

# Introduction aux processus stochastiques

## Notes de cours

Nicolas Chopin



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Processus stochastiques : définition . . . . .	7
1.2	Rappels sur l'espérance conditionnelle . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Chaînes de Markov</b>	<b>13</b>
2.1	Construction et définitions . . . . .	13
2.2	Propriétés élémentaires . . . . .	15
2.3	Propriété de Markov forte . . . . .	19
2.4	Classes d'états . . . . .	21
2.5	Opérateur potentiel et nature des classes d'états . . . . .	22
2.6	Théorèmes ergodiques . . . . .	26
2.7	Périodicité, convergence des lois marginales . . . . .	34
2.8	Réversibilité, algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	37
2.9	Un autre algorithme à base de chaîne de Markov : le Gibbs sampler . . . . .	40
2.10	Extension à un espace d'états continu . . . . .	42
2.11	Chaînes de Markov cachées . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Martingales</b>	<b>49</b>
3.1	Définitions . . . . .	49
3.2	Temps d'arrêt . . . . .	54
3.3	Théorème d'arrêt : le cas borné . . . . .	57
3.4	Décomposition de Doob . . . . .	59
3.5	Inégalités maximales . . . . .	61
3.6	Espaces $\mathcal{L}_p$ et inégalité de Doob . . . . .	63
3.7	Convergence dans $\mathcal{L}_2$ (et plus généralement $\mathcal{L}_p$ , $p > 1$ ) . . . . .	65
3.8	Interlude : urnes de Polya . . . . .	67
3.9	Convergence : résultats plus généraux . . . . .	69
3.10	Deuxième interlude : processus de branchement (Galton-Watson) . . . . .	71
3.11	Martingales régulières et théorème d'arrêt . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Processus en temps continu</b>	<b>77</b>
4.1	Processus ponctuels, processus de Poisson . . . . .	77
4.1.1	Préliminaires : loi de Poisson . . . . .	77
4.1.2	Les processus de Poisson comme processus ponctuels . . . . .	78
4.1.3	Cas $E = \mathbb{R}^+$ . . . . .	80
4.1.4	Généralisation aux processus Markovien en temps discret . . . . .	82

*Table des matières*

4.2	Mouvement brownien . . . . .	83
4.2.1	Processus gaussiens . . . . .	83
4.2.2	Mouvement brownien . . . . .	84
4.2.3	Processus markovien en temps continu . . . . .	85

La première version de ces notes du cours d'introduction aux processus (deuxième année de l'ENSAE) est due à Pierre Alquier, qui a enseigné cette matière avant moi. Un grand merci à lui, ainsi qu'à ses prédécesseurs (Eric Gautier notamment). Depuis cette première version, le poly a été beaucoup remanié ; n'hésitez pas à me signaler toute erreur ou faute de frappe qui m'aurait échappé.

Quelques références pour aller plus loin : Le livre de Brémaud (1999) a un point de vue très mathématique. A l'inverse, le livre de Lawler (2006) offre un panorama assez complet tout en gardant un niveau de formalisme assez faible : c'est idéal pour se forger une intuition sur le sujet. Enfin, le livre de Baldi et al. (2002) est une compilation d'exercices assez utile pour réviser (même si ils sont en général assez difficiles). Il contient également de brefs rappels de cours assez utiles (et sur lesquels beaucoup des preuves de ce poly sont basées).



# 1 Introduction

## 1.1 Processus stochastiques : définition

Dans tout le cours, on considèrera un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  et un ensemble  $\mathcal{T}$ .

**Définition 1.1.1.** On appelle *processus stochastique*, ou *processus aléatoire*, une famille  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $E$ . Autrement dit, pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , l'application  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(E, \mathcal{E})$ . On appelle  $E$  l'espace d'états du processus.

En pratique, on utilise souvent les processus pour de la modélisation dynamique :  $X_t$  est la valeur d'une variable d'intérêt à la date  $t$ . L'ensemble  $\mathcal{T}$  représente alors l'ensemble des dates possibles.

**Définition 1.1.2.** Lorsque  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$  ou  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$  on dit que  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  est un processus à temps discret. Lorsque  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ , ou un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on parle de processus à temps continu.

**Exemple 1.1.1.** Un exemple à temps discret : soit  $X_t$  le PIB de la France à l'année  $t$  (donc  $E = \mathbb{R}_+$ ). En revanche, en finance, les prix des actifs, devises, etc. sont mises à jour avec une fréquence tellement élevée qu'on préfère utiliser une modélisation à temps continu : soit  $X_t$  le cours EURO/DOLLAR à la date  $t$ ,  $t$  mesurée en heures avec  $t = 0$  correspondant au 1er janvier 1999 à 0h.



On peut donc voir un processus comme une fonction de deux variables :

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathcal{T} &\rightarrow E \\ (\omega, t) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

qui doit vérifier la condition que, pour  $t$  fixé,  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  est mesurable (autrement dit,  $X_t$  vérifie bien la définition de variable aléatoire). À  $\omega$  fixé, la fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  s'appelle une *trajectoire* du processus.

**Définition 1.1.3.** On appelle *filtration* une suite  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  de  $\sigma$ -algèbres vérifiant

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

## 1 Introduction

Explication sur cette notion : quand on observe un processus au cours du temps, à la date  $t$ , on connaît les valeurs de  $X_s$  pour  $s \leq t$  mais on ne connaît pas encore les valeurs de  $X_s$  pour  $s > t$ . En terme de conditionnement, ça veut dire qu'on sera souvent amené à conditionner par les variables  $(X_s)_{s \leq t}$ , ou de façon équivalente par la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s \leq t)$ . On vérifie immédiatement que  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  est une filtration, on l'appelle filtration canonique.

Donc, l'idée d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  est de représenter l'information disponible à la date  $t$ .

On peut se poser la question naturelle : pourquoi introduire un concept général de filtration plutôt que d'utiliser toujours la filtration canonique ? D'un point de vue intuitif : à la date  $t$ , on peut avoir plus d'informations que les valeurs passées  $(X_s)_{s \leq t}$ . Dans l'exemple où  $X_t$  est le PIB de la France à l'année  $t$ , à la fin de l'année  $t$ , on connaît certes le PIB de la France à l'année  $t$ , mais aussi le PIB des USA, des autres pays de la zone euro, le cours du pétrole, les différents taux de change, etc. qui peuvent donner de l'information sur les valeurs futures du PIB de la France. D'un point de vue plus formel, on peut avoir plusieurs processus définis sur le même  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , par exemple  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  et  $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , et la considérer la filtration  $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, Y_s, s \leq t)$  qui n'est PAS la filtration canonique pour le processus  $(X_t)$ .

**Définition 1.1.4.** Le processus  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  est dit adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  si pour tout  $t \in \mathcal{T}$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Exemple 1.1.2.** Dans cet exemple  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ , soit  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X_0 = 0$  et

$$X_{t+1} = \alpha X_t + \beta + \varepsilon_t.$$

Ce processus est étudié dans le cours de séries temporelles sous le nom de processus autorégressif (AR). On définit  $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_s, s \leq t)$  la filtration canonique pour  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . On peut vérifier de façon triviale que le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ .

On peut maintenant annoncer le plan du cours. Dans les Chapitres 3 et 2, on n'étudiera que des processus à temps discret avec  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ .

Chapitre 2) On étudiera les chaînes de Markov, définies par la propriété

$$\mathcal{L}(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{L}(X_{t+1} | X_t)$$

(où  $\mathcal{L}$  se lit "loi de", là encore, une définition formelle viendra plus tard). On se restreindra au cas où  $E$  est fini ou dénombrable.

Chapitre 3) On étudiera les martingales, c'est-à-dire la classe des processus à valeurs dans  $E = \mathbb{R}$  vérifiant la relation

$$\mathbb{E}(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) = X_t$$

(une définition formelle sera donnée plus loin).

Chapitre 4) Une toute petite discussion du cas continu, à travers deux exemples (le processus de Poisson, et le mouvement brownien) définis sur  $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ .

Comme la définition de martingale repose sur une espérance conditionnelle, la fin de cette introduction contient quelques rappels sur cette notion.



## 1.2 Rappels sur l'espérance conditionnelle

On rappelle que pour deux événements  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{F}$ , avec  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ , on a par définition

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Soient deux variables aléatoires réelles définies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $X$  et  $Y$ . On suppose que  $X$  est intégrable. Dans un premier temps, on va supposer que  $Y$  est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose également que pour tout  $y \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ . On a alors, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}(A|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

ce qui définit une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , notons-la  $\mathbb{P}_y$ , et il est naturel de définir

$$\mathbb{E}(X|Y = y) := \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}_y(d\omega) = \int X d\mathbb{P}_y. \quad (1.1)$$

On vérifie en fait directement que

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \frac{\int X \mathbf{1}_{\{Y=y\}} d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(Y = y)}. \quad (1.2)$$

L'important est que l'on voit, que ce soit dans (1.1) ou (1.2), que  $\mathbb{E}(X|Y = y)$  est une fonction de  $y$ , notons-la  $f(y)$ . On définit alors simplement  $\mathbb{E}(X|Y) := f(Y)$ . Faire bien attention :  $\mathbb{E}(X)$  est un nombre réel, déterministe, alors que  $\mathbb{E}(X|Y) = f(Y)$  est une variable aléatoire, fonction de la variable  $Y$ , autrement dit,  $\sigma(Y)$ -mesurable.

Le problème de cette construction intuitive est qu'on ne peut pas l'étendre au cas où  $Y$  est une variable continue. Il faut alors trouver une caractérisation de  $\mathbb{E}(X|Y)$  qui n'implique pas de diviser par  $\mathbb{P}(Y = y)$  et puisse s'étendre au cas général. On va démontrer la propriété suivante : pour toute variable  $Z$  bornée qui est aussi  $\sigma(Y)$ -mesurable, autrement dit, ici,  $Z = g(Y)$ , on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)Z] = \mathbb{E}(XZ). \quad (1.3)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)Z] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)g(Y)] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{E}(X|Y = y)g(y)\mathbf{1}_{Y=y} \right] \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} g(y)\mathbb{E}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} g(y)\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y\}}) \text{ d'après (1.1)} \end{aligned}$$

## 1 Introduction

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{y=0}^{\infty} X \mathbf{1}_{\{Y=y\}} g(y) \right] \\
&= \mathbb{E} [Xg(Y)] \\
&= \mathbb{E}(XZ).
\end{aligned}$$

Le théorème suivant dit justement que la propriété 1.3 peut s'étendre au cas général.

