习题课

线面积分的计算

一、 曲线积分的计算法

二、曲面积分的计算法

一、曲线积分的计算法

1. 基本方法

曲线积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对弧长)}\\\text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分

(1) 统一积分变量 $\left\{\begin{array}{l}\text{用参数方程}\\\text{用直角坐标方程}\\\text{用极坐标方程}\end{array}\right.$

(2) 确定积分上下限 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 小下大上}\\\text{第二类: 起下终上}\end{array}\right.$

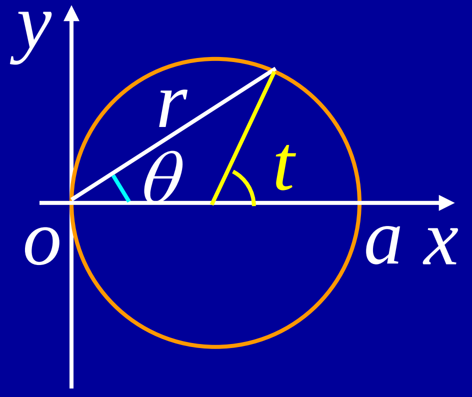
例1. 计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为圆周 $x^2+y^2=ax$.

提示: 利用极坐标， $L: r = a\cos\theta \ \ (-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta = a\,\mathrm{d}\theta$$

$$\text{原式} = \int_L \sqrt{ax}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta}\cdot a\,\mathrm{d}\theta = 2a^2$$

说明: 若用参数方程计算, 则



$$L: \begin{cases} x = \frac{a}{2}(1+\cos t) \\ y = \frac{a}{2}\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\mathrm{d}t$$

例2. 计算 $\int_L (2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为摆线

$$x = a(t-\sin t)\,, \quad y = a(1-\cos t)$$

上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧.

提示: $(2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = a(1+\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$

$$+\,a(t-\sin t)\cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$

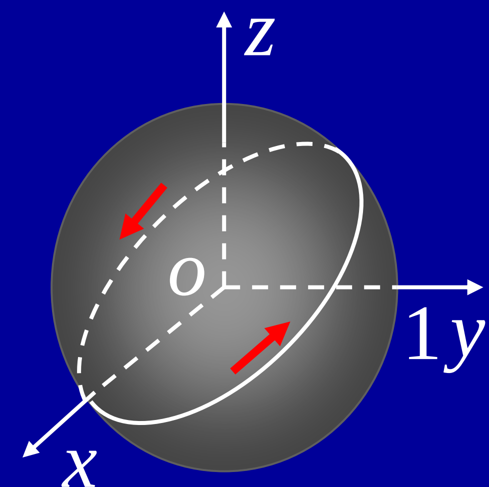
$$= a^2 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad \text{原式} = a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left[-t\cos t - \sin t\,\right]_0^{2\pi} = -2\pi a^2$$

例3. 计算 $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}z$，其中 Γ 由平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得，从 z 轴正向看沿逆时针方向.

提示: 因在 Γ 上有 $x^2+2y^2=1$，故



$$\Gamma:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \qquad (0\le t\le 2\pi) \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases}$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

2. 基本技巧

(1) 利用对称性及重心公式简化计算 ;

(2) 利用积分与路径无关的等价条件;

(3) 利用格林公式 (注意**加辅助线的技巧**) ;

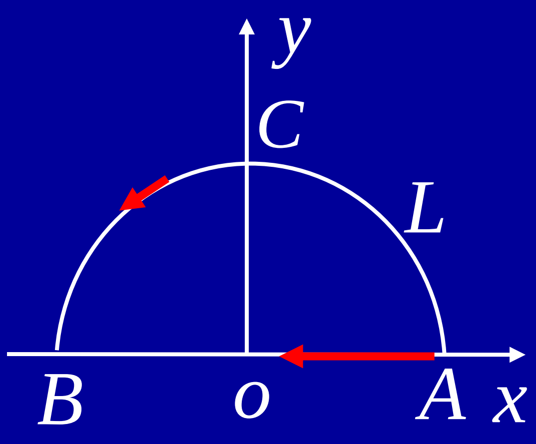
(4) 利用斯托克斯公式 ;

(5) 利用两类曲线积分的联系公式 .

例4. 计算$I=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$, 其中$L$ 是沿逆时针方向以原点为中心, a 为半径的上半圆周.

