隐函数
及其导数

二、方程组所确定的隐函数组
及其导数

引入

上册： 一元给出不经显化直接由方程$F(x,y)=0$确定隐函数的导数的方法.

但并不是任何一个方程都能确定隐函数,

例如, 方程 $x^2+\sqrt{y}+C=0$

当 $C<0$ 时, 能确定隐函数;

当 $C>0$ 时, 不能确定隐函数;

问：什么条件下，方程能确定隐函数？

——隐函数存在条件

若方程能确定隐函数，但不一定能显化(或显化很复杂)

例：$\sin z - xyz + x - \frac{1}{2} sinxyz = 0$

在(0,0,0)的某一邻域内可以确定函数$z = f(x,y)$使方程成立，但$f(x,y)$无法用x,y的算式来表达，如何求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

目的：（1）二元或$\boldsymbol{n}$元方程确定隐函数的条件？

如何求隐函数的导数或偏导数？

(2) 由几个多元方程组成的方程组确定一组隐函数的条件？如何求所确定隐函数的导数或偏导？

一、一个方程情形

定理1. 设函数 $F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内满足

① 具有连续的偏导数;

② $F(x_0,y_0)=0$;

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的**某邻域内**可唯一确定一个单值函数 $y=f(x)$，满足条件 $F(x,f(x))\equiv 0,\ y_0=f(x_0)$，并且$y=f(x)$具有连续导数，其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}\qquad \text{(隐函数求导公式)}$$

证明略，推导求导公式：

设 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x,f(x))\equiv 0$$

$\downarrow$ 两边对 x 求导

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv 0$$

$\downarrow$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $F_y\neq 0$

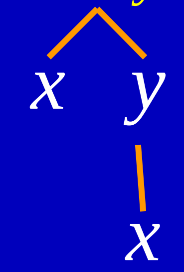
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

注： 定理公式中 $F(x,y)$ 在求 F_x' 时，把 y 看成常量，关于 x 求导；F_y' 是把 x 看成常量，关于 y 求导.

若$F(x,y)$的二阶偏导数也都连续, 则还有

二阶导数 :

$$-\frac{F_x}{F_y}$$



$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$= -\frac{F_{xx}F_y - F_{yx}F_x}{F_y^2} - \frac{F_{xy}F_y - F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$= -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

例1. 验证方程 $\sin y + e^x - xy - 1 = 0$ 在点(0,0)某邻域可确定一个单值可导隐函数 $y = f(x)$,并求

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

解: 令 $F(x,y) = \sin y + e^x - xy - 1$, 则

① $F_x = e^x - y,\ F_y = \cos y - x$ 连续,

② $F(0,0) = 0$,

③ $F_y(0,0) = 1 \neq 0$

由 定理1 可知, 在 $x = 0$ 的某邻域内方程存在单值可导的隐函数 $y = f(x)$, 且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{x=0} = -\left.\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right|_{x=0,\, y=0} = -1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

$$= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right)\right|_{x=0,\ y=0,\ y'=-1}$$

$$= -\left.\frac{(e^x - y')(\cos y - x) - (e^x - y)(-\sin y \cdot y' - 1)}{(\cos y - x)^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=0\\ y'=-1}}$$

$$= -3$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

导数的另一求法 — 利用隐函数求导 (y看成关于x的函数)

$$\sin y + e^x - xy - 1 = 0, \quad y = y(x)$$

两边对 x 求导

$$\cos y \cdot y' + e^x - y - xy' = 0$$

$$y'\Big|_{x=0} = -\frac{e^x - y}{\cos y - x}\Bigg|_{(0,0)} = -1$$

两边再对 x 求导

$$-\sin y \cdot (y')^2 + \cos y \cdot y'' + e^x - y' - y' - x y'' = 0$$

令 $x = 0$, 注意此时 $y = 0$, $y' = -1$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Bigg|_{x=0} = -3$$

定理1推广到三元方程确定二元隐函数条件:

定理2. 若函数$F(x,y,z)$满足:

① 在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内具有**连续偏导数**,

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数$z=f(x,y)$,满足$F\big(x,y,f(x,y)\big)=0$, $z_0=f(x_0,y_0)$,并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

推导求导公式:

设 $z = f(x, y)$ 是方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数，则

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$$

$\Big\downarrow$ 两边对 x 求偏导

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$$

$\Big\downarrow$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域内 $F_z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

例2. 设 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1 方程两边同时关于x求偏导，

注意：这里x, y独立，$z=z(x,y)$.

