第四章导数与微分

第一节导数的概念

一、引例

引例1 我们考虑一个石头被垂直上抛或者一只活塞往复运动，这些刚体的运动究其本质，实际上都可以看成是一个质点M沿直线的运动，如果从始点M_0出发,则其位移S将依赖于时间t,于是我们有$S=f(t)$,求t_0时刻质点M的运动速度.

解:基于匀速直线运动的知识:速度=位移/时间,但如果用$f(t_0)/t_0$ 代替此时刻的速度，显然是不妥的,因为质点是在作变速运动, 于是我们考虑从t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内质点的平均速度$\overline{v}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$,如果时间间隔很短,这个平均值就会接近$t_0$时刻的速度,从位移的连续变化看可以认为平均速度的极限就是质点M在t_0时刻的速度,即$v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$.

引例2 求曲线$y=f(x)$上一点$M_0(x_0,f(x_0))$处的切线.

解: 在曲线C上任取一点$M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$这样过曲线的上的两点$M_0,M$可以作一条割线$M_0M$,我们让动点$M$ 沿曲线$y=f(x)$无限接近定点M_0，动割线的极限位置就是过点M_0的切线,见图4.1.1.

根据切线的这个定义,我们先求出割线的斜率：$K_g=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$那么切线的斜率应为：$K_q=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

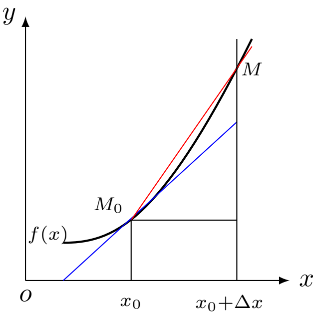

图4.1.1

于是切线的方程为$Y-f(x_0)=K_q(x-x_0)$

以上两个毫不相干的问题,可以抽象成一样的结果:这就是讨论函数的改变量Δy与自变量的改变量Δx之比的极限的存在性,同时这样的比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 还反映了函数在某定点附近变化的快慢程度,即函数的变化速率.

同理若电量Q随着时间t的变化而变化，那么$Q = Q(t)$,于是，在t_0时刻电量的变化率可以表示此刻的电流强度（单位时间内电量的改变量的极限）.又如加速度（速度的变化率）、角速度（角度的变化率）、边际成本（成本对产量的变化率) 等等.自然科学、工程技术和经济学领域中的许多问题在其变化中都要考虑其相应函数的变化率.撇开实际意义我们给出如下定义.

二、函数导数的定义

定义4.1.1设函数$y = f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义,且$x_0 + \Delta x \in U(x_0)$,若极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数在点$x_0$处可导，极限值$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 被称为函数在点x_0处的导数. 记作$f'(x_0)$或$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$,$y'(x_0)$

如果令$x = x_0 + \Delta x$,我们可以用函数极限的定义来定义导数，这就是

定义4.1.2 设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，若函数$F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的极限$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称函数$f(x)$在点$x_0$处可导.

若令$\Delta x = h$,那么函数$y = f(x)$在点x处的导数，我们还可以写成：$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

从以上定义可以看出函数在一点的导数是函数在该点变化快慢程度的精确描述，我们称其为函数在该点处的变化率.

前面的两个引例告诉我们若质点的运动规律为$s = s(t)$于是，t_0时刻的速度为$v(t_0) = s'(t_0)$. 过曲线$y = f(x)$上一点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率为$f'(x_0)$

设函数$y = f(x)$定义在某个区间I上，如果$\forall x_0 \in I$,函数$y = f(x)$在该点都可导，这样我们在区间I上就确定了一个函数，我们称其为函数$f(x)$的导函数, 简称函数的导数,用如下符号表示$f'(x), y'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$

注：虽然这些符号表示的都是函数在点x处的导数,但他们的意义各有所不同, 可导函数$f(x)$在某一点x_0的导数,就是其导函数$f'(x)$在x_0点的函数值$f'(x_0)$; $y'(x_0)$,则强调了变量y依赖于变量x,而符号$\dfrac{dy}{dx}$中的横线还有除号的意义.

注：自变量的改变量Δx可正可负，但必须$x_0 + \Delta x \in D_f$.

注：由于我们考虑的是函数$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$x_0$处的极限是否存在，由极限的存在性的特征，我们有函数在点x_0处可导的充分必要条件是$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$x_0$处的左右极限存在而且相等, 我们称左极限$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$为函数$f(x)$ 在x_0点的左导数,记作$f'_-(x_0)$, 同样我们可以定义x_0点处的右导数$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

注：虽然函数的自变量的改变量Δx是任意的,但要注意形式的一致性,例如$f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)$也是函数在点x_0处的改变量,但$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$就不是函数在$x_0$处的导数.

三、某些函数的导数

例4.1.1 求常函数$y=C$的导数.

解：这实际上是求它在其定义区间$(-\infty,+\infty)$上的导函数.考虑到任意点处函数的改变量$\Delta y=0$ 所以$y'=0$

例4.1.2 求函数$y=x^n$的导数，n为自然数.

$$
\begin{aligned}
\text{解：} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+C_n^2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

.

注：对于幂函数$y=x^\mu,\mu\in\mathbb{R}$也有$y'=\mu x^{\mu-1}$.

例4.1.3 求函数$y=a^x$的导数.

$$
\begin{aligned}
\text{解：} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}a^x\frac{a^h-1}{h}\\
&= a^x\ln a
\end{aligned}
$$

.

注：$y=e^x$,则$y'=e^x$.

例4.1.4 求函数$y=\log_a x$的导数

$$
\begin{aligned}
\text{解：} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}
$$

注：$y=\ln x$,则$y'=\frac{1}{x}$.

例4.1.5 求函数$y=\sin x$在x_0处的导数.

$$
\begin{aligned}
\text{解：} y'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{2\cos(\frac{x+x_0}{2})\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x-x_0} \\
&= \cos(\lim_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{2})\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \\
&= \cos x_0
\end{aligned}
$$

例4.1. 6 设连续曲线$y=f(x)$, 与$y=e^x-1$ 在原点相切，求$\lim\limits_{n\to\infty}[nf(\frac{2}{n})]^2$.

解：切点为$(0,0)$，则过该点的切线的斜率为$f'(0)=y'(0)=1$

而$f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}[nf(\frac{2}{n})]^2=\lim\limits_{n\to\infty}[2\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}]^2=4$

四、导数的几何意义

我们在引入导数的概念时已经看到函数在一点的导数$f'(x_0)$就是过曲线$y=f(x)$上一点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率

例4.1.7 求曲线$y=x^2$上一点$(2,4)$处切线和法线方程.

