第三节 三重积分

一、三重积分的概念

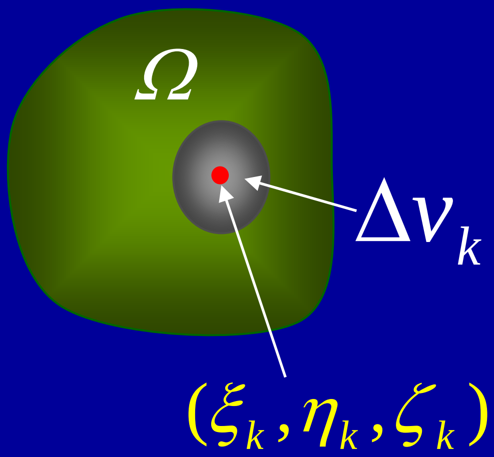
二、三重积分的计算

一、三重积分的概念

引例: 设三维空间中一物体，占有空间有限闭区域 Ω ,
其上分布着不均匀质量体密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C(\Omega)$,
求该物体的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

“分割, 匀代变, 近似和, 求极限”



可得 $$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$

定义. 设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数.

将 Ω **任意分割**成n个小闭区域, $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$,
(同时表示体积)

任意取点 $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$, 作乘积，并作和

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$,若当各个小闭区域中直径的最大值

$\lambda\to 0$时，此和式的极限**总存在**，且与分割及界点的

选取无关，将此极限为函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的

三重积分, 即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$f(x,y,z)$**被积函数**, Ω 称为**积分区域**, $\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**.

在直角坐标系下, 可用平行于坐标面的平面来划分Ω,

除包含边界的区域外，都是长方体，故$\mathrm{d}v$常记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

物理意义： 质量 $M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,dv$

可积条件与性质: 与二重积分类似. 例如:

被积函数为1的三重积分表示Ω的体积: $V=\iiint\limits_\Omega dv$

中值定理. 设 $f(x,y,z)$在有界闭域 Ω 上连续, V 为Ω的体积, 则存在$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$,使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、三重积分的计算

三种不同坐标下计算. 基本方法：化为三次积分.

1. 利用直角坐标计算三重积分

假定Ω为一简单体，即平行于z轴且穿过Ω内部的直线与闭区域Ω的边界曲面S相交不多于两点.

方法1. 投影法（“先一后二”）

将Ω投影到xOy面上，得平面闭区域D_{xy}. 以D_{xy}边界为准线，作母线平行于z轴的柱面. 它与曲面S的交线从S中分出上、下两部分，方程分别为：

$z = z_1(x,y)$，$z = z_2(x,y)$，它们都是D_{xy}上的连续函数,

且 $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$.

$$\Omega = \left\{(x,y,z)|z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\right\}$$

计算方法推导:

连续函数 $f(x,y,z) \ge 0$，质量$M = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$

“微元法”

(1) 在投影区域D_{xy}内任取一个小闭区域

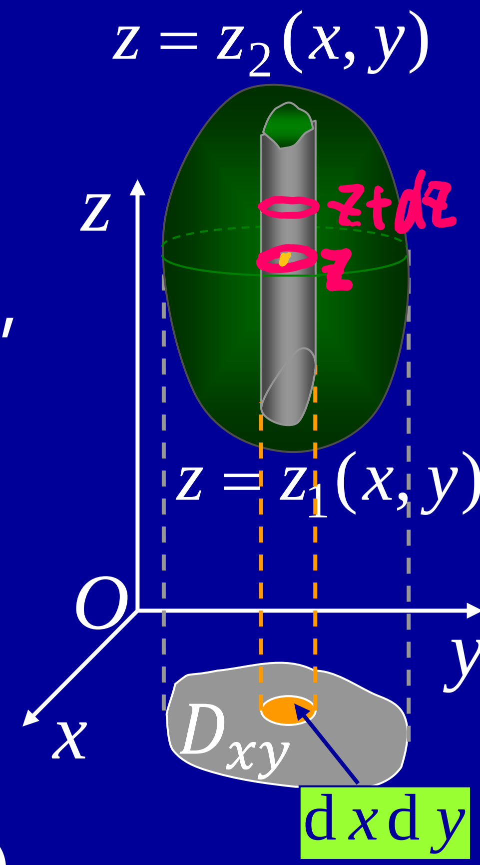
$\Delta\sigma_{xy}$(设面积为$dxdy$), 以$\Delta\sigma_{xy}$ 为准线，作母线平行于

z 轴的柱面截Ω得到对应的细柱体$\Delta\Omega$. 现给出这个$\Delta\Omega$

的质量.