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

再对 x 求导

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

方程两边直接对某个自变量求偏导，特别适用于求二阶偏导，无需记公式

解法2 利用公式

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则 $F_x=2x,\quad F_z=2z-4$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-2}=\frac{x}{2-z}$$

两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例3. 设$F(x,y)$具有连续偏导数, 已知方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$, 求 $\mathrm{d}z$.

解法1 公式法: 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 确定的隐函数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$$

故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$

解法2： 复合函数求导法

对方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 两边关于x求导,

$$F_1'\left(\frac{z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}\right)+F_2'\left(\frac{-y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$$

对方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 两边关于y求导,

$$F_1'\frac{-x\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}+F_2'\frac{z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$$

解法3. 一阶全微分形式不变性

对方程两边求微分: $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$

$$F_1'\cdot \mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot \mathrm{d}(\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2})+F_2'\cdot(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2})=0$$

$$\frac{xF_1'+yF_2'}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{z}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

这种方法优点：

在对方程式(或方程组情形中每个方程)两边求全微分时，

无论方程式或方程组中各变量之间的关系如何复杂，

都无需考虑各变量之间的关系，由全微分形式不变性，

将所有变量都看成是独立变量(可暂时不考虑谁是自变量，

谁是因变量)，然后求解相应的线性 方程式或方程组，

得到相应隐函数的全微分.

二、方程组情形

隐函数存在定理还可以推广到方程组的情形.

例: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

在三个变量中，一般只能有一个变量独立变化,确定两个一元函数.

例: $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

在四个变量中，一般只能有两个变量独立变化,确定在一定条件下，可确定两个二元函数.

一般情况下，由n个方程，m个变量组成的方程组 $(m > n)$ 能确定 n个$m-n$元函数.

定理3.（隐函数组定理）

设函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数;

② $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

③ $J\Big|_P = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_P \neq 0$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内可**唯一**确定一组具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$, 它们满足条件: $u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0)$ 且有偏导数公式:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{x},v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{y},v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

说明: (1) 由 F、G 的偏导数组成的行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

称为函数F、G 关于变量u,v的**雅可比(Jacobi)**行列式.

(2) 定理中，公式法求时，首先整理方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

公式中 F_x, F_y, F_u, F_v 是对$F(x, y, u, v)$分别关于x, y u, v 求偏导．求偏导时，把它们看成独立变量，"对谁求偏导，其它看成常数"．类似，G_x, G_y, G_u, G_v.

推导偏导数公式:

设方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 有隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$,则

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \end{cases}$$

两边对 x 求导得 $\begin{cases} F_x+F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$

这是关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，在点P 的某邻域内

系数行列式 $J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\neq 0$，故得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例4. 设 $xu - yv = 0,\ yu + xv = 1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解: 方程组两边对 x 求导，并移项得

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

由题设 $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$

故有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix} = -\frac{xv - yu}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

练习: 求 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yu - xv}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

说明： 通过对各个方程关于指定的自变量求偏导. 但应注意：复合函数求导. 首先要搞清方程组确定什么样的函数关系，哪些是因变量，哪些是自变量.

本例确定$u=u(x,y),v=v(x,y)$, 当对两个方程两边关于x,y求导时，注意到x,y相互独立，而u,v是关于x,y的函数.