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  une  $\sigma$ -algèbre et  $X$  une variable aléatoire réelle, positive ou intégrable. Alors il existe une variable aléatoire  $\mathcal{A}$ -mesurable, positive ou intégrable, unique à un p.s près, notée  $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ , telle que pour toute variable aléatoire  $Z$ ,  $\mathcal{A}$ -mesurable, positive ou bornée, on a*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{A})Z] = \mathbb{E}(XZ). \quad (1.4)$$

Dans le cas où  $\mathcal{A} = \sigma(Y)$  pour une variable aléatoire  $Z$ , on note simplement  $\mathbb{E}(X|Y)$  au lieu de  $\mathbb{E}(X|\sigma(Y))$ .

*Démonstration.* La preuve a été faite en 1ère année, on ne la refait pas complètement. Rappel de l'idée générale : on commence par traiter le cas où  $X \in \mathcal{L}_2$  l'ensemble des variables de carré intégrable. Alors

1. On vérifie que  $\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(XY)$  est bien un produit scalaire qui fait de  $\mathcal{L}_2$  un espace de Hilbert.
2. On vérifie que l'ensemble des variables  $\mathcal{A}$ -mesurables et dans  $\mathcal{L}_2$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}_2$ . On peut donc définir la projection orthogonale sur ce sous-espace,  $\Pi$ .
3. La variable  $X - \Pi(X)$  est alors orthogonale à toute variable  $Z$   $\mathcal{A}$ -mesurable et dans  $\mathcal{L}_2$ . Ceci se traduit par

$$\langle X - \Pi(X), Z \rangle = \mathbb{E} \left\{ [X - \Pi(X)] Z \right\}$$

soit

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}[\Pi(X)Z].$$

On voit donc qu'en posant  $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) := \Pi(X)$  la relation (1.4) est immédiatement satisfaite.

Il reste ensuite à travailler un peu pour étendre cette définition au cas où  $X$  est simplement intrégrable ( $X \in \mathcal{L}_1$ ) ou positive.  $\square$

On rappelle quelques propriétés qu'on utilisera en permanence tout au long de ce cours. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles,  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux  $\sigma$ -algèbres,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires, et  $f$  une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $\mathbb{E}(\lambda|\mathcal{A}) = \lambda$ .
2.  $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{A}) = \lambda \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + \mu \mathbb{E}(Y|\mathcal{A})$ .
3.  $X$  indépendant de  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(X)$ .

4.  $X$   $\mathcal{A}$ -mesurable  $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X$  et  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{A}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{A})$ .
5.  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{A})] = \mathbb{E}(X)$ .
6.  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{A})|\mathcal{B}] = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ .
7.  $X \leq Y$  p.s  $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{A})$  p.s
8. (“Jensen conditionnel”)  $f$  convexe  $\Rightarrow f(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})) \leq \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{A})$ .
9. (“TCD cond.”)  $X_n \xrightarrow{p.s} X, |X_n| \leq Z, Z \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}) \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ .
10. (“TCM cond.”)  $X_n \xrightarrow{\nearrow, p.s} X, X_n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}) \xrightarrow{\nearrow, p.s} \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ .
11. (“Fatou cond.”)  $X_n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{A}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{A})$ .



## 2 Chaînes de Markov

### 2.1 Construction et définitions

Dans tout ce chapitre,  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  un processus à valeurs dans un espace  $(E, \mathcal{E})$ , et  $(\mathcal{F}_t)$  sa filtration canonique  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$ .

**Définition 2.1.1.** *Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est markovien si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}(X_{t+1} \in A | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} \in A | X_t).$$

*Un processus markovien (à temps discret) est aussi appelé chaîne de Markov.*

Cette définition étant posée dans le cas général, on va maintenant se restreindre cas où  $E$  est un espace fini ou dénombrable (et  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ ). Le cas où  $E$  est un espace quelconque sera uniquement abordé dans la Section 2.10.

Dans ce cas, la propriété de Markov implique que, pour tout  $(x_0, \dots, x_t) \in E^{t+1}$ ,

$$\mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}).$$

Mais alors, par récurrence,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \mathbb{P}(X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \mathbb{P}(X_{t-1} = x_{t-1} | X_{t-2} = x_{t-2}) \\ &\quad \dots \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_0 = x_0). \end{aligned}$$

Donc, on peut décrire la loi de la chaîne  $(X_t)$  par la loi de  $X_0$  et la loi de  $X_{t+1} | X_t$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$ .

**Définition 2.1.2.** *On dit qu'une chaîne de Markov  $(X_t)$  est homogène si, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x)$  ne dépend que de  $(x, y)$ , et pas de  $t$ .*

A partir de maintenant, on ne considérera que des chaînes de Markov homogènes.

Un abus (très) fréquent consiste à appeler “chaîne de Markov” uniquement les chaînes de Markov homogènes, et “chaîne de Markov non homogène” une chaîne de Markov quelconque. A partir de maintenant, on suivra cette convention.

**Définition 2.1.3.** *Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov (donc, homogène). Notons*

$$P(x, y) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x),$$

## 2 Chaînes de Markov

on appelle alors  $P = (P(x, y))_{(x, y) \in \mathbb{E}^2}$  la matrice de transition de  $(X_t)$ . Notons

$$\mu(x) = \mathbb{P}(X_0 = x),$$

on appelle le vecteur  $\mu = (\mu_x)_{x \in E}$  la loi initiale de  $(X_t)$ .

On a alors

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Même si c'est évident, n'importe quelle matrice ne peut pas être une matrice de transition !

**Proposition 2.1.1.** *Soit une matrice de transition  $P$  d'une chaîne de Markov  $(X_t)$ . Alors, pour tout  $(x, y)$ ,  $P(x, y) \in [0, 1]$  et*

$$\sum_{y \in E} P(x, y) = 1.$$

*Démonstration.* Pour la première propriété,  $P(x, y) = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) \in [0, 1]$ . Pour la deuxième :

$$\sum_{y \in E} P(x, y) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_1 \in E | X_0 = x) = 1$$

□

On mentionne ensuite une méthode simple pour construire une chaîne de Markov.

**Proposition 2.1.2.** *Pour toute loi initiale  $\mu$ , et matrice de transition  $P$ , sur un espace dénombrable  $E$ , il existe des fonctions  $f_0$  et  $f$ , et une suite de variables aléatoires IID (indépendantes et identiquement distribuées)  $U_0, U_1, \dots$  telles que la suite de variables aléatoires  $X_0 = f_0(U_0)$ ,  $X_t = f(X_{t-1}, U_t)$  est une chaîne de Markov de loi initiale  $\mu$  et de matrice de transition  $P$ .*

*Démonstration.* On va prendre pour les  $U_t$  des variables de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . L'espace  $E$  est dénombrable, on peut sans perte de généralité appeler ses éléments  $1, 2, \dots$ . On définit  $f_0(u)$  comme suit :  $f_0(u) = 1$  si  $u \in [0, \mu(1)[$ ,  $f_0(u) = 2$  si  $u \in [\mu(1), \mu(1) + \mu(2)[$ , etc. On montre facilement que  $X_0 = f_0(U_0)$  est telle que  $\mathbb{P}(X_0) \sim \mu_0$ . On procède de la même manière pour  $f$  : pour  $x \in E$  fixé,  $f(x, u)$  est la fonction qui renvoie l'entier  $k$  si  $\sum_{i=1}^{k-1} P(x, i) \leq u < \sum_{i=1}^k P(x, i)$ . □

Ce résultat nous apporte deux choses :

1. Théoriquement : il prouve l'existence des chaînes de Markov. Ce point peut paraître évident à horizon fini (l'existence de  $X_0, \dots, X_t$  pour  $t$  fixé), il l'est un peu moins à horizon infini. En particulier, la construction de l'espace de probabilité des trajectoires de la chaîne de Markov semble être essentiellement la même que celle de l'espace de probabilité des suites infinies de variables IID.

2. Pratiquement : la preuve nous donne aussi un algorithme simple et générique pour simuler n'importe quelle chaîne de Markov. Ce point sera abordé à nouveau dans le cours de Simulation et méthodes de Monte Carlo au deuxième semestre. (La preuve utilise en fait la technique de simulation dite d'inversion de la fonction de répartition.)

Dans ce chapitre on va essentiellement étudier le comportement asymptotique de  $(X_t)$ . On va voir que les états de  $E$  peuvent se répartir dans des classes d'équivalences :

- pour certaines classes (dites transientes) :  $(X_t)$  peut visiter la classe, puis en sort.
- pour les autres (dites récurrentes) : une fois que  $(X_t)$  est dans la classe, il n'en sort plus.

Cette classification occupera les Sections 2.2, 2.4 et 2.5.

On s'intéressera ensuite au cas des chaînes n'ayant qu'une seule classe d'équivalence. Pour ces chaînes, on pourra établir en général une loi des grands nombres du type

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{X \sim \pi}[f(X)]$$

dans un sens à préciser, et où  $\pi$  est une loi à préciser ! Sous des hypothèses un peu plus fortes, on pourra établir la convergence en loi de  $(X_t)$  vers  $\pi$ . Ceci sera traité dans les Sections 2.6 et 2.7 respectivement. Enfin, la Section 2.8 discutera d'une application en simulation, et la Section 2.10 discutera (à la main, sans rentrer dans les détails) quels sont les résultats parmi ceux qui précèdent qui peuvent s'étendre au cas où  $E$  est un espace continu.

## 2.2 Propriétés élémentaires

Il y a une ambiguïté sur la notation  $P^t(x, y)$  : s'agit-il du nombre  $P(x, y)$  à la puissance  $t$ , ou de l'entrée d'indices  $(x, y)$  de la matrice  $P$  à la puissance  $t$  ?

**Définition 2.2.1.** On note  $P^t(x, y)$  l'entrée d'indices  $(x, y)$  de la matrice  $P$  à la puissance  $t$ ,  $P^t$ .

