习题课

多元函数微分法及其应用

一、 基本概念、运算

1. 多元函数的定义、极限 、连续

- 判断极限不存在及求极限的方法
- 函数的连续性及其性质

2. 偏导数、 全微分的定义,计算; 及其与连续等关系.

3. 多元复合函数求导法则; 隐函数求导.

4. 方向导数与梯度

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数:
  - 先代后求
  - 先求后代
  - 利用定义：分界点，不连续点处
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

二、多元函数微分法的应用

1. 几何应用

求曲线的切线与法平面 (关键: 切向量)

求曲面的切平面与法线 (关键: 法向量)

2. 极值与最值问题

- 极值的必要条件与充分条件
- 求条件极值的方法 (消元法, 拉格朗日乘数法)
- 求解最值问题

例1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 时, 下列算法**是否正确**?

解法1 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

解法2 令 $y = kx$, 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k} = 0$

解法3 令 $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta,$

$$原式 = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

分析:

解~~法~~1 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=0$

此法第一步排除了沿坐标轴趋于原点的情况,第二步未考虑分母变化的所有情况, 例如, $y=\frac{x}{x-1}$时, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$, 此时极限为 1 .

解~~法~~2 令 $y=kx$, 原式 $=\lim\limits_{x\to0}x\dfrac{k}{1+k}=0$

此法排除了沿曲线趋于原点的情况. 例如 $y=x^2-x$ 时

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1$$

解法3 令 $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta,$

$$原式 = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

此法忽略了θ的任意性, 当$r\to 0, \theta\to -\frac{\pi}{4}$时

$$\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}$$ 极限不存在！

由以上分析可见, 三种解法都不对, 因为都不能保证自变量在定义域内以任意方式趋于原点 . 同时还可看到, 本题极限实际上不存在 .

特别要注意, 在某些情况下可以利用极坐标求极限, 但要注意在定义域内 r , θ的变化应该是任意的.

函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)处可微的充分条件是:

（1） $f(x,y)$在点(x_0, y_0)处连续;

（2） $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$在点(x_0, y_0)的某邻域存在;

（3） $\Delta z - f_x'(x,y)\Delta x - f_y'(x,y)\Delta y$,
当$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时是无穷小量;

（4） $\dfrac{\Delta z - f_x'(x,y)\Delta x - f_y'(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$,
当$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时是无穷小量.

2、二元函数$f(x, y)$在点（x_0，y_0)处两个偏导数

$f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$存在，是$f(x, y)$在该点连续的

（A）充分条件而非必要条件 （B）必要条件而非充分条件

（C）充分必要条件 （D）既非充分条件又非必要条件

3、$f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$的两个偏导数f_x, f_y都存在，则

A) $f(x,y)$在P点连续；B）$f(x,y)$在P点可微；

C）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$及$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$存在；D）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在.

4、设$Z = f(x, y)$在(x, y)处不连续，则$f(x, y)$在该点处

$A)$必无定义；B）极限必不存在；

C）偏导数必不存在；D）必不可微.

5、二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点(0,0)处

(A) 连续、偏导数存在

（B）连续、偏导数不存在

(C) 不连续、偏导数存在

（D）不连续、偏导数不存在

$$f(x, y, z) = \frac{x\cos y + y\cos z + z\cos x}{1 + \cos x + \cos y + \cos z},$$ 求$\mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}$.

例2. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad\quad , & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0) 处连续且偏导数存在，但不可微.

提示: 利用 $2xy\le x^2+y^2$，知

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$$

故 f 在 (0,0) 连续;

又因 $f(x,0)=f(0,y)=0$，所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

而 $$\Delta f\big|_{(0,0)} = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

当 $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ 时,

$$\frac{\Delta f\big|_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$$

$$\not\longrightarrow 0$$

所以 f 在点(0,0)不可微！

例3. 已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$, 且 $f(x,0)=x$, 求出 $f(x,y)$ 的表达式.

解法1 令 $u=x+y, v=x-y$, 则

$$x=\frac{1}{2}(u+v)\,,\ y=\frac{1}{2}(u-v)$$

$$\therefore\quad f(u,v)=\frac{1}{4}(u+v)^2-\frac{1}{4}(u-v)^2+\varphi(u)=uv+\varphi(u)$$

即 $$f(x,y)=xy+\varphi(x)$$

$$\Big\downarrow\ \because f(x,0)=x,\ \therefore \varphi(x)=x$$

$$f(x,y)=x(y+1)$$

解法2 $\because f(x+y,x-y)=(x+y)(x-y)+\varphi(x+y)$

$\therefore\quad f(x,y)=xy+\varphi(x)$ 以下与解法1 相同.