解：斜率$f'(2)=f'(x)\,|_{x=2}=2\times 2=4$

切线方程：$Y-4=4(x-2)$,法线方程：$Y-4=-\frac{1}{4}(x-2)$

注：函数在一点处可导，则在该点处一定有切线，请问函数在一点如果不可导是否一定没有切线呢？例如函数$y=\sqrt[3]{x}$ 在点$x=0$处不可导，但是在$(0,0)$处却有切线$y=0$

五、可导与连续的关系

定理4.1.1 若函数在一点处可导,则在该点处必连续

证明: 设函数$y=f(x)$ 在x_0处可导，则有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$

由命题2.3.1，我们有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$,其中$\alpha=\circ(1)$ 那么$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$,于是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 由连续的定义，定理得证.

注：此命题的逆命题不真，例如函数$y=|x|$在点$x=0$处是连续的，但是$\Delta y=|\Delta x|$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$，所以$y'(0)$不存在.

例4.1.8 讨论$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在$x=0$处的可导性与连续性.

解：当$x=0$时因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$,故连续；

但$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$ 故函数在$x=0$ 处不可导.

习题4.1

1.下列各题中均假定$f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，支出A表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,其中$f(0)=0$, 且$f'(0)$存在；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$

以下两题中，选择给出的四个结论中一个正确的结论：

2.设$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$,则$f(x)$在$x=1$处的(　　　)

(A),左右导数都存在(B),左导数存在，右导数不存在，

(C)左导数不存在，右导数存在, (D)左右导数都不存在；

3.设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则$f(0)=0$是$F(x)$ 在$x=0$处可导的

(A),充分必要条件，(B),充分条件但非必要条件，

(C)必要条件但非充分条件, (D)既非充分条件又非必要条件；

4 .当物体温度高于室内温度时，物体就会逐渐冷却，设物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$, 求物体在时刻t的冷却速率.

5.设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$内转过角度θ, 从而$\theta=\theta(t)$,求t_0 时刻的角速度.

6.用定义求下列函数的导数：

1)$f(x)=\cos x$;　　　2)$f(x)=\tan x$;　　　3)$f(x)=\ln x$

4)$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$;　　　5)$f(x)=x^3\sqrt[5]{x}$;　　　$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$

7.设函数$f(x)$在x_0处可导，求$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$

8.设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le x_0\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$,若$f(x)$在$x_0$处可导，求$a,b$的值.

9.如果$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，证明：$f'(0)=0$.

10.设$f(x)$定义在实数轴上，若$\forall x,y\in\mathbb{R} f(x+y)=f(x)\cdot f(y), f'(0)=1,$,证明：函数在实数轴上可导，且$f'(x)=f(x)$

11. 设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(a)=f(b)=k, f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$,证明：存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=k$

12. $g(0)=g'(0)=0, f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

求$f'(0)$

13.设$f(a)\neq 0$且$f(x)$在$x=a$处有非零的导数，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

14.证明：$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)\neq 0, [f(x)]^2$在$x=a$处可导，则$f(x)$在$x=a$处也可导；

15.设$f(x)=(x-a)\varphi(x), \varphi(x)$ 在$x=a$处连续，求$f'(a)$

16.设$f(x)$在$(0,+\infty)$有定义，$\forall x,y\in(0,+\infty)$ 有$f(xy)=f(x)+f(y)$, 又$f'(1)=1$,求$f'(x)$与$f(x)$

17.设某工厂生产x件产品的成本为

$C(x)=2000+1000x-0.1x^2$(元)

$C(x)$称为成本函数，成本函数的导数$C'(x)$在经济学中称为边际成本，试求

(1)当生产100件产品时的边际成本；

(2)生产第101件产品的成本，并与(1)中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

18.证明：双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积等于$2a^2$.

第二节求导法则

一、(四则运算法则)

定理4.2.1 若函数$u(x),v(x)$可导，则$f(x)=u(x)\pm v(x)$也可导，且$f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{证明 } f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\
&= u'(x)\pm v'(x)
\end{aligned}
$$

注:若$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$则$f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k'(x)$.

定理4.2.2 若函数$u(x),v(x)$可导，则$f(x)=u(x)v(x)$也可导，且$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{证明} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)]-[u(x)v(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)]+u(x)v(x+\Delta x)-[u(x)v(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)\\
&= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)
\end{aligned}
$$

推论1 若$f(x)=Cv(x)$,则$f'(x)=Cv'(x)$

注:若$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_ku_k(x)$,则$f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_ku_k'(x)$.

注:若$f(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)$，我们记$f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$,则$f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{j\neq k}^{n}u_j(x)u_k'(x)$

定理4.2.3 若函数$u(x),v(x)$可导，则$f(x)=u(x)/v(x)$也可导，且$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$
\begin{aligned}
\text{证明}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)/v(x+\Delta x)]-[u(x)/v(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}\\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}
$$

例4.2.1 设$f(x)=x^3+5x^2-9x+\pi$求$f'(x)$.

解: $f'(x)=(x^3)'+5(x^2)'-9x'+\pi'=3x^2+10x-9$

例4.2.2 设$y=\sin x\ln x$,求$y'(\pi)$.

解:$y'(x)=(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$

$y'(\pi)=\cos\pi\ln\pi=\ln\frac{1}{\pi}$.

例4.2.3 设$y=\tan x$求y'

$$
\begin{aligned}
\text{解:}y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\
&= \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x
\end{aligned}
$$

同理可得:$y=\cot x$,则$y'=-\csc^2 x$;

$y=\sec x, y'=\sec x\tan x; y=\csc x, y'=-\csc x\cot x$.

二、反函数的导数

定理4.2.4 设$y=f(x)$ 为$x=\varphi(y)$的反函数，若$\varphi(y)$在点y_0处满足：$\varphi'(y_0)\neq 0$,则$f(x)$在点$x_0(x_0=\varphi(y_0))$可导，且$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$

证明: 设$\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0), \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 因为$\varphi'(y_0)\neq 0$,所以在$y_0$ 的某邻

域内$\varphi(y)$连续且严格单调,故$f = \varphi^{-1}$在x_0的某邻域内连续且严格单调, 从而当且仅当$\Delta y = 0$ 时$\Delta x = 0$,由$\varphi'(y_0) \neq 0$ 可得

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$.

例4.2.4 证明:$(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1), (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

证明: $y = a^x \Longrightarrow$其反函数为$x = \log_a y \Longrightarrow y' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$

$y = \arcsin x$其反函数为$x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \Longrightarrow y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arctan x$其反函数为$x = \tan y, y \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \Longrightarrow y' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

同理可得: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (arccotx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

三、复合函数的导数

命题4.2.1 $f(x)$在点x_0处可导$\Longleftrightarrow$ 在x_0的某邻域$U(x_0)$,存在一个在x_0处连续的函数$H(x)$, 使得$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$,从而$f'(x_0) = H(x_0)$

证明:($\Longrightarrow$)令$H(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ 由$f(x)$在x_0处可导，我们有

$\lim\limits_{x \to x_0} H(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = H(x_0)$

($\Longleftarrow$) 存在在点x_0处连续的函数$H(x)$满足：$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0) \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} H(x) = H(x_0)$所以函数$f(x)$在点$x_0$ 处可导，且$f'(x_0) = H(x_0)$.

