

# 数据科学与工程数学基础

## 作业提交规范及第 21 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 8 月 27 日

### 作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
  - (a) 可以讨论，**禁止抄袭！**
  - (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名和学号**
  - (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 21 次作业”；
  - (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
  - (e) 题与题之间**请空一行**；
  - (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；**未交作业的当次作业记为 0 分**。

### 第 21 次作业



提交截至时间：**暂定 2022/06/\*\* 周五 20:00（晚上）**

## 理论部分

**习题 1.** 下面的函数哪些是凸函数? 请说明理由。

1.  $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \max(\|Ax + b\|_2, \|x^T x\|_1), A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$
3.  $f(x) = -\cos x, x \in [-\pi/2, \pi/2]$

**解.** 1.  $f''(x) = e^x > 0$  所以是凸函数

2. 因为  $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$  是凸函数, 所以  $\|Ax + b\|_2, \|x^T x\|_1$  是凸函数,  $\max$  是保凸运算, 所以  $f(x)$  是凸函数。

3.  $f''(x) = \cos x > 0, x \in [-\pi/2, \pi/2]$  所以是凸函数

**习题 2.** 证明: Gauss 概率密度函数的累积分布函数  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$  是对数-凹函数. 即  $\log(\Phi(x))$  是凹函数。

**解.** 由题意得,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (-x)$$

$$(\Phi'(x))^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2}$$

$$\Phi(x) \log \Phi''(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \cdot e^{-x^2/2} (-x)$$

当  $x \geq 0$  时,  $(\Phi'(x))^2 \geq 0 \geq \Phi(x) \Phi''(x)$ .

当  $x < 0$  时, 由于  $\frac{u^2}{2}$  是凸函数, 则

$$\frac{u^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} + (u-x)x \geq xu - \frac{x^2}{2}$$

所以,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du &\leq \int_{-\infty}^x e^{\frac{x^2}{2} - xu} du \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-xu}}{-x} \Big|_{u=-\infty}^x \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-x^2}}{-x} \end{aligned}$$

因此  $\Phi(x) \Phi''(x) \leq \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} = (\Phi'(x))^2$ ,  $\Phi(x)$  是对数凹函数.

**习题 3.** 计算函数  $f(x)$  的共轭函数, 以及共轭函数的定义域。

(1)  $f(x) = -\log x$

(2)  $f(x) = e^x$

**解.** (1)  $f(x) = -\log x$ , 定义域为  $\text{dom} f = \{x | x > 0\}$ 。当  $y < 0$  时, 函数  $xy + \log x$  无上界, 当  $y \leq 0$  时, 在  $x = -1/y$  处函数达到最大值。因此, 定义域为  $\text{dom} f^* = \{y | y < 0\}$ , 共轭函数为  $f^*(y) = -\log(-y) - 1 (y < 0)$

(2)  $f(x) = e^x$ 。当  $y < 0$  时, 函数  $xy - e^x$  无界。当  $y > 0$  时, 函数  $xy - e^x$  在  $x = \log y$  处达到最大值。因此,  $f^*(y) = y \log y - y$ 。当  $y = 0$  时,  $f^*(y) = \sup_x -e^x = 0$ , 综上,  $\text{dom} f^* = \{y | y \geq 0\}$ ,  $f^*(y) = y \log y - y$ 。(规定  $0 \log 0 = 0$ )。