第七节 方向导数与梯度

一、方向导数

二、梯度

三、物理意义

引入：

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率，许多实际问题中需研究函数在某点处沿某个特定方向上的变化率.例如要预报某地的风力和风向，就要研究气压在该地沿不同方向变化的快慢. 在热传导问题中，需研究在某点温度沿不同方向升高或降低的速度. 在电学中，需知道电场中某点的电位沿什么方向变化最快，求出最大变化率.

有些动物(如鲨鱼、猎犬等)是根据猎物身上的某种气味浓度变化最快的方向和最大变化率等追捕猎物.

上述例中的气压、温度、电压和气味浓度的变化率的问题都是多元函数的方向导数问题.

本节的方向导数就是研究函数沿任一指定方向的变化率问题的.

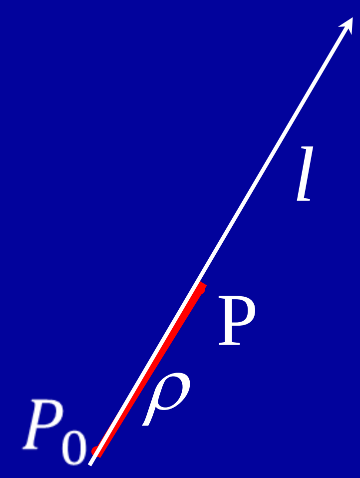
一、方向导数定义　(以三元函数为例)

定义：若函数 $f(x,y,z)$ 在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域

$U(P_0)\subset R^3$内有定义. l为从点P_0出发引出的射线，$\vec{l}$为其

方向向量，$P(x,y,z)$为l上且含于$U(P_0)$内的任一点, $P\neq P_0$

(以ρ表示P与P_0间的距离，$\rho=|PP_0|$)



当P沿着l 趋于P_0时，即$\rho\to 0$时, 比式极限

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}$$存在，称此极限为

函数$f(x,y,z)$在点P_0 沿方向$\vec{l}$的方向导数.

记作: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 或 $f_{\vec{l}}(P_0)$

即 $$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho} = \lim_{P\to P_0}\frac{f(\mathrm{P})-f(P_0)}{|PP_0|}$$

说明: (1) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$是函数$f(P)$在$P_0$处沿方向$\vec{l}$对距离$\rho$的变化率.

(2)方向导数是函数沿射线的变化率，而不是沿直线.

(3) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}>0$时，函数$f(P)$在$P_0$处沿$\vec{l}$方向是增加的.

(4) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}<0$时，函数$f(P)$在$P_0$处沿$\vec{l}$方向是减小的.

二、方向导数存在性及计算

定理: 若函数$u=f(x,y,z)$在点$P_0\ (x_0,y_0,z_0)$可微，则函数$f(x,y,z)$在P_0点沿任何方向$\vec{l}$ 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$为方向$\vec{l}$ 的方向余弦.

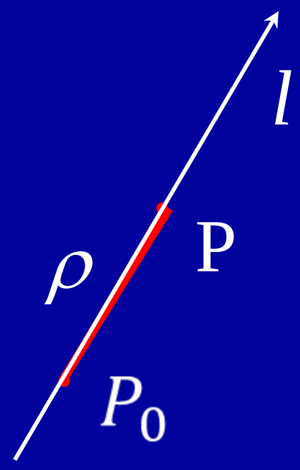
证明： 设$P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$为射线$l$上邻近$P_0$的任一动点,

则 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 是 $\vec{l}$ 的一个方向向量,

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是与 $\vec{l}$ 同方向的单位向量.

$$\rho = |P_0P| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

则 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\dfrac{\Delta x}{\rho}, \dfrac{\Delta y}{\rho}, \dfrac{\Delta z}{\rho}\right)$



$f(x, y, z)$ 在点 P_0 处可微，则

$$\Delta f = f(P) - f(P_0)$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \Delta z + o(\rho)$$

$$\frac{\Delta f}{\rho}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\frac{\Delta x}{\rho}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\frac{\Delta y}{\rho}+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\frac{\Delta z}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

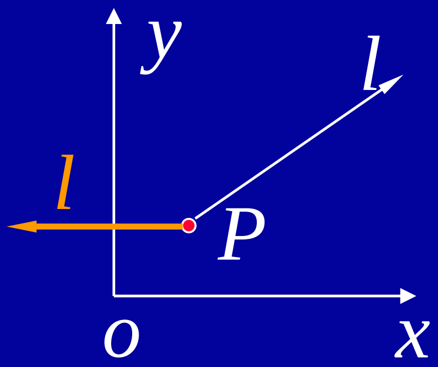
令 $\rho\to 0$ 时，取极限即得结论.

注： (1) 给出在某点处方向导数的计算方法.

