



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Sistemas de Control 2

**ACTIVIDAD PRÁCTICA Nº 1**

**Representación de sistemas y controladores**

**Alumna:**

Cerquetti, Narella.

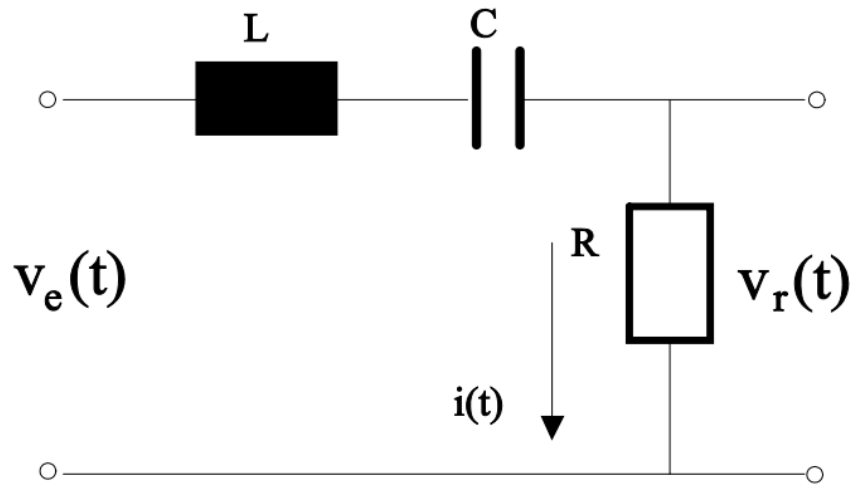
**Docente:**

Dr. Ing. Pucheta, Julián.

Abril/2024

## CASO DE ESTUDIO I. Sistema con dos variables de estado.

Para este caso de estudio se plantea un sistema eléctrico RLC cuyo comportamiento se encuentra modelado en variables de estado, este modelo puede obtenerse a partir de las ecuaciones diferenciales que surgen de la aplicación directa de la ley de Kirchhoff de las tensiones a la malla del circuito.



Por Kirchhoff se obtiene:

$$V_e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_c(t)$$

$$V_e(t) = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + v_c(t)$$

de donde,

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$$

Definiendo como variables de estado:

$$x_1 = i(t)$$

$$x_2 = v_c(t)$$

la representación en el espacio de estados resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_e$$

$$y = [R \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La salida  $y$  se corresponde a la tensión sobre la resistencia,  $v_r(t)$ .

Del modelo del circuito y de la representación en espacio de estados se plantean las siguientes consignas a resolver.

**INCISO 1: Asignar valores a  $R = 47[\Omega]$ ,  $L = 1[\mu H]$  y  $C = 100[nF]$ . Obtener simulaciones que permitan estudiar la dinámica del sistema, con una entrada de tensión escalón de  $12[V]$ , que cada  $1[ms]$  cambia de signo.**

Con los valores dados y a partir del modelo en el espacio de estados es posible obtener la función de transferencia del sistema. En este caso, se obtiene haciendo uso de funciones ya definidas en Matlab para realizar la transformación correspondiente.

La función de transferencia resultante:

$$G(s) = \frac{4,07 \cdot 10^7 s}{s^2 + 4,07 \cdot 10^7 s + 1 \cdot 10^{13}}$$

El cálculo de la función de transferencia es necesario para poder determinar el tiempo de respuesta rápida y lenta del sistema para lo cual se hace uso de las raíces de  $G(s)$ . La respuesta rápida se requiere para definir el tamaño de paso o tiempo de integración que se emplea en el método de Euler para estimar la respuesta del sistema; la respuesta lenta por su parte permite determinar el tiempo que tardará el sistema en establecerse de manera que se pueda fijar un tiempo de simulación capaz de detectar toda la dinámica del sistema bajo estudio.

Los polos resultantes fueron:

$$\lambda_1 = -2,14 \cdot 10^5$$

$$\lambda_2 = -4,68 \cdot 10^7$$

Las dinámicas rápida y lenta:

$$tR = \frac{\ln(0,95)}{\lambda_2} = 1,0963 \cdot 10^{-9}[s]$$

$$tL = \frac{\ln(0,05)}{\lambda_1} = 1,4016 \cdot 10^{-5}[s]$$

De la dinámica rápida se establece un tiempo de integración 10 veces más pequeño para asegurar la correcta captura de toda la respuesta del sistema.

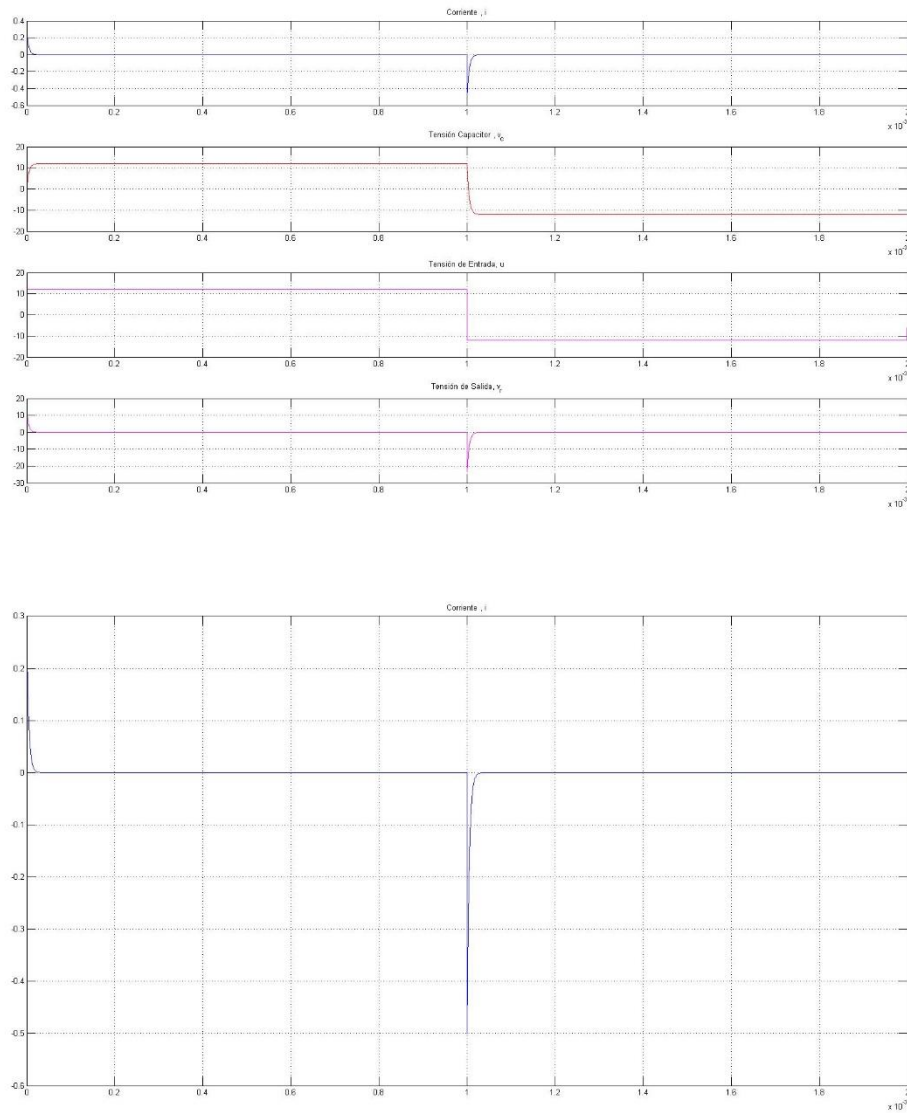
A partir de la dinámica lenta se puede determinar que el tiempo de establecimiento es de aproximadamente  $70[\mu s]$ . Debido a que la señal de entrada debe cambiar cada  $1[ms]$ , para lograr observar las modificaciones en la respuesta del circuito ante el cambio en la entrada se define como tiempo de simulación  $2[ms]$ .

