第十章解析几何

第一节空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

同研究直线或平面上点的轨迹一样，我们需要知道如何确定空间一点的位置，从而确定空间中动点的运行轨迹.同样通过分析空间中动点的运行轨迹，我们来分析几何图形的特征.为了确定点的位置我们需要引入空间直角坐标系,在一维直线上我们确定点的位置是用一个数轴

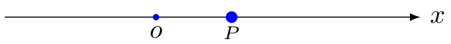

图10.1.1

直线上的一点P与实数x一一对应，所以习惯上也称点P为实直线上一点x，x也称为点P的坐标.

我们用两条互相垂直的数轴Ox, Oy 确定了二维平面，过平面上任意一点P分别向两个数轴作垂线，其垂足为x, y,反之过两个数轴上的点x, y分别作垂线，其交点为P,于是平面上的点P与一对实数(x, y)一一对应, 其中x叫横坐标，y叫纵坐标.

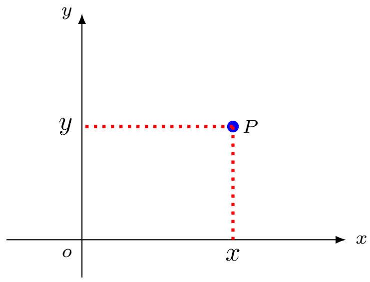

图10.1.2

对于空间一点P我们用三条互相垂直的数轴将空间分成八个部分，过P分别向三个数轴作垂面，三个垂面和数轴的交点为x, y, z,反之分别过数轴上的三个点x, y, z作数轴的垂面，则三个垂面的交点，恰是空间一点P, 于是空间一点P与三个有序的实数(x, y, z)一一对应，与一维直线和二维平面一样,我们称其为点P的坐标，其中x 叫横坐标，y叫纵坐标，z叫竖坐标.我们把这样的坐标系，称为空间直角坐标系，记作$oxyz$坐标系，显然前两种坐标系是空间直角坐标系的特殊情况.其中ox, oy, oz轴分别称为坐标系的横轴，纵轴和竖轴.由横轴和纵轴组成了xOy 坐标平面，由横轴和竖轴组成了xOz坐标平面，由纵轴和竖轴组成了yOz坐标平面.

习惯上我们称这样的坐标系为右手系，即顺序为伸出四指，指向横轴的正方向，弯曲四指$\frac{\pi}{2}$指向纵轴的正向，则拇指所指的方向为竖轴的正方向.

以上三个坐标平面自然将空间分成八个部分,称为空间的八个卦限，习惯上依照右手系顺序分xoy平面的上下，用罗马字母标示，即

第I卦限，第II卦限，第III卦限，第IV卦限，第V卦限，第VI卦限，第VII卦限，第$VIII$卦限,如

图10.1.3

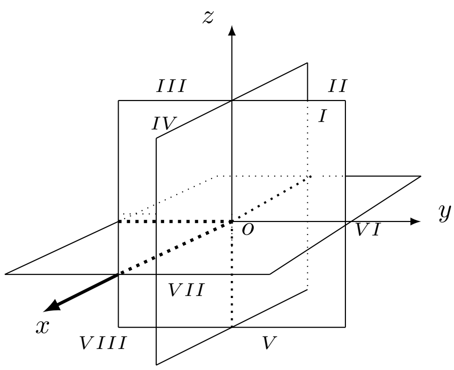

图10.1.3

注： 习惯上坐标面上的点我们不认为其属于哪一个卦限.

这八个卦限上的点的坐标有如下特点：

第I卦限：$x > 0, y > 0, z > 0$

第II卦限:$x < 0, y > 0, z > 0$

第III卦限:$x < 0, y < 0, z > 0$

第IV卦限:$x > 0, y < 0, z > 0$

第V卦限:$x > 0, y > 0, z < 0$

第VI卦限:$x < 0, y > 0, z < 0$

第VII卦限:$x < 0, y < 0, z < 0$

第$VIII$卦限:$x > 0, y < 0, z < 0$

坐标轴上点的坐标分别为$(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)$

坐标面上点的坐标分别为$(x, y, 0), (x, 0, z), (0, y, z)$

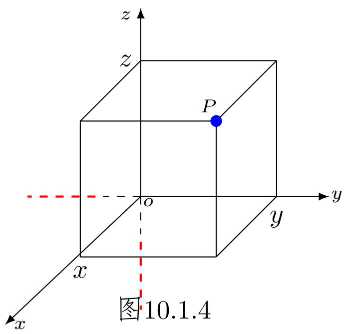

图10.1.4

二、空间两点的距离

我们知道直线两点P_1, P_2所对应的坐标为x_1, x_2,于是两点的距离为$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$

平面上两点$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$，则两点的距离依照勾股定理为$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

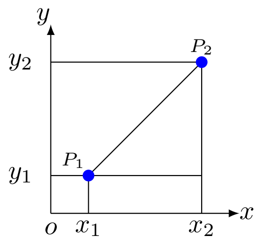

图10.1.5

空间两点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离依照立体几何的知识为

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

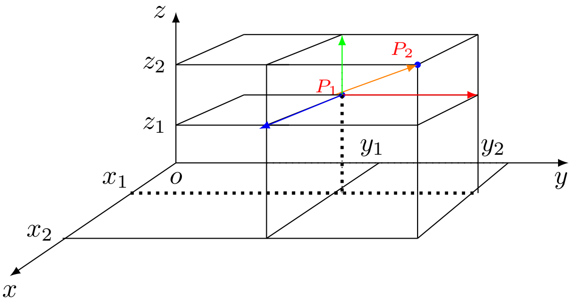

图10.1.6

注: 前两个坐标系下两点的距离恰是空间直角坐标系下两点距离的特殊情况.

习题10.1

1.在直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4),D(-2,-3,1)$

2.在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置:

$A(3,4,0),B(0,4,3),C(3,0,0),D(0,-1,0)$

3.求点(a,b,c)关于(1)各坐标面;(2) 各坐标轴(3)坐标原点的对称点的坐标.

4.自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

5.过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于z轴的直线和平行于xoy面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

6.一边长为a的正方体放置在xoy平面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在x轴和y轴上，求它个顶点的坐标.

7.求点$M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.

8.在yoz面上，求与三点$A(3,1,2),B(4,-2,-2),C(0,5,1)$等距离的点.

9.证明：以三点$A(4,1,9),B(10,-1,6),C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

第二节向量代数

一、向量及其几何表示

既有大小又有方向的量叫做向量，例如速度、加速度、力矩等等.习惯上我们用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示,或者用$\overrightarrow{a}$，$\mathbf{a}$表示.

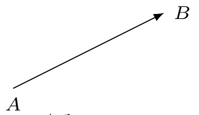

图10.2.1

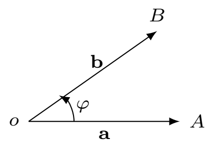

图10.2.2

有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度称为向量$\overrightarrow{AB}$的模,（即向量始点和终点的距离）或模长,记作$|\overrightarrow{AB}|$.

两个向量相等的充分必要条件是模长相等，方向相同.

模长为1的向量称为单位向量，与$\mathbf{a}$ 方向相同的单位向量记作$\mathbf{a}^{\circ}$, 习惯上，我们将三个坐标轴正方向上的单位向量记作$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，模长为零的向量，习惯上记作$\theta$，如果不引起误解，我们也简记作0,我们规定其方向任意或没有方向.

在我们所研究的向量中，只要模长相等方向一样我们就认为它们是相同的，这样不考虑始点，只考虑大小和方向的向量我们称为自由向量或自由矢量.

由于我们研究的向量是自由向量，因此我们可以在空间任取一点O,把向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$,保持模长不变，方向不变，始点置于O处，规定不超过π的角$\angle AOB$(设$\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$ 的夹角，如图10.2.2

二、向量的加法

设向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$，则向量$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$,其中$\mathbf{c}$的大小为由$\mathbf{a},\mathbf{b}$作邻边组成的平行四边形的对角线的长度，方向沿对角线的方向,始点为$\mathbf{a},\mathbf{b}$的始点.如图10.2.3所示.