定理4.2.5 设函数$u = \varphi(x)$在点x_0处可导,$y = f(u)$在点$u_0 = \varphi(x_0)$处可导,则复合函数$(f \circ \varphi)(x)$在点x_0处可导，且$f'(\varphi(x_0)) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

证明: 因为$f(u), \varphi(x)$分别在u_0, x_0处可导, 由命题4.2.1 ，我们有：

$f(u) - f(u_0) = F(u)(u - u_0), (F(u)$在$u_0$处连续)且$f'(u_0) = F(u_0)$

$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \Phi(x)(x - x_0), (\Phi(x)$在$x_0$ 处连续)且$\varphi'(x_0) = \Phi(x_0)$代入得

$f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = F(\varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) = F(\varphi(x))\Phi(x)(x - x_0)$

$F(\varphi(x)), \Phi(x)$在x_0处连续性,由命题4.2.1我们有:

$f'(\varphi(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} (F(\varphi(x))\Phi(x)) = F(\varphi(x_0))\Phi(x_0) = F(u_0)\varphi'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0)$

注:由导数的记号:我们有$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$,我们称这个求导法则为锁链法则.

注:$f'(\varphi(x))=f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$是对自变量$u$求导,而$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$是对自变量$x$求导.

注:该定理对于有限个函数的复合有如下表述:

$y=f(u),u=g(w),w=r(x),r=h(t)$,如果可以复合,且分别可导我们有:

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dw}\dfrac{dw}{dr}\dfrac{dr}{dh}\dfrac{dh}{dt}$

注：将上述导数的记号中的横线看成分数线，锁链法则是可以约分后等式两端相等.

例4.2.5 求幂函数$y=x^{\mu}$的导数.

解:因为$y=e^{\mu lnx}$所以$y=e^u,u=\mu\ln x$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=e^u\mu\dfrac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}$

例4.2.6 设$f(x)=\sqrt{x^2+1}$求$f'(0),f'(1)$.

解:$y=\sqrt{u},u=x^2+1$所以$f'(x)=f'(u)(2x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

所以$f'(0)=0,f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

例4.2.7 求下列函数的导函数.

$(i)f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2});(ii)f(x)=\tan^2\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\text{解:}(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\\&=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解:}\left(\tan^2\frac{1}{x}\right)'&=2\tan\frac{1}{x}\left(\tan\frac{1}{x}\right)'\\&=2\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'\\&=-\frac{2}{x^2}\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}\end{aligned}$$

例4.2.8 设$y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}(x>4)$,求$y'$.

解:虽然这是函数商的求导问题,但是为了简化计算,我们对等式两端取对数得

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2\ln(x+5) + \frac{1}{3}\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4)\end{aligned}$$

等式两端同时对变量x 求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}$$

整理得

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}\right)$$

例4.2.9 设$y = u(x)^{v(x)}, u(x) > 0$求$y'$.

解:$y = e^{v(x)\ln u(x)}$

$\Longrightarrow y' = e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right) = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right)$

四、基本导数公式

一、导数运算法则:

1 .$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2.$(uv)' = u'v + uv'$;

3.$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

4.若$y = f(x), x = \varphi(y)$互为反函数，则$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$;

5.若$y = f(u), u = \varphi(x)$,则复合函数$y = f(\varphi(x))$的导数$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$;

二、基本初等函数的导数公式

1.$y = C, \Longrightarrow y' = 0$($C$是常数);

2.$y = x^\mu \Longrightarrow y' = \mu x^{\mu-1}$;

3.$y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$;

4.$y = \log_a x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x\ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5.$y=\sin x \Longrightarrow y'=\cos x, y=\cos x \Longrightarrow y'=-\sin x$;

$y=\tan x \Longrightarrow y'=\sec^2 x, y=\cot x \Longrightarrow y'=-\csc^2 x$;

$y=\sec x \Longrightarrow y'=\tan x\sec x, y=\csc x \Longrightarrow y'=-\csc x\cot x$;

6.$y=\arcsin x \Longrightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y=\arccos x \Longrightarrow y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y=\arctan x \Longrightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}, y=arccotx \Longrightarrow y'=-\frac{1}{1+x^2}$;

7.$y=shx \Longrightarrow y'=chx, y=chx \Longrightarrow y'=shx$;

习题4.2

1.求下列函数的导数1)$f(x)=\frac{1}{x^{10}}$; 2)$f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$; 3)$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$;

4)$f(x)=(x^2-x)(x^2+2)$; 5)$f(x)=\frac{x-a}{x^2+a^2}$; 6)$f(x)=\frac{x^n-x^{-n}}{x}$;

7)$f(x)=(x^2(x^2-1)(x^3-1)$; 8)$f(x)=\frac{x(2x^2-3)}{1-x^2}$; 9)$f(x)=\sqrt{x}\cos x$;

2.求下列函数的导数：

1)$f(x)=e^x\sin x$; 2)$f(x)=\frac{\tan x}{x}$; 3)$f(x)=\frac{(1+x^2)\ln x}{\cos x+\sin x}$;

4)$f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$; 5)$f(x)=\sqrt[3]{\sec x}$; 6)$f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1)$y=\sin x-\cos x$,求$y'(\frac{\pi}{6}),y'(\frac{\pi}{4})$

(2)$\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$,求$\frac{d\rho}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$

(3)$f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$,求$f'(0),f'(2)$

4.求下列各题中a的值

1)$f(x)=-2x^2,f'(a)=f(4)$; 2)$f(x)=\frac{1}{x},f'(a)=-\frac{1}{9}$

3)$f(x)=\sin x,f'(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.求下列函数的导数：

1)$f(x)=2\sin 3x)$; 2)$f(x)=xe^{-x^2}$; 3)$f(x)=\ln\ln x$;

4)$f(x)=\ln\cos x$; 5)$f(x)=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; 6)$f(x)=2^{\ln\frac{1}{x}}$;

7)$f(x)=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$; 8)$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^3}}$; 9)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

10)$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; 11)$f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$; 12)$f(x)=\ln(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}})$;

13)$f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$; 14)$f(x)=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2})$; 15)$f(x)=\arctan\frac{1-x}{1+x}$;

6. 已知$g(x)$为可导函数，$a\in\mathbb{R}$,求下列函数的导数

1)$f(x)=g(x+g(x))$; 2)$f(x)=g(xg(x))$

7. 设$f(x)$为可导函数，证明：当$x=1$时，有$\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d}{dx}f^2(x)$, 则$f'(1)=0$,或$f(1)=1$

8.求下列函数的导数

1)$f(x)=sh3x$;　　2)$f(x)=sh^{2}5x$;　　3)$f(x)=th(1-x^{2})$;

4)$f(x)=arch(\sec x)$;　　5)$f(x)=xshx-chx$;　　6)$f(x)=arth(chx)$;

9.设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$(有限),证明：$f(x)$在$x=0$ 处可导；

10.以初速度v_0竖直上抛的物体，其上升高度s与时间t的关系是：$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^{2}$,求：