**Proposition 2.2.1.** Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ . Pour tout  $(x, y) \in E^2$  et  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_n = x) = P^m(x, y).$$

*Démonstration.* Par récurrence. C'est vrai pour  $m = 1$  par définition. Supposons que  $m > 1$  et que ce soit vrai pour  $1, 2, \dots, m-1$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_n = x) &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = y, X_{n+m-1} = z | X_n = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_{n+m-1} = z, X_n = x) \mathbb{P}(X_{n+m-1} = z | X_n = x) \end{aligned}$$

## 2 Chaînes de Markov

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_{n+m-1} = z) \mathbb{P}(X_{n+m-1} = z | X_n = x) \text{ (Markov)} \\
&= \sum_{z \in E} P(z, y) P^{m-1}(x, z) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
&= P^m(x, y). \quad \square
\end{aligned}$$

En conséquence, remarquer que  $P^m$  vérifie également les hypothèses d'une matrice de transition, en particulier,  $P^m(x, y) \in [0, 1]$  et  $\sum_y P^m(x, y) = 1$ .  $\square$

**Définition 2.2.2.** Soit une loi initiale  $\mu$  et une matrice de transition  $P$ . On note

$$\mu P(x) = \sum_{z \in E} \mu(z) P(z, x).$$

Autrement dit, dans nos notations matricielles, on considère une loi initiale comme un vecteur *ligne*.

**Proposition 2.2.2.** Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  et de loi initiale  $\mu$ . Pour tout  $x \in E$  et  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X_t = x) = \mu P^t(x).$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = x) &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_t = x | X_0 = z) \mathbb{P}(X_0 = z) \\
&= \sum_{z \in E} P^t(z, x) \mu(z) \text{ d'après la Proposition 2.2.1} \\
&= \sum_{z \in E} \mu(z) P^t(z, x) \\
&= \mu P^t(x)
\end{aligned}$$

$\square$

**Définition 2.2.3.** Soit une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , positive ou bornée, et une matrice de transition  $P$ . On note

$$Pf(x) = \sum_{z \in E} P(x, z) f(z).$$

Autrement dit, dans nos notations matricielles, on considère une loi fonction comme un vecteur *colonne*.

**Proposition 2.2.3.** Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  et une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , positive ou bornée. Pour tout  $x \in E$  et  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] = P^t f(x).$$



*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x] &= \sum_{z \in E} f(z) \mathbb{P}(X_t = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in E} f(z) P^t(x, z) \text{ d'après la Proposition 2.2.1} \\
 &= \sum_{z \in E} P^t(x, z) f(z) \\
 &= P^n f(x)
 \end{aligned}$$

□

Enfin avec les mêmes hypothèses on peut noter

$$\mu P^t f = \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} \mu(x) P^t(x, y) f(y) \in \mathbb{R}$$

et remarquer que

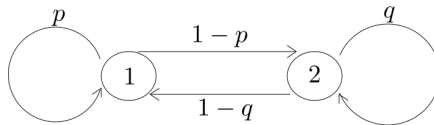
$$\mu P^t f = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

On peut représenter une matrice de transition  $P$  par un graphe orienté : on représente les états par les sommets du graphes, et si  $P(x, y) > 0$ , on trace une flèche de  $x$  à  $y$  sur laquelle on écrit la valeur de  $P(x, y)$ . Le graphe est orienté, il peut y avoir une flèche de  $x$  vers  $y$  et/ou une flèche de  $y$  vers  $x$ . D'autre part, si  $P(x, x) > 0$ , il y a une flèche de  $x$  à lui-même. Noter que la condition  $\sum_y P(x, y) = 1$  devient : “la somme des flèches partant du sommet  $x$  doit être égale à 1”.

**Exemple 2.2.1.** Lorsque  $E$  est un espace à deux éléments,  $E = \{1, 2\}$ , toute matrice de transition  $P$  peut se mettre sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

où  $(p, q) \in [0, 1]^2$ . Le graphe de cette chaîne est alors :



On termine par une petite discussion heuristique sur le comportement asymptotique d’une chaîne  $(X_t)$  : supposons que  $X_t$  converge en loi vers une loi  $\pi$ . Comme la loi de  $X_t$  est en fait  $\mu P^t$ , on a  $\mu P^t \rightarrow \pi$ . En multipliant les deux membres par  $P$ , on a  $\mu P^t P \rightarrow \pi P$  et d’autre part  $\mu P^t P = \mu P^{t+1} \rightarrow \pi$ . Donc on devrait avoir  $\pi P = \pi$ . Même si on n’a rien justifié proprement, cette relation sera très utile.

**Définition 2.2.4.** On appelle  $\pi$  loi invariante pour une chaîne  $(X_t)$  de transition  $P$  une loi vérifiant

$$\pi P = \pi.$$

**Proposition 2.2.4.** Si  $(X_t)$  est une chaîne de transition  $P$  et de loi initiale  $\pi$  invariante par  $P$  alors, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $X_t \sim \pi$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $X_t \sim \pi P^t$  et par invariance,  $\pi = \pi P = \pi P^2 = \dots$   $\square$

Par la suite, on justifiera proprement que si  $(X_t)$  converge en loi, c'est vers une loi invariante. En revanche, il se peut très bien que  $(X_t)$  ne converge pas en loi. De même, l'existence d'une loi invariante ne garantit pas que  $(X_t)$  converge en loi vers cette loi invariante (car il peut y avoir plusieurs lois invariantes).

**Exemple 2.2.2.** Revenons à l'Exemple 2.2.1, cherchons toutes les lois invariantes de  $P$  avec

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

où  $(p, q) \in [0, 1]^2$ . On écrit le système  $\pi P = \pi$ , si  $\pi = (\pi_1 \ \pi_2)$  ça donne :

$$(\pi_1 \ \pi_2) \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} = (\pi_1 \ \pi_2)$$

soit :

$$\begin{cases} p\pi_1 + (1-q)\pi_2 = \pi_1 \\ (1-p)\pi_2 + q\pi_2 = \pi_2. \end{cases}$$

On remarque tout de suite que les deux équations de ce système sont liées : elles sont équivalentes à

$$(1-p)\pi_1 = (1-q)\pi_2.$$

C'est TOUJOURS le cas qu'il y a au moins une équation redondante dans le système  $\pi P = \pi$ . Mais il ne faut pas oublier qu'on a une équation supplémentaire :  $\pi$  est une probabilité, donc  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ . On cherche donc à résoudre :

$$\begin{cases} (1-p)\pi_1 = (1-q)\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1. \end{cases}$$

Noter que si  $(p, q) \neq (1, 1)$  alors il y a toujours une solution unique. En effet, le système peut se réécrire

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1-q}{1-p}\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1. \end{cases}$$

et donc en injectant la première équation dans la deuxième,

$$\left( \frac{1-q}{1-p} + 1 \right) \pi_2 = 1$$

soit

$$(2 - p - q)\pi_2 = 1 - p$$

soit  $\pi_2 = \frac{1-p}{2-p-q}$  et la première équation du système donne  $\pi_1 = \frac{1-q}{2-p-q}$  donc la solution unique est

$$\pi = \left( \frac{1-q}{2-p-q}, \frac{1-p}{2-p-q} \right).$$

En revanche, dans le cas  $p = q = 1$ , la première équation donne  $0 = 0 \dots$  et on vérifie que l'ensemble des solutions est donné par

$$\pi \in \{(\alpha, 1 - \alpha), \alpha \in [0, 1]\}.$$

On a donc deux cas différents : dans un cas, il y a une loi invariante unique ; dans l'autre cas, il y a une infinité de lois invariantes.

## 2.3 Propriété de Markov forte

De la définition d'une chaîne de Markov, on peut aisément déduire des propriétés d'indépendance conditionnelle des variables  $X_t$ . Par exemple :

$$\mathbb{P}(X_{t+2} = x_{t+2}, X_{t+1} = x_{t+1} | X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = P(x_t, x_{t+1})P(x_{t+1}, x_{t+2})$$

et donc la loi du bloc  $(X_{t+1}, X_{t+2})$  ne dépend pas du passé  $X_{t-1}, \dots, X_0$  conditionnellement au présent  $X_t$ . C'est vrai aussi bien sûr pour un bloc plus grand  $(X_{t+1}, \dots, X_{t+k})$ , et pour les marginales correspondantes :  $X_{t+k}$  est indépendante de  $X_{t-l}$  sachant  $X_t$ , pour  $k, l \geq 1$ . Par ailleurs, la loi de  $X_{t+k}$  sachant  $X_t = x$  est la même que celle de  $(X_k)$  sachant  $X_0 = x$ .

Ce que nous venons d'énoncer est la version la plus basique de la propriété de Markov. Elle ne peut s'appliquer à des événements concernant la *trajectoire* complète de la chaîne : par exemple la probabilité de revisiter un état  $x$  dans le futur, sachant  $X_t = x$ . On admettra les propriétés suivantes, dites de Markov forte.

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov (de loi initiale  $\mu$ ) et  $\varphi : E^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , mesurable, positive ou bornée, alors :*

$$\mathbb{E}_\mu[\varphi((X_{t+k})_{t \geq 0}) | X_k = x] = \mathbb{E}_x[\varphi((X_t)_{t \geq 0})]$$

où  $\mathbb{E}_\mu$  est l'espérance sous la loi de  $(X_t)$ , et  $\mathbb{E}_x := \mathbb{E}_{\delta_x}$  est l'espérance sous la même loi, mais avec loi initiale  $\delta_x$ .

En appliquant ce résultat à une fonction indicatrice, on obtient :

$$\mathbb{P}_\mu((X_{t+n})_{n \geq 0} \in A | X_t = x) = \mathbb{P}_x((X_n)_{n \geq 0} \in A)$$

où  $A$  appartient à une tribu sur l'espace des trajectoires,  $E^\infty$ . (Grosso modo, le même type d'espace que celui auquel s'applique le p.s. dans la loi forte des grands nombres.)

La vraie propriété de Markov forte est encore un peu plus générale, et permet de conditionner à un temps *aléatoire*, à condition que ce temps aléatoire soit un certain type de variable aléatoire dit temps d'arrêt.

**Définition 2.3.1.** *On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  (rappel :  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$  dans ce chapitre) une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup +\infty$ , telle que  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  pour tout  $t \geq 0$ .*

La notion de temps d'arrêt est assez technique, et sera vue plus en détail dans la partie sur les martingales. Pour l'instant, je vous propose l'interprétation semi-formelle suivante :

- un temps d'arrêt est une fonction déterministe de la trajectoire du processus  $(X_t)$  ;
- telle que l'indicatrice  $\mathbb{1}\{\tau \leq t\}$  ne dépend que de  $(X_0, \dots, X_t)$ . En d'autres termes, observer le processus jusqu'au temps  $t$  suffit à déterminer si  $\tau \leq t$  ou pas.

Et pour simplifier encore un peu plus les choses, gardez à l'esprit l'exemple suivant, du **temps d'atteinte** :

$$\tau_y = \inf\{t \geq 0 : X_t = y\} \quad (2.1)$$

C'est bien un temps d'arrêt. Si la trajectoire du processus ne passe jamais par  $y$ , on a :  $\tau_y = +\infty$ .