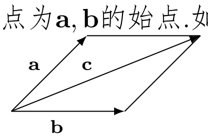

图10.2.3

或者由自由矢量的概念，将$\mathbf{b}$平行移动，使得$\mathbf{a},\mathbf{b}$首尾相接以$\mathbf{a}$的始点为始点，以$\mathbf{b}$的终点为终点的向

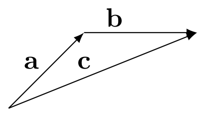

图10.2.4

量为二向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$的和，这样的法则称为三角形法则. 如图10.2.4所示.

对于有限个向量$\mathbf{a_j}(j=1,2,\ldots,m)$,按照三角形法则其和$\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}+\cdots+\mathbf{a}_m$为以$\mathbf{a_1}$的始点为始点$\mathbf{a_1}$的终点为$\mathbf{a_2}$的始点，依次首尾相接，其和为以第一个矢量$\mathbf{a_1}$的始点为始点，以最后一个矢量$\mathbf{a}_m$的终点为终点的矢量.

例如$\mathbf{s} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3} + \mathbf{a_4} + \mathbf{a_5}$如图10.2.5

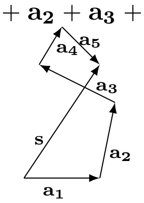

图10.2.5

用平行四边形法则,如图10.2.3可以证明向量的加法满足交换律:

交换律：$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

如图10.2.6可以证明向量的加法满足结合律：

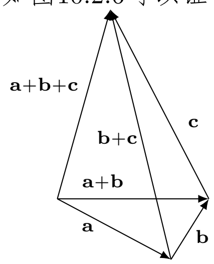

图10.2.6

结合律：$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$;

$\mathbf{a} + \theta = \mathbf{a}$.

同数的加法一样，我们有三角不等式：$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

三、向量与数的乘法

设$\lambda \in \mathbb{R}$,则$\lambda\mathbf{a}$是一个向量，该向量的模长为$|\lambda||\mathbf{a}|$,其方向为: 当$\lambda > 0$时，与$\mathbf{a}$的方向相同，当$\lambda < 0$时，与$\mathbf{a}$的方向相反.

若$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$方向相同或相反，即它们的夹角为0或π,则称$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$共线或平行.其中$-\mathbf{a}$称为向量$\mathbf{a}$的负向量，显然

$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}^{\circ}$;

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$;

由平行四边形法则，$\mathbf{a} - \mathbf{b}$为以$\mathbf{a}, \mathbf{b}$为邻边的平行四边形的另一条对角线，即以$\mathbf{b}$的终点为始点，以$\mathbf{a}$的终点为终点的向量,如图10.2.7.

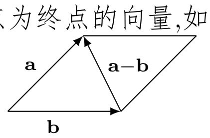

图10.2.7

定理10.2.1 非零向量$\mathbf{b}$与向量$\mathbf{a}$平行的充分必要条件是存在唯一的数λ，使得$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$

证明：充分性是显然的

必要性：因为非零向量$\mathbf{b}$与向量$\mathbf{a}$平行，于是与$\mathbf{a}$同向或逆向，若同向，则取

$\lambda = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} \Longrightarrow \mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}$

若逆向则取$\lambda = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} \Longrightarrow \mathbf{a} = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}$

若存在数μ使得,$\mathbf{a} = \mu\mathbf{b} \Longrightarrow (\lambda - \mu)\mathbf{b} = 0$,由于$\mathbf{b} \neq 0$,于是$\lambda = \mu$.那么唯一性得证.

向量的数乘运算满足如下运算律:

定理10.2.2 对于任意向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$和任意实数λ, μ，则有

(1)$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$;

(2)$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$;

(3)$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$;

(4)$0 \cdot \mathbf{a} = \theta, \lambda\theta = \theta$;

(5)若$\mathbf{a} \neq \theta$,则$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

四、向量的坐标表示

作为有向线段$\mathbf{a}$,我们建立直角坐标系将其始点作为坐标系的原点，于是

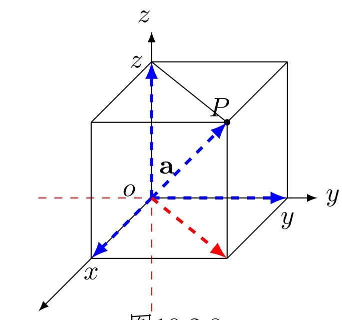

图10.2.8

我们记向量$\overrightarrow{OP}$为$\mathbf{a}$,由向量加法的平行四边形法则，我们有

$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,其中$x, y, z$三个数，是通过点$P$向三个坐标轴做垂面得到的垂足，也称为点$P$ 在三个坐标轴上的投影，于是我们将上述向量的表示称为向量$\mathbf{a}$的分量表示.

考虑到向量的代数运算的特性，我们又将向量$\mathbf{a}$记作

$\mathbf{a} = \{x, y, z\}$或者$\mathbf{a} = (x, y, z)$,也记作$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,其中$a_x, a_y, a_z$分别是向量在三个坐标轴上的投影，前者我们有时也称为坐标表示，后者称为投影表示，显然

$a_x = x, a_y = y, a_z = z$,且$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

对于向量$\overrightarrow{P_1P_2}$,我们建立o为坐标原点的坐标系，以P_1, P_2 为终点引入两个向量，$\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,

其中$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$,于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\\ &= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})\\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}\end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

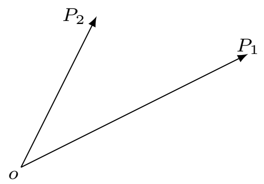

图10.2.9

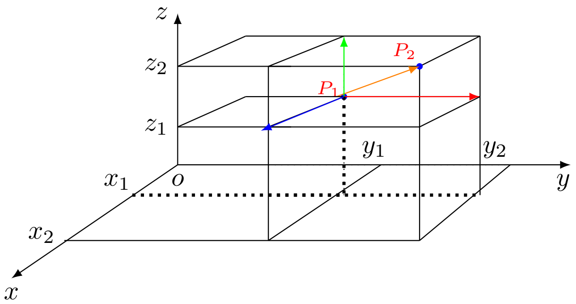

图10.2.10

由图10.2.10可见对于向量$\overrightarrow{P_1P_2}$,我们可以直接在坐标系中得到其投影表示，即过始点P_1终点P_2分别向三个坐标轴作投影，其中$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$分别是向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在三个坐标轴上的投影，于是其投影表示为$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

向量的始点到终点的距离是向量的模长.

利用向量的分量表示进行向量的加法和数乘运算如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}\\ &= \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}\end{aligned}$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

定理10.2.3 非零向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$平行的充分必要条件是对应分量成比例

证明：因为$\mathbf{a}, \mathbf{b}$平行，于是存在常数λ使得$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$,即

$\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z\}$,于是

$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$

例10.2.1.求解以向量为未知量的方程组

$$\begin{cases} 5\mathbf{x} - 3\mathbf{y} &= \mathbf{a}\\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} &= \mathbf{b}\end{cases},$$

其中$\mathbf{a} = (2, 1, 2), \mathbf{b} = (-1, 1, -2)$

解：$\mathbf{x} = \mathbf{2a} - \mathbf{3b}, \mathbf{y} = \mathbf{3a} - \mathbf{5b}$

$\Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{2}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) - \mathbf{3}(-\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{2}) = (\mathbf{7}, -\mathbf{1}, \mathbf{10})$

$\mathbf{y} = \mathbf{3}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) - \mathbf{5}(-\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{2}) = (\mathbf{11}, -\mathbf{2}, \mathbf{16})$

例10.2.2.已知两点$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$及实数$\lambda \neq -1$,在直线$AB$上求一点$M$，使得$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$

解：设$M(x,y,z)$,则

$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),\lambda\overrightarrow{MB}=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$

$\Longrightarrow(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$

即$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

特别当$\lambda=1$时，M为线段AB的中点.M也称为线段AB 的定比分点.

五、向量在数轴上的投影

设$\overrightarrow{Ou}$为一数轴，过向量$\overrightarrow{AB}$向数轴$\overrightarrow{Ou}$ 作垂面，其垂足为A',B',我们称数量$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$为向量在数轴$\mathbf{u}$上的投影，记作

$Prj_{\mathbf{u}}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$，其中$\theta$是向量与数轴$\mathbf{u}$的夹角.

