

2017级《高等数学》第一章作业

第一部分

1. 解不等式 $|x^2 + 3x - 4| > x^2 + 3x - 4$

2. 解不等式 $||x + 1| - |x - 1|| < 1$

3. 证明: $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^2 \leq 2n$.

4. 证明: (伯努利(Bernoulli)不等式) $\forall x > -1$ 有 $(1 + x)^n > 1 + nx$.

5. 证明: $|a \cos x + b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

6. 求 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数

7. 设 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 求反函数

8. 举出如下映射的例子:

1) 单射而非满射;

2) 满射而非单射;

3) 既单又满的映射.

9. 建立映射使集合 $(0, 1)$ 与集合 $(a, b), (-\infty, +\infty)$ 的一一对应.

10. 设 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 求 $f(x)$

11. 设 $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$, 证明: $f(t) = f(\frac{1}{t})$

12. 设 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$, 且 $f(x) = a + bc^x$, 求 a, b, c 的值.

13. 将函数 $y = x, x \in [0, 1]$ 延拓成周期函数.

14. 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数, 已知 $f(1) = a$,

对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$, 试求 (1) $f(5)$,

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T = 2$ 为周期, 则 a 为何值?

第二部分

1. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X x = x$; 对每一个 $y \in Y$ 有 $I_Y y = y$, 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$

2. 已知函数 $y = f(u)$ 的定义域是区间 $[0, 1]$, 求函数 $f(x+a) + f(x-a)$, $a > 0$ 的定义域.

3. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$, 求函数 $f(f(x))$ 的定义域.

4. 设函数 $y = f(x)$ 定义在实数轴上, 其图形关于直线 $x = a$, $x =$

$b, (a < b)$ 对称, 证明 $y = f(x)$ 是周期函数.

5. 证明: 如果 $f: E \rightarrow F$, 且 $A \subset F, B \subset F$, 则下列不等式成立:

$$1) f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$

$$2) f^{-1}(A \cap B^C) = f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^C;$$

$$3) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

6. 求联系华氏温度 (用 F 表示) 和摄氏温度 (用 C 表示) 的转换公式, 并求

(1) $90^\circ F$ 的等价摄氏温度和 $-5^\circ C$ 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值, 使得华氏温度计和摄氏温度计的度数是一样的? 如果存在, 那么该温度值是多少?

其中华氏温度规定为: 一定浓度的盐水的凝点为 $0^\circ F$, 标准大气压下纯净水的冰点为 $32^\circ F$, 标准大气压下纯净水的沸点为 $212^\circ F$, 等分冰点到沸点为 $1^\circ F$,

摄氏度的规定为: 标准大气压下纯净水的沸点为 $100^\circ C$, 冰点为 $0^\circ C$.

7. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\ell, \ell)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, \ell)$ 内单调增加,
证明: $f(x)$ 在 $(-\ell, 0)$ 内也单调增加.

8. 证明: 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别以 T_1, T_2 为周期, 且 $T_1/T_2 = a \in \mathbb{Q}$, 则 $f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x)$ 是周期函数.

9. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 求 $f(f[f[f(x)]])$, $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) (x \neq 0, 1)$

10. 利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测2010年的世界人口.

年份	人口数(百万)	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4936	
1987	5023	1.0176
1988	5111	1.0175
1989	5201	1.0176
1990	5329	1.0246
1991	5422	1.0175