Enfin, définissons  $\mathcal{F}_\tau \approx \sigma(X_0, \dots, X_\tau)$  ; cette tribu sera correctement définie dans le chapitre suivant. Pour l'instant, comprendre que conditionner sur  $\mathcal{F}_\tau$  revient à conditionner par rapport à toute information que l'on peut tirer de l'observation de  $X_0, \dots, X_\tau$ . On supposera que  $\{\tau < \infty\}$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable. (Le vérifier à titre d'exercice quand vous aurez lu la définition exacte de  $\mathcal{F}_\tau$ .)

On peut désormais énoncer la propriété de Markov forte.

**Proposition 2.3.2.** *Sous les mêmes conditions que la proposition précédente, et pour  $\tau$  un temps d'arrêt (par rapport à  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$ ), on a :*

$$\mathbb{E}_\mu [\varphi((X_{\tau+n})_{n \geq 0}) | \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}} = \mathbb{E}_{X_\tau} [\varphi((X_t)_{t \geq 0})] \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}.$$

Noter que si  $\tau = +\infty$ , la variable  $X_\tau$  n'est pas clairement définie. C'est pour cela que l'on a besoin des indicatrices (que l'on pourraient mettre à l'intérieur des espérances).

En fait, dans ce chapitre, on va souvent appliquer cette propriété au **temps de retour** en  $x$  :

$$\sigma_x = \inf\{t \geq 1 : X_t = x\}$$

ce qui est presque la même chose qu'un temps d'atteinte (mais  $\sigma_x \geq 1$ ). Dans ce cas, la propriété de Markov forte s'écrit comme suit :

$$\mathbb{E}_\mu [\varphi((X_{t+\sigma_x})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_x [\varphi((X_t)_{t \geq 0})] \quad (2.2)$$

si  $\sigma_x < \infty$  p.s. (ou alors rajouter une indicatrice des deux côtés). Noter que le terme de droite n'est pas aléatoire.

## 2.4 Classes d'états

Dans toute cette section, on considère une matrice de transition  $P$  sur  $E$ .

**Définition 2.4.1.** Soient  $(i, j) \in E^2$ . On dit que  $i$  mène à  $j$ , et on note  $i \rightsquigarrow j$ , si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P^n(i, j) > 0$ .

Autrement dit, il y a une probabilité non nulle de passer de  $i$  à  $j$  en  $n$  étapes. Bien noter que dans le cas  $n = 0$ ,  $P^n$  est la matrice identité, pour laquelle  $P^0(i, i) = 1$ , autrement dit, par convention, on considère toujours que  $i \rightsquigarrow i$ .

**Définition 2.4.2.** On dit que  $i$  et  $j$  communiquent, et on note  $i \longleftrightarrow j$ , si  $i \rightsquigarrow j$  et  $j \rightsquigarrow i$ .

**Proposition 2.4.1.** La relation  $\longleftrightarrow$  est une relation d'équivalence sur  $E$ .

*Démonstration.* Il faut prouver la transitivité, la réflexivité et la symétrie. Or la symétrie est évidente à partir de la définition de  $\longleftrightarrow$  et la réflexivité est conséquence de la convention  $i \rightsquigarrow i$ .

Reste la transitivité, assez évidente, mais elle utilise une technique de preuve très classique que l'on réutilisera souvent. Si  $i \rightsquigarrow j$ , il existe  $n$  tel que  $P^n(i, j) > 0$ . Si de plus  $j \rightsquigarrow k$ , il existe  $m$  tel que  $P^m(j, k) > 0$ . Mais alors

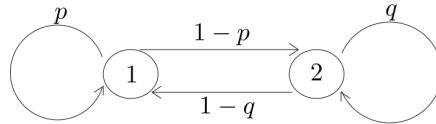
$$P^{n+m}(i, k) = \sum_{\ell \in E} P^n(i, \ell) P^m(\ell, k) \geq P^n(i, j) P^m(j, k) > 0$$

□

**Définition 2.4.3.** Les classes d'équivalences pour la relation  $\longleftrightarrow$  sont appelées "classes de communication" de  $P$ , et par extension, on les appelle également classes de communication de toutes chaîne de Markov  $(X_n)$  ayant  $P$  pour matrice de transition.

On omet souvent le terme communication, on parle alors des classes d'états ou simplement des classes de  $(X_n)$  et de  $P$ .

**Exemple 2.4.1.** On revient à l'exemple à deux états.



Si  $p < 1$  alors  $1 \rightsquigarrow 2$ . Si  $q < 1$  alors  $2 \rightsquigarrow 1$ . On a donc : soit  $p < 1$  et  $q < 1$  et alors  $1 \longleftrightarrow 2$ , il y a une seule classe d'équivalence  $\{1, 2\}$ ; soit  $p = 1$  ou  $q = 1$  et alors il y a deux classes d'équivalence,  $\{1\}$  et  $\{2\}$ .

Dans l'exemple précédent, si  $p = 1$ , alors lorsque la chaîne entre dans l'état 1, elle ne peut plus jamais en sortir, car  $P(1, 1) = 1$ . C'est une situation que l'on rencontre fréquemment en modélisation, par exemple en épidémiologie où les états pour un individu peuvent être  $E = \{\text{sain, infecté, mort}\}$  : on ne sort pas de l'état "mort". Un tel état constitue nécessairement une classe à lui tout seul.

**Définition 2.4.4.** Si un état  $i$  vérifie  $P(i, i) = 1$  on dit que c'est un "état absorbant".

A l'inverse, dans l'exemple ci-dessus, si  $p < 1$  et  $q < 1$  alors on a vu qu'il n'y a qu'une seule classe d'états :  $\{1, 2\}$ . Les chaînes de Markov avec une seule classe sont plus simples à étudier asymptotiquement.

**Définition 2.4.5.** Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov avec une seule classe d'états. On dit que la chaîne  $(X_n)$  est irréductible.

## 2.5 Opérateur potentiel et nature des classes d'états

Dans toute cette section,  $(X_n)$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  et de loi initiale  $\mu$ .

**Définition 2.5.1.** On définit l'opérateur potentiel :

$$U = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^k.$$

Bien noter que pour  $(i, j) \in E^2$ ,

$$U(i, j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^k(i, j) \in [0, \infty].$$

Énormément des propriétés liées à la communication et aux classes d'états peuvent se lire sur l'opérateur  $U$ . Par exemple, il est évident que

$$U(i, j) > 0 \Leftrightarrow \exists k : P^k(i, j) > 0 \Leftrightarrow i \rightsquigarrow j.$$

On va maintenant, à l'aide de  $U$ , faire une étude plus fine des classes.

**Définition 2.5.2.** Soit  $A \in \mathcal{F}$ , on définit  $N_A$  le nombre de passages en  $A$  :

$$N_A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{X_n \in A\}}.$$

Lorsque  $A = \{i\}$  a un seul élément, on note souvent  $N_i$  au lieu de  $N_{\{i\}}$  :

$$N_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}.$$

**Proposition 2.5.1.** Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$U(x, y) = \mathbb{E}_x(N_y).$$

*Démonstration.* Fixons  $x$  et  $y$ ,

$$\mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{E}_x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) = U(x, y)$$

□

**Définition 2.5.3.** Un état  $x$  est dit

- *récurrent* si  $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$  ;
- *transient* si  $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$ .

On pourrait se poser la question de l'existence d'un cas intermédiaire : est-ce qu'il peut exister par exemple un état tel que  $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = \mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1/2$  ? On va voir dans le prochain théorème que la réponse est non : tout état est soit récurrent, soit transient.

**Théorème 2.5.2.** Pour tout  $x \in E$ ,

$$U(x, x) = \infty \Leftrightarrow x \text{ récurrent} \Leftrightarrow \mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty) = 1,$$

$$U(x, x) < \infty \Leftrightarrow x \text{ transient} \Leftrightarrow \mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty) < 1,$$

où  $\sigma_x$  est le temps de retour en  $x$  (défini en 2.2).

*Démonstration.* On introduit les temps d'arrêt  $\sigma_x^n$ ,  $n \geq 1$ , par la relation de récurrence

$$\sigma_x^{n+1} = \inf\{t > \sigma_x^n : X_t = x\}$$

que l'on initialise avec  $\sigma_x^1 = \sigma_x$ . On commence par démontrer la relation

$$\mathbb{P}_x(\sigma_x^n < \infty) = [\mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty)]^n \quad (2.3)$$

qui nous permettra de conclure assez rapidement.

On écrit pour ce faire :  $\sigma_x^n = \sigma_x^{n-1} + (\sigma_x^n - \sigma_x^{n-1})$ , où le deuxième terme est le temps de *premier* retour en  $x$ , pour la trajectoire translatée  $(X_{t+\sigma_x^{n-1}})_{t \geq 0}$ . Posons  $\tau := \sigma_x^{n-1}$  pour rendre les équations plus lisibles :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\sigma_x^n < \infty) &= \mathbb{P}_x(\tau < \infty, \sigma_x^n - \sigma_x^{n-1} < \infty) \\ &= \mathbb{E}_x [\mathbf{1}\{\tau < \infty\} \mathbf{1}\{\sigma_x((X_{t+\tau})_{t \geq 0}) < \infty\}] \\ &= \mathbb{E}_x [\mathbb{E} [\mathbf{1}\{\tau < \infty\} \mathbf{1}\{\sigma_x((X_{t+\tau})_{t \geq 0}) < \infty\} | \mathcal{F}_\tau]] \quad \text{double espérance} \\ &= \mathbb{E}_x [\mathbf{1}\{\tau < \infty\} \mathbb{E} [\mathbf{1}\{\sigma_x((X_{t+\tau})_{t \geq 0}) < \infty\}]] \quad \text{Markov forte} \\ &= \mathbb{P}_x(\tau < \infty) P_x(\sigma_x < \infty). \end{aligned}$$

Supposons dans un premier temps que  $\mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty) = 1$ . Alors d'après (2.3), pour tout  $n$ ,  $\mathbb{P}_x(\sigma_x^n < \infty) = 1$ . Donc

$$N_x = \mathbf{1}_{\{X_0=x\}} + \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_x^n < \infty\}} = \infty \text{ p.s.}$$

et finalement  $\mathbb{E}_x(N_x) = U(x, x) = \infty$ .

