第二节 常数项级数的审敛法

一、正项级数审敛法

二、任意项级数审敛法

三、交错级数审敛法

四、绝对收敛与条件收敛

一、正项级数审敛法

一般的常数项级数, 它的各项可以是正数、负数或零.

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

先讨论正项级数的敛散性，许多级数的收敛性问题可归结为正项级数的收敛性问题.

分析：定义出发，部分和数列$\{S_n\}$,

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$$

1^0 $\{S_n\}$递增，若有上界，则级数必收敛.

2^0 若级数收敛，部分和数列$\{S_n\}$收敛，$\{S_n\}$有界.

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: "$\Longrightarrow$" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则$\{S_n\}$收敛, 故有界.

"$\Longleftarrow$" $\because u_n \geq 0$, $\therefore$部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知$\{S_n\}$有界, 故$\{S_n\}$收敛 , 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

注: 1^0 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$S_n \to +\infty$,即$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$

2^0 正项级数可以任意加括号，其敛散性不变.

对收敛的正项级数，其和也不变，且其和$S \geq S_n$

例1. 设$x_n > 0$, 且$\{x_n\}$单调递增且有界, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛.

证明：令$x_n \leq M$，$a_n = 1-\frac{x_n}{x_{n+1}} > 0.$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)+\left(1-\frac{x_2}{x_3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}$$

$$\le \frac{1}{x_2}[x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_{n+1} - x_n]$$

$$\le \frac{1}{x_2}(x_{n+1} - x_1) \le \frac{1}{x_2}(M - x_1)$$

有界, 故级数收敛.

例2. 设a_n, b_n为两个正项数列，且满足

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \ge s > 0，证明：\sum_{n=1}^{\infty} a_n 收敛.$$

证明：由条件知: $\frac{1}{s}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) \ge a_{n+1}$

$$n = 1,2,\cdots$$

$$\frac{1}{s}(a_1b_1 - a_2b_2) \geq a_2; \qquad \frac{1}{s}(a_2b_2 - a_3b_3) \geq a_3;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{s}(a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1}) \geq a_{n+1}$$

从而

$$\frac{1}{s}(a_1b_1 - a_2b_2 + a_2b_2 - a_3b_3 + \cdots + a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1})$$

$$\geq a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = a_1 + (a_2 + \cdots + a_{n+1})$$

$$\leq a_1 + \frac{1}{s}a_1b_1 - \frac{1}{s}a_{n+1}b_{n+1} \leq a_1 + \frac{1}{s}a_1b_1$$

有界，故级数收敛.

定理2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数,

且存在 $N \in Z^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le v_n$, 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨

设对一切 $n \in Z^+$,都有 $u_n \le v_n$.

令 S_n 和 σ_n 分别表示 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和, 则有

$$S_n \le \sigma_n$$

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此，对一切 $n \in Z^+$, 有 $S_n \le \sigma$

由定理 1 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

推论： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在 $N \in Z^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k v_n$ (常数 $k > 0$), 则有

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 ;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

例1. 证明 p-级数 (常数 $p>0$) $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

当 $0<p\le 1$ 时，发散; 当 $p>1$时，收敛.

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法可知 p 级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若 $p>1$, 因为当 $k-1\le x\le k$时, $\frac{1}{k^p}\le\frac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}\,\mathrm{d}\,x\le\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\qquad (k=2,3,\dots)$$

p-级数的部分和数列$\{S_n\}$:

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}$$

$$\le 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \quad = 1 + \frac{1}{1-p}[n^{1-p} - 1]$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{p-1} \quad (n = 2,3,\ldots)$$

即 $\{S_n\}$有界，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

注： “等比级数”、 “调和级数”与 “p 级数”

是常用的进行比较的级数.

例2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散 .

证: $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \ge \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散. 由比较判别法知, 所给级数发散 .

例3. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\sqrt{(n+1)}}$ 的敛散性.

解: $a_n = \frac{2n+1}{n^2\sqrt{(n+1)}} > 0$, $a_n \le \frac{3n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，从而原级数收敛.

例4. 设$b_n \le a_n \le c_n$，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证明: 由 $b_n \le a_n \le c_n \Rightarrow 0 \le a_n - b_n \le c_n - b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - b_n)\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)\text{收敛}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n + b_n)\text{收敛}$$

例5. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,dx$ 的敛散性.

解：设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,dx$

$$\le \int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛. 故原级数收敛.