(1)该物体的速度$v(t)$, (2)该物体达到最高点的时刻

第三节参变量及隐函数求导

一、隐函数的导数

前面我们已经讲过函数关系，实际上是数集和数集之间的对应关系，$y=f(x)$ 表示$\forall x\in D_f$ 按照f有唯一确定的y与之对应,如果从方程的角度看，就是受约束的因变量y在方程的一边, 自变量在等式的另一边. 我们称这样的函数为显函数.注意到变量之间的对应关系本质上就是给定自变量能够确定因变量,并没有要求因变量和自变量必须分离在方程的两端.例如$x^2+y^2=R^2$如果我们限定$y\geq 0$,则对于任意的$x\in[-R,+R]$ 按照方程都有唯一确定的y与之对应.所以我们同样可以说$y=y(x)$,即$x^2+y^2(x)=R^2$. 由于这样表达的函数关系自变量没有与因变量分离,而是含在一个等式中，我们称这样的函数关系为隐函数关系.对于隐函数我们如何来讨论它的变化率？若两个函数相等,则它们的变化率是相等的.于是我们对含在方程中的函数y, 关于自变量x 求导得:$2x+2yy'=0$,那么$y'=-\frac{x}{y}$.

例4.3.1 求由方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解：实际上这里$y=y(x)$,于是$\dfrac{d}{dx}\left(e^y+xy-e\right)=\dfrac{d0}{dx}$

$\Longrightarrow e^y\dfrac{dy}{dx}+y+x\dfrac{dy}{dx}=0$ 解出未知元$\dfrac{dy}{dx}$得

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{e^y+x}, x+e^y\neq 0.$

例4.3.2 求由方程$y^5+2y-x-3x^7=0$所确定的隐函数在$x=0$处的导数$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=y'(0)$

解:对于可导函数而言,函数在某点的导数就是导函数在该点的函数值. 于是:

$$5y^4y'+2y'-1-21x^6=0$$

$$\begin{aligned} y'&=\frac{1+21x^6}{5y^4+2} \\ y'(0)&=\frac{1}{5y^4(0)+2} \\ &=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

而$y^4(0)=0$由原方程来确定.

例4.3.3求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点$P_0(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$处的切线方程（图4.3.1）

解：容易验证点P_0在椭圆上，于是过该点的切线的斜率$k=y'(2)$

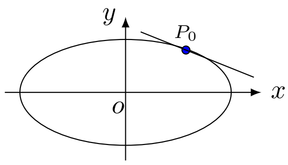

图4.3.1

方程两端关于变量x求导，得$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}yy'(x)=0$

于是$y'(x)=-\frac{9x}{16y}$将P_0的坐标代入得

$y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$,于是切线方程为

$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$.

例4.3.4 求由方程$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$所确定的隐函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：等式两端对自变量x 求导得

$1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$

解得$y'=\frac{2}{2-\cos y}$

对上式继续关于自变量x 求导得

$\frac{d^2y}{dx^2}=2(-1)(2-\cos y)^{-2}\cdot\sin y\cdot y'$

将$y'=\frac{2}{2-\cos y}$代入得

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}$

二、参数方程求导

平面上的曲线可以看作是动点(x,y)的轨迹，如果$x=\varphi(t),y=\psi(t),t\in[\alpha,\beta]$ 一般来讲,通过参数t就可以得到动点的轨迹曲线C，例如$\begin{cases}x&=a\cos\theta\\y&=a\sin\theta\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$就表示圆心在原点，半径为a 的圆周.

这条曲线C称为由参数方程$\begin{cases}x&=\varphi(t)\\y&=\psi(t)\end{cases}$确定的曲线.

显然函数$y=f(x)$表示了在直角坐标系xOy下的特殊参数方程$\begin{cases}x&=x\\y&=f(x)\end{cases}$.

如果$\varphi'(t),\psi'(t)\in C[\alpha,\beta]$ 且$\varphi'(t_0)\neq 0$,那么给定参数t_0，我们可以得到曲线C上一点$(x_0,y_0),x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0)$，由于$\varphi'(t_0)\neq 0$,所以,在相应的$x_0$的某邻域有：$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$，于是过点$(x_0,y_0)$的切线，

其斜率为$y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

而$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}$

于是$y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}}=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$

设$\varphi'(t),\psi'(t)$连续，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则称曲线$C$ 为光滑曲线，其特点是C 上任意一点都有切线，且切线与x轴正向的夹角$\alpha(t)$,是t的连续函数.

例4.3.5 求上半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上任一点$(x,y)$处切线的斜率.

解:椭圆的参数方程为:$\begin{cases}x &= a\cos t\\ y &= b\sin t\end{cases}$,$(0\leq t\leq\pi)$,则任一点处切线的斜率

$k=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t.$

注:例4.3.5在点$(\pm a,0)$处尽管$y=y(x)$不可导，但是却有切线,其斜率为无穷,即$x=\pm a$是其切线, 于是我们再一次回答了前面提到的不可导处可能有切线的问题.

我们还可以从复合函数的角度来讨论由参数方程确定的函数的导数: 设$\psi(t),\varphi(t)$有连续的导数,且$\varphi(t)\neq 0$,则一定存在反函数使得$t=\varphi^{-1}(x)$ 由复合函数求导法则,我们有$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

例4.3.6 已知抛射体的运动轨迹的参数方程为

$\begin{cases}x &= v_1t,\\ y &= v_2t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$

求抛射体在时刻t的运动速度的大小与方向.

解：注意到v_1 为抛射体初始速度水平方向上的分量，v_2为抛射体初速度沿铅直方向上的分量.

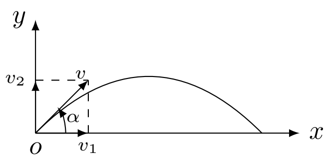

图4.3.2

注意到任意时刻t沿水平和铅直方向上的速度分别为：$\frac{dx}{dt}=v_1,\frac{dy}{dt}=v_2-gt$

于是任意时刻t抛射体的运动速度的大小为

$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_1^2+(v_2-gt)^2}$

速度的方向就是曲线的切线方向，设α 为切线的倾角，那么

$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{v_2-gt}{v_1}$

当$t=0$时，倾角为$\tan\alpha_0=\frac{v_2}{v_1}$

当$t=\frac{v_2}{g}$时，$\tan\alpha\Big|_{t=\frac{v_2}{g}}=0$

这表明运动速度是沿水平方向，即抛射体达到最高点.

例4.3.7求由半径为a 的圆的摆线（图4.3.3）的参数方程

$$\begin{cases}x&=a(t-\sin t),\\y&=a(1-\cos t)\end{cases}$$

所确定的函数$y=y(x)$的二阶导数.