解法1 令 $P=x^2-y,\ Q=y^2-x$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$$



这说明积分与路径无关, 故

$$I=\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

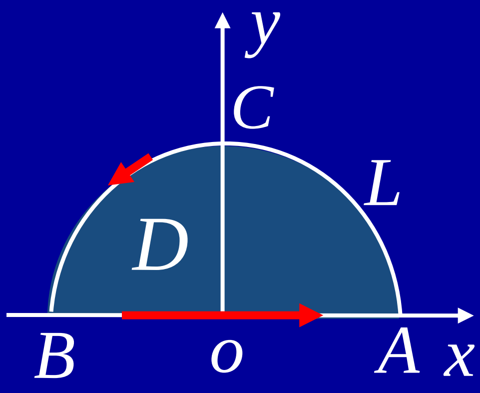
$$=\int_a^{-a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$

解法2 添加辅助线段 $\overline{BA}$, 它与L所围区域为D, 则

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$



(利用格林公式)

思考:

(1) 若L 改为顺时针方向,如何计算下述积分:

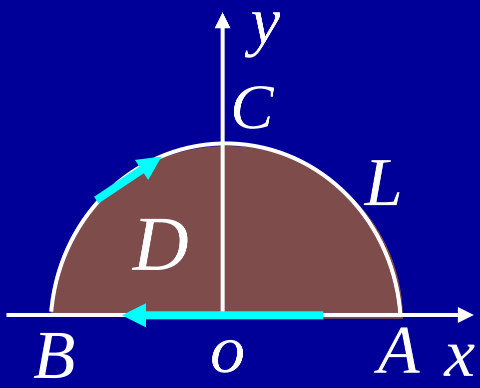
$$I_1=\int_L(x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

思考题解答:

$$(1)\ I_1 = \int_L (x^2 - 3y)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{L+\overline{AB}} - \int_{\overline{AB}}$$

$$= -2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{2}{3}a^3 = a^2\left(\frac{2}{3}a - \pi\right)$$



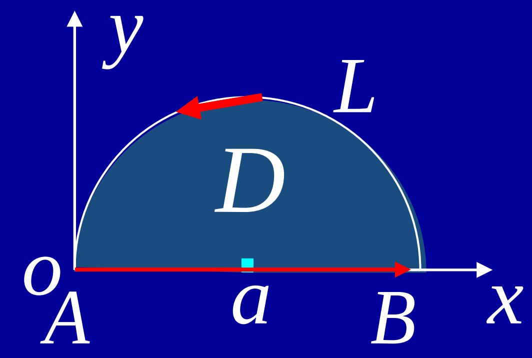
例5. 计算 $I=\int_L (e^x \sin y - 2y)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 2)\mathrm{d}y,$

其中L为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq 0,$ 沿逆时针方向.

提示:

$$I=\int_L e^x \sin y\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 2)\mathrm{d}y \;-2\int_L y\mathrm{d}x$$

$$=\oint_{L+\overline{AB}} - \int_{\overline{AB}} \;-2\int_L y\mathrm{d}x$$



$$L:\begin{cases} x=a(1+\cos t) \\ y=a\sin t \end{cases} \quad t:0\to\pi$$

$$=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} 0\,\mathrm{d}x \;+2a^2\int_0^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \;=\pi a^2$$

例6. 设在右半平面 $x>0$ 内, 力 $\vec{F}=-\frac{k}{\rho^3}(x,y)$ 构成力场,其中 k 为常数, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

提示: $\vec{F}$ 沿右半平面内任意有向路径 L 所作的功为

$$W=\int_L -\frac{k}{\rho^3}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)$$

令 $P=-\frac{kx}{\rho^3},\ Q=-\frac{ky}{\rho^3}$

易证 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x>0)$

例7. 求力 $\vec{F}=(y,z,x)$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去沿顺时针方向.

提示: 方法1

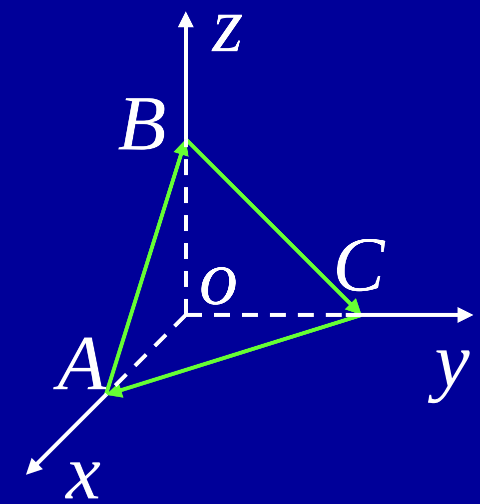
$$W=\oint_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$$

利用对称性

$$=3\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

$$=3\int_{\overline{AB}} x\,\mathrm{d}z$$

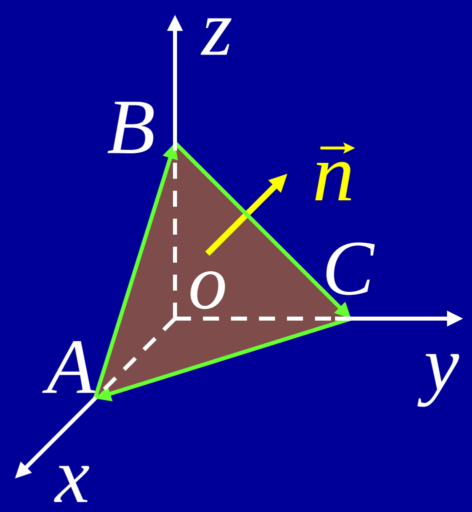
$$=3\int_{0}^{1}(1-z)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}$$



方法2 利用斯托克斯公式

设三角形区域为Σ, 方向向上, 则

$$W=\oint_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$$



$$=-\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$\Sigma: x+y+z=1$$

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(-3)\,\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$$

二、曲面积分的计算法

1. 基本方法

曲面积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对面积)} \\ \text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{转化}}$ 二重积分

(1) 统一积分变量 — 代入曲面方程

(2) 积分元素投影 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 始终非负} \\ \text{第二类: 有向投影}\end{array}\right.$

(3) 确定二重积分域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

思考题

1) 二重积分是哪一类积分?