微元法求：平面$z=z,z=z+dz$截$\Delta\Omega$得ΔV，在$\Delta\sigma_{xy}$内任取一点(x,y),过此点作垂直于xOy的直线交平面z于点$P(x,y,z)$，P点密度代替ΔV各点密度，

ΔV质量近似值：$f(x,y,z)dxdydz$



细长柱体$\Delta\Omega$质量为：

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{———} \quad (*)$$

（2）Ω总质量可认为分布在其投影域D_{xy}上.

$\Delta\Omega$的质量可认为分布在$\Delta\sigma_{xy}$上.

$(*)$可看作$\Delta\sigma_{xy}$质量微元. 于是，Ω的质量为:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

说明: 化成先对z求定积分, 再对x, y的二重积分.

投影法 (“先一后二”)

(计算公式对于$f(x,y,z)$是否变号都成立.)

设区域 $\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D:\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得:

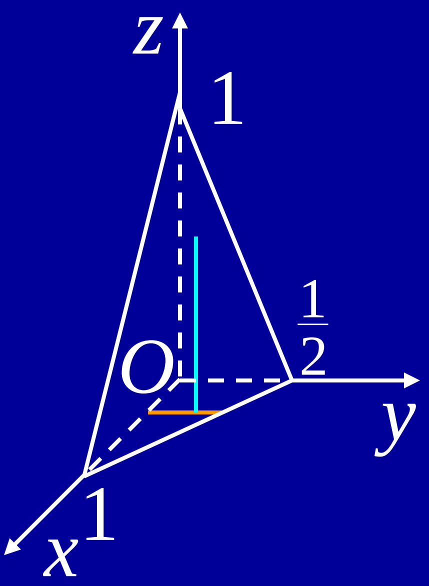
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

投影法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例1. 计算三重积分 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域 .



解: $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1-x-2y\\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x)\\ 0\le x\le 1\end{cases}$

$$\therefore \iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

说明： (1) 投影法求三重积分时，应是关于投影面

(如xOy)的简单体，若不是，可将Ω分割成若干个简单体.

(2) 如将Ω投影到xOy面，得到平面区域D_{xy}，确定

变量x, y的变化范围.

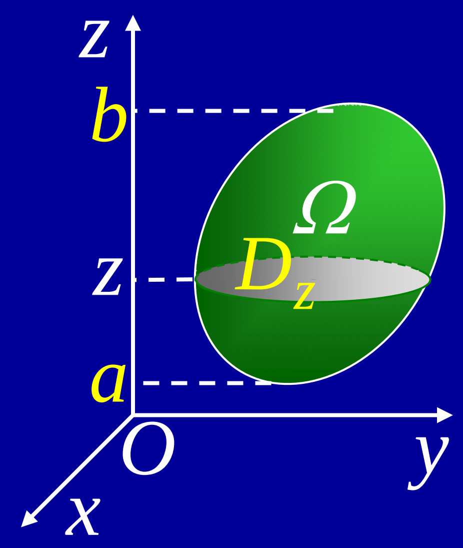
D_{xy}的边界曲线一般是围成Ω的边界曲面的交线在

xOy面上的投影.