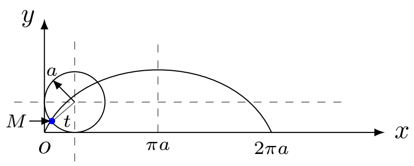

图4.3.3

解：设圆的摆线上任一点$M(x,y)$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}(t\neq 2n\pi,n\in\mathbb{N})$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\\&=\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}\\&=\frac{1}{a(1-\cos t)^2}(t\neq 2n\pi,n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

注：如果曲线C由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$表示，根据点的极坐标与直角坐标之间的关系，我们有：

$$\begin{cases}x&=\rho\cos\theta\\y&=\rho\sin\theta\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(\rho(\theta)\sin\theta)'}{(\rho(\theta)\cos\theta)'}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}=\frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}$$

如果用φ表示某点处切线和该点处向径之间的夹角，α为切线与x 轴正向之间的夹角，θ 为极角.
则$\tan\varphi=\tan(\alpha-\theta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$将上式代入整理得到：$\tan\varphi=\dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.

三、相关变化率

设$x=x(t),y=y(t)$都是可导函数，而变量x,y满足某种约束关系，从而变化率$\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ 也满足某种相应的约束关系，这种相互依赖的变化率，我们称为相关变化率.

例4.3.8 一个气球从离开观察员500m处离地面铅直上升，当气球高度为500m时，其速率为$140m/min$(分).求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少?

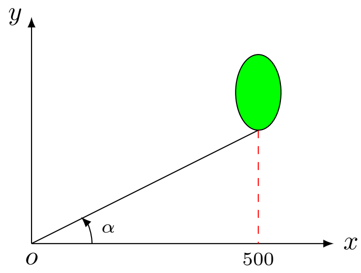

图4.3.4

解：设气球上升ts(秒)后其高度为$h=h(t)$,观察员视线的仰角为α,则

$\tan\alpha=\frac{h}{500}$,

于是$\alpha=\alpha(t)$,对上式两端关于变量t求导得

$\sec^2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{500}\frac{dh}{dt}$

注意到$h(t_0)=500, h'(t_0)=140m/min$,$\tan\alpha(t_0)=1, \sec^2\alpha(t_0)=2$

于是$2\alpha'(t_0)=\frac{1}{500}\cdot 140$

那么$\alpha'(t_0)=\frac{70}{500}=0.14(rad/min)(rad(\text{弧度}))$;

即此时观察员的仰角的速率为$0.14rad/min$.

例4.3.9　甲船以$6km/h$的速率向东行驶，乙船以$8km/h$的速率向南行驶，在中午十二点正，乙船位于甲船之北$16km$ 处，问下午一点正两船相离的速率为多少？

解：设t小时后，甲(A),乙(B)两船相距的距离为s,则

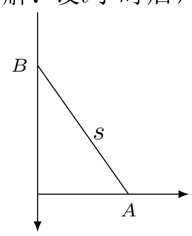

图4.3.5　$(16-8t)^2+(6t)^2=s^2(t)$ 两端对变量t求导得

$2(16-8t)(-8)+72t=2s(t)s'(t)$,当$t=1$时

$s'(1)=\dfrac{1}{s(1)}(-28)$,而$s(1)=10$,所以相离的速率为$-2.8km/h$,负号说明相离的速率变慢.

习题4.3

1.求下列函数的导数

1)$y=\left(\dfrac{x^2+a^2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$;　　2)$y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;　　4)$y^3=4(x^2+y^2)$;　　5)$2\sqrt{1-y}=\sqrt{1-x^2}+3$;

6)$x-\sqrt{xy}+y=2$;

2.证明: 在二次曲线$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$上一点$P_0(x_0,y_0)$处的切线方程为:

$Ax_0x+B\frac{x_0y+y_0x}{2}+Cy_0y+D\frac{x_0+x}{2}+E\frac{y_0+y}{2}+F=0$

3. 求下列函数的导数:

1)$y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{1+x+x^2}}$;　　2)$y=\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^{a_k}$;

3)$y=(1+\frac{1}{x})^x$;　　4)$y=x+x^x+x^{x^x}(x>0)$;

4.求下列函数的导数:

1) $\begin{cases}x &= \sin^2 t\\ y &= \cos^2 t\end{cases}$;　　2) $\begin{cases}x &= a(t-\sin t)\\ y &= a(1-\cos t)\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x &= \frac{3at}{1+t^3}\\ y &= \frac{3at^3}{1+t^3}\end{cases}$;　　4) $\begin{cases}x &= 3t^2+2t\\ e^y & \sin t-y+1=0\end{cases}$;

5.溶液自深18cm顶直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深12cm时，其表面下降的速率为1cm/min ,问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率是多少？

6.设$y=y(x)$由方程$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$确定，求　$\frac{dy}{dx}$;

7.设曲线方程$x=1-t^2, y=t-t^2$,求它在下列点处的切线方程与法线方程：

1)$t=1$;　　2)$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.证明：　圆$r=2a\sin\theta(a>0)$ 上任意点的切线与向径的夹角等于向径的极角；

9. 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$的切线与切点向径之间的夹角；

第四节高阶导数

设质点M的位移为s，则$s=s(t)$, 我们知道s的导数是质点M在t时刻的　速度$v=v(t)=s'(t)$, 而速度的导数$v'(t)$是质点M在t时刻的加速度：$a=a(t)$,于是t时刻,质点M的加速度为：$a(t)=v'(t)=(s'(t))'$ 我们称加速度是位移函数$s=s(t)$的二阶导数.

定义4.4.1若函数$f(x)$可导，则称$f'(x)$在点x_0处的导数为函数$f(x)$的二阶导数，记作$f''(x_0)$, 即$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 或记作$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0}$

若(导)函数$f'(x)$在区间I上处处可导, 则称函数$f(x)$有二阶导数:$f''(x)$或记作$\frac{d^2y}{dx^2}$,同理我们可以定义三阶乃至n阶导数.

一般地可由函数$f(x)$的$n-1$阶导数来定义其n阶导数，在点x_0处的n阶导数记作：$f^{(n)}(x_0), y^{(n)}(x_0)$,或$\frac{d^ny}{dx^n}|_{x=x_0}$,

显然$f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$

相应的函数$y=f(x)$的n阶导数记作$f^{(n)}(x), y^{(n)}(x)$或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

注：如果我们把对函数求导看作是一种运算，那么$\frac{d^n}{dx^n}$就相当于该运算的符号，即$\frac{d^n}{dx^n}y=\frac{d^ny}{dx^n}(n\in\mathbb{N}$.

如果函数$y=y(x)$,那么$'$就是$\frac{d}{dx}$.

例4.4.1　求函数$y=x^n$的各阶导数.

解：$y'=nx^{n-1}$

$y''=n(n-1)x^{n-2}$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)}=n!$

$y^{(k)}=0, k\geq n+1$

若$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,则$P_n^{(n)}(x)=a_nn!, P_n^{(k)}(x)=0(k\geq n+1)$

例4.4.2 求函数$y=\sin x$的n阶导数.

解：$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y''=-\sin x=\sin(x+2\frac{\pi}{2})$

假定$y^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$

则$y^{(n+1)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2})=\sin(x+(n+1)\frac{\pi}{2})$

同理可以推得$\cos^{(n)}x=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$

例4.4.3 求$y=e^x$的n阶导数.