显然当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 投影为正数，

当$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$投影为负数.

定理10.2.4(投影定理)$Prj_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=Prj_{\mathbf{u}}\mathbf{a}+Prj_{\mathbf{u}}\mathbf{b}$

证明：过向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$的始点终点分别向轴上作投影如下图，则

$O'A'=|\mathbf{a}|\cos\theta,A'B'=|\mathbf{b}|\cos\beta.$

$$\begin{aligned}Prj_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})&=O'A'+A'B'=|\mathbf{a}|\cos\theta+|\mathbf{b}|\cos\beta\\&=Prj_{\mathbf{u}}\mathbf{a}+Prj_{\mathbf{u}}\mathbf{b}\end{aligned}$$

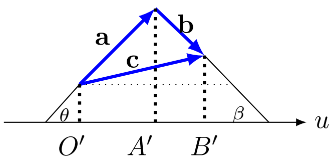

图10.2.11

六、方向角、方向余弦

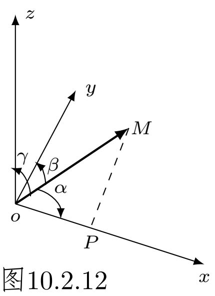

图10.2.12

设向量$\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴的夹角分别为$\alpha,\beta,\gamma$

设OP为向量$\mathbf{a}$在x 轴上的投影，于是$x=a_x$

那么$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}$,同理可得$\cos\beta=\frac{a_y}{|\mathbf{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$

其中$a_y=y,a_z=z$分别是向量$\mathbf{a}$在y,z轴上的投影.

它们满足如下关系：

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

注意到向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\mathbf{a}|}(a_x,a_y,a_z)$ 为$\mathbf{a}$方向的单位向量，所以我们称$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为向量$\mathbf{a}$的方向余弦，称$\alpha,\beta,\gamma$为方向角.

例10.2.3.向径$\overrightarrow{OM}$ 与x 轴成45°角，与y 轴成60° 角，其模长为6，在z轴上的投影为负值，求点M的坐标

解析：$\alpha=45^\circ,\beta=60^\circ,\cos^2\gamma=1-\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$

$a_x=6\cos\alpha=3\sqrt{2},a_y=6\cos\beta=3,a_z=6\cos\gamma=-3$

$M(3\sqrt{2},3,-3)$

习题10.2

1.设$\mathbf{u}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{2c},\mathbf{v}=-\mathbf{a}+\mathbf{3b}-\mathbf{c}$,试用$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$表示$\mathbf{2u}-\mathbf{3v}$.

2.如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

3.把$\triangle ABC$的BC边五等分，设分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4,再把各分点与A连接，试以$\overrightarrow{AB}=\mathbf{c},\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$表示向量

$\overrightarrow{D_1A},\overrightarrow{D_2A},\overrightarrow{D_3A},\overrightarrow{D_4A}$.

4.已知两点$M_1(0,1,2)$和$M_2(1,-1,0$,试用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$

5.求平行于向量$\mathbf{a}=(6,7,-6)$的单位向量.

6.已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1),M_2(3,0,2)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

7.设向量的方向余弦分别满足$(1)\cos\alpha=0;(2)\cos\beta=1;(3)\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

8.设向量$\mathbf{r}$的模为4，它与$\mathbf{u}$轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$,求$\mathbf{r}$在$\mathbf{u}$轴上的投影.

9.一向量的终点在点$B(2,-1,7)$,它在x轴，y 轴和z 轴上的投影依次为$4,-4,7$,求这一向量的起点A的坐标.

10.设$\mathbf{m}=\mathbf{3i}+\mathbf{5j}+\mathbf{8k},\mathbf{n}=\mathbf{2i}-\mathbf{4j}-\mathbf{7k},\mathbf{p}=\mathbf{5i}+\mathbf{j}-\mathbf{4k}$,求向量$\mathbf{a}=\mathbf{4m}+\mathbf{3n}-\mathbf{p}$在$x$ 轴上的投影及在y轴上的分量.

第三节向量的数量积与向量积

一、向量的数量积

引例设物体M 在力$\mathbf{F}$的作用下由点A移动到点B求，求力$\mathbf{F}$所作的功.

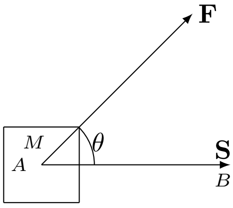

图10.3.1

记$\overrightarrow{AB} = \mathbf{S}$

由物理学知识所做的功$W = |\mathbf{F}||\mathbf{S}|\cos\theta$，其中$\theta$是$\mathbf{F}$与$\mathbf{S}$的夹角.

一般地,设向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$，我们将数量$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$称为二向量的数量积（标量积）或点积.

记作$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，其中$\theta \in [0,\pi]$为二向量的夹角.显然$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$

之所以称数量积是指它们的结果为标量，之所以称点积，是因为其运算记号.

向量的数量积满足如下运算律:

(1)$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;

(2)$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|Prj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|Prj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$;

(3)$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

(4)$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;

(5)$(\lambda\mathbf{a})\cdot(\mu\mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

性质(1),(2),(3)和(5)由内积的定义可知是显然的.以下证明性质(4)

证明:
$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= |\mathbf{a}|Prj_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\\ &= |\mathbf{a}|(Prj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + Prj_{\mathbf{a}}\mathbf{c})\\ &= |\mathbf{a}|Prj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + |\mathbf{a}|Prj_{\mathbf{a}}\mathbf{c}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\end{aligned}$$

$|\mathbf{a}|^{\mathbf{2}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

定理10.3.1非零向量$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

例10.3.1. 用向量证明余弦定理

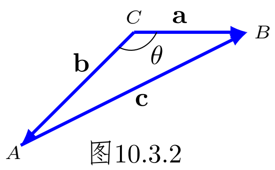

图10.3.2

在$\triangle ABC$中$\angle BCA = \theta, |BC| = |\mathbf{a}|, |CA| = |\mathbf{b}|, |AB| = |\mathbf{c}|$

要证明$|\mathbf{c}|^{\mathbf{2}} = |\mathbf{a}|^{\mathbf{2}} + |\mathbf{b}|^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$,注意到,

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{c}|^{\mathbf{2}} &= \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{2a}\cdot\mathbf{b} \\
&= |\mathbf{a}|^{\mathbf{2}}+|\mathbf{b}|^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta
\end{aligned}
$$

向量数量积的坐标表示:

设$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z),\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$,考虑到$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{0}$,则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}) \\
&= a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} \\
&= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z
\end{aligned}
$$

我们有$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例10.3.2. 设向量$\overleftarrow{a}=(4,-3,2)$,轴$u$与三个坐标轴的正向构成相等的锐角，试求

(1) $\overleftarrow{a}$在轴u 上的投影;

(2) $\overleftarrow{a}$ 与轴u 的夹角

解：$|\overleftarrow{a}|=\sqrt{29}$,设$u$与三个坐标轴的夹角为$\alpha$, 则$3\cos^2\alpha=1$,$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$,u方向上的单位向量为$\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ 设u与$\overleftarrow{a}$的夹角为θ于是

$\cos\theta=\frac{\overleftarrow{a}\cdot\overleftarrow{u}^{\circ}}{|\overleftarrow{a}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$

$\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$

而$Prj_u\mathbf{a}=|\overleftarrow{a}|\cos\theta=\sqrt{3}$

例10.3.3.已知向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$是单位向量且适合$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$,求$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$

解:
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0 \\
&\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0 \\
&\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0
\end{aligned}
$$

三式相加得$3+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=0$,即$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=-\frac{3}{2}$

例10.3.4. 已知三点$M(1,1,1),A(2,2,1),B(2,1,2)$,求$\angle AMB$

解：$\angle AMB$是向量$\overrightarrow{MA}$与$\overrightarrow{MB}$的夹角，因此

$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$

而$\overrightarrow{MA}=(1,1,0),\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$

于是$\cos\angle AMB=\frac{1\times1+1\times0+0\times1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow\angle AMB=\frac{\pi}{3}$

二、向量的向量积

设O为一杠杆L的支点，将力$\mathbf{F}$作用于杠杆上一点P处，$\mathbf{F}$与力臂$\overrightarrow{OP}$的夹角为θ,由力学原理就会有力矩$\overrightarrow{M}$产生，且力矩$\overrightarrow{M}$是一个向量, 它的模长为$|\overrightarrow{M}|=|\overrightarrow{OP}||\mathbf{F}|\sin\theta$

$\overrightarrow{M}$的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$和$\mathbf{F}$所在的平面，且符合右手法则：四指指向$\overrightarrow{OP}$的方向，弯曲四指指向$\mathbf{F}$ 的方向,拇指所指的方向为力矩$\overrightarrow{M}$ 的方向. 据此我们来定义两个向量的向量积.

