第十二章

无穷级数

无穷级数 $\begin{cases} \text{数项级数} \\ \text{幂级数} \\ \text{傅里叶级数} \end{cases}$

无穷级数是研究函数的工具 $\begin{cases} \text{表示函数} \\ \text{研究性质} \\ \text{数值计算} \end{cases}$

引入：

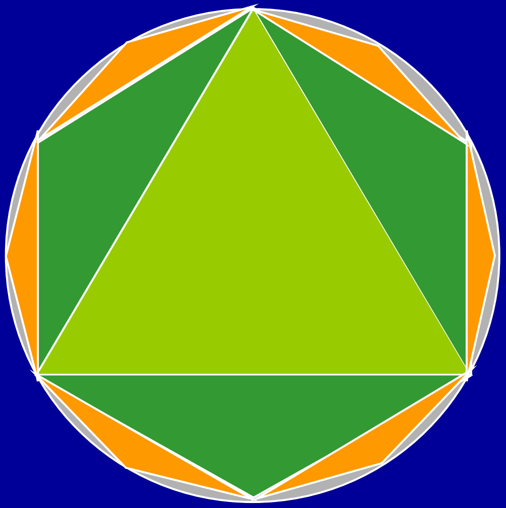
问题：有限个实数相加，结果是一个数，而“无限个实数相加”是什么样的结果？

认识事物在数量方面的特性，往往有一个由近似到精确的过程，在这个过程中，会遇到由有限个数量相加到无穷多个数量相加的问题.

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$ 边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$



$n\to\infty$ 时, 这个和逼近于圆的面积 A .

即 $$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

—— "无限个数相加的例子"

例如: 表达式： $1+(-1)+1+(-1)+\dots$

若写作：$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0$

若写作: $1+((-1)+1)+((-1)+1)+\dots=1$

两个结果完全不同

问题：无限个数相加是否存在“和”，怎样来判别？若存在“和”，等于多少？

无限个数相加不能简单用有限个数相加的概念，需建立本身严格的理论 —— “无穷级数”：微积分的一个重要部分，是表示函数，研究函数性质,数值计算的一种工具. 许多非初等函数，可展开成无穷级数并进行逐项微分或积分, 在积分运算和微分方程求解中有重要应用.

第一节 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

*四、柯西审敛原理

一、常数项级数的概念

定义1：给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次用加号连接起来的表达式，简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数，简称为级数. 由于各项都是常数，也称为常数项级数，或数项级数. 其中第 n 项 u_n 叫做级数的 一般项或通项.

说明：形式定义，如何理解无穷个数相加？引例1，从有限项和数列出发，观察它们的变化趋势.

定义2: 级数的前 n 项和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

称为该级数的第 n 个部分和，简称部分和.

称 $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n, \cdots$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列.

说明：根据这个数列有无极限，来定义无穷级数的级数的收敛与发散的概念.

定义3: 若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ 存在, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，

并称 S 为级数的**和**，记作 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**.

当级数收敛时, 称差值 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

为级数的**余项**. 显然 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$

说明: 从定义3可知，级数的敛散性是由它的部分和

数列$\{S_n\}$来确定的，级数与数列极限有着密切联系.

给定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,得到部分和数列$\{S_n\}$.

任意给定一个数列$\{S_n\}$，就有以$\{S_n\}$为部分和数列的

级数： $S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots (S_n - S_{n-1}) + \cdots$

$= S_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(S_n - S_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

这时，数列$\{S_n\}$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$具有相同敛散性.

例1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$$

级数收敛于2

例2. 讨论**等比级数**(又称**几何级数**)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 的敛散性 （r叫做级数的公比）.

解: 当公比$r \neq 1$时，部分和

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

1) 当$|r| < 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$收敛，和为$\frac{1}{1-r}$.

2) 当$|r| > 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ 故$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$,级数发散

3) 当$r = 1$,则 $S_n = n$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，级数发散

4) 当$r = -1$,则 $S_n = \begin{cases} 0, & n\text{为偶数} \\ 1, & n\text{为奇数} \end{cases}$

$\{S_n\}$的极限不存在，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$发散.

结论：等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 的公比的绝对值

$|r| < 1$时， 级数收敛

$|r| \geq 1$ 时， 级数发散

例3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散. $\{S_n\}$的奇、偶子列极限不等.

例4. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+(\ln(n+1)-\cancel{\ln n})$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散 ;

技巧:

利用 “**拆项相消**” 求和

(2) $$S_n=\frac{1}{\underline{1\cdot 2}}+\frac{1}{\underline{2\cdot 3}}+\frac{1}{\underline{3\cdot 4}}+\cdots+\frac{1}{\underline{n\cdot(n+1)}}$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “**拆项相消**” 求和

例5. 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的敛散性.