解：$y^{(n)}=e^x$

函数的高阶导数的运算法则为：

$\frac{d^n}{dx^n}(u(x)\pm v(x))=\frac{d^n}{dx^n}u\pm\frac{d^n}{dx^n}v$

$(uv)'=u'v+uv'$

$(uv)''=u''v+2u'v'+v''$

我们不难看到与二项式：$(u+v)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k$相似，有

$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$,我们称其为Leibnitz 公式，请读者证明.

例4.4.4 设$y=x^{20}e^x$,求$y^{(100)}(0)$.

解:令$u(x)=x^{20},u^{(k)}=0,k\geq 21$由Leibnitz公式

$y^{(100)}=C_{100}^{80}(20)!e^x+C_{100}^{81}(20)!xe^x+\cdots+C_{100}^{0}x^{20}e^x$所以$y^{(100)}(0)=C_{100}^{80}(20)!$

例4.4.5 研究函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$的高阶导数.

解:当$x>0,f'(x)=2x,f''(x)=2,f^{(k)}(x)\equiv 0(k\geq 3)$

当$x<0,f'(x)=-2x,f''(x)=-2,f^{(k)}(x)\equiv 0(k\geq 3)$

当$x=0,f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pm x^2}{x}=0.$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}=2,f''_-(0)=-2.$

$\Longrightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -2x, & x<0\end{cases},f''(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ \text{不存在}, & x=0\\ -2, & x<0\end{cases}$

设$x=\varphi(t),y=\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有二阶导数，则由参数方程$\begin{cases}x & =\varphi(t)\\ y & =\psi(t)\end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的一阶导数由前面的讨论知道$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，我们可以借助参数方程求函数$y=y(x)$的高阶导数，注意到新的参数方程为：

$\begin{cases} x &= \varphi(t) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$ 于是二阶导数

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)'}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \end{aligned}$$

当然也可以利用复合函数的求导法则来求，即

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\psi''\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \end{aligned}$$

例4.4.6 $\begin{cases} x &= f'(t), \\ y &= tf'(t) - f(t); \end{cases}$ 设$f''(t)$存在且不为零，求$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \dfrac{d}{dt}t \cdot \frac{dt}{dx} = \dfrac{1}{f''(t)}$

习题4.4

1.求下列函数的二阶导数

1)$y=x\cos x$;　　2)$y=e^{-t}\sin t$;　　3)$y=\dfrac{2x^3+\sqrt{x}+4}{x}$;

4)$y=\frac{x^3}{x^2-4}$;　　5)$y=e^{\sqrt{x}}$;　　6)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

2.求下列函数的n阶导数

1)$y=\ln x$;　　2)$y=\cos x$;　　3)$y=xe^x$;

4)$y=a^x$;　　5)$y=\sin 2x$;　　6)$y=\dfrac{1}{x}$;

7)$y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x$;　　8)$y=\sqrt[m]{1+x}$;

3.已知物体的运动规律为$s=A\sin\omega t$,求物体运动的加速度,并验证$s''+\omega^2 s=0$

4. 试证明:$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n})$

5.证明:$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

6.利用Leibnitz公式计算导数

1)$[(x^2+1)\sin x]^{(20)}$;　　2)$(e^x\sin x)^{(n)}$

7.求$e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的n阶导数;

8.已知$y=1+xe^{xy}$,求$y'(0),y''(0)$

9.设函数$y=f(x)$在点x有二阶导数，且$f''(x)\neq 0$,若$f(x)$存在反函数，$x=f^{-1}(y)$, 试用$f'(x),f''(x)$以及$f'''(x)$表示　$(f^{-1}(y))^{(3)}$

10 .求$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$在$x=0$处的$n$阶导数.

11. 设$y=\arctan x$,证明：它满足方程$(1+x^2)y''+2xy'=0$,并求$y^{(n)}(0)$

第五节微分

引例 给边长为x 的正方形的每边一个增量Δx，正方形面积的改变量$\Delta A=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$ 当$|\Delta x|$ 较小时，我们有$\Delta y=2x\Delta x+\circ(\Delta x)$ 于是$2x\Delta x$可以作为面积增量的主要部分，也就是说可以用$2x\Delta x$近似代替Δy.

如果仔细品味一下我们前面的讨论，我们研究函数$y=f(x)$的逻辑线条一直围绕着研究函数在其定义域上一点x_0处的改变量Δy ,例如$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$的存在，现在来研究$\Delta y$的近似表示直至精确表示等.

一、微分的概念

定义4.5.1 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义,当给自变量x_0一个增量Δx ,且$x_0+\Delta x\in U(x_0)$,若函数的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+\circ(\Delta x)$,则称函数$y=f(x)$ 在点x_0处可微,其中A是与Δx 无关的值,等式中的第一项称为函数在点x_0处的微分,记作$dy\,|_{x=x_0}=A\Delta x$ 或$df(x)\,|_{x=x_0}=A\Delta x$

注意到当函数可微时Δy是Δx的线性函数,所以也把$A\Delta x$称为函数增量Δy的线性主部.

定理4.5.1 函数$y=f(x)$在点x处可微的充要条件是函数在该点可导,且$dy=f'(x)\Delta x$.

证明:($\Longrightarrow$) 因为函数在点x_0处可微,所以函数的改变量$\Delta y=A\Delta x+\circ(\Delta x)$

那么$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}=A$,由导数的定义$y'(x)=A$

($\Longleftarrow$)因为函数$y=f(x)$在点x处可导,所以极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，不妨设$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$,由命题2.4.1 ,当$|\Delta x|$很小时$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\alpha\to 0)\Longrightarrow\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x$显然,$A$与$\Delta x$无关，$\alpha\Delta x=\circ(\Delta x)$，那么$\Delta y=A\Delta x+\circ(\Delta x)$由微分的定义可知函数可微.

微分的几何意义: 因为过点$(x_0,f(x_0))$的切线方程为：$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，若令$\Delta x=x-x_0$等式左边恰是切线纵坐标的改变量,右边恰是函数在x_0处的微分, 所以函数在某点处的微分表示：过该点

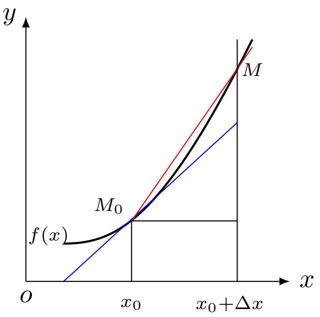

图4.5.1

切线纵坐标的改变量，见图4.5.1.

定理4.5.2 函数$y=f(x)$可微的充分必要条件是$\Delta y-dy=\circ(\Delta x)$

注:函数在一点的微分dy不仅依赖于点x 而且依赖于自变量的改变量（线性关系）

注: 自变量的微分恰是其改变量.事实上，令$y=x$，那么$dx=dy=1\cdot\Delta x=\Delta x$

注:函数$y=f(x)$的微分$dy=f'(x)dx$,由此可见函数的导数就是函数的微分与自变量微分的商,所以又把函数的导数称为微商,那么作为导数符号$\frac{dy}{dx}$其中的横线有除号的意义.