例5. 设$z = xf(x+y), F(x,y,z)=0,$

其中 f 与F分别具有一阶导数或偏导数, 求$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

解法1: (方程组确定了两个一元函数 $y=y(x), z=z(x)$)

对两个方程两边同时关于x求导数, 得

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f(x+y) + xf' \cdot \left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) \\ F_x' + F_y' \dfrac{dy}{dx} + F_z' \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} xf' \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dz}{dx} = -f - xf' \\ F_y' \dfrac{dy}{dx} + F_z' \dfrac{dz}{dx} = -F_x' \end{cases}$$

解得: $$\frac{dy}{dx}=\frac{-F'_x-F'_z(f+xf')}{xf'F'_z+F'_y}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-xf'F'_x+(f+xf')F'_y}{xf'F'_z+F'_y}$$

解法2: 对 $z=xf(x+y)$ 两边微分，得

$$dz=xdf(x+y)+f(x+y)dx$$

$$=xf'\,d(x+y)+f\,dx$$

$$=(xf'+f)\,dx+xf'\,dy \qquad (*)$$

对$F(x,y,z)=0$两边微分，得

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0 \qquad (**)$$

将(*)式代入，得:

$$[F'_x + F'_z(xf' + f)]\,dx + \left(F'_y + xf'F'_z\right)dy = 0$$

从而 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-F'_x - F'_z(f + xf')}{xf'F'_z + F'_y}$ 由 (**) 得

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{F'_z}\left(F'_x + F'_y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-xf'F'_x + (f + xf')F'_y}{xf'F'_z + F'_y}$$

注：用一阶全微分形式不变性，不需要考虑各变量间的关系，将所有变量看成是独立变量.

例5. 设函数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在点(u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

(1) 证明函数组 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 在与点 (u, v) 对应的点 (x, y) 的某一邻域内唯一确定一组单值、连续且具有连续偏导数的反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

(2) 求反函数$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$对 x, y 的偏导数.

解: (1) 令 $F(x, y, u, v) \equiv x - x(u, v) = 0$

$$G(x, y, u, v) \equiv y - y(u, v) = 0$$

则由已知有 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,$

由定理 3可知结论 (1)成立.

(2) 求反函数的偏导数.

$$\begin{cases} x\equiv x(u(x,y),v(x,y)) \\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y)) \end{cases} \qquad ①$$

①式两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad ②$$

注意 $J \neq 0$, 从方程组②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理, ①式两边对 y 求导, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

例5的应用: 计算极坐标变换 $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$ 的反变换的导数.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r}$$

由于 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

所以 $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r} r\cos\theta = \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{r}\sin\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

同理有 $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 和 $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

内容小结

1. 隐函数(组) 存在定理

2. 隐函数 (组) 求导方法

方法1. 利用复合函数求导法则直接计算 ;

方法2. 利用微分形式不变性 ;

方法3. 代公式

思考与练习

设 $z = f(x + y + z, xyz)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial y}$.

提示: $z = f(x+y+z, xyz)$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x}) + f_2' \cdot (yz + xy\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_1' + yz f_2'}{1 - f_1' - xy f_2'}$$

- $$1 = f_1' \cdot (\frac{\partial x}{\partial z} + 1) + f_2' \cdot (yz\frac{\partial x}{\partial z} + xy)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1 - f_1' - xy f_2'}{f_1' + yz f_2'}$$

- $$0 = f_1' \cdot (\frac{\partial x}{\partial y} + 1) + f_2' \cdot (yz\frac{\partial x}{\partial y} + xz)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_1' + xz f_2'}{f_1' + yz f_2'}$$

解法2. 利用全微分形式不变性同时求出各偏导数.

$$z = f(x+y+z,\, xyz)$$

$$\mathrm{d}z = f_1' \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) + f_2' \cdot (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$$

解出 $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x = \frac{-(f_1' + xz f_2')\mathrm{d}y + (1 - f_1' - xy f_2')\mathrm{d}z}{f_1' + yz f_2'}$$

由 $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的系数即可得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}, \dfrac{\partial x}{\partial z}$.

作业

P91　4，5，7, 10: (1)(3)