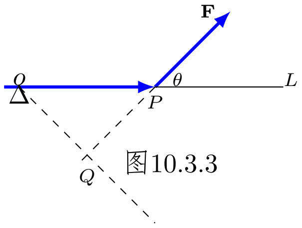

图10.3.3

设向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$,若向量$\mathbf{c}$满足：$|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$,向量$\mathbf{c}$的方向垂直于$\mathbf{a},\mathbf{b}$所在的平面，且符合右手法则，即四指指向$\mathbf{a}$ 弯曲四指指向$\mathbf{b}$,拇指所指的方向为$\mathbf{c}$ 的方向.我们称$\mathbf{c}$为向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$的向量积（矢量积）或叉积，记作$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.之所以称为向量积是因为其运算的结果为向量，之所以称为叉积是因为记录的符号.

显然$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{OP}\times\mathbf{F}$

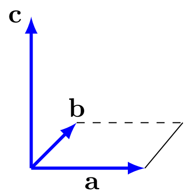

图10.3.4

向量积运算有如下特性：

(1) 向量$\mathbf{a}$与向量$\mathbf{b}$共线的充分必要条件是$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$

(2)$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (交换律不成立)

(3)$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c},(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (左右分配律)

(4)$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

注意到$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0},\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$,我们有如下向量积的坐标表示：

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}\end{aligned}$$

为了便于记忆我们用行列式表示如下

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

向量积的几何含义：我们知道$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$恰是以$\mathbf{a},\mathbf{b}$为邻边的平行四边形的面积.

例10.3.5.已知三角形的三个顶点为$A(1,2,3),B(3,4,5),C(2,4,7)$求该三角形的面积

解：该三角形的面积恰是以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形面积的一半，于是有

$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=(4,-6,2)$$

于是所求三角形的面积$=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+4}=\sqrt{14}$

例10.3.6. 设刚体以等角速度ω绕ℓ 轴旋转，计算刚体上一点M的线速度.

解：由物理学知识，设刚体上点M处的线速度为$\mathbf{v}$ 而$|\mathbf{v}|=|\omega|a$

其中a为点M到旋转轴ℓ的距离，在ℓ上取一点为O于是

$|\overrightarrow{OM}|\sin\theta=a$,其中$\theta$为$\overrightarrow{OM}$与$\ell$的夹角

由物理学的知识$\mathbf{v}=\omega\times\overrightarrow{OM}$

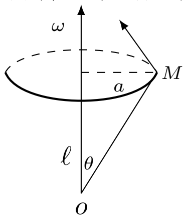

图10.3.5

*三、混合积

$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$,我们称其为三个向量的混合积，记作$[c,a,b]$, 其几何意义为以$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$为三条楞的平行六面体的体积,如下图所示.

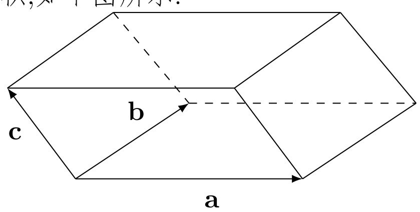

图10.3.6

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \{a_x,a_y,a_z\}\cdot\{\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y\end{vmatrix}\} \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

由上面的分析可以看出，三个向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面的充要条件是它们的混合积$[a,b,c]=0$

例10.3.7. 已知不在一个平面上的四点：$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4)$求以四点为顶点的四面体的体积.

解：由立体几何知识知道，以上述四点为顶点的四面体的体积，恰是由向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$为楞的六面体的体积的六分之一.

即$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|$

$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$

例10.3.8.已知$A(1,2,0),B(2,3,1),C(4,2,2),M(x,y,z)$四点共面求$M$点的坐标所满足的关系式.

解：向量$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$共面，于是

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$

即点M满足的关系式为：$2x+y-3z-4=0$

习题10.3

1.设$\mathbf{a}=\mathbf{3i}-\mathbf{j}-\mathbf{2k},\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{2j}-\mathbf{k}$,求

(1)$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; (2)$(-\mathbf{a})\cdot\mathbf{3b},\mathbf{ab}$; (3)$\mathbf{a},\mathbf{b}$的夹角.

2.已知$M_1(1,-1,2),M_2(3,3,1),M_3(3,1,3)$求与$\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

3.设质量为$100kg$的物体从点$M_1(3,1,8)$沿直线移动到点$M_2(1,4,2)$,计算重力所作的功（坐标长度单位为m,重力的方向为z 轴的负方向）.

4. 在杠杆上支点O的一侧与点O的距离为x_1的点P_1处，有一与$\overrightarrow{OP_1}$成角θ_1的力$\mathbf{F_1}$作用着；在O的另一侧与点O的距离为x_2的点P_2处，有一与$\overrightarrow{OP_2}$成角θ_2的力$\mathbf{F_2}$作用着如图10.3.7所示，问$\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\mathbf{F_1}|,|\mathbf{F_2}|$符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

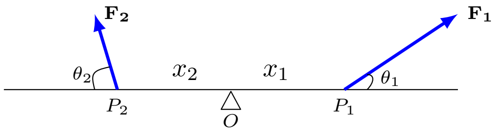

图10.3.7

5.求向量$\mathbf{a}=(4,-3,4)$在向量$\mathbf{b}=(2,2,1)$上的投影.

6.设$\mathbf{a}=(3,5,-2),\mathbf{b}=(2,1,4)$,问$\lambda$与$\mu$有怎样的关系，能使得$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$与$z$轴垂直？

7.试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

8.已知向量$\mathbf{a}=\mathbf{2i}-\mathbf{3j}+\mathbf{k},\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{3k}$和$\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{2j}$,计算：

(1)$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}$;; (2)$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;(3)$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

9.已知$\overrightarrow{OA}=\mathbf{i}+\mathbf{3k},\overrightarrow{OB}=\mathbf{j}+\mathbf{3k}$,求$\triangle OAB$的面积.

*10.已知$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z),\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z),\mathbf{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列式的性质证明：

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot b$.

10.试用向量证明不等式：

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$,

其中a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3为任意实数，并指出等号成立的条件.

第四节曲面及其方程

一、曲面方程的概念

引例：设动点$P(x,y,z)$到定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的距离为R，求动点的轨迹.

解：由两点间的距离公式得：$R=\sqrt{(x-x)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,于是得到球面方程

$(x-x)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

一般来讲一个三元方程$F(x,y,z)=0$可以表示空间的一张曲面$\sum$,若三元方程$F(x,y,z)=0$满足：

(1)曲面$\sum$上的点都满足方程$F(x,y,z)=0$

(2)不在$\sum$上的点都不满足方程，则称方程$F(x,y,z)=0$为曲面$\sum$的方程.

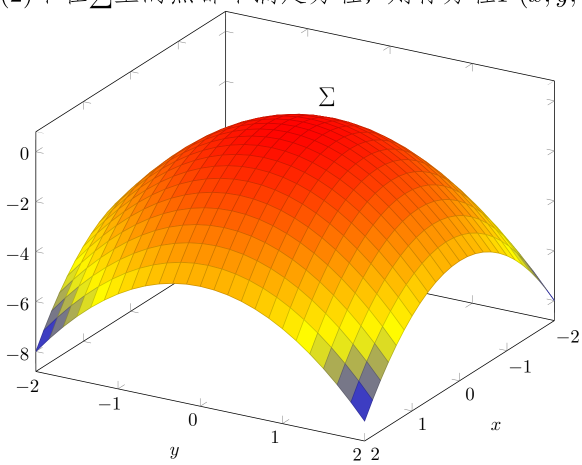

图10.4.1

在空间解析几何中我们主要围绕两点展开我们的工作，第一：写出动点的轨迹，即曲面的方程，第二：已知动点所满足的方程，研究动点所构成曲面的形状.