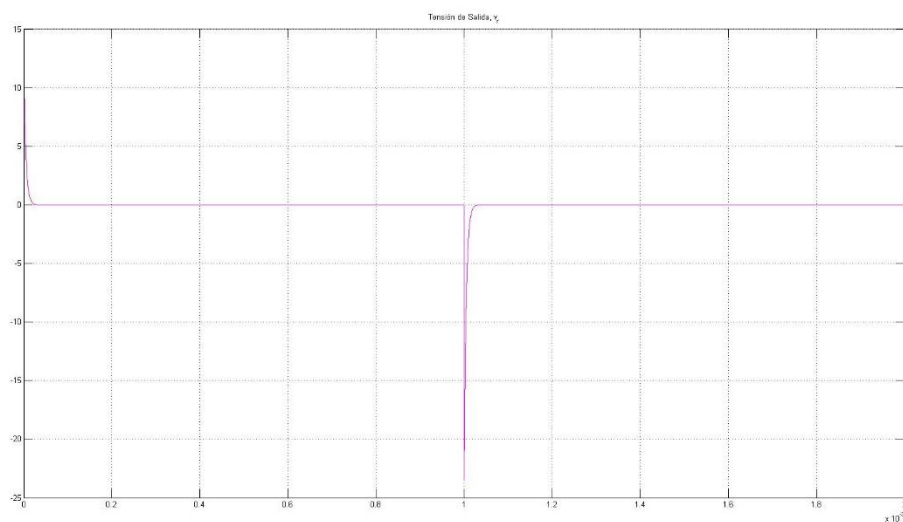
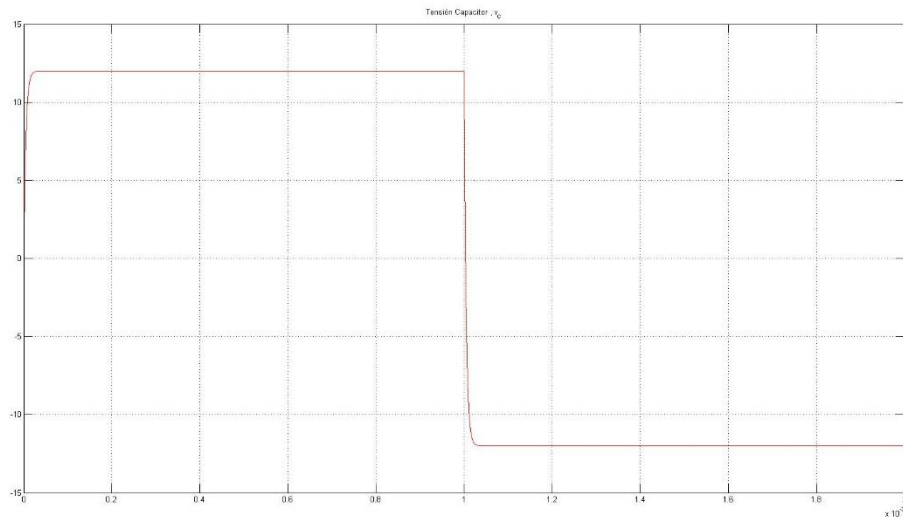
### Simulación.

Para poder simular el sistema se define el punto de operación y las condiciones iniciales; para el caso:

$$x_{op} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; i_0 = 0; v_{c0} = 0$$

Definidos todos los parámetros necesarios, se obtiene como resultado de la simulación los siguientes comportamientos





De las imágenes se puede apreciar cómo en los dos momentos donde se produce una conmutación en la tensión de entrada se genera un pico de corriente que está limitado por la resistencia en serie y que se debe a la inercia que presenta el inductor ante los cambios de corriente.

El condensador por su parte, inicia con una tensión nula a bornes (es decir sin carga) alcanzando un valor de tensión igual al de la tensión de entrada cuando el sistema se establece.

La tensión sobre la resistencia sigue la forma de onda de la corriente tal como era de esperarse debido a la relación lineal que existe entre ellas y que está determinada por la ley de Ohm.

Los resultados obtenidos son lo que se esperan de un circuito de este tipo; inicialmente el condensador se comporta como un cortocircuito de manera que lo único que limita la corriente es la resistencia razón por la cual se produce el pico inicial. Cuando el sistema se establece, el capacitor pasa a un estado similar al de un circuito abierto tomando a bornes toda la tensión de entrada, mientras que la corriente pasa a ser prácticamente nula y, en

consecuencia por la ley de Ohm, también se hace cero la tensión de salida sobre los terminales de la resistencia.

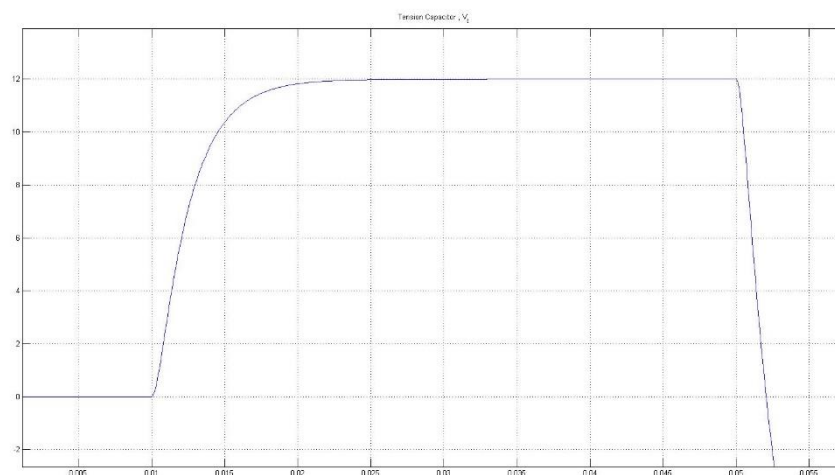
Cuando la entrada cambia la polaridad el capacitor se descarga y se produce otro pico de corriente (y por lo tanto de tensión sobre la resistencia) cuando el voltaje a bornes del mismo se hace nulo. Luego, se carga en sentido opuesto hasta alcanzar nuevamente un estado de circuito abierto.

**INICSO 2: En el archivo Curvas\_Medidas\_RLC.xls (datos en la hoja 1 y etiquetas en la hoja 2) están las series de datos que sirven para deducir los valores de R, L y C del circuito. Emplear el método de la respuesta al escalón, tomando como salida la tensión en el capacitor.**

Es posible obtener los valores R, L y C a partir de los datos en las tablas si se determina la función de transferencia del sistema, en este caso de la tensión de salida,  $v_r(t)$ , respecto a la entrada,  $V_e(t)$ , utilizando lo que se conoce como método de Chen. Este método permite hallar la función de transferencia a partir de la respuesta del sistema al escalón unitario.

Dado que de la tabla se tiene una entrada de  $12[V]$ , para poder aplicar el método deben dividirse las magnitudes de la señal de salida de interés por dicho factor para que los resultados que se obtienen sean acorde a los datos presentados en las Curvas Medidas.

De los conocimientos físicos que se tiene de los circuitos RLC se sabe que éstos son sistemas de segundo orden. Haciendo uso de las curvas del Excel se puede estimar que para el caso el circuito se comporta como un sistema sobreamortiguado con dos polos reales y distintos.



Asumiendo una función de transferencia del tipo:

$$G(s) = \frac{K \cdot (T_3 s + 1)}{(T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)}; \quad \text{con } T_1 < T_2, T_3 \neq T_1, T_3 \neq T_2$$

el método de Chen permite obtener las constantes de tiempo  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ , y la ganancia  $K$ .

El método parte tomando tres puntos de la gráfica que deben cumplir que sean equidistantes entre sí:

$$x_1 = (t_1, y(t_1))$$

$$x_2 = (2t_1, y(2t_1))$$

$$x_3 = (3t_1, y(3t_1))$$

Este procedimiento se aplica tanto para la curva de tensión sobre el capacitor como para la curva de corriente con el objetivo de obtener las funciones de transferencia  $\frac{V_c(s)}{V_e(s)}$  y  $\frac{I(s)}{V_e(s)}$ . Se procede de esta manera para poder despejar así todos los parámetros del circuito desde las funciones en el dominio de Laplace.

Es posible obtener todos los parámetros solo con  $\frac{V_c(s)}{V_e(s)}$  teniendo en cuenta que cuando se produce el pico de corriente lo único que está limitando la misma es la resistencia. De esta manera, tomando la lectura en dicho punto y aplicando la Ley de Ohm puede calcularse  $R$  y luego plantear un sistema de ecuaciones para despejar los demás parámetros.

En este caso se calculan ambas funciones de transferencia.

Los puntos tomados sobre la curva de  $V_c(t)$  y  $i(t)$  respectivamente se muestran en las siguientes imágenes.

$$x_{v1} = (t_1, y(t_1))$$

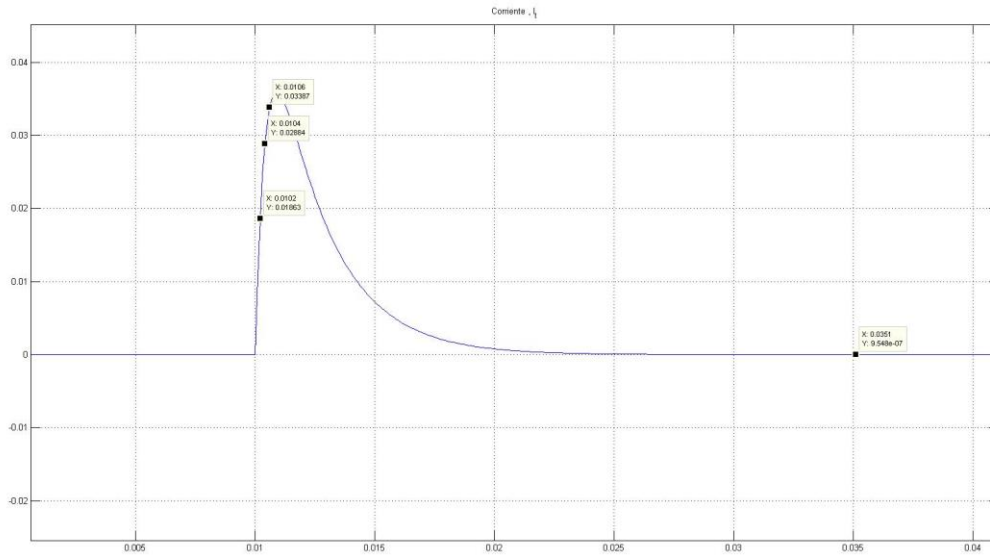
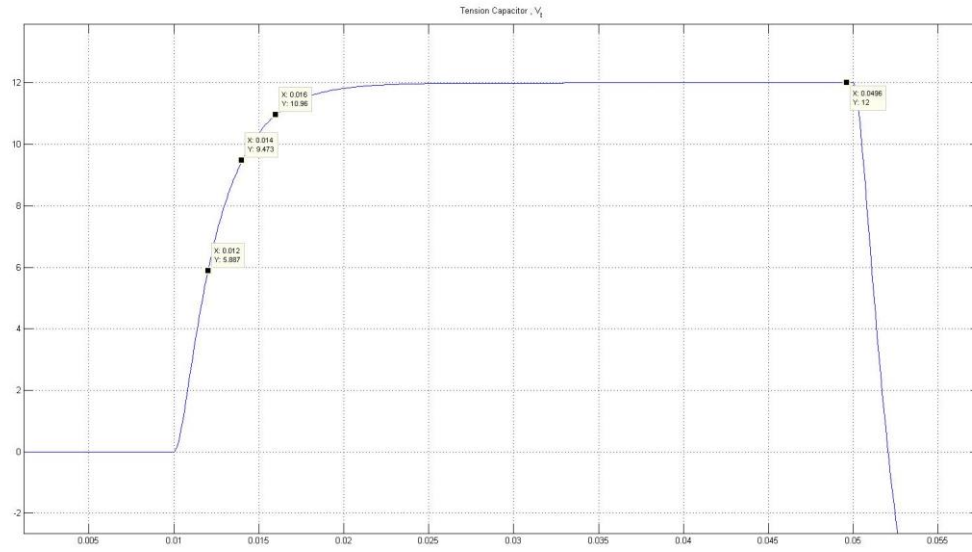
$$x_{v2} = (2t_1, y(2t_1))$$