Supposons maintenant que  $\mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty) < 1$ , alors

$$\begin{aligned} U(x, x) = \mathbb{E}_x(N_x) &= 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_x(\sigma_x^n < \infty) \\ &= \sum_{n \geq 0} [\mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty)]^n = \frac{1}{1 - \mathbb{P}_x(\sigma_x < \infty)} < \infty \end{aligned}$$

et comme  $\mathbb{E}_x(N_x) = U(x, x) < \infty$  on a nécessairement  $N_x < \infty$  p.s. □

**Théorème 2.5.3.** *Si  $x \leftrightarrow y$  alors  $x$  et  $y$  sont de même nature (soit tous les deux récurrents, soit tous les deux transients).*

Avant de prouver le théorème, bien noter que son énoncé implique que la récurrence et la transience sont en fait des propriétés de classe : une classe contient soit uniquement des états récurrents, soit uniquement des états transients. Du coup, on introduit la terminologie naturelle suivante.

**Définition 2.5.4.** *Si les états d'une classe sont récurrents, on dit que la classe est récurrente. Si les états d'une classe sont transients, on dit que la classe est transiente.*

*Si une chaîne est irréductible et que son unique classe d'états est récurrente, on dit que la chaîne est récurrente. Si l'unique classe est transiente, on dit que la chaîne est transiente.*

La preuve du théorème utilise un lemme.

**Lemme 2.5.4.** *Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $U(x, y) \leq U(y, y)$ .*

*Preuve du Lemme 2.5.4.* Pour cette preuve, on utilise le temps d'arrêt  $s_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$  :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \mathbb{E}_x(N_y) \\ &= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{s_y < \infty\}} N_y((X_{t+s_y})_{t \geq 0})) \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{s_y < \infty\}} \mathbb{E}_x(N_y((X_{t+s_y})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{s_y})] \quad \text{dble espérance, } \{s_y < \infty\} \in \mathcal{F}_{s_y} \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{s_y < \infty\}} \mathbb{E}_y(N_y)] \quad \text{Markov forte} \\ &= \mathbb{P}_x(s_y < \infty) U(y, y) \\ &\leq U(y, y). \end{aligned}$$

□

*Preuve du Théorème 2.5.3.* Soit  $x$  récurrent et  $y$  tel que  $x \leftrightarrow y$ . Alors en particulier, il existe  $n$  tel que  $P^n(x, y) > 0$ . Alors on commence par utiliser le Lemme 2.5.4,

$$\begin{aligned} U(y, y) &\geq U(x, y) = \sum_{k \geq 0} P^k(x, y) \geq \sum_{k \geq 0} P^{k+n}(x, y) \\ &\geq \sum_{k \geq 0} P^k(x, x) P^n(x, y) = \underbrace{U(x, x)}_{=\infty} \underbrace{P^n(x, y)}_{>0} = \infty \end{aligned}$$

et donc  $y$  est récurrent. □

On finit par quelques exemples qui vont permettre de mieux comprendre ces notions.

**Proposition 2.5.5.** *Toute chaîne irréductible  $(X_n)$  définie sur  $E$  fini est récurrente.*

*Démonstration.* Si elle était transiente, p.s, chaque état ne serait visité qu'un nombre fini de fois. Or, il existe au moins un état visité une infinité de fois. □



**Proposition 2.5.6.** *Sur un espace  $E$  dénombrable, non fini, il existe des chaînes irréductibles récurrentes, et des chaînes irréductibles transientes.*

*Démonstration.* On va construire un exemple avec  $E = \mathbb{Z}$  (on peut l'étendre à tout autre ensemble  $E$  infini dénombrable via une bijection avec  $\mathbb{Z}$ ). On définit la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  comme la chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par :

$$P(i, i-1) = 1-p \text{ et } P(i, i+1) = p$$

pour un  $p \in ]0, 1[$  fixé. Vérifier que si  $p = 1$  ou  $p = 0$  la chaîne n'est plus irréductible ; on élimine ces cas. En revanche, si  $p \in ]0, 1[$ , pour tout  $i$ ,  $i \rightsquigarrow i+1 \rightsquigarrow i$  et donc la chaîne est irréductible. On va vérifier que si  $p \neq 1/2$  la chaîne est irréductible transiente, et si  $p = 1/2$  elle est irréductible récurrente.

Commençons par le cas  $p = 1/2$  (on parle dans ce cas de marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ ). Dans ce cas on peut calculer explicitement  $P^n(0, 0)$ . En fait, pour  $n$  impair,  $n = 2k + 1$ , on a évidemment  $P^n(0, 0) = 0$ . En revanche, si  $n$  pair,  $P^n(0, 0) > 0$ . En fait, il y a  $2^{2k}$  possibles chemins de longueur  $2k$ , et parmi ceux-ci, mènent de 0 à 0 uniquement les chemins comportant autant de déplacements vers la gauche que de déplacements vers la droite. Le nombre de ces chemins est  $\binom{2k}{k}$  (il faut choisir exactement  $k$  déplacements vers la gauche parmi  $2k$  déplacements). Donc :

$$P^{2k}(0, 0) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

En utilisant la formule de Stirling, que l'on rappelle :

$$m! \sim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}$$

on obtient :

$$P^{2k}(0, 0) \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Comme la série  $\sum_k 1/\sqrt{k}$  diverge, la série  $\sum P^{2k}(0, 0) = \sum_n P^n(0, 0)$  diverge également, donc  $U(0, 0) = \infty$ , et la chaîne est récurrente.

Traisons maintenant le cas  $p \neq 1/2$  - on va en fait supposer  $p > 1/2$ , le cas  $p < 1/2$  étant symétrique. Posons, pour tout  $n$ ,  $\varepsilon_n = X_n - X_{n-1}$ . Alors, si  $X_0 = 0$ ,

$$X_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

On vérifie que les  $\varepsilon_i$  sont indépendants. En effet, soit  $i < j$ , on a (pour  $f$  et  $g$  mesurables, positives),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(f(\varepsilon_j)g(\varepsilon_i)) &= \mathbb{E}_0(f(X_j - X_{j-1})g(X_i - X_{i-1})) \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0(f(X_j - X_{j-1})g(X_i - X_{i-1})|\mathcal{F}_{j-1})] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0(f(X_j - X_{j-1})|\mathcal{F}_{j-1})g(X_i - X_{i-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}_0 [pf(1) + (1-p)f(-1))g(X_i - X_{i-1})] \\
 &= (pf(1) + (1-p)f(-1)) (pg(1) + (1-p)g(-1)) \\
 &= \mathbb{E}_0(f(\varepsilon_j))\mathbb{E}_0(g(\varepsilon_i)).
 \end{aligned}$$

Du coup, par la loi des grands nombres,

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}_0(\varepsilon_1) = p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p - 1 > 0$$

car  $p > 1/2$ . Ceci prouve que

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$$

et donc que  $(X_n)$  ne passera presque sûrement qu'un nombre fini de fois par 0 : la chaîne est donc transiente.  $\square$

On peut se poser la question de la généralisation dans  $\mathbb{Z}^d$ . Pour information, on donne le résultat suivant. On ne le prouvera pas car la preuve est un peu technique, on renvoie le lecteur vers les références. (Mais de toutes façons ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite de ce cours).

**Théorème 2.5.7** (Théorème de Polya). *Soit  $(X_n)$  la marche aléatoire symétrique dans  $\mathbb{Z}^d$ , c'est-à-dire une chaîne de Markov de matrice de transition donnée par*

$$\begin{aligned}
 P((i_1, i_2, \dots, i_d), (i_1 + 1, i_2, \dots, i_d)) &= P((i_1, i_2, \dots, i_d), (i_1 - 1, i_2, \dots, i_d)) \\
 &= P((i_1, i_2, \dots, i_d), (i_1, i_2 + 1, \dots, i_d)) \\
 &= P((i_1, i_2, \dots, i_d), (i_1, i_2 - 1, \dots, i_d)) \\
 &= \dots \\
 &= P((i_1, i_2, \dots, i_d), (i_1, i_2, \dots, i_d + 1)) \\
 &= P((i_1, i_2, \dots, i_d), (i_1, i_2, \dots, i_d - 1)) \\
 &= \frac{1}{2d}
 \end{aligned}$$

pour tout  $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ . Alors  $(X_n)$  est irréductible récurrente si  $d = 1$  ou  $d = 2$ , elle est irréductible transiente si  $d \geq 3$ .

La preuve pour le cas particulier  $d = 2$  reste cependant faisable “à la main”, à essayer !

## 2.6 Théorèmes ergodiques

On garde toutes les notations de la section précédente.

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $(X_n)$  une chaîne irréductible récurrente. Alors :*

- $(X_n)$  possède au moins une mesure invariante  $\mu$  (qui n'est pas forcément une probabilité), unique (à une constante près), et pour tout  $x \in E$ , on a  $0 < \mu(x) < \infty$ .

- la mesure invariante  $\mu_x$  définie par la contrainte de normalisation  $\mu_x(x) = 1$  est donnée par :

$$\forall y \in E, \mu_x(y) = \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} \mathbf{1}_y(X_k) \right).$$

Avant de donner la preuve, on discute les conséquences (importantes) de ce résultat.

**Proposition 2.6.2.** *Pour tout  $x \in E$ ,  $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x(\sigma_x)$ .*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \mu_x(E) &= \sum_{y \in E} \mu_x(y) = \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} \mathbf{1}_y(X_k) \right) \\ &= \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} \sum_{y \in E} \mathbf{1}_y(X_k) \right) = \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} 1 \right) = \mathbb{E}_x(\sigma_x). \end{aligned}$$

□

Supposons  $\mu_x(E) < \infty$ . Alors en définissant  $\pi$  par  $\pi(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(E)}$ ,  $\pi$  est d'après le Théorème 2.6.1 une probabilité invariante pour  $(X_n)$  et elle est unique. En revanche, si  $\mu_x(E) = \infty$  alors  $(X_n)$  n'admet pas de probabilité invariante.

**Définition 2.6.1.** *Soit  $(X_n)$  une chaîne irréductible récurrente. Alors :*

- soit  $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x(\sigma_x) < \infty$  pour tout  $x$ , ce qui implique que  $(X_n)$  admet une unique probabilité invariante. On dit que  $(X_n)$  est une chaîne récurrente positive.
- soit  $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x(\sigma_x) = \infty$  pour tout  $x$ , ce qui implique que  $(X_n)$  admet une unique mesure invariante qui ne peut pas se renormaliser en mesure de probabilité. On dit que  $(X_n)$  est une chaîne récurrente nulle.

On donne quelques exemples : on va voir que toute chaîne irréductible sur  $E$  fini est récurrente positive (on l'énonce comme une proposition), et on donne un exemple de chaîne irréductible récurrente nulle.