例10.4.1.讨论方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$所表示的曲面

解：$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$,这是球心在点$(1,-2,0)$半径为$\sqrt{5}$的球面方程.

二、旋转曲面

设yOz面的曲线$f(y,z)=0$，若该曲线绕z轴旋转，求旋转曲面的方程

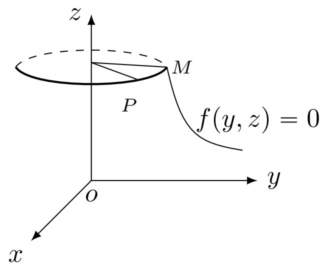

图10.4.2

设点$M(0,y_1,z_1)$满足曲线方程，则$f(y_1,z_1)=0$,当M旋转到点$P(x,y,z)$ 处，则$z=z_1$,这时点P 到z轴的距离为$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|\Longrightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 将其代入方程得$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$,这就是曲线$f(y,z)=0$绕z轴旋转所产生的旋转曲面的方程.

例10.4.2.求两条相交直线，其中一条绕另一条旋转所产生的曲面的方程.

解：建立坐标系，使得其中一条直线为oz轴另一条直线记作ℓ 与其的交角为α,这样在yOz平面上得到直线ℓ的方程为$z=\cot\alpha y$ 于是所产生的旋转曲面为$z=\pm\cot\alpha\sqrt{x^2+y^2}$,即

$z^2=a^2(x^2+y^2)$,称为锥面, 其中$a^2=\cot^2\alpha$

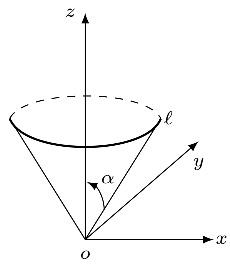

图10.4.3

例10.4.3.将xoz 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$分别绕$z$轴和$x$ 轴旋转一周，求所产生的曲面的方程.

解：绕z轴旋转一周所产生的曲面为$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$称为单叶双曲面，如图10.4.4.绕$x$ 轴旋转一周所产生的曲面为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$称为双叶双曲面，如图10.4.5.

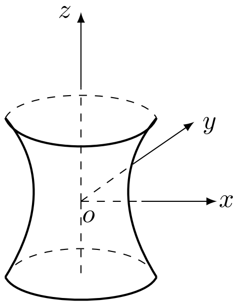

图10.4.4

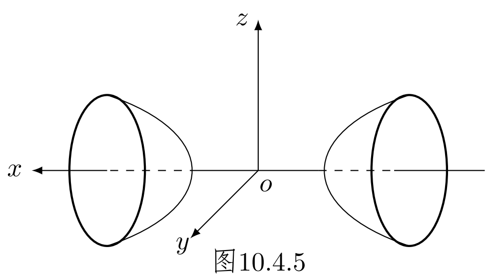

图10.4.5

三、柱面

方程$x^2+y^2=R^2$表示了空间中怎样的曲面呢？这可以看成是直线$y=R$绕z轴产生的旋转曲面，或者看成是动直线ℓ平行于z轴，沿曲线$x^2+y^2=R^2$运动产生的曲面.

一般的，动直线L沿定曲线C平行移动所产生的曲面称为柱面，其中L叫柱面的母线，C称为柱面的准线，我们在平面解析几何中所学过的曲线都可以看成空间的柱面，例如$y=x^2$ 称为抛物柱面，其母线平行于z轴，

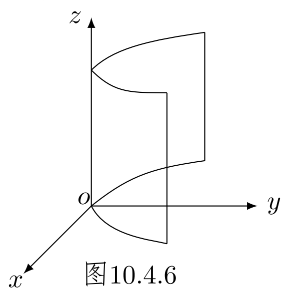

图10.4.6

$x=y$可以看成是平行于z轴的直线沿直线$x=y$ 运动产生的平面，一般的二元方程

$F(x,y)=0, G(x,z)=0, H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于z,y,x 轴，

在xOy, xOz, yOz 坐标面上的准线

为$F(x,y)=0, G(x,z)=0, H(y,z)=0$的柱面.

四、二次曲面

三元二次方程表示的曲面称为二次曲面.以下是一些常见的二次曲面，在讨论它们的形状时我们用截痕法或坐标伸缩法来讨论，所谓截痕法就是用平面去截所讨论的曲面得到的截痕来分析曲面的形状，所谓伸缩法是对某二次曲面作坐标伸缩变换而生成的曲面：

例如在xOy面上将点$M(x,y)$变为点$M'(x,\lambda y)$ 称为点的伸缩变换，设曲线C的方程为$F(x,y)=0$若将C沿y 轴方向伸缩λ倍，则C变成C',于是点$M_1(x_1,y_1)\in C$变换成$M(x_2,y_2)\in C'$,其中$x_2=x_1, y_2=\lambda y_1$,因为$M_1\in C \Longrightarrow F(x_1,y_1)=0$

$\Longrightarrow F(x_2,\frac{1}{\lambda}y_2)=0 \Longrightarrow C'$的方程为$F(x,\frac{1}{\lambda}y)=0$

(1)椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

该曲面的生成如下：我们让yoz平面上的曲线，$y=z$绕z轴旋转成曲面：$z^2=x^2+y^2$ ，然后将x,y轴分别伸缩$\frac{1}{a},\frac{1}{b}$倍得到.

之所以称为椭圆锥面是因为用平行于xOy的平面$z=k$截此曲面，截痕为椭圆$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1$

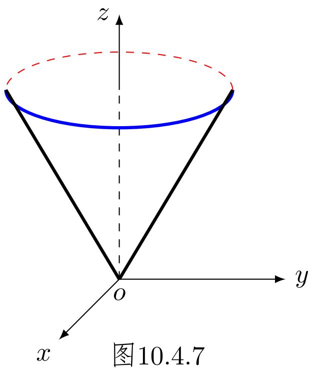

图10.4.7

(2)椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,

该曲面的生成如下：将xoy平面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕$x$轴旋转得旋转曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$,再沿$z$轴伸缩$\frac{b}{c}$ 倍得到.

之所以称为椭球面是因为用三个平行于坐标面的平面截此曲面截痕都是椭圆，例如用$z=k$截得 $\frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}})^2}=1$, 其中$|k|\leqslant c$如图10.4.8.

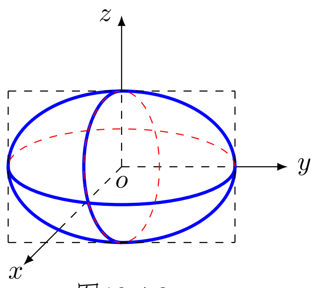

图10.4.8

(3)单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

该曲面的生成如下：将xoz 平面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转，生成旋转曲面$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,沿$y$轴方向伸缩$\frac{a}{b}$倍而成.即

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\frac{a}{b}y)^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

图形见10.4.4.

(4)双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

该曲面的生成如下：将xoz平面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕$x$轴旋转产生旋转曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$然后将此旋转曲面沿$y$ 轴方向伸缩$\frac{c}{b}$倍，即

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

图形见10.4.5.

(5)椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

该曲面生成如下：将xoz平面上的抛物线$\frac{x^2}{a^2}=z$绕z轴旋转产生旋转曲面：$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$然后沿y轴伸缩$\frac{a}{b}$得到，见图10.4.9.

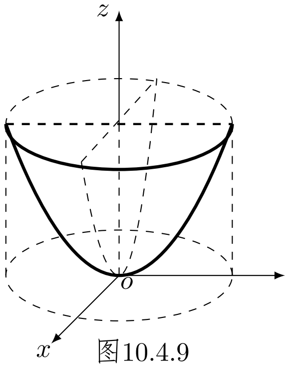

图10.4.9

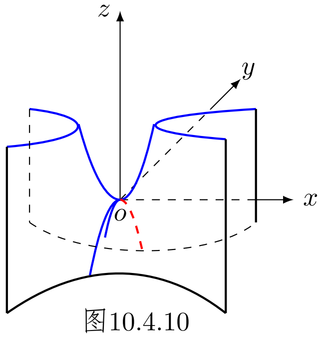

图10.4.10

(6) 双曲抛物面(马鞍面)：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

该曲面不是一个旋转曲面生成的曲面，我们用截痕法来分析其几何形状.