说明： 利用比较判别法，判定正项级数敛散性，涉及到证明不等式，往往困难，现给出比较判别法的极限形式.

定理3. (比较判别法的极限形式) 设两正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数具有相同敛散性;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \quad (l \neq \infty)$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$(l-\varepsilon)v_n < u_n < (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当$0<l<\infty$时，取 $\varepsilon<l$, 由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当$l=0$时, 利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n \ (n>N)$, 由定理2 知若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当$l=\infty$时，存在 $N\in Z^+$, 当$n>N$时, $\frac{u_n}{v_n}>1$, 即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

注： 若两个正项级数的一般项 $u_n \to 0$，$v_n \to 0$时，

极限形式的比较判别法，实质上就是比较它们的一般项

作为无穷小量的阶. 定理表明，当$n \to \infty$时，如果

u_n与v_n同阶 —— $\sum_{n=}^{\infty} u_n$与Σv_n，相同敛散性；

u_n比v_n高阶 —— Σv_n收敛 $\Rightarrow \sum_{n=}^{\infty} u_n$ 收敛

u_n比v_n低阶 —— Σv_n发散 $\Rightarrow \sum_{n=}^{\infty} u_n$ 发散

例6. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 的敛散性 .

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = 1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散.

例7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$$\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n^2 \ln[1+\frac{1}{n^2}] = \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

例8. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$的敛散性.

解:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛$\Rightarrow$ 原级数收敛.

例9. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ 的敛散性.

解:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛.

例10. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{lnn}{n})^n$的敛散性.

解: 设 $a_n = (1-\frac{lnn}{n})^n$ 易见$a_n > 0.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ne^{nln(1-\frac{lnn}{n})} = \lim_{n\to\infty} ne^{n(-\frac{lnn}{n})} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散} \Rightarrow \text{原级数发散}$$

注: 用比较判别法，先要对所考虑级数的收敛性有一个大致估计，进而找敛散性已知的合适的级数与之相比较，但大多情况下，比较困难. 下面给出两种判别法:

比值判别法、根值判别法，可通过对级数本身的分析来判定其敛散性.

定理4 . 比值判别法 (达朗贝尔(D'alembert)判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$,可能收敛，也可能发散; (用别的方法判定)

证: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 则对$\forall\varepsilon>0$，存在$N\in Z^+$,

当$n>N$时，恒有 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon.$

即

$$\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon$$

证: (1) 当$\rho < 1$时，取一个适当小的正数 ε，使得

$\rho + \varepsilon = r < 1$, 从而 存在$N \in Z^+$, ,当$n > N$时,

$u_{n+1} < r u_n$

所以： $u_{N+1} < r u_N$,

$u_{N+2} < r u_{N+1} < r^2 u_N$, ……

$u_{N+k} < r^k u_N$, …… (N是常数, u_N是确定常数)

$\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_N = u_N \sum_{k=1}^{\infty} r^k$ (由于$r < 1$, 几何级数，收敛)

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 当$\rho > 1$或 $\rho = \infty$时,必存在$N \in Z_+$, $u_N \neq 0$, 当$n \geq N$

时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$, 所以级数发散.

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

例如, $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{ 级数收敛;} \\ p \leq 1, \text{ 级数发散.} \end{cases}$

例11. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \ (x>0)$ 的敛散性 .

解: $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}}=x$

根据定理4可知:

当$0<x<1$时, 级数收敛 ;

当$x>1$时, 级数发散 ;

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

例12. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$的敛散性.

解： 设 $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

所以, 级数收敛.

定理5. 根值判别法 (Cauchy判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则: (1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$(或 $\rho = +\infty$) 时，级数发散.

(3) 当 $\rho = 1$, 可能收敛，也可能发散; (用别的方法判定)

证明: $\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, $\therefore$ 对任意给定的正数 ε,

存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon$

(1) 当 $\rho < 1$ 时，取充分小的ε，使 $\rho + \varepsilon = r < 1$

$\therefore \sqrt[n]{u_n} < r \Rightarrow u_n \le r^n$. 因 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ $(0 < r < 1)$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当$\rho > 1$ 时，取充分小的ε，使 $\rho - \varepsilon = r > 1$.

从而 $\sqrt[n]{u_n} > r \Rightarrow u_n > r^n > 1$. 可见 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

说明： $\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散．

例如，$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$：

$$u_n = \frac{1}{n^p},\quad \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \to 1 \ (n \to \infty)$$

但 $\begin{cases} p > 1, & \text{级数收敛；} \\ p \le 1, & \text{级数发散．} \end{cases}$

说明： (1) 比值判别法和根值判别法都是通过将所给正项级数与等比级数进行比较得到的(本质上时比较判别法).