**Proposition 2.6.3.** *Toute chaîne irréductible  $(X_n)$  définie sur  $E$  fini est récurrente positive.*

*Démonstration.* On a

$$\mu_x(E) = \sum_{y \in E} \underbrace{\mu_x(y)}_{< \infty} < \infty. \quad \square$$

□

**Exemple 2.6.1.** *On a déjà vu dans la preuve de la Proposition 2.5.6 que la marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$  est irréductible récurrente. Il est immédiat que la mesure de comptage,  $\mu(z) = 1$ , est invariante. Or elle ne peut pas être normalisée en probabilité. Donc cette chaîne est récurrente nulle.*

Un dernier petit résultat utile avant de passer à la preuve du théorème.

**Proposition 2.6.4.** *Supposons que  $(X_n)$  soit une chaîne irréductible admettant une probabilité invariante. Alors elle est récurrente positive.*

*Démonstration.* Soit  $\pi$  la loi invariante :  $\pi = \pi P = \dots = \pi P^n$ . Autrement dit, pour tout  $x$  :

$$\pi(x) = \sum_{y \in E} \pi(y) P^n(y, x). \quad (2.4)$$

Supposons que la chaîne soit transiente. Alors pour tout  $(x, y)$  ;  $U(x, y) \leq U(y, y) < \infty$  et comme  $U(x, y) = \sum_{n \geq 0} P^n(x, y)$  on a nécessairement  $P^n(x, y) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . De plus  $P^n(x, y) \leq 1$ . Donc on peut appliquer le TCD au membre de droite dans (2.4) et on obtient

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in E} \pi(y) P^n(y, x) = \sum_{y \in E} \pi(y) \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(y, x) = 0.$$

Donc pour tout  $x$ ,  $\pi(x) = 0$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $\pi$  est une mesure de probabilité. Donc la chaîne ne peut pas être transiente, elle est donc récurrente.  $\square$

Passons maintenant à la preuve du théorème.

**Preuve du Théorème 2.6.1.** On fixe une fois pour toutes  $x \in E$ . On procède en trois étapes :

1. on va démontrer que la mesure  $\mu_x$  définie par

$$\forall y \in E, \mu_x(y) = \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} \mathbf{1}_y(X_k) \right)$$

est bien une mesure invariante.

2. ensuite, on vérifie que pour tout  $y$ ,  $0 < \mu_x(y) < \infty$ .

3. enfin, on vérifie l'unicité (à un facteur multiplicatif près).

Etape 1. On va montrer que pour toute fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  on a  $\mu_x P f = \mu_x f$ . En effet :

$$\begin{aligned} \mu_x P f &= \mu_x(P f) \\ &= \sum_{y \in E} \mu_x(y) P f(y) \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} \mathbf{1}_y(X_k) \right) P f(y) \\ &= \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} \sum_{y \in E} \mathbf{1}_y(X_k) P f(y) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} P f(X_k) \right) \\
 &= \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k < \sigma_x\}} \mathbb{E}[f(X_{k+1}) | X_k] \right) \text{ par définition de } P f \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (\mathbb{1}_{\{k < \sigma_x\}} f(X_{k+1})) \text{ Fubini, double espérance, } \{k < \sigma_x\} \text{ est } \mathcal{F}_k \text{ mesurable} \\
 &= \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=1}^{\sigma_x} f(X_k) \right) \\
 &= \mathbb{E}_x \left( \sum_{k=0}^{\sigma_x-1} f(X_k) \right) \text{ car } X_k = X_0 = x \text{ sachant } \sigma_x = k
 \end{aligned}$$

Etape 2. On fixe  $y \in E$ . Dans un premier temps, montrons que  $\mu_x(y) < \infty$ . En effet, la chaîne étant irréductible, il existe  $n$  tel que  $P^n(y, x) > 0$  et alors

$$1 = \mu_x(x) = \mu_x P^n(x) = \sum_{z \in E} \mu_x(z) P^n(z, x) \geq \mu_x(y) P^n(y, x)$$

et donc  $\mu_x(y) < \infty$ .

De la même façon, montrons que  $\mu_x(y) > 0$ . En effet il existe  $m$  tel que  $P^m(y, x) > 0$  et alors

$$0 < P^m(x, y) = \mu_x(x) P^m(x, y) \leq \sum_z \mu_x(z) P^m(z, y) = \mu_x P^m(y) = \mu_x(y).$$

Etape 3. On montre maintenant l'unicité. Pour ceci, on introduit de nouvelles notations. On définit une nouvelle matrice de transition  $P'$  par

$$P'(y, z) = \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} P(z, y).$$

C'est bien une matrice de transition, car  $P'(y, z) \geq 0$  et

$$\sum_{z \in E} P'(y, z) = \frac{\sum_{z \in E} \mu_x(z) P(z, y)}{\mu_x(y)} = \frac{\mu_x P(y)}{\mu_x(y)} = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(y)} = 1.$$

Soit  $(Y_n)$  une chaîne de Markov de transition  $P'$ . Montrons que, comme  $(X_n)$ ,  $(Y_n)$  est irréductible récurrente. En effet :

$$\begin{aligned}
 P'^2(y, z) &= \sum_t P'(y, t) P'(t, z) = \sum_t \frac{\mu_x(t)}{\mu_x(y)} P(t, y) \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(t)} P(z, t) \\
 &= \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} \sum_t P(z, t) P(t, y) = \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} P^2(z, y).
 \end{aligned}$$

## 2 Chaînes de Markov

Par récurrence, on montre que pour tout  $n$ ,

$$P'^n(y, z) = \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} P^n(z, y).$$

Donc :

$$U'(y, z) = \sum_n P'^n(y, z) = \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} \sum_n P^n(z, y) = \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} U(z, y).$$

En particulier,  $U'(y, z) > 0 \Leftrightarrow U(z, y) > 0$ , ce qui montre que si  $(X_n)$  étant irréductible, alors  $(Y_n)$  l'est aussi. De plus,  $U'(y, z) = \infty \Leftrightarrow U(z, y) = \infty$ , ce qui prouve que  $(X_n)$  étant récurrente,  $(Y_n)$  aussi.

Cette partie de la preuve repose sur la théorie des martingales, vue dans la prochaine section. Vous pouvez l'ignorer pour l'instant ; voir aussi la remarque 2.6.1 pour une démonstration directe dans le cas récurrent positif.

On va montrer que pour toute fonction  $f \geq 0$ , si  $P'f(z) = f(z)$  pour tout  $z$ , alors  $f$  est constante. Posons  $Z_n = f(Y_n)$  et  $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{G}_n) &= \mathbb{E}(f(Y_{n+1}) | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= \mathbb{E}(f(Y_{n+1}) | Y_n) \text{ (Markov)} \\ &= P'f(Y_n) \\ &= f(Y_n) \text{ par hypothèse sur } f \\ &= Z_n. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $(Z_n)$  est une martingale pour  $(\mathcal{G}_n)$ . Comme  $f$  est positive,  $(Z_n)$  est une martingale positive, donc en particulier une sur-martingale positive. Donc, d'après le Lemme 3.9.2 du chapitre sur les martingales,  $(Z_n)$  converge p.s vers une variable aléatoire  $Z_\infty$ . Donc :  $f(Y_n) \xrightarrow{p.s} Z_\infty$ . Soient  $y \neq y'$ . Comme  $(Y_n)$  est récurrente, il existe une infinités de  $n$  tels que  $Y_n = y$  et une infinités de  $m$  tels que  $Y_m = y'$ . Ceci prouve que  $f(y) \xrightarrow{p.s} Z_\infty$  et  $f(y') \xrightarrow{p.s} Z_\infty$ , or comme  $f(y)$  et  $f(y')$  ne dépendent pas de  $n$ , ceci montre forcément que  $f$  est une fonction constante (et que  $Z_\infty$  est une variable aléatoire constante).

On est maintenant en position de démontrer l'unicité. Soit  $\lambda$  une mesure invariante de  $(X_n)$ , le but est de montrer que  $\lambda$  et  $\mu_x$  sont proportionnelles. Posons  $f(y) = \lambda(y)/\mu_x(y)$ , on a

$$\begin{aligned} P'f(y) &= \sum_z P'(y, z) \frac{\lambda(z)}{\mu_x(z)} \\ &= \sum_z \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)} P(z, y) \frac{\lambda(z)}{\mu_x(z)} \text{ par def. de } P' \\ &= \frac{1}{\mu_x(y)} \sum_z \lambda(z) P(z, y) \\ &= \frac{1}{\mu_x(y)} \lambda P(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda(y)}{\mu_x(y)} \text{ par hypothèse sur } \lambda \\
&= f(y).
\end{aligned}$$

Donc  $f$  vérifie  $P'f(y) = f(y)$  pour tout  $y$ , donc  $f$  est constante, ce qui signifie bien que  $\lambda$  et  $\mu_x$  sont proportionnelles.  $\square$

On énonce maintenant trois théorèmes, souvent appelés théorèmes ergodiques, qui sont l'analogue de la loi forte des grands nombres et du théorème central limite pour les chaînes de Markov. On démontrera les lois des grands nombres, mais le TCL sera admis...

**Théorème 2.6.5.** *Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov irréductible récurrente positive de loi invariante  $\pi$ , de transition  $P$  et de loi initiale  $\mu$ . Alors, pour toute fonction  $f$  telle que  $\int |f|d\pi < \infty$  on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}_\mu - p.s.} \int f d\pi.$$

Noter qu'on peut utiliser différentes notations :

$$\pi(f) = \int f d\pi = \int_E f(x) \pi(dx) = \sum_{x \in E} f(x) \pi(x) = \mathbb{E}_{X \sim \pi}[f(X)] = \dots$$

On a en particulier :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x\}}(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \pi(x),$$

la proportion de temps passé en  $x$  est asymptotiquement  $\pi(x)$ .

**Théorème 2.6.6.** *Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov irréductible récurrente positive de loi invariante  $\pi$ . Soit  $f$  une fonction telle que  $\int |f|d\pi < \infty$  et*

$$\exists x, s^2(x) := \mathbb{E}_x \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma_x} \left[ f(X_i) - \int f d\pi \right]^2 \right\} < \infty.$$

Alors  $\sigma^2 = s^2(x)\pi(x)$  ne dépend en fait pas de  $x$  et on a

$$\sqrt{n} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - \int f d\pi \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

(C'est ce théorème qui sera admis).