解法一：利用 $x > \ln(1+x)$，$x > 0$.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，级数发散.

解法二：假设收敛于S,则对任意的部分和都收敛于S.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$. 但

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

因而级数是发散的.

例6. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

解:

$$\because\ \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$$

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=[\ln 3+\ln 1-2\ln 2]+[\ln 4+\ln 2-2\ln 3]+[\ln 5+$$

$$+\ln 3-2\ln 4]+\cdots+[\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n]$$

$$=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 2$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=-\ln 2$, 故原级数收敛 , 其和为 $-\ln 2$.

二、无穷级数的基本性质

性质1. 当 $c \neq 0$为任意常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 具有相同敛散性，且当收敛时,有 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

证: 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$部分和为 $\sigma_n = c S_n$.

$\{S_n\}, \{\sigma_n\}$具有相同的敛散性. 当收敛时，设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c S$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛 , 其和为 $c S$.

说明: 级数各项乘以同一个非零常数后其敛散性不变 .

性质2. 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=S_n \pm \sigma_n \to S \pm \sigma \quad (n \to \infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

说明： (1) 性质2 表明两个收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 .

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 1) 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$, 而 $u_n + v_n = 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n)$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-n)$ 仍发散

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2^n})$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2^n}-n)$ 收敛

性质3. 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性，但对于收敛级数，其和将会受到影响.

证明: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为 $\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$ 的敛散性.

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 . 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就可看成 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+k}$ 加上有限项, 具有相同敛散性.

性质4. 在一个收敛级数的项中任意加括后，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,对任意加括号所得到的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})$$
$$+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots+\cdots.$$
$$(*)$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为S_n，级数$(*)$相应于前k项的部分和为A_k，则 $A_1=u_1+\cdots+u_{n_1}=S_{n_1}$

$$A_2=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})=S_{n_2}$$

…… …… ……

$$A_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = S_{n_k}$$

…… …… ……

可见，数列$\{A_k\}$是数列$\{S_n\}$的一个子数列，由$\{S_n\}$的收敛性知：$\{A_k\}$必收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = S$. 所以，加括号所成的新级数收敛，且和不变.

注：1) 收敛级数满足加法结合律；

2) 对一个级数，若加括号后所成的级数收敛，则不能断定未加括号前也收敛. (即收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛.)

例： $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots+\cdots=0;$

但级数：$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$ 发散.

3) 推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

4) 从2）看到：发散级数若按不同方式加括号，所得级数可能收敛于不同的数. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散.

1+((-1)+1)+((-1)+1)+…..=1

(1-1)+(1-1)+(1-1)+….=0

因此，发散的级数不满足加法结合律.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例7. 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore \quad \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 , 从而原级数发散 .

三、级数收敛的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明: $u_n = S_n - S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

可见: **若级数的一般项不趋于0，则级数必发散.**

例如, $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} + \cdots$, 其一般项为

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当 $n \to \infty$ 时, u_n 不趋于0, 因此这个级数发散.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

事实上 , 假设调和级数收敛于 S , 则

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设是错误的 .

例8. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

(1) 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$.

解: (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 由 $a_{n+1} = \cos a_n$, 两端

取极限得: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos a_n$.

从而 0=cos 0, 即 0=1. 故发散.

(2) 因

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

进行拆项相消

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$, 这说明原级数收敛 , 其和为 $\frac{1}{4}$.

(3) $$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n - \frac{1}{2}S_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\underline{2^2}} + \frac{5}{\underline{2^3}} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{\underline{2^2}} + \frac{3}{\underline{2^3}} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{\underline{2^{n+1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \quad S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}, \text{故} \lim_{n\to\infty} S_n = 3,$$

这说明原级数收敛, 其和为 3 .

例 9. (1) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^{n}}{5^{n}}$的值.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$

解:

(1) 原式$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\cdot 4-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\cdot 3\right]=4\cdot\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-3\cdot\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=14$

(2) $S_{2n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{3^n}$$

$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{3}{2}$. 级数收敛, 其和为$\frac{3}{2}$.

例10. 判别级数的敛散性:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{3(n-2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right)$$

解: (1) $$u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. 所以级数收敛，其和为 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

(2) $$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} = \frac{n}{n} = 1$$

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$，故级数发散.

或：$$u_n \geq \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{2+n-1}{2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \cdots + \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

作业

P258　　　2，3