$$x_{v3} = (3t_1, y(3t_1))$$

$$x_{i1} = (0.0102, 0.0186)$$

$$x_{i2} = (0.0104, 0.0288)$$

$$x_{i3} = (0.0106, 0.0338)$$



Las funciones de transferencia obtenidas:

$$G_v(s) = \frac{-5.015 \cdot 10^{-6}s + 1}{9.865 \cdot s^2 + 0.00269 \cdot s + 1} \approx \frac{K}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

$$G_i(s) = \frac{1 \cdot 10^{-5}s + 1.39 \cdot 10^{-10}}{9.865 \cdot s^2 + 0.00269 \cdot s + 1} \approx \frac{s \cdot C}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

Despreciando el primer término en el numerador de  $G_v(s)$  y el segundo término en el numerador de  $G_i(s)$ :

$$K = -5.015 \cdot 10^{-6}$$

$$C = 10[\mu F]$$



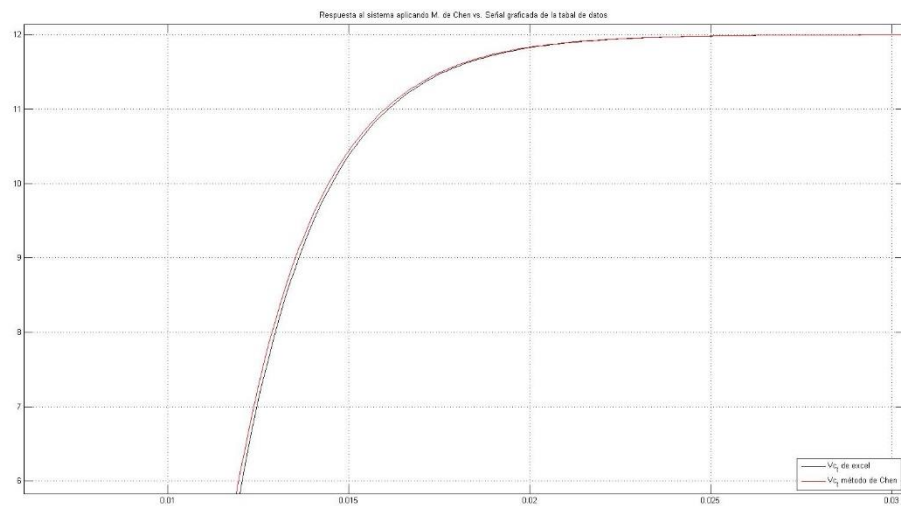
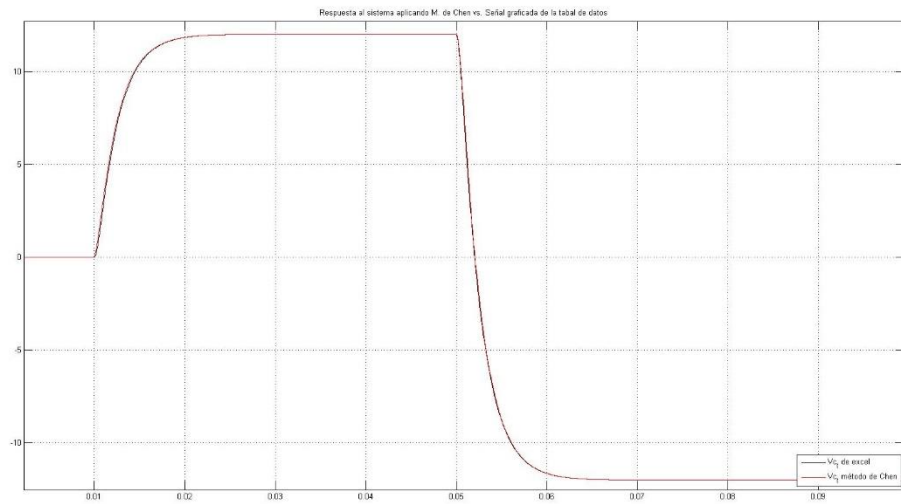
Conociendo C se pueden despejar L y R:

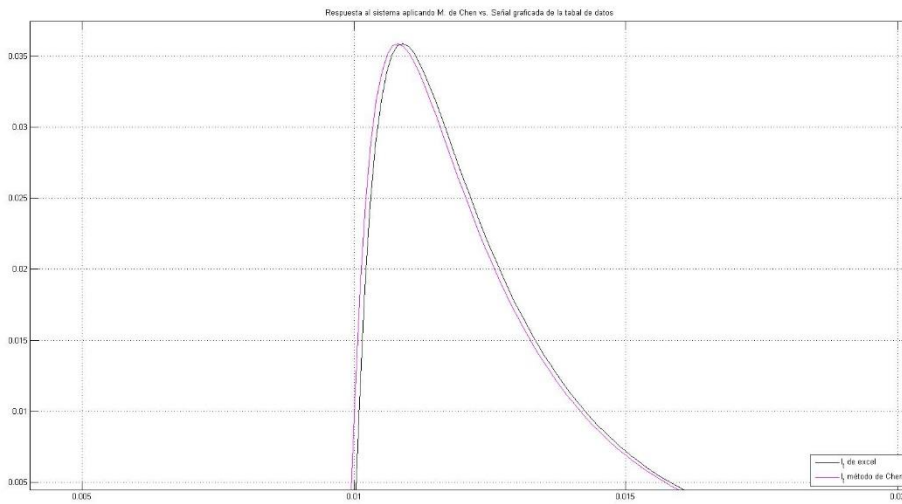
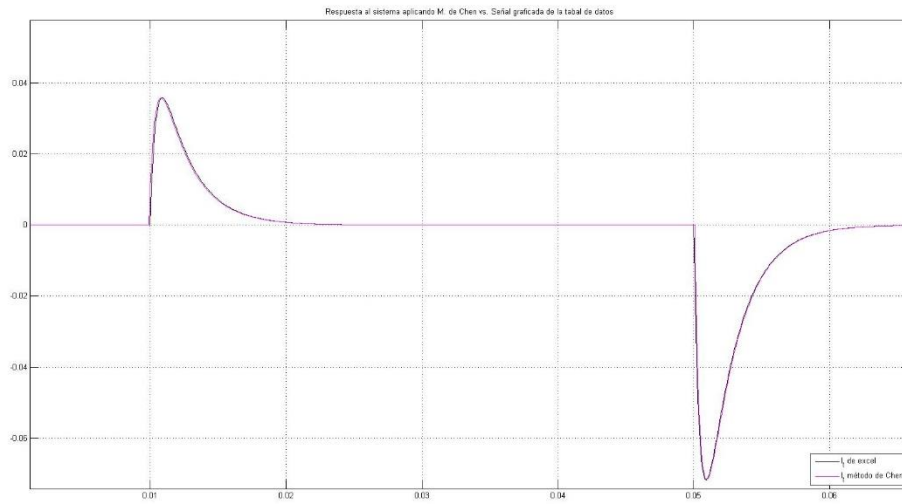
$$L = 98.6[mHy]$$

$$R = 269[\Omega]$$

### Simulación.

En primera instancia se simuló el sistema a partir de las funciones de transferencia obtenidas:

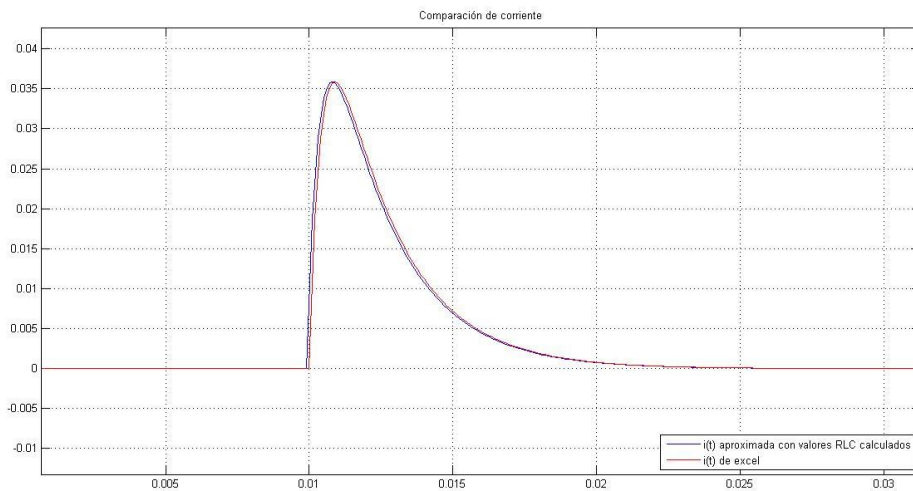
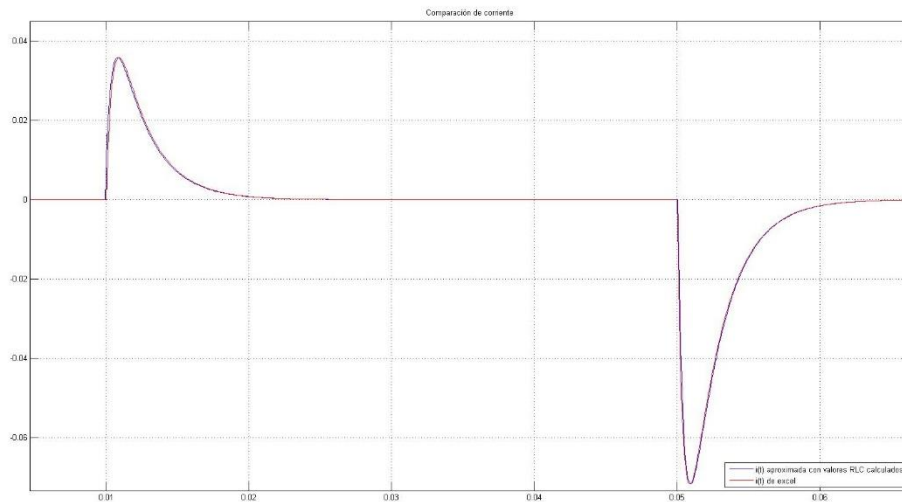




De las imágenes que comparan las respuestas obtenidas a partir del sistema descrito por las funciones de transferencia encontradas y las presentadas en la gráfica se puede apreciar que la diferencia entre una y otra es pequeña resultando en un error de aproximación aceptable.

**INCISO 3: Una vez determinados los parámetros R, L y C, emplear la serie de corriente desde 0.05seg en adelante para validar el resultado superponiendo las gráficas.**

Como segunda instancia de verificación se modeló el sistema en espacio de estados con los parámetros R, L y C encontrados. Graficando los resultados para la corriente y comparando con la curva dada:



De las gráficas se observa que las respuestas simulada y medida son prácticamente iguales.

### **DESAFÍOS ENFRENTADOS Y LECCIONES APRENDIDAS.**

#### **Desafíos.**

*Aprendizaje y familiarización con una nueva herramienta de trabajo.* Matlab es un software del que se tenía conocimiento pero escasa experiencia en su uso; aprender

a cerca de su funcionamiento y sus diferentes usos fue esencial para llevar a cabo el presente trabajo.

*Integración de conocimientos previos y su aplicación en nuevas áreas.* Tras obtener la FT de la velocidad angular se presentó el problema de contar con más incógnitas que ecuaciones para el cálculo de los parámetros del circuito. La resolución en este trabajo se hizo por medio del cálculo de una segunda función de transferencia, sin embargo, tras un razonamiento posterior de la información con la que se contaba se concluyó que bastaba con calcular solo una función de transferencia si se aproximaba el valor de R por medio de la ley de Ohm utilizando el valor del pico de corriente dado por la curva.

*Limitaciones de hardware.* En un primer intento de ejecutar el programa desarrollado se identificó una lenta respuesta por parte de la PC para resolver las simulaciones y obtener resultados. Esto generó dudas acerca de la correcta programación del programa, sin embargo luego de varias revisiones se modificó el tiempo de simulación escogido y finalmente se obtuvo la visualización de la simulación. Esta situación permitió conocer ciertas limitaciones del equipo de trabajo y llevó implementar una solución que permitiera hacer un seguimiento del trabajo en desarrollo (reducir el tiempo de simulación) y efectuar las correcciones pertinentes cuando lo ameritaba.

### **Lecciones aprendidas.**

Utilización del método de Chen para modelar sistemas de segundo orden a partir de la respuesta al escalón medida.

Manipulación los datos medidos de forma pertinente para que la aplicación del método de Chen sea válida.

Modelado de sistemas mono variables en espacio de estados permitiendo así familiarizarse con éste método de análisis de procesos.

Cálculo de la evolución del proceso de interés en función del modelo en espacio de estados.

### **Identificación de logros.**

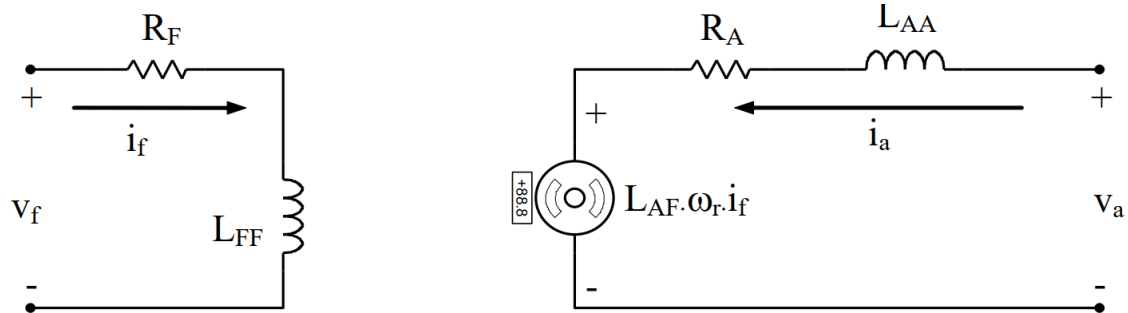
*ID1.1.1.3* Calcula el modelo lineal de un proceso estable monovariable a partir de su respuesta al escalón.

*ID1.1.1.4* Selecciona las variables de estado de un proceso lineal para generar una expresión matricial lineal.

*ID1.1.1.5* Infiere la evolución temporal de procesos reales representados en variables de estado.

## CASO DE ESTUDIO II. Sistema con tres variables de estado.

Para este caso de estudio se plantea un motor de corriente continua con torque de carga no nulo que puede graficarse en forma circuital como se muestra en la imagen a continuación.



Del modelado del motor pueden obtenerse las ecuaciones que describen el comportamiento del mismo:

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_A}{L_{AA}} \cdot i_a - \frac{K_m}{L_{AA}} \cdot \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} \cdot V_a \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{K_i}{J} \cdot i_a - \frac{B_m}{J} \cdot \omega_r - \frac{1}{J} \cdot T_L \\ \frac{d\theta_t}{dt} &= \omega_r\end{aligned}$$

Similar a lo planteado para el *caso de estudio I*, se puede efectuar un análisis en espacio de estados.

De acuerdo a las ecuaciones enunciadas se tendrían tres integradores en el sistema por lo que en principio se definen tres variables de estados:

$$x_1 = i_a$$

$$x_2 = \omega_r$$

$$x_3 = \theta_t$$

Por otra parte es fácil ver a partir de las ecuaciones que el sistema puede definirse como un sistema MISO, es decir de múltiples entradas y una salida, o MIMO, múltiples entradas y salidas, dependiendo de cómo se definan la salidas del mismo.

Sabiendo que el vector  $\dot{x}$  contiene las derivadas de las variables de estado, la ecuación de estados resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J} & -\frac{B_m}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

La ecuación de salida depende de las consideraciones que hagan en el análisis, sin embargo deberá seguir la forma:

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

**INCISO 4: Obtener el torque máximo que puede soportar el motor modelado mediante las Ecs. (1-5), (1-6) y (1-7) cuando se lo alimenta con 12V, graficando para 5 segundos de tiempo la velocidad angular y corriente  $i_a$  para establecer su valor máximo como para dimensionar dispositivos electrónicos.**

Parámetros del motor:

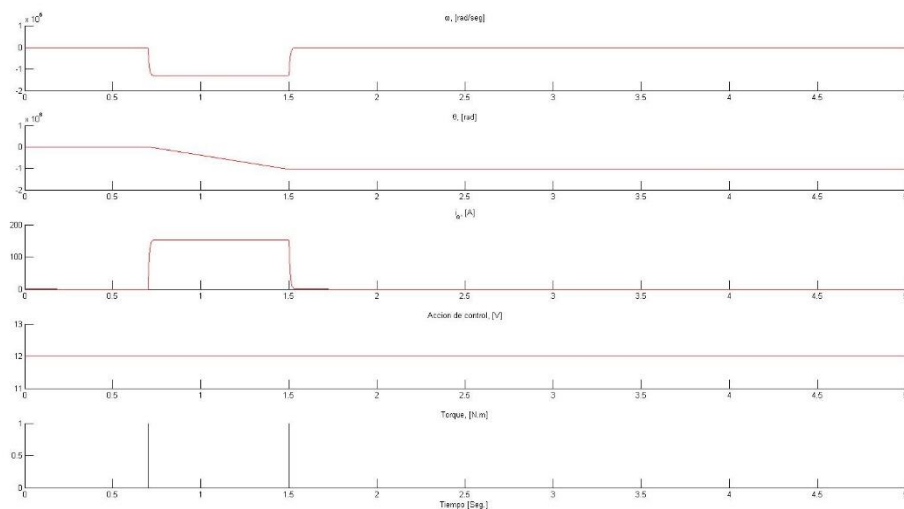
- $R_a = 55.6[\Omega]$
- $L_a = 366 \cdot 10^{-6}$
- $K_m = 6.53 \cdot 10^{-3}$
- $J_m = 5 \cdot 10^{-9}$
- $B_m = 0$
- $K_i = 6.49 \cdot 10^{-3}$

Debido a los requerimientos en este punto, se establecen como salidas  $i_a$  y  $\omega_r$ . Dado que  $x_1 = i_a$  y  $x_2 = \omega_r$ , la ecuación de salida es:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para el caso no existe acoplamiento directo entre las entradas y las salidas.