**Théorème 2.6.7.** *Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov irréductible récurrente nulle. Alors, pour tout  $x \in E$ ,*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x\}}(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

## 2 Chaînes de Markov

Ceci donne une autre interprétation des différences entre chaînes (irréductibles) transientes, récurrentes nulles et récurrentes positives : dans une chaîne transiente, chaque état est visité un nombre fini de fois. Dans une chaîne récurrente nulle, chaque état est visité un nombre infini de fois, mais la proportion de temps passé dans l'état est asymptotiquement nul. Dans une chaîne récurrente positive, la proportion de temps passé dans l'état  $x$  est asymptotiquement égale à  $\pi(x)$ .

*Preuve simultanée des Théorèmes 2.6.5 et 2.6.7.* Soit une fonction  $g \geq 0$ . Fixons  $x \in E$ . On définit les sommes de blocs :

$$Z_0 = \sum_{h=0}^{\sigma_x^1-1} g(X_h), \dots, Z_k = \sum_{h=\sigma_x^k}^{\sigma_x^{k+1}-1} g(X_h), \dots$$

Propriété de Markov forte : les variables  $Z_1, Z_2, \dots$  (mais pas nécessairement  $Z_0$ ) sont IID, d'espérance  $\mu_x(g)$ .

On peut donc utiliser la loi des grands nombres sur les  $Z_i$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int g d\mu_x,$$

soit :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\sigma_x^n} g(X_i) = \frac{Z_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i + \frac{g(x)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int g d\mu_x.$$

Pour  $m \geq 0$ , on définit :  $\nu(m) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{1}_x(X_k)$  ; c'est l'unique entier tel que

$$\sigma_x^{\nu(m)} \leq m < \sigma_x^{\nu(m)+1}$$

Noter que

$$\nu(m) \leq \sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k) = \nu(m) + \mathbf{1}_{\{x\}}(X_0) \leq \nu(m) + 1$$

et donc  $\nu(m) \rightarrow \infty$  quand  $m \rightarrow \infty$ . Mais alors

$$\underbrace{\frac{\nu(m)}{\nu(m)+1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{\sigma_x^{\nu(m)}} g(X_k)}{\nu(m)}}_{\rightarrow \int f d\mu_x} \leq \frac{\sum_{k=0}^m g(X_k)}{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k)} \leq \underbrace{\frac{\nu(m)+1}{\nu(m)}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{\sigma_x^{\nu(m)+1}} g(X_k)}{\nu(m)+1}}_{\rightarrow \int f d\mu_x}$$

ce qui montre le résultat intermédiaire :

$$\frac{\sum_{k=0}^m g(X_k)}{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} \int g d\mu_x. \quad (2.5)$$

On conclut d'abord la preuve du Théorème 2.6.5 : on commence par appliquer (2.5) avec  $g = 1$ . On a :

$$\frac{\sum_{k=0}^m 1}{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k)} = \frac{m+1}{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} \int 1 d\mu_x = \mu_x(E).$$



On prend le ratio de cette équation et de (2.5) on obtient :

$$\frac{\sum_{k=0}^m g(X_k)}{m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\int g d\mu_x}{\mu_x(E)} = \int g d\pi$$

quelle que soit la fonction  $g \geq 0$ . On étend à une fonction  $f$  quelconque en la découpant en partie positive et partie négative :  $f = f_+ - f_-$  et on applique le résultat précédent successivement sur  $g = f_+ \geq 0$  puis sur  $g = f_- \geq 0$ .

Maintenant : le Théorème 2.6.7. Dans ce cas, on prend  $F \subset E$  fini et on applique (2.5) respectivement sur  $g = \mathbf{1}_F$ . En prenant l'inverse de la relation obtenue :

$$\frac{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k)}{m+1} \leq \frac{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{x\}}(X_k)}{\sum_{k=0}^m \mathbf{1}_F(X_k)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\mu_x(x)}{\mu_x(F)} = \frac{1}{\mu_x(F)}.$$

Comme  $\mu(E) = \infty$ , on sait qu'on peut trouver  $F$  fini de façon à rendre  $\mu_x(F)$  arbitrairement grand, ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 2.6.1.** On peut utiliser ce résultat pour démontrer l'unicité de la loi invariante (et ainsi éviter le recours aux martingales dans la preuve du Théorème 2.6.1, du moins dans le cas récurrent positif). Pour ce faire, considérer une "autre" loi invariante  $\pi'$ , et prendre  $\pi'$  comme loi initiale. Dans ce cas,  $X_t \sim \pi'$  pour tout  $t$ , donc  $T^{-1} \sum_{t=1}^T g(X_t)$  a pour espérance  $\pi'(g)$ , or, par le TCD (prendre  $g$  borné, par ex.  $g = \mathbf{1}_x$ ), et le théorème précédent, on voit que l'espérance de cette quantité doit converger vers  $\pi(g)$ .

On termine cette section en traitant complètement l'exemple de la marche aléatoire sur  $\mathbb{N}$  avec réflexion en 0.

**Exemple 2.6.2.** Transition  $P(0,1) = 1 - P(0,0) = p$  et ensuite  $P(i,i+1) = 1 - P(i,i-1) = p \in ]0,1[$  pour  $i > 0$ . La chaîne est irréductible.

(Pour  $p > 1/2$ , on adapte facilement l'argument utilisé pour la marche sur  $\mathbb{Z}$  pour montrer que la chaîne est transiente).

Cherchons une loi invariante. On note que le système  $\pi P = \pi$  conduit à l'équation générique

$$(1-p)\pi_{j+1} - \pi_j + p\pi_{j-1} = 0,$$

une récurrence à deux pas, avec en plus  $\pi_1 = \pi_0 p / (1-p)$ .

Dans le cas  $p < 1/2$ , la solution générique est de la forme

$$\pi_j = \alpha + \beta \left( \frac{p}{1-p} \right)^j,$$

l'équation sur  $\pi_0$  et  $\pi_1$  montre que  $\alpha = 0$  et

$$\pi_j = \beta \left( \frac{p}{1-p} \right)^j$$

qui peut se normaliser en probabilité pour  $\beta$  bien choisir :

$$\pi_j = \frac{1-2p}{1-p} \left( \frac{p}{1-p} \right)^j.$$

## 2 Chaînes de Markov

Donc la chaîne EST récurrente positive.

Dans le cas  $p = 1/2$ , la solution générique est de la forme

$$\pi_j = \alpha + \beta j,$$

l'équation sur  $\pi_0$  et  $\pi_1$  montre que  $\beta = 0$  et donc

$$\pi_j = \alpha$$

(constante). Cette mesure ne peut pas être normalisée en probabilité. Donc la chaîne n'est PAS récurrente positive.

## 2.7 Périodicité, convergence des lois marginales

Intuitivement, on s'attend à avoir, pour une chaîne  $(X_t)$  irréductible récurrente positive de loi invariante  $\pi : X_t \xrightarrow{\text{loi}} \pi$ . En fait, ça n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.7.1.** Soit une chaîne définie sur  $E = \{1, \dots, N\}$ ,  $N \geq 2$ , telle que  $P(i, i+1) = p$ ,  $P(i, i-1) = q$ , avec  $p + q = 1$ . De plus,  $P(N, 1) = p$ , et  $P(1, N) = q$ . En d'autres termes, on place les  $N$  états sur un "cadran", avec probabilité  $p$  de se déplacer d'un pas dans le sens trigonométrique,  $q$  dans l'autre sens.

Il est facile de vérifier que cette chaîne de Markov admet pour loi invariante la loi uniforme sur  $E$  (le faire à titre d'exercice). Donc la proportion de visites d'un état donné tend vers  $1/N$  (loi des grands nombres). Ce résultat reste vrai si on prend  $p = 0$  ou  $p = 1$ . En revanche, dans ces cas limites, la chaîne devient périodique (de période  $N$ ) : si on prend par exemple  $X_0 = 1$  comme loi initiale, la loi de chaque variable  $X_t$  sera tout simplement un Dirac dépendant du reste de la division euclidienne de  $t$  par  $N$ , i.e.  $X_{kN+l} = l + 1$  pour  $0 \leq l \leq N - 1$ .

On va voir dans cette section que si on élimine ces phénomènes de périodicité, alors on peut prouver la convergence en loi.

**Définition 2.7.1.** On appelle la période d'un élément  $x \in E$  le nombre entier  $d(x)$  défini par :

$$d(x) = \text{PGCD}(J(x))$$

où

$$J(x) = \{n \in \mathbb{N} : P^n(x, x) > 0\}.$$

**Exemple 2.7.2.** Dans l'Exemple 2.7.1, si on prend  $N = 2$ , on a  $J(1) = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  et donc  $d(1) = 2$ . En revanche, si on prenait  $P(1, 2) = 1$  mais  $P(2, 1) = 0.99$  et  $P(2, 2) = 0.01$  on voit que  $2 \in J(1)$  et  $3 \in J(1)$  donc nécessairement  $d(1) = 1$ .

**Proposition 2.7.1.** Si  $x \rightsquigarrow y$  alors  $d(x) = d(y)$ .

*Démonstration.* Comme  $x \rightsquigarrow y$ , il existe un  $n$  tel que  $P^n(x, y) > 0$ . De même comme  $y \rightsquigarrow x$  il existe  $m$  tel que  $P^m(y, x) > 0$ . Donc  $P^{m+n}(x, x) > 0$ , soit  $m+n \in J(x)$  et donc  $m+n = kd(x)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\ell \in J(y)$ , alors

$$P^{m+n+\ell}(x, x) \geq P^n(x, y)P^\ell(y, y)P^m(y, x) > 0$$

et donc  $m+n+\ell \in J(x)$  et donc  $m+n+\ell = hd(x)$ . Donc  $\ell = (m+n+\ell) - (m+n) = (k-h)d(x)$  et donc  $d(x)$  divise  $\ell$ . Donc,  $d(x)$  divise tout élément de  $J(y)$  et donc  $d(x) \leq \text{PGCD}(J(y)) = d(y)$ .

En refaisant la même preuve en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$  on obtient  $d(y) \leq d(x)$  et donc  $d(x) = d(y)$ .  $\square$

Autrement dit, la période est une propriété de classe, et si la chaîne est irréductible, tous les éléments ont même période.

**Définition 2.7.2.** Soit  $(X_t)$  une chaîne irréductible. Elle est dite apériodique si  $d(x) = 1$  pour un  $x \in E$  (et donc automatiquement pour tout  $x$ ).

**Exemple 2.7.3.** La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est irréductible, et périodique de période 2 : à chaque étape,  $(X_t)$  alterne entre l'ensemble des nombres pairs et celui dans l'ensemble des nombres impairs.