注：若函数$y=f(u),u=\varphi(x)$,则复合函数$y=f(\varphi(x))$的微分为$dy=f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx=f'(u)du$,这说明无论函数的自变量是单纯的自变量，还是中间变量，其一阶微分的形式具有不变性.

二、微分公式

$dy=f'(x)dx$

1.$d(u\pm v)=du\pm dv$

2.$d(uv)=vdu+udv$

3.$d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

4.$d(f\circ g(x))=f'(u)g'(x)dx$

$y=x^\mu$	$dy=\mu x^{\mu-1}dx$	$y=a^x$	$dy=a^x\ln adx$
$y=\log_a x$	$dy=\frac{1}{x\ln a}dx$	$y=sinx$	$dy=\cos xdx$
$y=\cos x$	$dy=-\cos xdx$	$y=\tan x$	$dy=\sec^2 xdx$
$y=\cot x$	$dy=-\csc^2 xdx$	$y=\arcsin x$	$dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$y=\arccos x$	$dy=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$y=\arctan x$	$dy=\frac{1}{1+x^2}dx$
$y=arccotx$	$dy=-\frac{1}{1+x^2}dx$		

三、高阶微分

当x为自变量,若函数$y=f(x)$可微，注意到这时$f'(x)$是与Δx无关的值.

$dy=f'(x)dx$, 那么

$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=f''(x)dxdx+f'(x)d(dx)=f''(x)(dx)^2\ (d(dx)=0)$

注:如果记$(dx)^2$为dx^2这样二阶导数$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$的记号中的横线仍然有除号的意义.

注:$(dx)^2=dx^2$而$d(x^2)=2xdx$,当x为自变量，$d^2x=0$.

注:n阶微分是$n-1$阶微分的微分,即$d^ny=d(d^{n-1}y)=d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})=f^{(n)}(x)dx^n$这时与$n$阶导数记号一致了.

当x为中间变量

注:若$y=f(x),x=\varphi(t)\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}d^2y&=(f(\varphi(t)))''dt^2\\&=(f'(\varphi(t))\varphi'(t))'dt^2\\&=\left(f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)\right)dt^2\\&=f''(u)du^2+f'(u)d^2u\end{aligned}$$

这时刚才讲的横线就没有除号的意义，而且二阶微分不再具有微分形式的不变性.

四、微分在近似计算中的应用

1.对于可微函数$y=f(x)$我们有：$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\circ(\Delta x)$,于是当$\Delta x$较小时，我们有近似表达式：$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

由于曲线切线的方程为$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$从几何上看，我们用直线段近似代替曲线弧段

例如我们在$x_0=0$附近,我们有：$\sin x\approx x;\tan x\approx x;\ln(1+x)\approx x;e^x\approx 1+x$

一般地，为了求得$f(x)$的近似值，可以找邻近于x 的值x_0,使得$f(x_0),f'(x_0)$容易计算，然后利用上述近似表达式求之.

例4.5.1 求$\sin 33^\circ$的近似值.

解：由于$\sin 33^\circ=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{60})$, 因此取$f(x)=\sin x, x_0=\frac{\pi}{6}, \Delta x=\frac{\pi}{60}$,则

$$\begin{aligned}\sin 33^\circ &\approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{60}\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{60}\approx 0.545\end{aligned}$$

.

例4.5.2 设钟摆的周期是1秒，在冬季摆长至多缩短$0.01cm$，试问此钟每天至多快几秒？

解：设单摆的周期为T,摆长为l,则由物理学知识$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,其中g 是重力加速度，由于钟摆的周期为1，所以摆的初始长度为$l_0=\frac{g}{(2\pi)^2}$当摆长最多缩短$0.01cm$时，摆长的增量$\Delta l=-0.01$ ，则周期的增量

$$\begin{aligned}\Delta T &\approx \frac{dT}{dl}\,|_{l=l_0}\cdot\Delta l=\frac{\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l_0}}\Delta l=\frac{2\pi^2}{g}\Delta l\\ &=\frac{2\pi^2}{980}(-0.01)\approx -0.0002(sec)\end{aligned}$$

摆长缩短，周期加快于是每天快大约$60\times 60\times 24\times 0.0002\approx 17.28(sec)$.

2.误差估计

设量x 由测量得到，而量$y=f(x)$ 是通过计算得到的，于是必然产生误差. 由于在实际测量中我们只能得到x 的近似值x_0，于是经公式计算只能得到$f(x)$的近似值$f(x_0)$. 若已知测量值x_0 的误差限为δ_x,即$|\Delta x|=|x-x_0|\le\delta_x$,则当$\delta_x$很小时，我们有$|\Delta y|=|f(x)-f(x_0)|\approx|f'(x_0)\Delta x|\le|f'(x_0)|\delta_x$ 通常称其为绝对误差限.

而称$\frac{\delta_y}{|y_0|}=\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x$为相对误差限

例4.5.3 通过测量得到一球体的直径为$42cm$, 测量工具的精度为$0.05cm$,试求以此直径计算球体体积时所引起的误差.

解:由直径d计算球体体积的函数表达式为$V=\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3=\frac{1}{6}\pi d^3$ 取$d_0=42, \delta_d=0.05, V_0=\frac{1}{6}\pi d_0^3\approx 38792.39(cm)^3$

绝对误差限为：$\delta_V=\left|\frac{1}{2}\pi d_0^2\right|\cdot\delta_d=\frac{\pi}{2}\cdot 42^2\cdot 0.05\approx 138.54(cm)^3$

相对误差限为：$\frac{\delta_V}{|V_0|}=\frac{\frac{1}{2}\pi d_0^2}{\frac{1}{6}\pi d_0^3}\cdot\delta_d=\frac{3}{d_0}\delta_d\approx 3.570/00$

注：把数学应用到自然现象的研究中，我们遇到的量绝不会是精确的，在实验中我们不能确定，哪怕是一米的精确长度。此外也不存在一个杆的长度是确定的有理数或无理数,而我们总是在想要的精确度下用有理数来度量其长度。而唯一有意义的是我们是否可以用分母相对小的有理数来进行这样的度量，正如在严格数学意义下的无理和有理数是没有物理意义的，因为在实现时都伴随着极限过程，因此都是理想化的。在实际中，这样的理想化意义在于，理想化的解析表达本质上更加简单和容易处理。例如仅仅用一个瞬时变量计算瞬时速度，就比用不同时刻的平均速度简单方便。如果没有这样的理想化，我们的科学研究将会变得毫无希望的困难且一开始就陷入困境。为了更好的理解这些理论，应该强调的是，在应用中正确的用差商代替导数，只要误差足够小保证充分接近近似的量反之亦然。所以无论是物理学家，生物学家还是工程师或者其他人在实际研究中实现这些想法都必须正确的在精度限定内把导数和差商看成一样。自变量增量$h = dx$越小，那用微分$dy = hf'(x)$表示函数增量$\Delta y = f(x+h) - f(x)$就越精确。只有明白所考虑问题要求的精确度，人们可讲量$dx = h, dy = hf'(x)$是无穷小，这些物理的无穷小有着精确的含义.它们随着有限值的变量的改变，但不会消失为0.