用$z=k$截得到在$z=k$ 平面上的双曲线

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k,$

用$x=k,y=k$截得到抛物线,所以称其为双曲抛物面，由于与马鞍相像，俗称其为马鞍面，见图10.4.10.

五、空间曲线及其方程

(1)、空间曲线的标准方程

设$\sum_1:F(x,y,z)=0,\sum_2:G(x,y,z)=0$分别表示空间的两个曲面，则称两个曲面的交线

$C:\begin{cases}F(x,y,z) &=0\\ G(x,y,z) &=0\end{cases}$为空间曲线的标准方程.

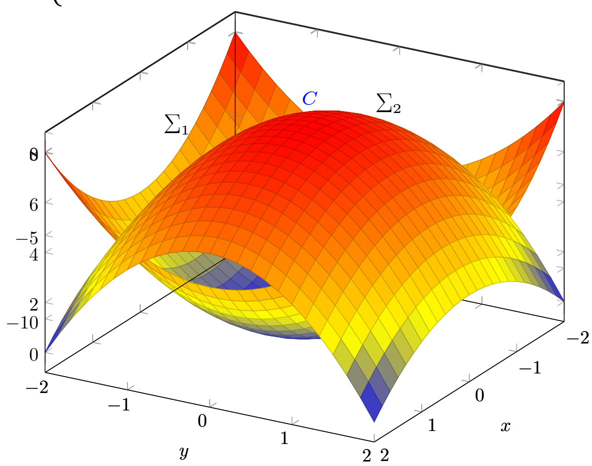

图10.4.11

例10.4.4. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2 & =1 \\ 2x+3z & =6 \end{cases}$

解：该方程组表示了平面$2x+3z=6$上的椭圆：

$\left(\frac{6-3z}{2}\right)^2+y^2=1$,

即$4y^2+9z^2-36z=32$

例10.4.5.方程组$\begin{cases} z & =\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ & (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases}$

解：该方程组表示了柱面$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$割球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的割痕.

(2)、空间曲线的参数方程

引例: 空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=R^2$上，且圆柱面以角速度ω绕z 轴旋转，同时M保持沿z轴方向的速度v前进,求M点的运动轨迹.

解：设M的坐标为(x,y,z),于是$\begin{cases} x & =R\cos\omega t \\ y & =R\sin\omega t \\ z & =vt \end{cases}$其中$t$是时间.

一般的，若$M(x,y,z)$是曲线L上任意一点M，我们用参数方程$\begin{cases} x & =\varphi(t) \\ y & =\psi(t) \\ z & =\omega(t) \end{cases}$表示动点$(x,y,z)$的轨迹，也称该方程组为曲线$L$的参数方程

(3)、空间曲线在坐标面上的投影

由前面的论述可知空间曲线C的一般方程为$\begin{cases} F(x,y,z) & =0 \\ G(x,y,z) & =0 \end{cases}$消去方程组中的变量$z$得到方程$H(x,y)=0$,这是一个母线平行于$z$轴准线为$z=k$平面上的曲线$H(x,y)=0$的柱面方程，我们称其为曲线$C$在$z=0$坐标面的投影柱面方程，特别称$z=0$与柱面$H(x,y)=0$的交线为$C$在坐标面$z=0$上的投影曲线.

同理我们可以通过消去变量x,y得到柱面$R(y,z)=0,Q(x,z)=0$分别与坐标面$x=0,y=0$联立得到C在坐标面$x=0,y=0$上的投影.

例10.4.6 求球面$x^2+y^2+z^2=1$和球面$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线C在xOy 坐标面上的投影.

解：将以上等式两端相减得到$2y+2z=2$,则$z=1-y$代入任何一个等式得到投影柱面方程$x^2+y^2+(1-y)^2=1$整理得$x^2+2y^2-2y=0$,于是$\begin{cases} x^2+2y^2-2y & =0 \\ z & =0 \end{cases}$是所求的投影.

由投影柱面所围成的曲面部分在投影平面上的投影区域是我们最为关注的问题.

例10.4.7 求上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$围成的立体在xOy坐标面上的投影区域

解：消去变量z得$4-x^2-y^2=3(x^2+y^2)$整理得到$x^2+y^2=1$于是投影柱面为$x^2+y^2=1$在xOy面上的投影区域为$x^2+y^2\leqslant 1$

习题10.4

1.一球面过原点及$A(4,0,0),B(1,3,0),C(0,0,-4)$,求球面的方程及球心坐标及半径.

2.方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$表示怎样的曲面?

3.求与坐标原点O及点$(2,3,4)$的距离之比为$1:2$的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？

4.分别写出如下曲线绕给定轴旋转产生的曲面方程

(1)$z^2=5x$绕x轴旋转；(2)$x^2+z^2=9$绕z轴旋转；(3),$4x^2-9y^2=36$分别绕x和y轴.

5.说明如下曲面是怎样产生的

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$,(2)$x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$

(3)$x^2-y^2+z^2=1$,(4)$(z-a)^2=x^2+y^2$

(5)$4x^2+y^2-z^2=4$,(6)$\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

6.分析下列曲线的图形

(1) $\begin{cases} x &= 1, \\ y &= 2; \end{cases}$,(2) $\begin{cases} z &= \sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x &= y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2 &= a^2, \\ x^2+z^2 &= a^2; \end{cases}$,(4) $\begin{cases} y &= 5x+1, \\ y &= 2x-3. \end{cases}$

7.分别求母线平行于x轴与y轴且通过曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2 &= 16, \\ x^2+z^2-y^2 &= 0 \end{cases}$的柱面方程.

8.求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 9, \\ x+y &= 1 \end{cases}$在$xOy$面上的投影方程.

9,将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 9, \\ y-x &= 0 \end{cases}$,(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2 &= 4, \\ z &= 0 \end{cases}$

10.求螺线$\begin{cases} x &= a\cos\theta, \\ y &= a\sin\theta, \\ z &= b\theta \end{cases}$,在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

第五节平面及其方程

一、平面的点法式方程

设平面π过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$且与向量$\overrightarrow{n}=\{A,B,C\}$垂直，求$\pi$的方程

解：设点$P(x,y,z)$为π上的任意一点，则向量$\overrightarrow{PP_0}\perp\overrightarrow{n}$于是

$\{A,B,C\}\cdot\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}=0$,即

$Ax+By+Cz+D=0$,其中$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$,于是平面π上任意一点都满足上述三元一次方程.设$P_1(x_1,y_1,z_1)$满足该方程，则$\{A,B,C\}\cdot\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}=0$,若$P_1$不在平面$\pi$上，则向量$\overrightarrow{P_0P_1}$与向量$\overrightarrow{n}$不正交，即$\{A,B,C\}\cdot\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}\neq 0$与上式矛盾，于是三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$是平面$\pi$ 的方程.

我们将与平面π垂直的任意向量称为π的法向量，由法向量和平面上一点确定的方程称为平面的点法式方程.

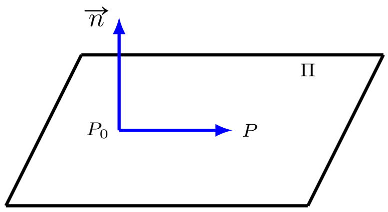

图10.5.1

例10.5.1 求过三点$P_1(2,-1,4),P_2(-1,3,-2),P_3(0,2,3)$的平面方程

解：设平面上任意一点为$P(x,y,z)$,则向量$\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P}$共面于是

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,即$14x+9y-z=15$

从上述平面方程的推导过程我们可以看到任意一个三元一次方程都表示了空间的一个平面，事实上，任何一个平面都可以用平面上一点和它的一个法向量来决定，这样的点法式方程恰是一个三元一次方程，反之任意一个三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$,若点$M_0(x_0,y_0,z_0)$满足该方程，那么我们有$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$这正是过点$M_0$且与向量$\{A,B,C\}$垂直的平面方程，因此我们将三元一次方程称为平面的一般方程，而中学解析几何中直线恰是平面的特殊情况,根据未知量的系数我们可以分析平面的特点

$D=0$平面$Ax+By+Cz=0$过原点，

$A=0$平面$By+Cz+D=0$的法向量平行于x轴

$A=B=0$,平面$z=-\frac{D}{C}$与xOy坐标面平行，同理我们可以分析其它情况.