当$\rho > 1$时，这两种判别法判断发散时，都是因$u_n \nrightarrow 0$.

(2) 当比值法与根值法都可用，极限均存在时ρ相等.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$

凡能用比值判别法判定敛散性的级数，一定能用根值判别法来判定.

(4) 但当$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不一定存在.

即能用根值法判定的，不一定能用比值法.

例： 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

根值判别：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ 收敛

但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-1}}}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{3}{2^{2n}}}=\frac{1}{6}$$

比值判别法无法判定.

例13. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{e}{3}<1$，级数收敛.

例14. 判定敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}\cdot\frac{\pi^2}{2n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot\frac{\pi^2}{2n^2}}{\sqrt{n}\cdot\frac{\pi^2}{2n^2}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛

$$\boxed{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\,(x\to 0)}$$

$$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{n} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{\pi^2}{2}$$

所讨论的级数与$\Sigma\frac{1}{n^2}$有相同敛散性，故收敛.

* **定理:** （柯西积分判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 函数 $f(x)$为定义在$[a,+\infty)$ $(a>0)$上非负、递减、连续函数, 且$f(n)=u_n(n\geq N)$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 敛散性相同.

* **例:（对数级数）**$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p>0)$ $\begin{cases} p>1, \text{ 收敛}; \\ 0<p\leq 1, \text{ 发散} \end{cases}$

证明: 研究函数 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(lnx)^p}\,dx$

当$p=1$时, $\int_{ln2}^{+\infty} \frac{1}{u^p}\,du=\int_{ln2}^{+\infty} \frac{1}{u}\,du=+\infty.$

当$p \neq 1$时，$\displaystyle\int_{ln2}^{+\infty} \frac{1}{u^p} du = \frac{1}{1-p} u^{1-p} \Big|_{ln2}^{+\infty}$

由积分判别法得结论.
$$= \begin{cases} +\infty, & 当 p < 1 \\ \frac{1}{p-1}(ln2)^{1-p}, & 当 p > 1 \end{cases}$$

例15. 判定敛散性 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{lnn!}$.

解：$a_n = \dfrac{1}{\ln n!} = \dfrac{1}{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n} \geq \dfrac{1}{n \ln n}$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散，从而所讨论级数发散.

1） 正项级数判别 → 同号级数判别

2）一个级数，若只有有限个正项或有限个负项，

其余各项都取同一符号 ——可用正项级数判别

3）若既有无限个正项，又有无限个负项

—— 正项级数判别法不适用

为此，讨论任意项级数，正负项可以任意出现的级数的收敛问题.

二、任意项级数审敛法

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为任意项级数(各项为任意实数)，它的各项取绝对值, 得到一个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

定义： 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称原级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛.

定义： 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件**收敛**.

定理1：绝对收敛的级数必收敛

证明： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为绝对收敛级数，令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|),\quad n = 1,2,\ldots$$

显然$v_n \geq 0$，且$v_n \leq |u_n|$

由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n \text{ 收敛}$$

$$u_n = 2v_n - |u_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

注： 1）表明：一般的级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则可得到原级数收敛，将一大类级数收敛问题转化成正项级数的收敛问题.

2）反过来不成立，级数绝对收敛是级数收敛的充分条件，不是必要条件.

3）$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散 $\nRightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

但若判定$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散时，所采用的是比值判别法或根值判别法，即$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$判定时，则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

因：从$\rho > 1 \Rightarrow |u_n| \nrightarrow 0(n \to \infty) \Rightarrow u_n \nrightarrow 0$,故级数发散.

例1. 判定级数敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

解: (1) $\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛 $\Rightarrow$ 级数收敛

(2) $$|u_n| = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1 \quad (n \to \infty)$$

$|u_n| \nrightarrow 0$ 故所给级数发散.

例2. 判定敛散性 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$

解：令 $u_n = \dfrac{n^2}{e^n}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛, 因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

从而收敛.

定理2: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛$\Leftrightarrow$ 由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中正项构成的级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|+u_n}{2}$和负项构成的级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n-|u_n|}{2}$都收敛.

