

数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 4 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 10 月 22 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：使用 Word 或 L^AT_EX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 L^AT_EX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为：“学号_姓名”。命名示例：10175501112_陈诺。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：[第 4 次作业提交传送门](#)，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 4 次作业



提交截至时间：**2022/10/28 周五 12:00 (中午)**

理论部分

习题 1. 定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) 给出矩阵 $A^T A$ 的 *Cholesky* 分解 $A^T A = GG^T$

(ii) 试说明 $\|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2 = \|G\|_2^2$

习题 2. 对 $k \in \mathbb{N}_0$, 定义

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \inf_{\substack{M \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \\ \text{rk}(M) \leq k}} \|A^T - M\|_2$$

(i) 计算矩阵 A 的 *SVD* 分解 $A = U\Sigma V^T$, 并使 $2U$ 为 *Hadamard* 矩阵

(ii) 使用 (i) 中的结论, 求 $\text{rank}(A), \mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A), \|A\|_2, \|A\|_F$

(iii) 对每个 $k \in \mathbb{N}_0$, 计算 γ_k 并找出矩阵 $A_k \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ 使得 $\text{rank}(A_k) \leq k$ 且 $\|A^T - A_k\|_2 = \gamma_k$

习题 3.

(i) 假设 A 可逆, 根据 A 的 *SVD* 结果给出 A^{-1} 的 *SVD* 分解 (提示: $Av_i = \sigma_i u_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$)

(ii) 假设 Q 是正交阵. 给出 Q 的 *SVD* 分解及其奇异值

(iii) 假设 $A = QBQ^T$, 其中 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 说明 A 和 B 有相同奇异值