例4. 设 $z=z(x,y)$ 由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$

确定的函数, 则$dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

解：方程两边求全微分，得

$$e^{2yz}\,d(2yz)+dx+2y\,dy+dz=0$$

$$2e^{2yz}(zdy+ydz)+dx+2y\,dy+dz=0$$

将$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，代入原方程得： $z=0.$

将 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$，代入得 $2\,dz+dx+dy=0$

$$d\,z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$$

例5. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$ 其中f,φ具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)y+y\varphi'(x+y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)x$$

$$+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

例6. 设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中f可微，求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解: $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot x$$

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy)$$

例7. 设$u=f(x,y,z)$有连续一阶偏导数，函数$y=y(x)$，

$z=z(x)$分别由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2$，

$e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 求 $\frac{du}{dx}$

解：$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} \qquad (*)$$

对$e^{xy}-xy=2$两边关于x求导，

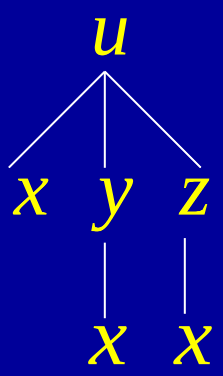
$$e^{xy}(y+xy')-y-xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{y}{x}$$

对$e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$两边关于$x$求导，

$$e^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{dz}{dx}=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}$$

代入 (*) 式，即可求得.



例8. 设函数$z=f(x,y)$在点(0,0)附近有定义，且

$f_x'(0,0)=3$，$f_y'(0,0)=1$，则

(A) $dz\Big|_{(0,0)}=3\,dx+dy$

(B) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为(3,1,1)

(C) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为(1,0,3)

(D) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为(3,0,1)

例9. 曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面方程.

解： 曲面在任一点$P(x,y,z)$处的法向量$\vec{n}=(2x,2y,-1)$

$$\vec{n}_0=(2,4,-1)$$

$$\vec{n}//\overrightarrow{n_0} \Rightarrow \vec{n}=\lambda\vec{n}_0$$

$$2x=2\lambda,\quad 2y=4\lambda,\quad \lambda=1 \Rightarrow \vec{n}=(2,4,-1)$$

点P在曲面上，$z=(x^2+y^2)|_{(1,2)}=5 \Rightarrow P(1,2,5)$

切平面方程 $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$

$$\Rightarrow 2x+4y-z=5.$$

例10. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕y轴旋转所形成的旋转曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向内侧的单位法向量.

解：旋转曲面方程为：$3x^2+3z^2+2y^2=12$

令 $F(x,y,z)=3x^2+3z^2+2y^2-12$

$$F_x'=6x,\qquad F_y'=4y,\qquad F_z'=6z$$

点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处法向量：$\vec{n}=\left(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\right)$

指向内侧的单位法向量

$$\vec{e}=\frac{1}{2\sqrt{30}}\left(0,-4\sqrt{3},-6\sqrt{2}\right)=\left(0,-\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$$

例11. 设$z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中f具有二阶连续偏导数, 求 dz 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解: $dz = f_1' \, d(x+y) + f_2' \, d(x-y) + f_3' \, d(xy)$

$=(f_1' + f_2' + y f_3')dx + (f_1' - f_2' + x f_3')\, dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2' + y f_3'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_1' + f_2' + y f_3')$$

$$= \frac{\partial f_1'}{\partial y} + \frac{\partial f_2'}{\partial y} + f_3' + y \frac{\partial f_3'}{\partial y}$$

$$= f''_{11} + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{13} \cdot x + f''_{21} - f''_{22} + x f''_{23}$$

$$+ f'_3 + y(f''_{31} - f''_{32} + x f''_{33})$$

$$= f''_{11} + (x+y) f''_{13} - f''_{22} + (x-y) f''_{23} + xy f''_{33} + f'_3$$

（其中$f''_{12} = f''_{21}$，$f''_{13} = f''_{31}$，$f''_{23} = f''_{32}$）

例12. 求$z = 3x + 2y$在点$(1,1)$沿$x^2 + y^2 = 2$外法线方向的方向导数.

解: $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 3, \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$ $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

例13. 求函数 $z = x ln(1+y)$ 在点(1,1)沿曲线 $2x^2 - y^2 = 1$ 切线（指向x增大方向）向量的方向导数.

解: $$\tan\alpha = \left.\frac{4x}{2y}\right|_{(1,1)} = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \left[\ln(1+y)\cos\alpha + \frac{x}{1+y}\cos\beta\right]_{(1,1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\ln 2 + 1)$$

例14. 求函数 $u = x^2 \ln(y+3z)$ 在点$(1,2,2)$ 处沿平面 $5x - y - z = 1$ 法线方向的方向导数.