(3) z 的积分限确定， “穿线法”(自下向上)

方法2. 平行截法 (“先二后一”)

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$



以 D_z 为底, d z 为高的柱形薄片质量为

$$\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

面密度≈ $f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

该物体的质量为

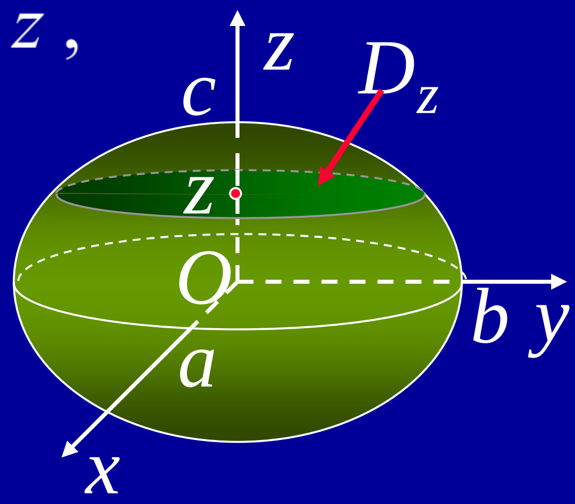
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: $\Omega: \begin{cases} -c\le z\le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用 “**先二后一**”

$$\therefore\quad \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-c}^{c} z^2\,\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

“先一后二”与 **“先二后一”** 的选择问题：

被积函数及积分域的特点

当被积函数为某变量的一元函数，且用垂直于与该变量同名的坐标轴的平面截积分区域 Ω 所得截面面积易计算，一般用 **“先二后一”**.

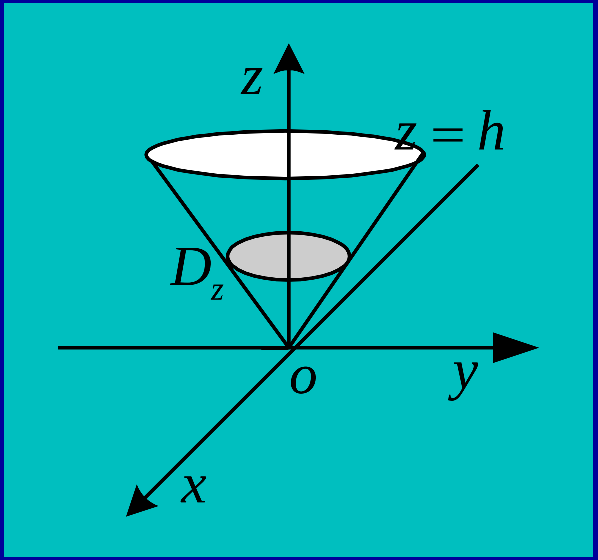
步骤： Ω 投影到与被积函数变量同名的坐标轴，确定此变量变化范围.

此范围内任意一点处作垂直于该轴的平面截 Ω，写出截面解析表达式.

例3. 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 \, dv$,其中Ω由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$

与平面$z=h(R>0, h>0)$所围成的闭区域.

解: $\Omega \begin{cases} 0 \le z \le h \\ D_z: \dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \le z \end{cases}$



$$\iiint_{\Omega} z^2 \, dv = \int_0^h z^2 \, dz \iint_{D_z} dxdy$$

$$= \int_0^h z^2 \pi \left(\frac{Rz}{h}\right)^2 dz$$

$$= \frac{1}{5}\pi R^2 h^3$$

$$\begin{cases} \text{积分区域}\Omega\text{关于某坐标面对称} \\ \text{被积函数关于相应变量具有奇偶性} \end{cases}$$

例： Ω关于xOy面对称，且被积函数$f(x,y,z)$

（1）关于z奇函数，即$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 0$$

（2）关于z 偶函数，即$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 2\iiint_{\Omega_0} f(x,y,z)\,dv$$

Ω_0为Ω被xOy面所截得的半个子域

积分区域关于yOz, xOz面对称情形类似.

例4. 设$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2$，$\Omega_1$为Ω位于第一卦限的部分，则 $\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,dv =$ （ C ）

(A)　$4\iiint_{\Omega_1} f(x^2+y^2+z^2)\,dv$

(B)　$4\iiint_{\Omega_1} f(R^2)\,dv$

(C)　$8\iiint_{\Omega_1} f(x^2+y^2+z^2)\,dv$

(D)　$8\iiint_{\Omega_1} f(R^2)\,dv$

例5. 求 $\iiint_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, 其中$\Omega$由$x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域.