习题4.5

1.已知$y=x^3-x$,计算在$x=2$处，当Δx分别等于$1,0.1,0.01$时的Δy及dy

2.求下列函数的微分

1)$y=\cos^{\varphi},\Delta\varphi=30',\varphi_0=\frac{\pi}{3}$

2)$y=\sin 2x,\Delta x=\frac{\pi}{180},x_0=\frac{\pi}{6}$

3,求下列函数的微分

1)$f(x)=\frac{m-n}{x^{0.2}}$;　　2)$f(x)=5^{\ln\tan x}$;　　3)$f(x)=\ln\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})$

4)$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;　　5)$y=\tan^2(1+2x^2)$;　　6)$s=A\sin(\omega t+\varphi)$(其中$A,\omega,\varphi$ 为常数)

4.水管壁的正截面为一个圆环,设其内半径为R_0,壁厚为h,求此圆环截面面积的近似值.

5.扩音器插头为圆柱形,截面半径$r=0.15cm$,长度$l=4cm$,为提高其导电性能,需要在此圆柱的侧面镀上一层厚为0.001cm 的纯铜,问约需要多少克铜?

6.将适当的函数填入括号内

1)$d(\qquad)=2dx$;　　2)$d(\qquad)=3\cos xdx$;　　3)$d(\qquad)=\sin\omega xdx$;

4)$d(\qquad)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;　　5)$d(\qquad)=\sec^2 3xdx$;　　6)$d(\qquad)=e^{-2x}dx$;

7.在曲柄连杆机构中,已知$s=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$,证明: 当$\frac{r}{l}$很小时,$s\approx r\cos\omega t+l[1-\frac{r^2}{2l^2}\sin^2\omega t]$;

8.计算下列近似值

1) $\arctan 1.02$;　　2) $\arcsin 0.4983$;　　3) $\lg 11$;　　4) $\sqrt[3]{8.02}$

9.设$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin x^\beta, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$,问

1) 在什么情况下$f(x)$ 不是连续函数?

2) 在什么情况下$f(x)$连续但不可导?

3) 在什么情况下$f(x)$ 可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$ 上无界?

4) 在什么情况下$f(x)$可微，且$f'(x)$在$[-1,1]$上有界，但$f'(x)$不连续?

5) 在什么情况下$f(x)$连续可微?

练习四

1.在“充分”,“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1)$f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0连续的$(\underline{\qquad})$条件，$f(x)$在点x_0连续是$f(x)$在点x_0可导的$(\underline{\qquad})$条件，

(2)$f(x)$在点x_0的左导数$f'_-(x_0)$ 及右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点x_0可导的$(\underline{\qquad})$条件，

(3)$f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在x_0 处可微的$(\underline{\qquad})$条件.

2.设$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$,求$f'(1)$

3. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设$f(x)$在$x=a$的某个邻域内有定义，则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是$(\underline{\qquad})$

$(A)\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在，　$(B)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在,

$(C)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在,　　$(D)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

4.设$f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$在$x=a$处连续，求$f'(a)$

5.设$f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2x}, & |x|\le 1,\\ \frac{1}{e}, & |x|>1\end{cases}$求$f'(x)$

6.设$f(x)=x\sin|x|$,证明：$f(x)$在$x=0$处二阶导数不存在；

7.设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x}, x\neq 0\\ a, & x=0,\end{cases}$,其中$g(x)$具有二阶连续导数且$g(0)=1$,试确定$a$的值,使$f(x)$在点$x=0$处连续，并求$f'(x)$,同时讨论$f'(x)$在点$x=0$处的连续性.

8.设$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin x^{\beta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$其中$\alpha,\beta$是实常数，且$\beta<0$,问

1）在什么情况下，$f(x)$不是连续函数？

2）在什么情况下，$f(x)$连续但不可导？

3）在什么情况下，$f(x)$可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$上无界？

4）在什么情况下，$f(x)$可微，且$f'(x)$在$[-1,1]$上有界，但$f'(x)$不连续？

5）在什么情况下，$f(x)$连续可微？

9.计算$\sin 0.754$的近似值（保留四位有效数字）.

10.求下列函数的导数：

1) 求$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$的二阶导数;

2)$y=\ln^3(\sin^2 x+1)$,求$y'(\pi/6)$

3)$y=\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$,求$y''(0)$

4) $\begin{cases} x &= t+\sin t, \\ y &= t-\sin t, \end{cases}$求$\frac{d^2y}{dx^2}$;

5)$y=\dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}+e^{4x}$,求$y'$;

6)$y=\sin^6 x+\cos^6 x$,求$y^{(n)}$

7)$y=\frac{x^2}{1-x^2}$,求$y^{(n)}$

11.(1)设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

(2)对于参数方程$\begin{cases} x &= a\cos^3\theta, \\ y &= a\sin^3\theta; \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(3)对于参数方程$\begin{cases} x &= \ln\sqrt{1+t^2}, \\ y &= \arctan t. \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

12. 已知直角三角形的两直角边分别为a和b,且直角边a与x轴重合,斜边c与曲线$y=e^x$相切

1)求切点$P(x_0,y_0)$;

2)取切点到直角边b的距离作为自变量的增量Δx,试求函数$y=e^x$在x_0处相应于Δx 的增量Δy与微分dy

13.设函数$f(x)$ 和$g(x)$均在点x_0的某邻域内有定义，$f(x)$在x_0处可导，$f(x_0)=0, g(x)$在x_0处连续，试讨论$f(x)g(x)$在x_0处的可导性.

14.落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径的增大速率总是$6m/s$,问在$2s$末扰动水面面积增大的速率为多少？

15.注水入深$8m$上顶直径$8m$的正圆锥形容器中，其速率为$4m^3/min$,当水深为$5m$时，其表面上升的速率为多少？

16.已知$f(x)$是周期为5的连续函数，它在$x=0$的某邻域内满足关系式：

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\circ(x)$

且$f(x)$在$x=1$ 处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

17.当正在高度为H水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时，如图4.5.2所示从飞机到机场的水平地面

距离为L.假设飞机下降的路径为三次函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$的图形，其中$y(-L)=H, y(0)=0$,试确定飞机的降落路径.

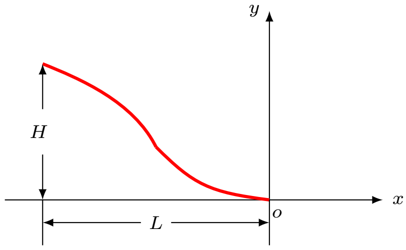

图4.5.2