答: 第一类曲面积分的特例.

2) 设曲面 $\Sigma: z=0\,,(x,y)\in D$, 问下列等式是否成立?

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \checkmark$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \times$$

不对! 对坐标的积分与 Σ 的侧有关

2. 基本技巧

(1) 利用对称性及重心公式简化计算

(2) 利用高斯公式 $\begin{cases} \text{注意公式使用条件} \\ \text{添加辅助面的技巧} \end{cases}$

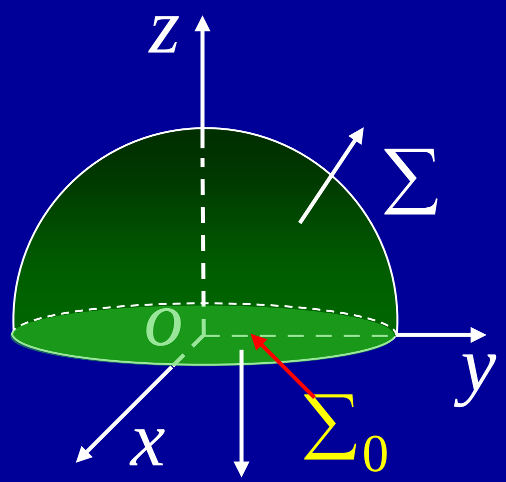
(辅助面一般取平行坐标面的平面)

(3) 两类曲面积分的转化

例8. 计算 $\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为半球面

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

提示: 以半球底面 Σ_0 为辅助面, 且取下侧, 记半球域为 Ω, 利用高斯公式有



$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3$$

例9. 设 Σ 为简单闭曲面, $\vec{a}$ 为任意固定向量, $\vec{n}$ 为Σ的单位外法向向量, 试证 $\oiint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S=0.$

证明: 设 $\vec{n}=(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$

$\vec{a}^{\,0}=(\cos\alpha'\,,\cos\beta'\,,\cos\gamma')$ (常向量)

则 $\oiint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{a}^{\,0}\,\mathrm{d}S$

$$=\oiint_{\Sigma}(\underline{\cos\alpha}\cos\alpha'+\underline{\cos\beta}\cos\beta'+\underline{\cos\gamma}\cos\gamma')\,\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma}\cos\alpha'\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta'\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma'\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos\alpha')+\frac{\partial}{\partial y}(\cos\beta')+\frac{\partial}{\partial z}(\cos\gamma')\right]\mathrm{d}v$$

$$=0$$

例10. 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 取外侧.

解: $I = \dfrac{1}{R^3} \oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\pi$$

例11. (2000研)设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S, 都有

$$\oiint_S xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-xyf(x)dz\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}zdxdy=0,$$

其中$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$， 求$f(x)$.

分析： 闭曲面S任意$\Rightarrow$ S围成的区域Ω任意. 由结论：对黎曼积分，若$f(M)$在Ω上连续，在Ω的任何部分区域$\Omega^*\subseteq\Omega$ 上，$\int_{\Omega^*}f(M)\,d\Omega=0$, 则$f(M)$=0（在Ω 上）.

由于若存在$P_0\in\Omega$，$f(P_0)\neq0$，不妨取$f(P_0)>0$,

由连续函数局部保号性，$\exists U(P_0)\subset\Omega$, 使得$f(P)>0$, $\forall P\in U(P_0)$. 取$U(P_0)$内任意闭区域Ω', 则$\int_{\Omega'} f(M)\,d\Omega>0$, 矛盾.

解：由高斯公式知，

$$\iiint\limits_{\Omega}(f(x)+xf'(x)-xf(x)-e^{2x})\,dV=0$$

在半空间$x>0$中任何有界闭区域Ω上恒成立，从而

当$x>0$时，$f(x)+xf'(x)-xf(x)-e^{2x}=0$ 恒成立.

即

$$f'(x)+\frac{1-x}{x}f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$$

得方程通解：

$$f(x)=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}\left(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{x-\ln x}\left(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\ln x-x}dx+C\right)$$

$$=\frac{e^{x}}{x}(e^{x}+C)$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，知：$\lim\limits_{x\to0^+}e^{x}(e^{x}+C)=0$

得$C=-1$． 因此 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x}(e^{x}-1)$