解：由于Ω关于三个变量x,y,z具有对称性.

被积函数具有变量轮换对称性. 故

$$\iiint_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz$$

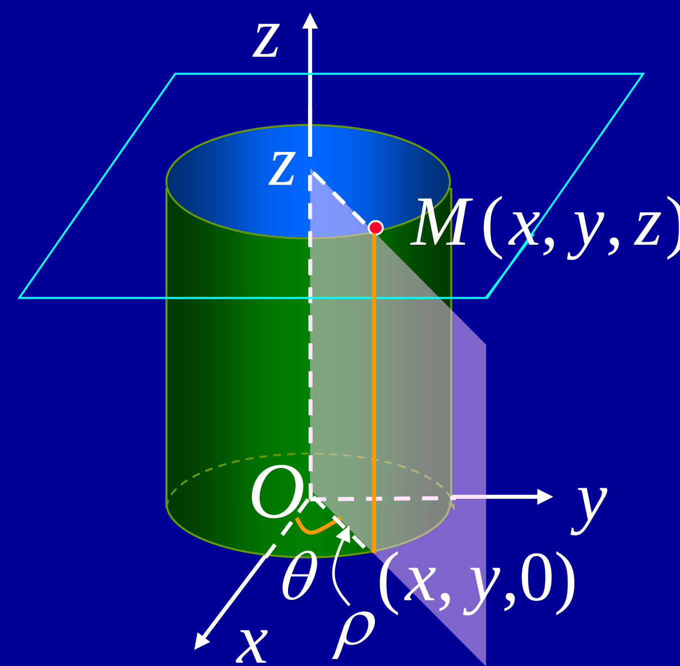
$$= \frac{1}{8}$$

2. 利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 将x,y用极坐标ρ,θ代替, 则(ρ,θ,z)

就称为点M 的柱面坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



三组坐标面为:

$\rho=$常数 $\longrightarrow$ 圆柱面

$\theta=$常数 $\longrightarrow$ 半平面

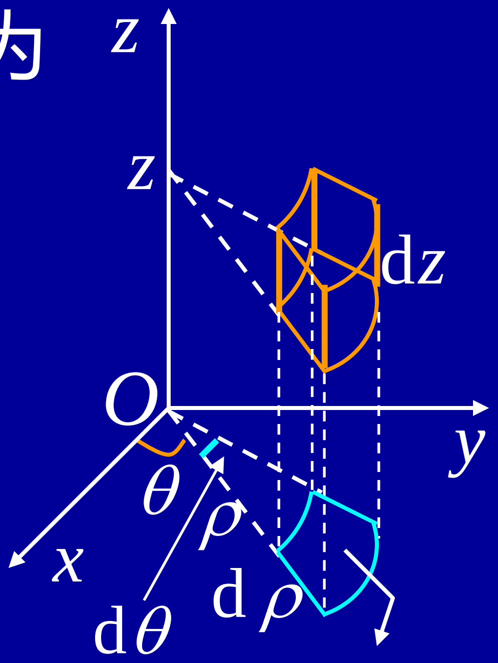
$z=$常数 $\longrightarrow$ 平面

θ: xOz半平面 $(x\ge 0)$ 绕z轴正向逆时针转到点M的转角.

ρ: 点M到z轴的距离, z: 点M的竖坐标.