例10.5.2 设平面过x轴和点$(4,-3,-1)$求该平面的方程

解：平面的法向量与x轴正交，那么$A=0$,过原点，则$D=0$,于是平面应为$By+Cz=0$,已知点在平面上，因此

$-3B-C=0$,即$C=-3B$, 代入得$y-3z=0$

例10.5.3设平面与x,y,z轴的交点为$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$，求该平面的方程.

解：注意到$Aa=-D,Bb=-D,Cc=-D$将其代入平面的一般方程得

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，这个方程称为平面的截距式方程.

二、两个平面的相互关系

两个平面$\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,或者相交或者平行，所以用两个平面之间的夹角来反映它们之间的相互关系，若规定两个平面之间的夹角$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,容易看到

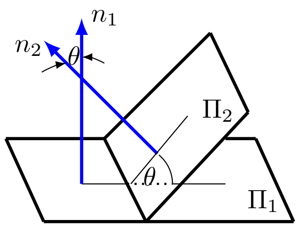

图10.5.2

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$,其中$\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\},\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$.

例10.5.4平面过点$M_1(1,1,1),M_2(0,1,-1)$且垂直于平面$x+y+z=0$,求该平面的方程

解：设所求平面的法向量为$\overrightarrow{n}=\{A,B,C\}$,则

$A+B+C=0,\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$,即$-A-2C=0\Longrightarrow B=C$,于是

$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0,-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0$,所求平面为

$2x-y-z=0$

三、点和平面之间的关系

空间中一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$或在平面上或不在平面上，所以我们用其到平面的距离来描述它们之间的关系

设平面的法向量为$\overrightarrow{n}=\{A,B,C\}$不妨设法向量过$P_0$在平面$\Pi:Ax+By+Cz+D=0$上任取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$这样点$P_0$到平面$\Pi$的距离$d$恰是向量$\overrightarrow{P_1P_0}$在$\overrightarrow{n^\circ}$上的投影，于是$d=|Prj_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{P_1P_0}|$,于是

$d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n^\circ}|$

$\overrightarrow{P_1P_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$

$\overrightarrow{n^\circ}=\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\}$

$\Longrightarrow d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

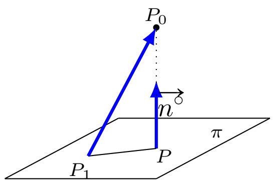

图10.5.3

例10.5.5求平分两个平面$\begin{cases}\pi_1: & x-2y+2z+21=0\\ \pi_2: & 7x+24z-50=0\end{cases}$所成的二面角的平分面的方程

解：平分面上的动点为$P(x,y,z)$,则该点到两个平面上的距离相等即

$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|7x+24z-50|}{\sqrt{7^2+24^2}}$

整理得到$\frac{x-2y+2z+21}{3}=\pm\frac{7x+24z-50}{25}$

于是这样的平分面有两个：$4x-50y-22z+675=0, 46x-50y+122z+375=0$

习题10.5

1.求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程.

2.指出下列各平面的特殊位置

$(1)3y-1=0, (2)2x-3y-6=0;$

$(3)6x+5y-z=0, (4)x-2z=0.$

3.求平面$2x-2y+z+5=0$与各坐标面的夹角的余弦.

4.求三平面$x+3y+z=1, 2x-y-z=0, -x+2y+2z=3$的交点.

5.求点$(1,2,1)$到平面$x+2y+2z-10=0$的距离.

第六节空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间的直线可以看成两个平面$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的交线，因此该直线$\ell$上的点$P(x,y,z)$应同时满足上述两个方程，所以$\ell$的方程为

$$\begin{cases}\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &=0\\ \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &=0\end{cases}$$

又不在ℓ上的点，则不满足上述方程组

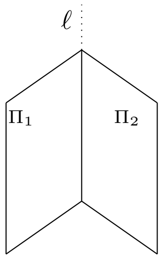

图10.6.1

二、空间直线的对称式方程和参数方程

设直线ℓ过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$,且与向量$\vec{s}=\{m,n,p\}$平行，(习惯上称这样的向量为直线ℓ的方向向量),求ℓ

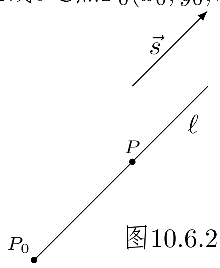

图10.6.2

的方程.

解：设直线ℓ上任意一点$P(x,y,z)$,则向量$\overrightarrow{P_0P}$与向量$\vec{s}$共线，即

$\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}=\lambda\{m,n,p\}$

于是所求直线的方程$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，我们称这样的方程为直线$\ell$的对称式方程. 或点向式方程，当回到二维空间，就是$y-y_0=\frac{n}{m}(x-x_0)$其中斜率为$\frac{n}{m}$

注：平行于直线ℓ的任何非零向量都可以作为直线ℓ的方向向量.

注：如果方向向量中有一个或两个分量为零，则直线的对称式方程可以如下表示：例如$m=0$,则ℓ的方程表示为$\begin{cases}\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\\ x=x_0\end{cases}$

注：两点可以确定一条直线.设直线ℓ过点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$

于是直线ℓ的方向向量为$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,那么直线的方程为

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$称为直线的两点式方程，回到二维情形即为平面上的两点式直线方程：

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

令$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$,我们得到直线的参数方程如下：

$x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt$

例10.6.1 用直线的对称式和参数式表示直线方程$\begin{cases}x+y+z+1&=0\\ 2x-y+3z+4&=0\end{cases}$

解：先在直线ℓ上确定一点，不妨令$z=0$,则$3x+5=0,x=-\frac{5}{3},y=\frac{2}{3}$

ℓ与二平面的法向量$\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}$正交，于是平行于$\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}$

那么直线ℓ的方向向量$\vec{s}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\{4,-1,-3\}$,则$\ell$的对称式方程为

$\frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{-3}$, 其参数方程为

$x=-\frac{5}{3}+4t, y=\frac{2}{3}-t, z=-3t$

三、空间直线之间的关系

空间中两条直线或者共面或者异面，若分别用$\vec{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$, $\vec{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$表示直线$\ell_1,\ell_2$的方向向量，$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$之间的夹角为$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,则称$\theta$为二直线之间的夹角,$\theta=\arccos\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

四、空间直线和平面之间的关系

设直线ℓ的方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$,过直线ℓ向平面Π作垂面Π_1，则Π与Π_1的交线ℓ'称为直线ℓ 在平面Π上的投影，直线ℓ与投影直线ℓ'的夹角$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 称为直线与平面Π的夹角，若Π的法向量为$\vec{n}=\{A,B,C\}$,则

$\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$,其中$\theta$是直线$\ell$与法向量$\vec{n}$的夹角.

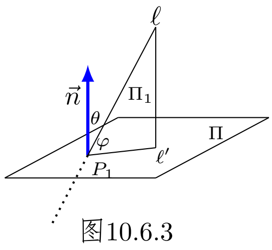

图10.6.3

五、平面束

具有公共直线的一组平面我们称为平面束，过直线

$$\ell:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &=0 \end{cases}$$

的平面组就是以ℓ为公共直线的平面束，于是过ℓ的任意平面总可以写成如下形式：

$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

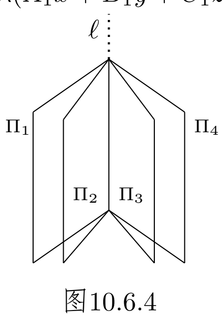

图10.6.4

例10.6.2求与两平面$x-4z=3$,和$2x-y-5z=1$的交线平行且过点$(-3,2,5)$的直线方程

解：所求直线的方向向量为$\vec{s}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=\{-4,-3,-1\}$