Teniendo ya modelado el proceso en espacio de estados se procede a determinar el torque máximo que puede aplicarse sobre el eje del motor. El procedimiento que se sigue es partiendo de un valor de  $T_L = 1 \left[ \frac{N \cdot m}{V} \right]$ , simular la respuesta del sistema cuando dicho valor de torque se aplica sobre el mismo.

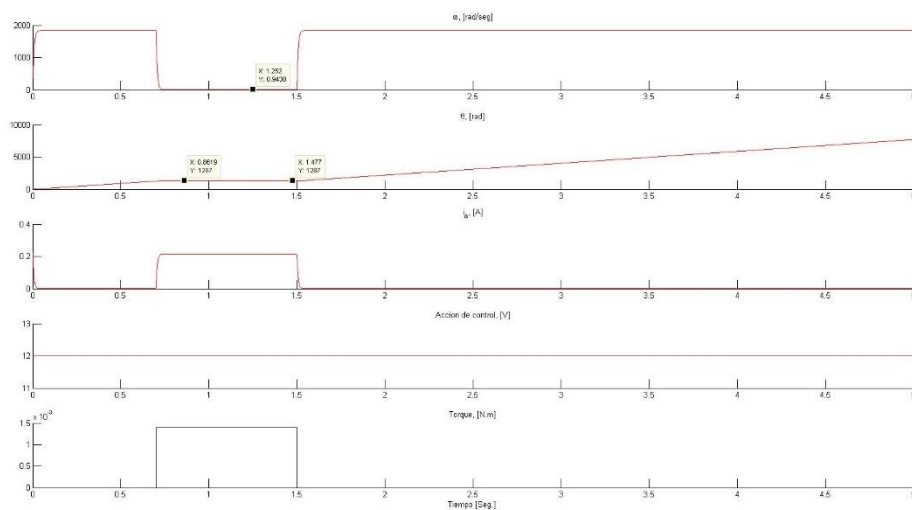


De las imágenes se observa que el valor inicial escogido para el torque supera ampliamente el máximo soportado lo cual puede identificarse fácilmente al ver que el

valor que toma la velocidad angular pasa a ser negativo, es decir, deja de tener sentido físico.

A razón de estos resultados, se continúan probando valores más pequeños dividiendo el inicial por un factor de 10 hasta conseguir una velocidad angular positiva. Alcanzado este punto se realiza un ajuste más fino para obtener un valor de torque máximo más preciso.

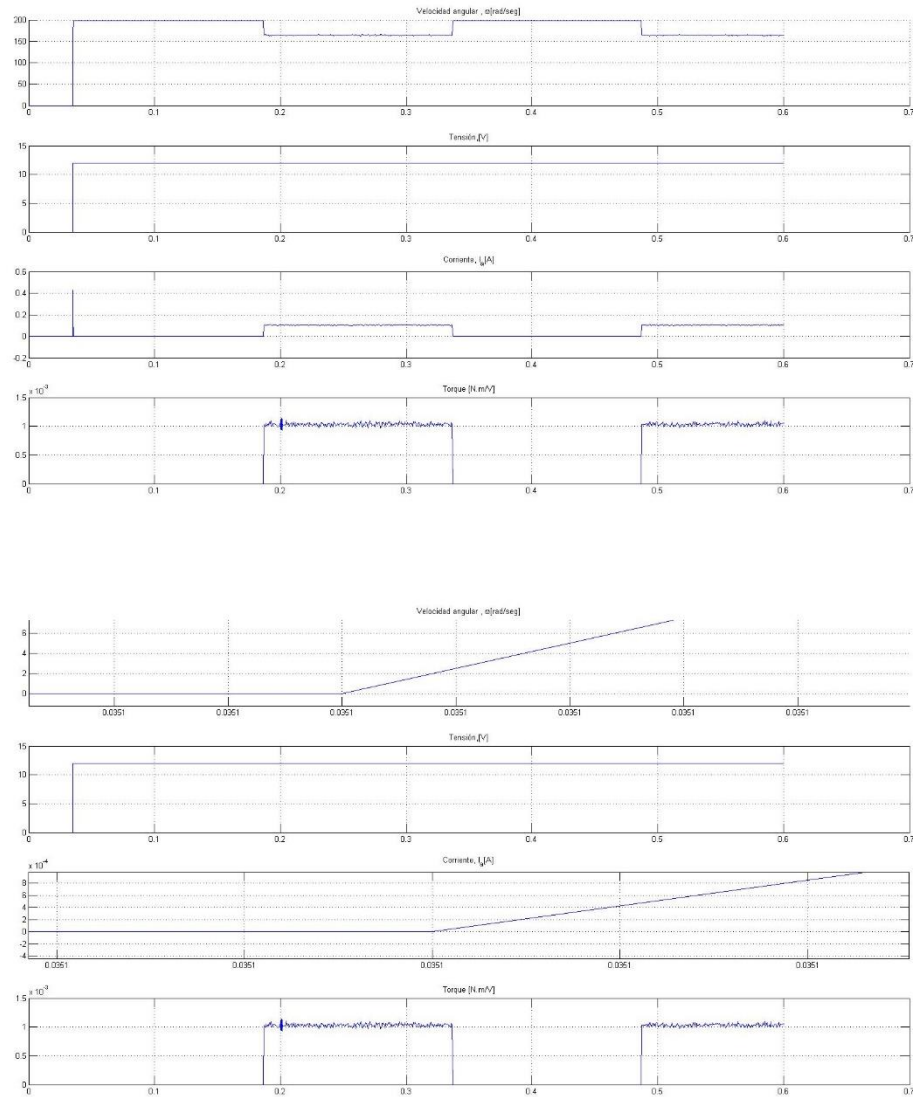
Tras una serie de iteraciones se encuentra  $T_{L,max} = 0.0014 \left[ \frac{N \cdot m}{V} \right]$ . De los resultados de simulación adjuntados a continuación se observa que para dicho valor de torque la velocidad angular se hace prácticamente nula y el ángulo de posición se mantiene constante.



Naturalmente, durante el tiempo que actúa el torque se eleva la corriente de armadura manteniéndose en  $i_a = 0.2[A]$ .

**INCISO 5:** A partir de las curvas de mediciones de las variables graficadas en la Fig. 1-3, se requiere obtener el modelo del sistema considerando como entrada un escalón de 12V, como salida a la velocidad angular, y al torque de carga  $T_L$  aplicado una perturbación. En el archivo *Curvas\_Medidas\_Motor.xls* están las mediciones, en la primera hoja los valores y en la segunda los nombres. Se requiere obtener el modelo dinámico, para establecer las constantes del modelo (1-5) (1-6).

En este inciso se plantea hacer un modelado del sistema físico a partir de las señales de entrada y salida del motor que se han medido.



De las curvas se tiene que la respuesta del sistema “sale” con una pendiente nula por lo que podría aproximarse el comportamiento del proceso al de un sistema de segundo orden. Dado que la curva de salida no tiene un sobrepasamiento significativo, en principio no podría modelarse el sistema como un sistema subamortiguado sin que exista un error que podría llegar a encontrarse fuera de los límites aceptables. Por esta razón se recurre al método de Chen, siguiendo un procedimiento similar al llevado a cabo para el *caso de estudio I*.

La función de transferencia del motor se plantea en forma general como:

$$G(s) = K \cdot \frac{(T_3 \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

donde las constantes  $T_i$  se determinan haciendo uso del método de Chen.



Dado que lo se busca con el modelo es obtener los parámetros del motor sobre el cual se efectuaron los ensayos resulta necesario calcular dos funciones de transferencia:

$$G_{\omega}(s) = \frac{\omega_r(s)}{V_a(s)} = K_{\omega} \cdot \frac{(T_{3\omega} \cdot s + 1)}{(T_{1\omega} \cdot s + 1) \cdot (T_{2\omega} \cdot s + 1)}$$

$$G_{i_a}(s) = \frac{i_a(s)}{V_a(s)} = K_{i_a} \cdot \frac{(T_{3i_a} \cdot s + 1)}{(T_{1i_a} \cdot s + 1) \cdot (T_{2i_a} \cdot s + 1)}$$

Para poder generar las funciones de transferencia enunciadas se toman tres puntos equi-espaciados (tal como se hizo para el caso de estudio anterior) de las curvas de tensión y corriente recordando que estos deben tomarse sobre el transitorio para lograr capturar la dinámica del sistema.

Los puntos tomados son:

$$X_{1\omega} = (0.0352; 62.4705) \quad ; \quad X_{1i_a} = (0.0352; 0.4266)$$

$$X_{2\omega} = (0.03525; 135.5840) \quad ; \quad X_{1i_a} = (0.03525; 0.2810)$$

$$X_{1\omega} = (0.0353; 175.3110) \quad ; \quad X_{1i_a} = (0.0353; 0.1275)$$

La ganancia en estado estacionario:

$$K_{\omega} = 198.2488 \quad ; \quad K_{i_a} = 8.9585 \cdot 10^{-15}$$

Sobre las muestras y la ganancia se debe aplicar un escalamiento por la amplitud de la tensión de entrada, es decir, se dividen por 12.