如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



$$\boxed{\mathrm{d}\sigma=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}$$

因此

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

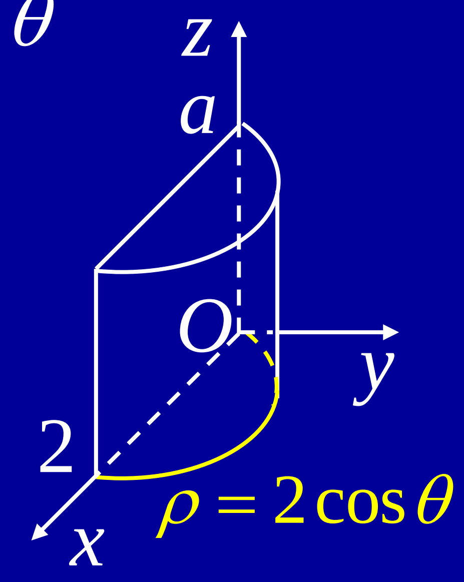
适用范围:

1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单 ;

2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

例6. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le z\le a\end{cases}$



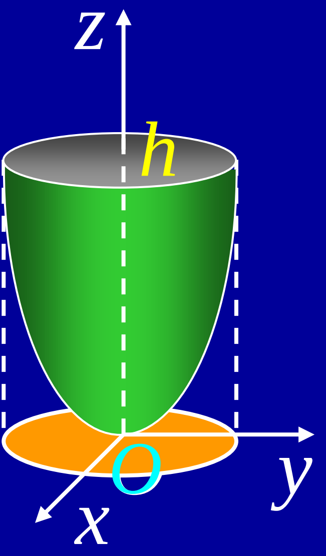
$$\text{原式}=\iiint_\Omega z\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^a z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

例7. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中 Ω 由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho$$

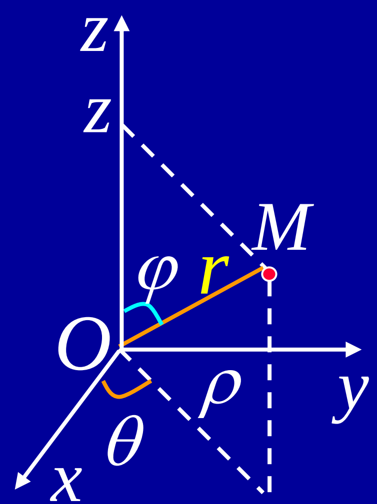
$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

3. 利用球坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 其柱坐标为(ρ,θ,z)，称 (r,θ,φ) 为点M 的球面坐标，r是原点O与点M的距离，φ为有线线段$\overrightarrow{OM}$与z轴正向的夹角.θ为M在xOy面投影点的极角.