解: $\vec{n} = \pm(5,-1,-1)$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \pm\frac{1}{\sqrt{27}}(5,-1,-1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,2)} = 2\ln 8, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,2)} = \frac{1}{8}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,2)} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \pm\frac{1}{\sqrt{27}}\left(10\ln 8 - \frac{1}{2}\right)$$

例 求函数$f(x,y)=x^2-xy+y^2$在点（1，1）沿与x轴方向夹角为α的方向射线$\vec{l}$的方向导数.并问在怎样的方向上此方向导数有

（1）最大值；（2）最小值；（3）等于零？

求函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3x - 2y$ 在点 $(1,1,2)$ 处的梯度，并问在 哪些点处梯度为零？

解 由梯度计算公式得

例15. 在第一卦限作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使其在三坐标轴上的截距的平方和最小，并求切点.

解: 设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，

则切平面的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_M=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

切平面方程

$$\frac{\cancel{2}x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{\cancel{2}y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{\cancel{2}z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即 $$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$$

切平面在三坐标轴上的截距为 $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$

问题归结为求 $s=(\dfrac{a^2}{x})^2+(\dfrac{b^2}{y})^2+(\dfrac{c^2}{z})^2$

在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的条件极值问题 .

设拉格朗日函数

$$F=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0)$$

令

$$\begin{cases} F_x = -2\left(\dfrac{a^2}{x}\right)\dfrac{a^2}{x^2} + 2\lambda\dfrac{x}{a^2} = 0 \\ F_y = -2\left(\dfrac{b^2}{y}\right)\dfrac{b^2}{y^2} + 2\lambda\dfrac{y}{b^2} = 0 \\ F_z = -2\left(\dfrac{c^2}{z}\right)\dfrac{c^2}{z^2} + 2\lambda\dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \longrightarrow \text{唯一驻点} \begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} \end{cases}$$

由实际意义可知 $M\left(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}, \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}, \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)$

为所求切点 .

例16. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解: 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x+y-2z-2=0$ 的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|x+y-2z-2\right|$$

问题归结为

$$\begin{cases}\text{目标函数: } (x+y-2z-2)^2 \quad (\min)\\ \text{约束条件: } x^2+y^2-z=0\end{cases}$$

作拉氏函数

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

令
$$\begin{cases} F_x' = 2(x+y-2z-2)-2\lambda x = 0 \\ F_y' = 2(x+y-2z-2)-2\lambda y = 0 \\ F_z' = 2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda = 0 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$

解此方程组得唯一驻点 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}.$

由实际意义最小值存在，故

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}$$

练习题:

1. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出该法线方程.

提示: 设所求点为 (x_0, y_0, z_0), 则法线方程为

$$\frac{x-x_0}{y_0} = \frac{y-y_0}{x_0} = \frac{z-z_0}{-1}$$

利用 $\begin{cases} \dfrac{y_0}{1} = \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{-1}{1} \\ z_0 = x_0 y_0 \end{cases}$ 法线垂直于平面 点在曲面上

得 $x_0 = -3$, $y_0 = -1$, $z_0 = 3$

2. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使与三坐标面围成的四面体体积最小,并求此体积.

提示: 设切点为(x_0, y_0, z_0), 则切平面为

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

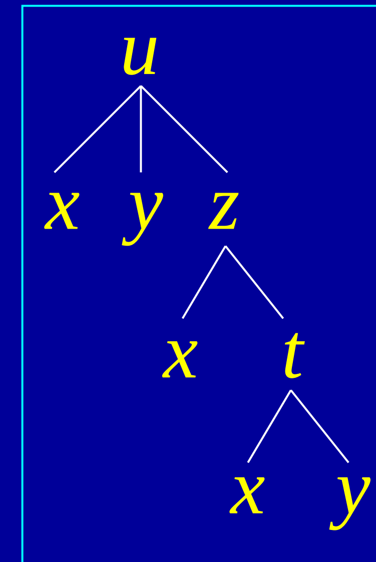
所指四面体围体积 $V=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2b^2c^2}{x_0 y_0 z_0}$

V 最小等价于 $f(x, y, z)=xyz$ 最大, 故取拉格朗日函数

$$F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

用拉格朗日乘数法可求出(x_0, y_0, z_0).

3. 设 $u = f(x, y, z)$ 有二阶连续偏导数, 且 $z = x^2 \sin t$, $t = \ln(x+y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.



解:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_3' \cdot \left(2x\sin t + x^2 \cos t \cdot \frac{1}{x+y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{12}'' + f_{13}'' \cdot \left(x^2 \cos t \cdot \frac{1}{x+y}\right)$$

$$+ \left[f_{32}'' + f_{33}'' \cdot \left(x^2 \cos t \cdot \frac{1}{x+y}\right)\right]\left(2x\sin t + \frac{x^2 \cos t}{x+y}\right)$$

$$+ f_3' \cdot \left[2x\cos t \cdot \frac{1}{x+y} + x^2 \frac{-\sin t \cdot \frac{1}{x+y}(x+y) - \cos t \cdot 1}{(x+y)^2} \right]$$

作 业

P132　　1， 2， 5， 6: (1), 9，

11， 12， 15, 17