所求直线方程为$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$

例10.6.3求直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与平面$2x+y+z-6=0$的交点

解：已知直线的参数方程为$x=2+t,y=3+t,z=4+2t$,由于直线与平面的交点必须在平面上，那么

$2(2+t)+3+t+4+2t-6=0\Longrightarrow t=-1$,于是交点为

$(1,2,2)$

例10.6.4求过点$(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程

解：过点$(2,1,3)$与已知直线垂直的平面方程为$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$,垂足应在已知直线上，所以满足直线方程$x=-1+3t,y=1+2t,z=-t$又垂足在上述平面上，应满足平面方程，将其代入得

$3(-3+3t)+2(2t)+(t+3)=0,\Longrightarrow t=\frac{3}{7}$,于是垂足为$(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$这样由直线上的两点$(2,1,3),(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$得到方向向量为$\vec{s}=\{2,-1,4\}$所以所求直线的方程为

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$

例10.6.5 求直线$\begin{cases}x+y-z-1&=0\\x-y+z+1&=0\end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线方程

解：过已知直线向投影平面作垂面，则垂面与投影平面的交线就是直线的投影，过已知直线的方程必然含在平面束

$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$中，于是平面$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z+\lambda-1=0$与投影平面垂直，所以

$1+\lambda+1-\lambda+\lambda-1=0\Longrightarrow\lambda=-1$于是垂面方程为$y-z-1=0$,那么投影直线的方程为

$$\begin{cases}x+y+z&=0\\y-z-1&=0\end{cases}$$

习题10.6

1.用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z&=1,\\2x+y+z&=4.\end{cases}$$

2.求过点$(2,0,-3)$ 且与直线

$$\begin{cases}x-2y+4z&=7,\\3x+5y-2z&=-1.\end{cases}$$

垂直的平面方程.

3.证明：直线$\begin{cases}x+2y-z&=7,\\-2x+y+z&=7.\end{cases}$与直线$\begin{cases}3x+6y-3z&=8,\\2x-y-z&=0.\end{cases}$平行.

4.求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

5.求过点$(1,2,1)$而与两直线

$\begin{cases} x+2y-z &= -1, \\ x-y+z &= 1. \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z &= 0, \\ x-y+z &= 0. \end{cases}$

平行的平面方程.

6.求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

7.求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases} x+y-z &= -1, \\ 2x-y+z &= 4. \end{cases}$的距离.

第十章练习题

一、选择题

1. 已知非零向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$, 满足关系式$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, 则必有

$\mathbf{A}.\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{0},\mathbf{B}.\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0},\mathbf{C}.\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0},\mathbf{D}.\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$

2.设$\mathbf{a}+\mathbf{3b}$与$\mathbf{7a}-\mathbf{5b}$垂直，$\mathbf{a}-\mathbf{4b}$与$\mathbf{7a}-\mathbf{2b}$垂直，$\mathbf{a}$ 与$\mathbf{b}$之间的夹角为

$A.\frac{\pi}{4},B.\frac{\pi}{6},C.\frac{\pi}{3},D.\frac{\pi}{2}$

3.已知向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$是单位向量且适合$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$求$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=(\qquad)$

$A.0,B.1,C.3,D.-\frac{3}{2}$

4.向径$\overrightarrow{OM}$ 与x 轴成45°角，与y 轴成60°角，其模长为6，在z轴上的投影为负值，则点M的坐标为

$A.(3\sqrt{2},3,-3),B.(\sqrt{2},3,-3),C.(\frac{1}{3},-\sqrt{3},-3),D.(\sqrt{2},3,-3)$

5.已知平面π的方程为$3x+y-2z=0$及点$P(1,3,-4)$,则点P 关于平面π的对称点Q的坐标是

$A.(5,-1,0),B.(5,1,0),C.(-5,1,0),D.(-5,-1,0)$

6. 直线$\begin{cases} y &= 2x-7 \\ z &= 2x-5 \end{cases}$与平面$z=3x$ 的夹角为

$A.\frac{\pi}{6},B.\frac{\pi}{3},C.\arccos\frac{1}{3\sqrt{10}},D.\arcsin\frac{1}{3\sqrt{10}}$

7.设平面的一般方程为$Ax+By+Cz+D=0$,若平面π通过x轴，当它不是坐标面时，它的方程中应有

$A.A=0$, 而B,C,D 均不为零，$B.D=0$, 而A,B,C, 均不为零

$C.A=B=0$, 而C,D 均不为零,$D.A=D=0$, 而B,C 均不为零

8.设直线ℓ 的方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{5}$, 平面$\pi$的方程为$3x+2y+z=1$,则

$A.$直线ℓ垂直于平面π,$B.$直线ℓ平行于平面π,

$C.$直线ℓ 在平面π上,$D.$直线ℓ与平面π斜交,

9.母线平行于x轴且通过曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2 &= 16 \\ x^2-y^2+z^2 &= 0 \end{cases}$的柱面方程是

A. 椭圆柱面$2x^2+2z^2=16$, B. 椭圆柱面$x^2+2y^2=16$

C. 双曲柱面$3y^2-z^2=16$, D. 抛物柱面$3y^2-z=16$

10. 方程$(z-a)^2=x^2+y^2$表示的曲面是由

$A.xOy$面上的曲线$(z-a)^2=x^2$, 绕y 轴旋转得到的

$B.yOz$面上的曲线$(z-a)^2=y^2$, 绕x 轴旋转得到的

$C.xOz$面上的直线$z-a=x$, 绕z 轴旋转得到的

$D.yOz$面上的直线$z-a=y$, 绕y 轴旋转得到的

二、1.已知两向量$\mathbf{a}=\{1,2,2\}$, $\mathbf{b}=\{3,0,4\}$ 求(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$,(2)$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,(3)$\widehat{\mathbf{ab}}$,(4)$p_{rj_{\mathbf{b}}}\mathbf{a}$,(5) 与$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同时垂直的单位向量，(6) $\mathbf{a},\mathbf{b}$夹角平分线上的单位向量.

2.已知一向量与向量$\mathbf{a}=\{3,6,8\}$垂直，又与yOz平面平行，且模长为2，求该向量.

3. 设向量$\mathbf{a}=\{4,-3,2\}$,轴u与三个坐标轴的正向构成相等的锐角，试求(1)$\mathbf{a}$在轴u 上的投影；(2)$\mathbf{a}$ 与轴u 的夹角.

4. 试求以向量$\mathbf{a}=\{2,1,-1\}$, $\mathbf{b}=\{1,-2,1\}$ 为边的平行四边形对角线的夹角.

5. 求分别满足下列条件的平面方程

（1）过z 轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$

（2）过点$M_1(4,1,2)$, $M_2(-3,5,-1)$且与平面$6x-2y+3z+7=0$垂直

(3) 通过直线$l_1:\begin{cases}x-2y+z-1&=0,\\2x+y-z-2&=0\end{cases}$,且平行于直线$l_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.

6.求分别满足下列条件的直线方程

（1）通过平面$x+y+z=1$和直线$\begin{cases}y&=1\\z&=1\end{cases}$的交点，并在已给的平面上与已给的直线相垂直

(2) 求过点$M(-4,-5,3)$且与两直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ 和$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ 都相交的直线方程.

7.求过点$M(-1,0,4)$ 且平行于平面$3x-4y+z-10=0$,且与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

8. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程

9. 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

10.求平行于平面$2x+y+2z+5=0$, 且与三坐标面构成的四面体体积为1的平面.

11. 求通过直线$\ell:\begin{cases}2x-4y+z&=0\\3x-y-2z-9&=0\end{cases}$且垂直于平面$\pi:4x-y+z=1$的平面方程，并求直线$\ell$在平面$\pi$上的投影方程.

三、

1.设$\mathbf{c}$ 是非零向量，证明：若$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$,且$\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$,则$\mathbf{a}=\mathbf{b}$

2. 设一平面垂直于平面$z=0$, 并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases} y-z+1 &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$的垂线，求平面方程.

3.已知直线$l_1:\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}, l_2:\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$

(1)求两直线之间的距离.

(2)求两直线的公垂线方程.

4. 设准线的方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ 2x^2+2y^2+z^2 &= 2 \end{cases}$,母线的方向数为$-1,0,1$，求该柱面的方程.

5. 设一平面垂直于平面$z=0$,并过从点$(1,-1,1)$到直线$l:\begin{cases} y-z+1 &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$的垂线，求此平面的方程.

6. 求过点$(-1,0,4)$,且平行于平面$3x-4y+z-10=0$又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.