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$



$$\rho = r\sin\varphi$$

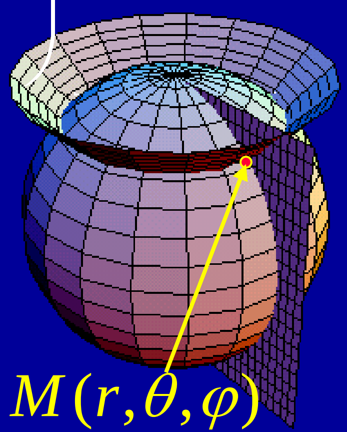
$$z = r\cos\varphi$$

坐标面分别为

$r=$ 常数 ⟶ 球面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

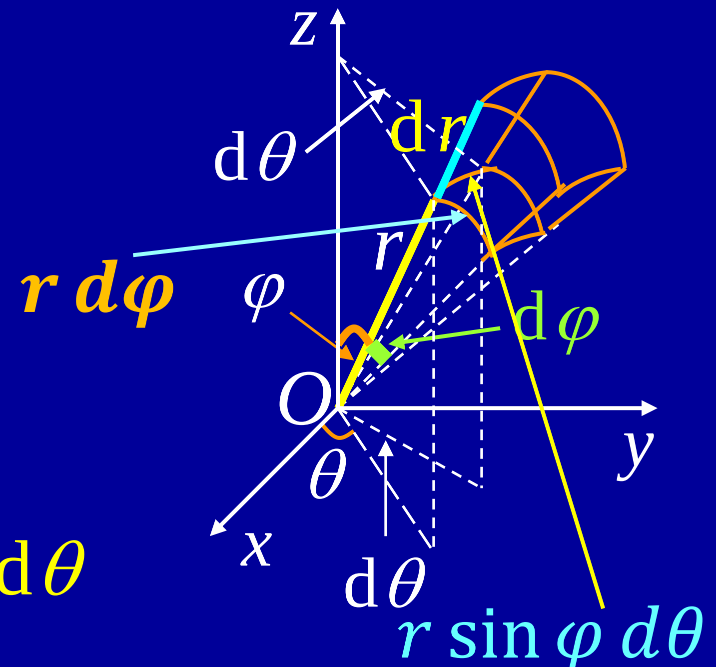
$\varphi=$ 常数 ⟶ 锥面



球面坐标有： $x^2+y^2+z^2=r^2$

球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



因此 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\iiint_\Omega F(r,\theta,\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r,\theta,\varphi)=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)$

一般化为：先对r, 再对φ，最后对θ的累次积分.

适用范围:

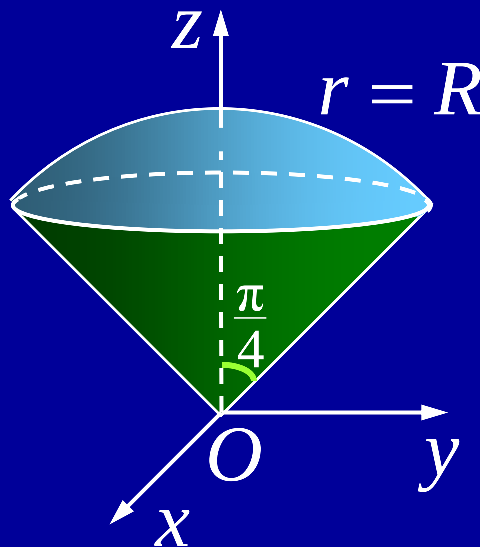
1) **积分域**表面用球面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用球面坐标表示时**变量互相分离**.

例8. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



$$\therefore\ \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

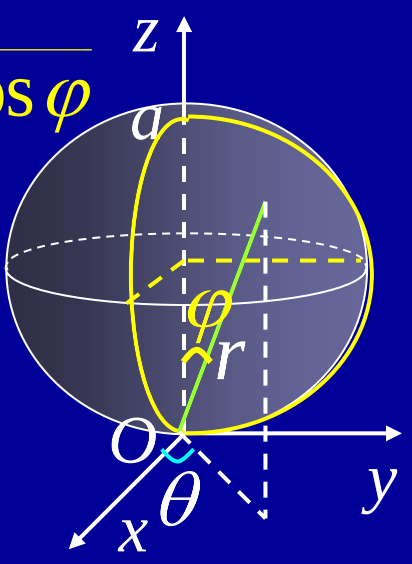
例9. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z\ (a>0)$ 所围立体体积.

解: 由曲面方程可知, 立体位于 xOy 面上部, 且关于 xOz yOz 面对称, 并与 xOy 面相切, 故在球坐标系下所围立体为

$$\Omega: 0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

利用对称性, 所求立体体积为

$$r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$$



$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}v$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3$$

$$\boxed{\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

"穿线法" 确定积分限

(1) r积分限确定：从原点出发引射线穿过Ω, 穿入时碰到边界曲面$r = r_1(\varphi, \theta)$ (下限), 穿出时离开边界曲面$r = r_2(\varphi, \theta)$ (上限).

特殊地，原点在Ω内部, r下限为0.

(2) φ 积分限确定：Ω 上点M对应的向量$\overrightarrow{OM}$与z轴正向的夹角变化范围.

(3) θ确定：Ω投影到xOy面上投影区域极角变化范围.

(投其它面类似)

目录 上页 下页 返回 结束

三重积分按三种坐标计算的考虑顺序：

优先：球面坐标，积分区域为球体，球锥体，球体一部分，两同心球面所围；被积函数用球面坐标简单.