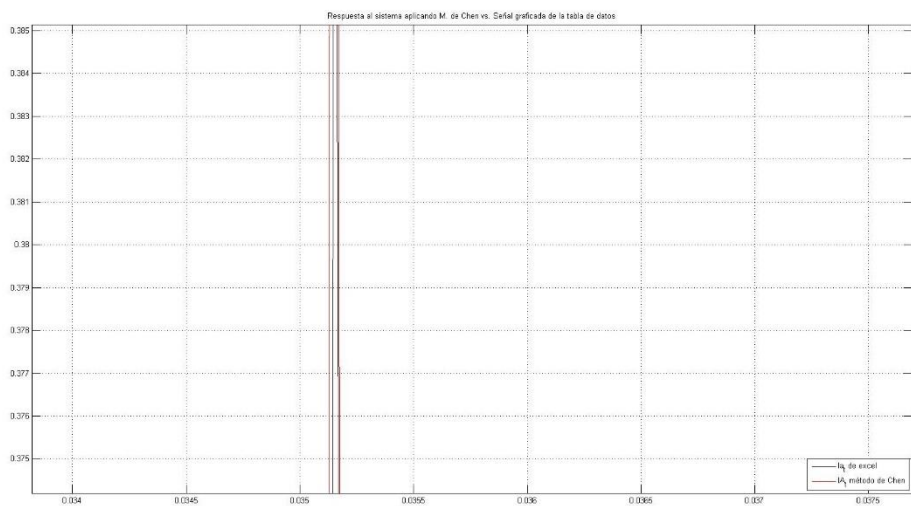
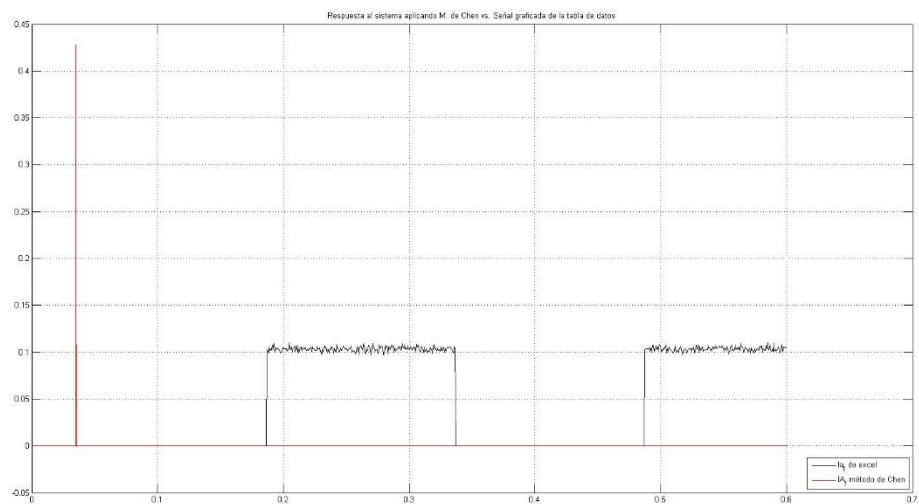
Habiendo muestreado las señales de salida del sistema se aplica el método de Chen para el cálculo de las funciones de transferencia. Una forma de verificar si el muestreo fue correcto previamente a contrastar los resultados medidos con la respuesta del modelo es verificar que la ecuación característica del sistema sea la misma ya que ésta la define el sistema y no las entradas y salidas.

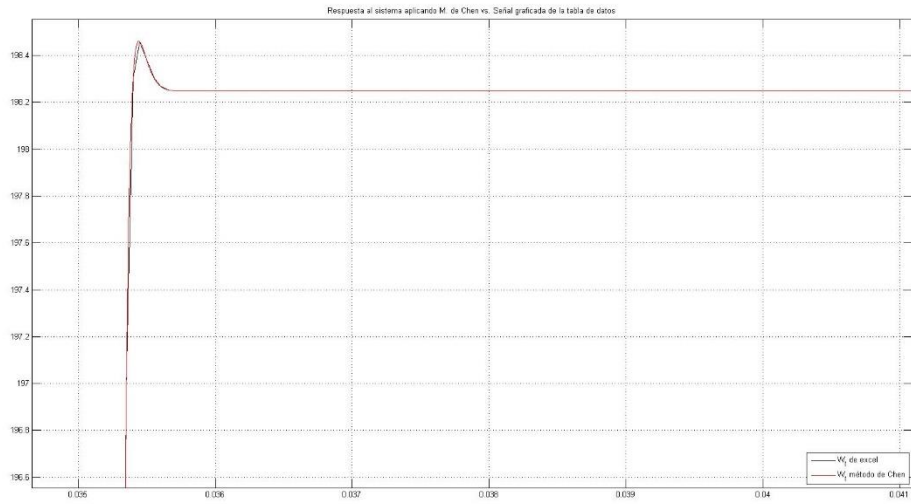
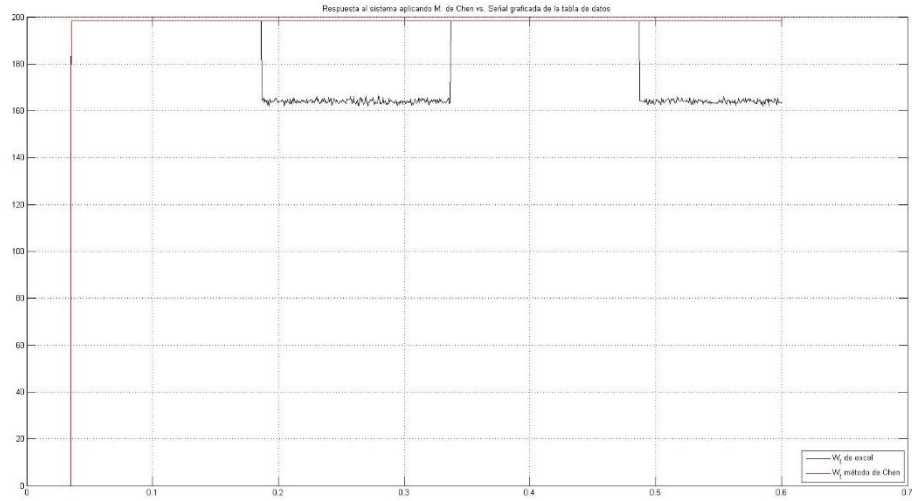
Las funciones de transferencia obtenidas resultan:

$$G_{\omega}(s) = \frac{\omega_r(s)}{V_a(s)} = \frac{-8.266 \cdot 10^{-7} \cdot s + 16.52}{2.061 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 8.25 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1}$$

$$G_{i_a}(s) = \frac{i_a(s)}{V_a(s)} = \frac{4.13 \cdot 10^{-6} \cdot s + 7.465 \cdot 10^{-16}}{2.061 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 8.25 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1}$$

Simulando la respuesta al escalón del sistema modelado por el método de Chen y comparándolo con los datos de la tabla se puede observar que ambas señales son muy similares lo que daría la pauta que el modelo generado aproxima correctamente el comportamiento del sistema real.





La forma general para las funciones de transferencia de un motor de CC son:

$$G_{i_a}(s) = \frac{J \cdot s + B}{L_a J \cdot s^2 + (R_a J + L_a B) \cdot s + (R_a B + K_i K_m)}$$

$$G_{\omega}(s) = \frac{K_i}{L_a J \cdot s^2 + (R_a J + L_a B) \cdot s + (R_a B + K_i K_m)}$$

Igualando las expresiones con las funciones de transferencia encontradas por Chen y despejando se obtiene:

$$K_i = 16.5207$$

$$J = 4.1302 \cdot 10^{-6}$$

$$B_m = 7.4654 \cdot 10^{-16} \approx 0$$

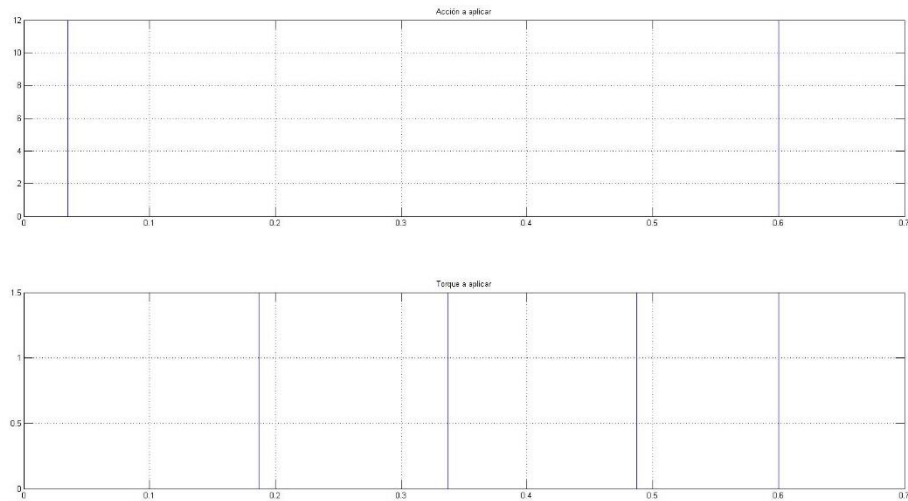
$$L_a = 0.499[mHy]$$

$$R_a = 19.9758[\Omega]$$

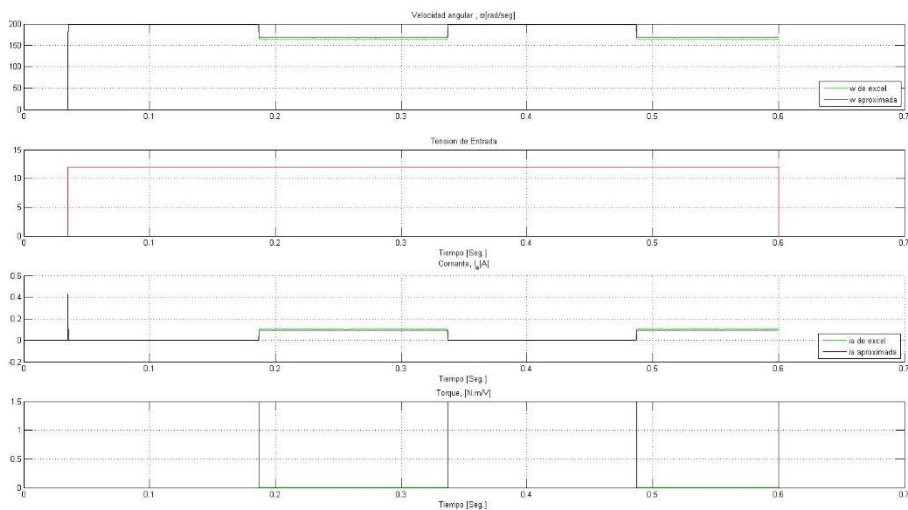
$$K_m = 0.0605$$

Para verificar que el sistema modelado por Chen realmente aproxima la respuesta del motor físico se procede a simular la respuesta de un motor con los parámetros calculados por medio del espacio de estados.

Para ello se generan las dos señales de entradas que actuarán sobre el modelo, la tensión aplicada y el torque.



El valor aplicado de torque se incrementó a  $T_L = 1.5 \left[ \frac{N \cdot m}{V} \right]$  dado que tras una primera simulación se observó que el valor de la tabla era muy pequeño para producir un cambio notable como el medido sobre la respuesta del motor.



De las gráficas se observa que las curvas coinciden por lo que se puede suponer un modelado correcto del sistema.

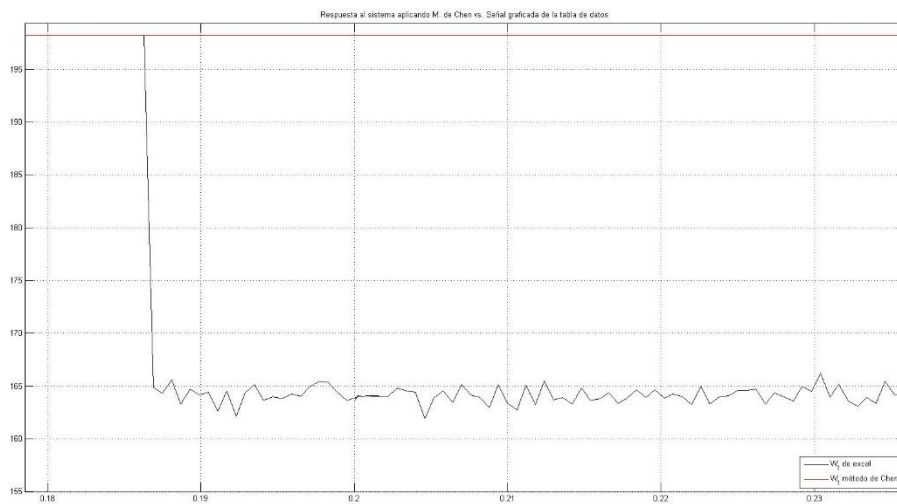
Para el desarrollo anterior se fuerza la respuesta del sistema para que coincidiera con las gráficas modificando el valor del torque. El procedimiento correcto a seguir consiste en realizar un ajuste de los parámetros del motor a partir de la función de transferencia de la velocidad angular respecto al torque.

Llevando las ecuaciones diferenciales al dominio de Laplace y pasivando  $V_a$  se obtiene la función de transferencia de  $\frac{\omega_r}{T_L}$ :

$$\frac{\omega_r}{T_L}(s) = \frac{L_a \cdot s + R_a}{L_a J \cdot s^2 + (R_a J + L_a B) \cdot s + (R_a B + K_i K_m)}$$

De la gráfica que se obtiene de la simulación en Matlab una vez calculado el modelo del motor por el método de Chen se detecta fácilmente la ganancia en estado de régimen para  $\frac{\omega_r}{T_L}$ :

$$\left| \frac{\omega_r}{T_L} \right| = 40 \cdot 10^3$$



Luego:

$$\left| \frac{\omega_r}{T_L}(0) \right| = 40 \cdot 10^3 = \frac{R_a}{R_a B + K_i K_m}$$

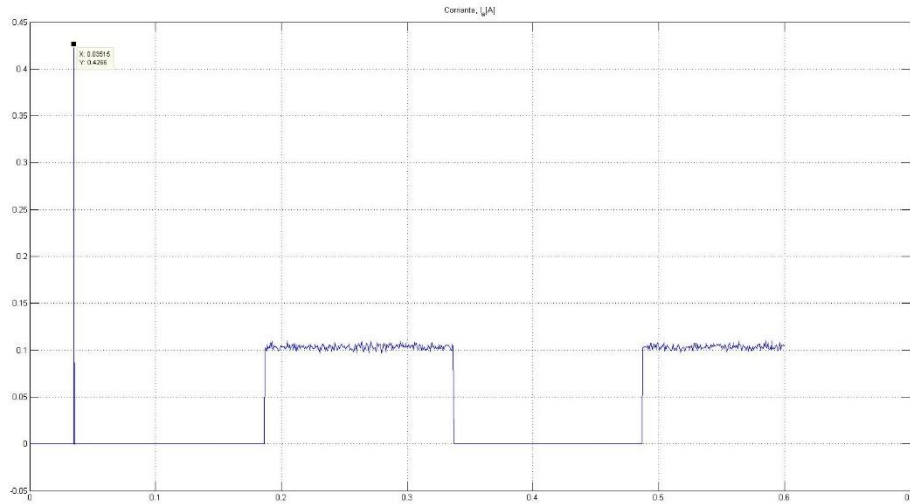
Del modelado realizado previamente  $B \approx 0$ , por lo que:

$$\frac{R_a}{K_i K_m} = 40 \cdot 10^3$$

La resistencia de armadura puede calcularse aplicando un procedimiento similar al mencionado para el caso de estudio I:

$$R_a = \frac{V_{in}}{i_{a_{max}}}$$

La  $i_{a_{max}}$  provienen de las curvas dadas:



$$R_a = \frac{12[V]}{0.426[A]} = 28.13[\Omega]$$

Conociendo  $R_a$  y  $K_m$  (que provienen del modelado por Chen):

$$K_i = \frac{R_a}{40 \cdot 10^3 K_m} = 0.01162$$

Desnormalizando la ecuación característica del sistema obtenida por el modelo de Chen, tomando  $B = 0$  e igualando términos:

$$L_a J \cdot s^2 + R_a J \cdot s + K_i K_m = (2.061 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 8.25 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1) \cdot K_i K_m$$

$$8.25 \cdot 10^{-5} \cdot K_i K_m = R_a J$$

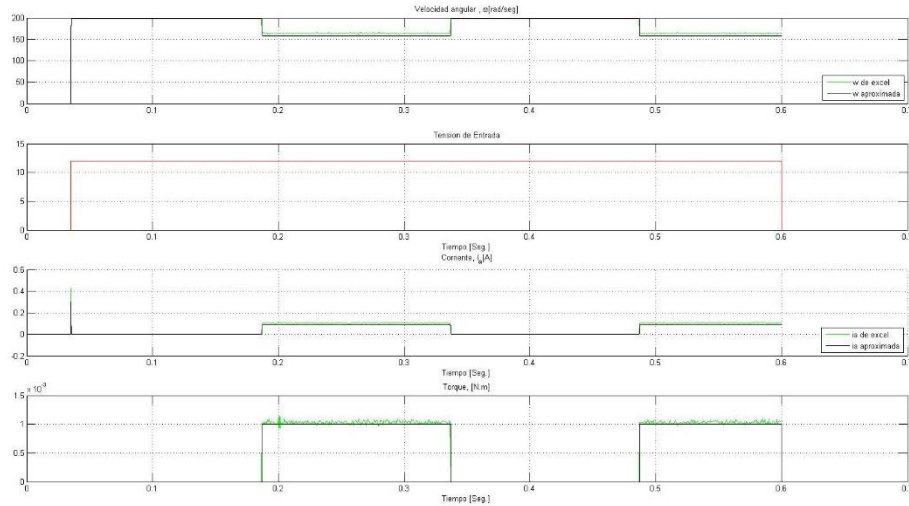
$$2.061 \cdot 10^{-9} \cdot K_i K_m = L_a J$$

Despejando los parámetros faltantes:

$$J = \frac{8.25 \cdot 10^{-5} \cdot K_i K_m}{R_a} = 2.0628 \cdot 10^{-9}$$

$$L_a = \frac{2.061 \cdot 10^{-9} \cdot K_i K_m}{J} = 7.0274 \cdot 10^{-4}$$

Con los nuevos parámetros calculados se obtiene que se verifican los valores medidos del sistema con los resultados de la simulación:



**INCISO 6: Implementar un PID en tiempo discreto para que el ángulo del motor permanezca en una referencia de 1 radian sometido al torque descrito en la Fig. 1-3. (Tip: partir de  $K_P = 0.1$ ,  $K_I = 0.01$ ,  $K_D = 5$ ).**

Para el desarrollo de este punto se toma el modelo del motor con los parámetros ajustados al torque.