证明:“$\Rightarrow$” 全体负项绝对值构成的级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|-u_n}{2}$为正项级数. 注意到:

$$0 \le \frac{|u_n| + u_n}{2} \le |u_n|, \qquad 0 \le \frac{|u_n| - u_n}{2} \le |u_n|,$$

若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|+u_n}{2}$与$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|-u_n}{2}$收敛

“$\Leftarrow$” 由已知两个级数的收敛，则

$$|u_n| = \frac{|u_n| + u_n + |u_n| - u_n}{2}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

注： 1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|+u_n}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n-|u_n|}{2}$ 中一个收敛，

一个发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

2) 若上面这两个级数都发散， 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能

条件收敛，也可能发散.

三、交错级数审敛法

定义: 若级数的各项符号正负相间, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$$

或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$,其中 $u_n > 0$, $n = 1,2,\cdots$ 称为**交错级数** .

定理6 . (Leibnitz 判别法)若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛 , 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1} .$$

证: $\because S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$
$$-u_{2n}\leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S\leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$

故级数收敛于S, 且 $S\leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n=S-S_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

$$\therefore\quad |r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\leq u_{n+1}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

用Leibnitz **判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+($

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散　　收敛　　收敛

例如： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为条件收敛 .

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

例3. 交错p-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 收敛

例4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$ 敛散性.

解: $\sin\pi\sqrt{n^2+1}=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

易知$\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$, 且 $\longrightarrow 0$. 故收敛

四、绝对收敛级数的性质

全体收敛级数可分为绝对收敛与条件收敛级数

1. 绝对收敛级数满足交换律.

定理： 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，则将它的各项重新排列次序后所得的新级数也绝对收敛，且其和不变.

注：条件收敛级数不满足交换律，重新排后可得到发散级数.

2. 绝对收敛级的乘法：对角形法、正方形法

绝对收敛级数满足加法结合律

定理： （绝对收敛级数的乘法）

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都绝对收敛，其和分别为A和B，则它们的所有各项之积$u_i v_k (i, k = 1, 2, \cdots)$，按照任意顺序排列所构成的级数也绝对收敛，且其和等于AB.

内容小结

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性判别

1. 用定义：部分和数列的极限是否存在?
2. 必要条件 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
3. 正项级数敛散性判别:

1) $\{S_n\}$ 是否有界?

2) 比较判别法：参照 $\begin{cases} p\text{ －级数（特殊，调和级数）} \\ \text{几何级数} \\ \text{对数级数} \end{cases}$

3) 比值判别法: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

4) 根值判别法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

5) 积分判别法

4. 任意项级数审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 收敛，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\ 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 发散，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 则交错级数 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n 收敛$$

思考与练习

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

提示: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意: 反之不成立. 例如,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 .

$$p-\text{级数}: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

1. 判别级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

不是 p–级数

解: (1) $\because\ \ln(n+1)<n,\quad \therefore\ \dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(2) $\because\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

2. 设 $u_n \neq 0\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ （ C ）.

(*A*) 发散； (*B*) ~~绝~~对收敛;

(*C*) 条件收敛； (*D*) 收敛性根据条件不能确定.

分析: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$, $\therefore$ (*B*) 错；

又 $$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_4}}+\frac{1}{u_5}\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

3. 判别级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{10^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{lnn}{n}$

解: (1) 交错级数, $u_n=\frac{2n-1}{10^n}$, $u_n\longrightarrow 0$

$$u_n-u_{n+1}=\frac{2n-1}{10^n}-\frac{2n+1}{10^{n+1}}=\frac{1}{10^{n+1}}(18n-11)>0$$

$(n\geq 1)$

莱布尼兹定理, 级数收敛.

(2) 交错级数, 令 $u_n=\frac{lnn}{n}$. 证单减. 设$f(x)=\frac{lnx}{x}$

则$f'=\frac{1-\ln x}{x^2}$.当$x>e$时, $f'<0$, 从而f递减. 故当

$n\geq 3$时, u_n单减. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow u_n\longrightarrow 0$

莱布尼兹定理, 级数收敛

4. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{na^n}$ $(a>0)$ 的敛散性

解： $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

当 $0< a < 1$时，级数发散.

当 $a > 1$时，级数绝对收敛

当 $a = 1$时，级数条件收敛

5. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n;(x>0)$ 的敛散性.

解: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}x^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x=x$$

当$x<1$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n$;绝对收敛，从而收敛.

当$x>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n$;发散.

当$x=1$时，级数条件收敛.

作业

P271　　　1, 2, 3: (2)(3),

4 : (3)(4)(5)

5 : (1)(2)(4)