其次：柱面坐标

最后：直角坐标

作业

P166　1: (3) ,　2,　5,　8,　9,

11: (1),(3),　14

思考与练习

1. 将$I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示, 其中$\Omega$由六个平面 $x=0,\ x=2,\ y=1,\ x+2y=4,\ z=x,\ z=2$ 所围成, $f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示:

$$\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，计算

$$\iiint_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v$$

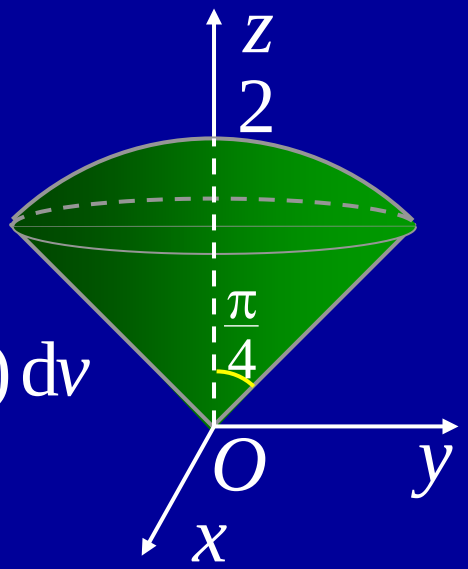
提示： 利用对称性

$$\text{原式}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$=0$$

奇函数

3. 设Ω由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成, 计算$I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$.



提示:

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)\,\mathrm{d}v$$

利用对称性

$$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

用球坐标

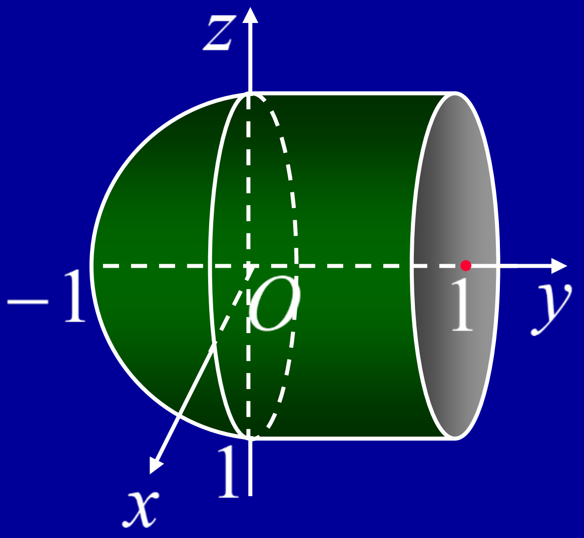
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{64}{5}\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\pi$$

4. 计算 $I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$ 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围成.

分析: 若用“先二后一”, 则有

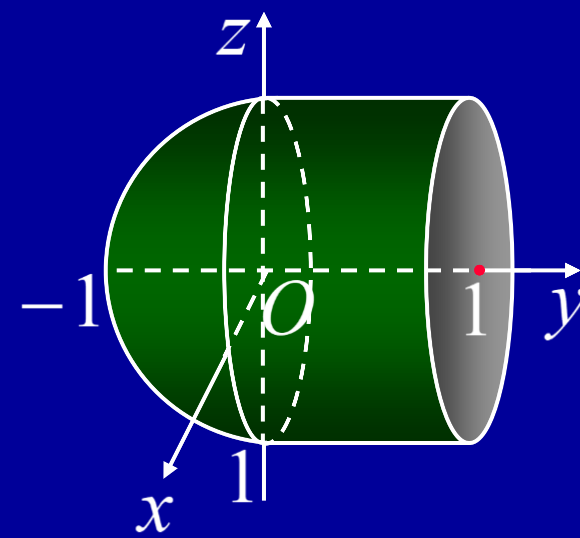
$$I=\int_{-1}^{0} y\,\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_{0}^{1} y\,\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$



计算较繁! 采用“投影法”较好.

解: Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围, 故可表为



$$\Omega:\begin{cases}-\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

$$I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\,\mathrm{d}y=\cdots=\frac{28}{45}$$

思考: 若被积函数为 $f(y)$ 时, 如何计算简便?

5. 计算$I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中

Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成.

解: $I=\iiint_{\Omega}\boxed{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+5\iiint_{\Omega}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

利用对称性

$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\,\mathrm{d}r=21\pi$$