Se define la ley de control para un PID discreto como:

$$u_k = u_{k-1} + Ae_k + Be_{k-1} + Ce_{k-2}$$

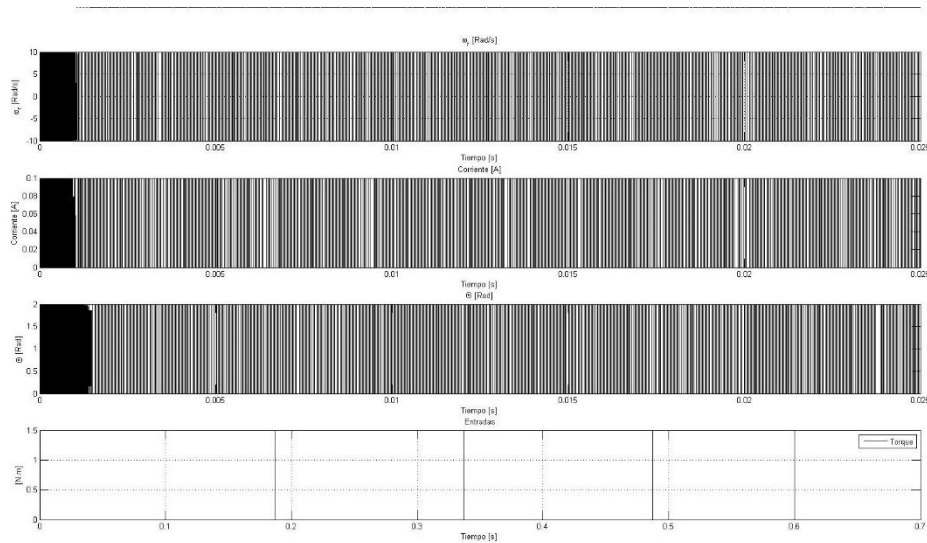
donde:

- $u_k$ : acción de control en el tiempo actual
- $u_{k-1}$ : acción de control en el tiempo anterior
- $e_k$ : error en el tiempo actual
- $e_{k-1}$ : error en el tiempo anterior
- $e_{k-2}$ : error en 2 tiempos anteriores
- $A = \frac{2K_P T_s + K_I T^2 + 2K_D}{2T_s}$
- $B = \frac{-2K_P T_s + K_I T^2 - 4K_D}{2T_s}$
- $C = \frac{K_D}{T_s}$
- $K_P, K_I, K_D$ : constantes del PID continuo
- $T_s$ : periodo de muestreo

La señal  $u_k$  se corresponde con la acción de control que se aplica sobre la planta con el objetivo de mantener constante la posición  $\theta = 1[\text{radian}]$  ante la aparición de una carga sobre el eje del motor.

Para determinar los valores del PID adecuados, se parte de los valores propuestos en la consigna y se simula el proceso haciendo uso del modelo en espacio

de estados obtenido en el inciso 4 y empleando los parámetros del motor calculados en el inciso anterior. Al insertar el PID en el sistema cambia una de las entradas que llega al motor, las dos entradas para este caso son  $u$  y  $T_L$ .



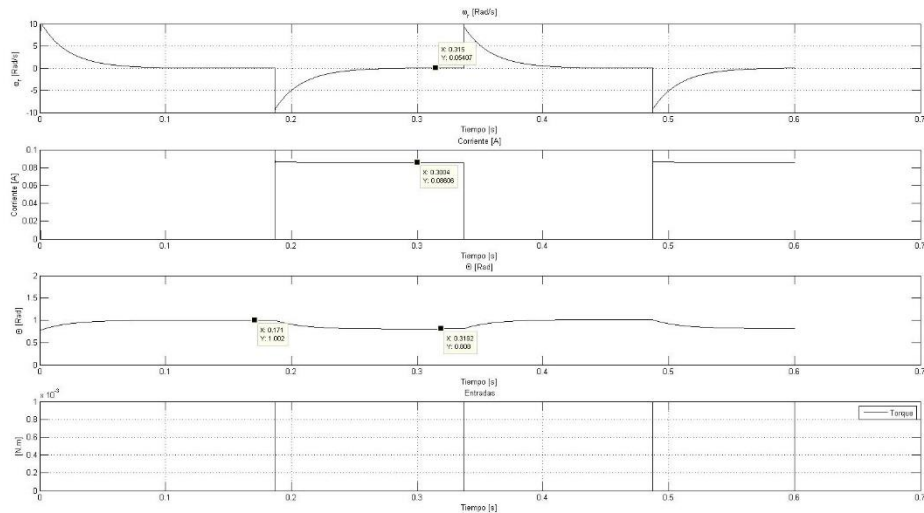
La respuesta obtenida inicialmente de la simulación no se ajusta al objetivo de control buscado por lo que se procede a ir cambiando los valores hasta obtener una respuesta óptima. La manera en la que se realiza el ajuste es teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- 1) La acción proporcional es la que más “fuerza” hace para minimizar el error.
- 2) La acción integral disminuye el tiempo de reacción y eleva en uno el tipo de sistema anulando el error en estado estable, sin embargo puede producir oscilaciones no aceptables.
- 3) La acción derivativa elimina las oscilaciones pero tiende a amplificar señales de ruido.

En función de las consideraciones enunciadas y de valores de constantes de PID usuales empleados para este tipo de procesos, las constantes del controlador quedaron definidas como:

$$K_p = 12 ; K_I = 5 ; K_D = 0.2$$





Tras probar diferentes combinaciones de las constantes del PID se escogen los valores mencionados ya que en contraste son lo que ofrecen una respuesta más rápida. Se probaron otras combinaciones para intentar mejorar la “caída” de  $\theta$  al aplicar el torque, sin embargo el valor mostrado en la imagen es lo más próximo a la consigna que se puede lograr.

## ***DESAFÍOS ENFRENTADOS Y LECCIONES APRENDIDAS.***

### ***Desafíos.***

*Tratamiento de sistemas multivariables.* Para esta instancia se plantea un sistema con dos entradas el cual presentó cierta complejidad al momento de adecuar los parámetros del sistema bajo estudio para así obtener un modelo que respondiera de tal manera que siguiera los datos presentados de las mediciones del sistema real.

*Familiarización con nuevos conceptos.* Resultó difícil incorporar el concepto de variables de estado en la práctica habitual debido a que hasta el momento no era una competencia desarrollada.

*Interpretación de los resultados obtenidos.* Debido a la falta de experiencia práctica y conocimiento en aspectos físicos referidos a motores ciertos resultados obtenidos de las simulaciones requirieron de mayor tiempo de análisis para corroborar que se ajustaban a un sistema físico real.

### ***Lecciones aprendidas.***

Refuerzo en el empleo del método de Chen para el modelado de sistema de segundo orden conociendo la respuesta al escalón del proceso.

Modelado de sistemas multivariables en espacio de estados permitiendo identificar el potencial que tiene éste modo de análisis cuando se trabaja con sistemas MIMO.

Diseño de controladores PID discretos a partir de su equivalente continuo identificando los ajustes que se deben realizar sobre cada constante ( $K_P, K_I, K_D$ ) en función de la respuesta obtenida por el sistema cuando aplica en éste una perturbación.

### **Identificación de logros.**

*ID1.1.1.1* Analiza la factibilidad de controlar un proceso real conociendo su modelo.

*ID1.1.1.2* Expresa el modelo lineal multivariable de un proceso real en un punto de operación.

*ID1.1.1.4* Selecciona las variables de estado de un proceso lineal para generar una expresión matricial lineal.

*ID1.1.1.5* Infiere la evolución temporal de procesos reales representados en variables de estado.

### **CONCLUSIONES.**

De los desafíos enfrentados y las lecciones aprendidas se puede concluir que el modelado en espacio de estados resulta muy ventajoso cuando se está trabajando con sistemas multivariables ya que permite hacer un seguimiento constante y dinámico acerca de cómo cambia la salida de interés cuando sobre el sistema actúa, por ejemplo, una perturbación. Además no presenta la limitación de condiciones iniciales nulas para su uso y a su vez simplifica el análisis ya que se puede conocer la respuesta ante múltiples entradas sin necesidad de calcular la función de transferencia para cada una de ellas.

Por otra parte el método de Chen también ofrece una herramienta muy potente cuando se requieren estimar parámetros de un sistema físico en funcionamiento operativo del cual solo se puede obtener mediciones respecto a las entradas y salidas.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

- [1] Dr. Ingeniero Pucheta, J. A. *Apuntes – Sistemas de Control II*. 2024. FCEFYN-UNC.
- [2] Chen, L. Li, J. Ding, R. *Identification for the second-order systems based on the step response*. 2010
- [3] Kuo, B. C. *Sistemas de Control Automático*. 7° Edición. 1996. Prentice Hall.

## **SITIOS WEB.**

- [1] Castaño Guiraldo, S. A. (3 de marzo de 2019). *Modelo de Motor DC*. <https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/modelo-de-motor-dc/>

## **REPOSITORIO.**

- [1] GitHub: [https://github.com/ncerquetti1013/Sistemas-de-Control-2/tree/main/TPs\\_Pucheta](https://github.com/ncerquetti1013/Sistemas-de-Control-2/tree/main/TPs_Pucheta)