(2) 二元函数 $z=f(x,y)$ 情形，在 $P_0\ (x_0,y_0)$ 沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

对于二元函数 $f(x,y)$, 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l (方向角为 α,β) 的方向导数为



$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta$$

$$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\Delta y=\rho\cos\beta)$$

特别:

- 当 l 与 x 轴同向 $(\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 l 与 x 轴反向 $(\alpha=\pi,\beta=\frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

例1. 求函数 $u = x^2 yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

解: 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

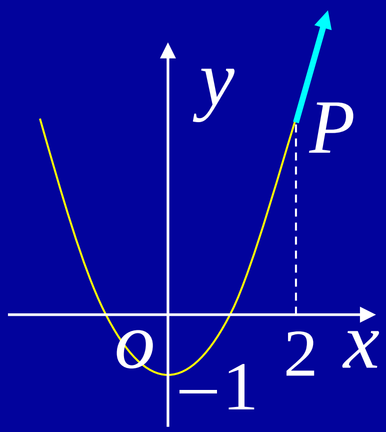
$$\therefore\ \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(2xyz\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} - x^2 z\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + x^2 y\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

例2. 求函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $P(2,3)$ 沿曲线 $y=x^2-1$ 的切线且朝 x 增大方向的方向导数.

解: 将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases} x=x \\ y=x^2-1 \end{cases}$$



它在点 P 的切向量为 $(1,\ 2x)\big|_{x=2}=(1,4)$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\qquad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=\left.\left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+(3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\right|_{(2,3)}=\frac{60}{\sqrt{17}}$$

例3. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量, 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解: $\vec{n}=(4x,6y,2z)\big|_P=2(2,3,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

同理得 $$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{1}{14}\left(6\times2+8\times3-14\times1\right)=\frac{11}{7}$$

例4. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$

解：函数z在点$(0,0)$处不可微，不能用公式求，

只能用方向导数的定义求.

设 (x,y) 为 $\vec{l}$ 上异于$(0,0)$的任一点，故$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(0.0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(P)-f(0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

说明: 此例表明，函数在一点不可微，但它在该点处沿任一方向的方向导数有可能存在.

例5. 设 $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

求z在$(0,0)$处沿$y = kx$方向的方向导数.

解：（$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微，用定义求）

直线 $y = kx$方向，分两个方向来求方向导数.

$\vec{l^{+}}$ 表示 $y = kx$沿x增加方向的方向向量

$\vec{l^{-}}$ 表示 $y = kx$沿x减少方向的方向向量

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{l^{+}}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\substack{x\to 0^{+} \\ y=kx}} \frac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{l^{-}}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\substack{x\to 0^{-} \\ y=kx}} \frac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-k^2}{\sqrt{1+k^2}}$$

对于直线垂直于x轴的情形，用定义可知方向导数为零.

说明: 此例表明，给出的函数在(0,0)点沿任何方向的方向导都存在，但在该点不连续. 因当$(x,y)\to(0,0)$沿$y=kx$时$f(x,y)$趋于0，沿$y=\sqrt{x}$时，趋于$\frac{1}{2}$

三、方向导数、偏导、可微、连续关系

1. 可微 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 该点处沿任何方向的方向导数都存在.

2. 方向导数存在 $\underset{\not\leftarrow}{\not\rightarrow}$ 连续

3. 以$z = f(x, y)$为例来说明与偏导关系:

偏导数是函数沿坐标轴方向的变化率，而方向导数是沿固定的射线方向函数的变化率.

(1) $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$存在 $\underset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在.

(2) $f_x(x_0,y_0)$存在 $\Rightarrow$ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处

沿x轴正向的方向导数存在且等于$f_x(x_0,y_0)$;

沿x轴负向的方向导数存在且等于 $-f_x(x_0,y_0)$;

(3) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿x轴正向和负向的

方向导数存在，并且互为相反数

$\Rightarrow$ $f_x(x_0,y_0)$存在，且等于在该点处沿x轴正向

方向的方向导数.

(4) 上述(2)和(3) 对于关于y的偏导有类似结果.

四、梯度

方向导数描述了函数沿任一指定方向的变化率问题.

若函数$f(P)$在P_0处沿任何方向的方向导数都存在，一般在P_0处沿不同方向的方向导数(即函数的变化率)不同.

问：(1)所有这无穷多个方向导数中有无最大值？

(2) 如果有，沿哪个方向的方向导数？

(3) 这个最大值是多少？

——— 引进“梯度”

梯度是一个与方向导数密切相关的重要概念

1．梯度定义：

函数在一点的**梯度是一个向量**，其**方向**为该函数在此点的取方向导数最大值的方向，其**模**等于该点处方向导数的最大值. （梯度是与坐标系无关的概念）

2．梯度计算公式

引入直角坐标系，在函数可微条件下，给出公式.

分析：以三元函数为例.

若函数$u = f(x, y, z)$在点$P_0\ (x_0, y_0, z_0)$可微，则$f(x, y, z)$在P_0点沿任一方向$\vec{l}$ 的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma$$

记 $\vec{G}=\left(f_x'(x_0,y_0,z_0), f_y'(x_0,y_0,z_0), f_z'(x_0,y_0,z_0)\right)$

$$\vec{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \vec{G}\cdot\vec{e_l} = \left|\vec{G}\right| |\vec{e_l}| \cos\left(\widehat{\vec{G},\vec{e}_l}\right)$

$$= \left|\vec{G}\right| \cos\left(\widehat{\vec{G},\vec{e}_l}\right) = \left|\vec{G}\right| \cos\theta$$

当$\theta=0$时，即$\vec{G}$与$\vec{l}$同方向时，方向导数最大.

可见，对固定P_0，向量$\vec{G}$被确定，在P_0处沿$\vec{G}$方向导数最大，最大值为$\left|\vec{G}\right|$

(gradient),

$\vec{G}$ 就是**f在P_0处的梯度**，记作 $\mathrm{grad} f(P_0)$ 或 $\mathrm{grad}\, u\big|_{P_0}$

即 $\mathrm{grad} f(P_0)=\left(f_x'(x_0,y_0,z_0), f_y'(x_0,y_0,z_0), f_z'(x_0,y_0,z_0)\right)$

注: (1) f 在P_0的梯度方向是f的值增长最快的方向，沿这一方向的变化率(即方向导数) 就是梯度的模;

$$|\mathrm{grad}\, f(P_0)| = \sqrt{(f_x'(p_0))^2+\left(f_y'(p_0)\right)^2+(f_z'(P_0))^2}$$

(2) 沿与梯度方向相反的方向，方向导数取得最小值 $-|\mathrm{grad}\, f(P_0)|$, 沿此方向函数值减少最快.

(3) 沿与梯度方向垂直的方向，函数的变化率为零.

(4) 函数在一点P处沿方向$\vec{l}$的方向导数为函数在P处梯度在$\vec{l}$方向上的投影.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left|\vec{G}\right| \cos\left(\vec{G}, \vec{l}\right) = Prj_{\vec{l}}\vec{G}.$$

(5) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3. 梯度的基本运算公式

若函数$u = f(x, y, z)$可微，则函数u的梯度

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$　　(2) $\operatorname{grad}(C u) = C \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v)$

(6) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

引记号：$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\triangleq\nabla$ 称之为哈密顿算子，是一个向量微分算子，在$Oxyz$坐标系下，$\nabla=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

于是 $\operatorname{grad} u=\nabla u.$

例6. 求$f(x,y)=arctan\frac{x}{y}$在$(0,1)$处的梯度.

解：
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\frac{d}{dx}f(x,1)\Big|_{x=0}=\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=1}=0$$

$$\operatorname{grad} f(0,1)=(1,0)=\vec{i}$$

例7. 设 $f(r)$ 可导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处向径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{r}^{\,0}$.

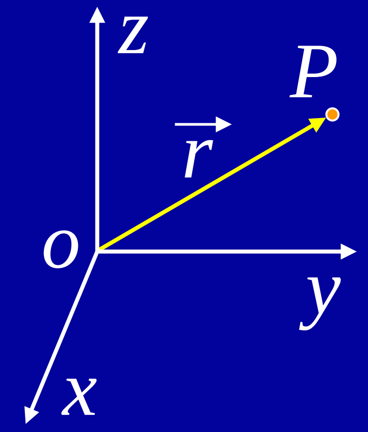
证: $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}\,,\qquad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore\ \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{r}^{\,0}$$



课本P109：例4 和例 5.

练习

1. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

(1) 求函数在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在该点切线方向的方向导数;

(2) 求函数在 $M(1,1,1)$ 处的**梯度**与(1)中**切线方向**的夹角 θ.

解答提示:

1. (1) $f(x,y,z)=x^2+y^z$,曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在点

$M\,(1,1,1)$ 处切线的方向向量

$$\vec{l}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=1}=(1,4,3)$$

函数沿 $\vec{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_M=\left[f_x\cdot\cos\alpha+f_y\cdot\cos\beta+f_z\cdot\cos\gamma\right]\Big|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{26}}$$

$$(2)\quad \operatorname{grad} f\big|_M = (2, 1, 0)$$

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{grad} f\big|_M \cdot \vec{l}}{\left|\operatorname{grad} f\big|_M\right| \left|\vec{l}\right|} = \frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_M}{\left|\operatorname{grad} f\big|_M\right|} = \frac{6}{\sqrt{130}}$$

$$\therefore\quad \theta = \arccos\frac{6}{\sqrt{130}}$$

2. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M = \underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$ **(92考研)**

解: $\operatorname{grad} u\big|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 x , y , z 具有轮换对称性

$=\left(\frac{2x}{r^2},\frac{2y}{r^2},\frac{2z}{r^2}\right)\Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}(1,2,-2)$

3. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 ______ . **(96考研)**

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}\,y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

作 业

P111　5，6，7，8，10