**Théorème 2.7.2.** Supposons que  $(X_t)$  soit une chaîne irréductible récurrente positive de loi invariante  $\pi$ . Si, de plus,  $(X_t)$  est apériodique alors, quelle que soit la loi initiale  $\mu$ ,

$$\forall x \in E, \mathbb{P}_\mu(X_t = x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi(x).$$

**Définition 2.7.3.** Lorsqu'une chaîne vérifie les conditions du Théorème 2.7.2 on dit qu'elle est ergodique.

La preuve du théorème nécessite deux lemmes.

**Lemme 2.7.3.** Si  $(X_t)$  est ergodique,  $\forall x \in E, \exists n(x), \forall n \geq n(x), P^n(x, x) > 0$ .

*Démonstration.* Soient  $n_1, \dots, n_k$  tels que  $P^{n_i}(x, x) > 0$  et

$$\text{PGCD}(\{n_1, \dots, n_k\}) = 1.$$

Alors le Théorème de Bézout implique qu'il existe  $(q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{Z}^k$  tels que

$$1 = \sum_{i=1}^k q_i n_i.$$

En posant

$$a(x) = \sum_{q_i > 0} q_i n_i \text{ et } b(x) = - \sum_{q_i \leq 0} q_i n_i$$

## 2 Chaînes de Markov

on a  $a(x) - b(x) = 1$ . Posons enfin  $n(x) = b(x)^2 - 1$ .

Pour  $n \geq n(x)$ , en écrivant la division euclidienne de  $n$  par  $b(x)$  on a  $n = db(x) + r$ , avec  $0 \leq r \leq b(x) - 1$ . Comme  $n \geq n(x) = b(x)^2 - 1$ ,  $d \geq b(x) \geq r$ . Donc :

$$\begin{aligned} n &= db(x) + r[a(x) - b(x)] \\ &= (d - r)b(x) + ra(x) \\ &= (d - r) \sum_{q_i \leq 0} (-q_i)n_i + r \sum_{q_i > 0} q_i n_i \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i n_i \end{aligned}$$

où tous les  $\alpha_i$  sont  $\geq 0$ . Donc

$$P^n(x, x) \geq P^{\alpha_1 n_1}(x, x) \dots P^{\alpha_k n_k}(x, x) > 0.$$

□

**Lemme 2.7.4.** Soient  $(X_t^1)$  et  $(X_t^2)$  deux chaînes de Markov indépendantes, de même matrice de transition  $P$ , irréductibles et apériodiques. Alors la chaîne produit  $(Y_t)$ , définie sur  $E^2$  par  $Y_t = (X_t^1, X_t^2)$  l'est aussi. Si de plus  $(X_t^1)$  et  $(X_t^2)$  sont récurrentes positives alors  $(Y_t)$  l'est aussi.

*Démonstration.* La matrice de transition  $Q$  de  $(Y_t)$  est donnée par

$$Q((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = P(x_1, x'_1)P(x_2, x'_2).$$

Or il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $P^{m_1}(x_1, x'_1) > 0$  et  $P^{m_2}(x_2, x'_2) > 0$  (irréductibilité des deux chaînes). On utilise le Lemme 2.7.3 et on prend  $n \geq n(x'_1) + n(x'_2) + m_1 + m_2$ . Alors :

$$\begin{aligned} Q^n((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) &= P^n(x_1, x'_1)P^n(x_2, x'_2) \\ &\geq P^{m_1}(x_1, x'_1)P^{n(x'_1)+n(x'_2)+m_2}(x'_1, x'_1) \\ &\quad \times P^{m_2}(x_2, x'_2)P^{n(x'_1)+n(x'_2)+m_1}(x'_2, x'_2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

et donc  $(Y_t)$  est irréductible. En refaisant le même calcul avec  $t + 1$  à la place de  $t$  on obtient également que  $(Y_t)$  est apériodique.

Enfin, si  $P$  est la matrice de transition de chaînes récurrentes positives, elle admet une unique loi invariante  $\pi$ , et on vérifie directement que  $\pi \otimes \pi$  est invariante pour  $Q$ . □

On peut maintenant démontrer le théorème. La preuve utilise une technique dite de « couplage » de deux chaînes, qui est une technique récurrente pour démontrer des propriétés des chaînes de Markov.

## 2.8 Réversibilité, algorithme de Metropolis-Hastings

*Démonstration du Théorème 2.7.2.* Soient  $(X_t^1)$  et  $(X_t^2)$  deux chaînes de Markov indépendantes, de même matrice de transition  $P$  que  $(X_t)$ , et donc irréductibles et apériodiques, récurrentes, positives. Alors d'après le Lemme 2.7.4 la chaîne produit  $(Y_t)$ , définie sur  $E^2$  par  $Y_t = (X_t^1, X_t^2)$  l'est aussi. On pose

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t^1 = X_t^2\}$$

qui est le temps d'atteinte de la « diagonale », i.e. l'ensemble  $\{(x, x) : x \in E\}$ .

En utilisant la propriété forte de Markov comme dans la preuve du Théorème 2.6.5, on obtient que pour tout  $t \geq \tau$ ,  $X_t^1$  et  $X_t^2$  ont la même distribution. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t^1 = x) &= \mathbb{P}(X_t^1 = x, \tau > t) + \mathbb{P}(X_t^1 = x, \tau \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_t^1 = x, \tau > t) + \mathbb{P}(X_t^2 = x, \tau \leq t) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau > t) + \mathbb{P}(X_t^2 = x) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_t^1 = x) - \mathbb{P}(X_t^2 = x) \leq \mathbb{P}(\tau > t).$$

En intervertissant les rôles de  $(X_t^1)$  et  $(X_t^2)$  on obtient

$$|\mathbb{P}(X_t^1 = x) - \mathbb{P}(X_t^2 = x)| \leq \mathbb{P}(\tau > t).$$

En particulier, si on prend la loi initiale de  $X_0^1$  étant  $\mu$  et celle de  $X_0^2$  étant  $\pi$ , on a

$$|\mathbb{P}_\mu(X_t^1 = x) - \pi(x)| \leq \mathbb{P}(\tau > t).$$

Or la chaîne  $(Y_t)$  est récurrente positive donc  $\tau$  est fini p.s et donc  $\mathbb{P}(\tau > t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 2.8 Réversibilité, algorithme de Metropolis-Hastings

Pour l'instant, on s'est donné une chaîne de Markov, et on s'est demandé si elle admettait une loi invariante, et, si oui, laquelle. On peut tourner le problème dans l'autre sens : soit une loi  $\pi$ , est-il possible de construire une matrice de transition  $P$  telle que  $\pi P = \pi$  ?

On définit d'abord une propriété utile pour la suite.

**Définition 2.8.1.** Soit  $P$  une matrice de transition et  $\pi$  une loi de probabilité. On dit que  $P$  est  $\pi$ -réversible si, pour tout  $(i, j) \in E^2$ , on a

$$\pi(i)P(i, j) = \pi(j)P(j, i).$$

**Proposition 2.8.1.** Cela implique que  $\pi$  est la loi invariante de  $P$ .

*Démonstration.* On montre que  $\pi P = \pi$  composante par composante. Pour tout  $j \in E$ ,

$$\begin{aligned}\pi P(j) &= \sum_{i \in E} \pi(i) P(i, j) \\ &= \sum_{i \in E} \pi(j) P(j, i) \text{ (réversibilité)} \\ &= \pi(j) \sum_{i \in E} P(j, i) \\ &= \pi(j).\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.8.1.** Dans cette section, l'intérêt principal de la notion de réversibilité est d'établir simplement qu'une chaîne est  $\pi$ -invariante. Mais cette notion a d'autres applications. Par exemple, elle permet d'inverser le temps : si  $(X_t)$  est réversible, et si  $X_0 \sim \pi$ , alors le processus  $Y_t = X_{T-t}$ , défini pour  $0 \leq t \leq T$ , est une chaîne de Markov homogène.

L'algorithme dit de Metropolis-Hastings est basé sur l'idée suivante : soit  $Q$  une matrice de transition sans lien évident avec  $\pi$ , mais qui est « facile à simuler » ; i.e., pour un  $i \in E$  fixé, il est facile de simuler selon la loi  $Q(i, \cdot)$ . (On donnera des exemples concrets ci-dessous.) A chaque étape  $t$ , on va simuler selon  $Q$ , puis accepter la valeur simulée avec une certaine probabilité (qui dépend de  $\pi$ ) ; si la valeur n'est pas acceptée, on ne bouge pas (donc  $X_t = X_{t-1}$ ).

**Définition 2.8.2** (Algorithme de Metropolis-Hastings). Soit  $E$  un espace d'états discret, et  $Q$  une matrice de transition telle que, pour tout  $x \in E$ , on sait simuler une variable aléatoire de loi  $Q(x, \cdot)$ . Soit  $X_0$  fixé. Sachant  $X_{t-1} = x_{t-1}$ ,  $t \geq 1$ ,

1. on tire  $Z_t \sim Q(x_{t-1}, \cdot)$  (indépendamment de toutes les variables simulées jusqu'ici) ;
2. on tire  $U_t \sim \mathcal{U}([0, 1])$  (idem) ;
3. on définit :

$$X_t = \begin{cases} Z_t & \text{si } U_t \leq \alpha(X_{t-1}, Z_t) \\ X_{t-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\alpha(x, z) := \min \left( 1, \frac{\pi(z)Q(z, x)}{\pi(x)Q(x, z)} \right).$$

**Théorème 2.8.2.** Le processus  $(X_t)$  (défini par l'algorithme ci-dessus) est une chaîne de Markov dont la transition  $P$  est  $\pi$ -réversible (et donc  $\pi$ -invariante).

*Démonstration.* On considère d'abord  $x, y \in E$  tels que  $x \neq y$ . Alors

$$\begin{aligned}\pi(x)P(x, y) &= \pi(x)Q(x, y) \min \left( 1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) \\ &= \min (\pi(x)Q(x, y), \pi(y)Q(y, x))\end{aligned}$$

qui est clairement symétrique en  $x, y$ .

Par ailleurs, pour  $y = x$ , l'identité  $\pi(x)Q(x, y) = \pi(y)Q(y, x)$  est triviale. Mais, pour la forme, on donne quand même l'expression correspondante :

$$\pi(x)P(x, x) = \pi(x) \left\{ Q(x, x) + \sum_{z \neq x} Q(x, z) \left[ 1 - \min \left( 1, \frac{\pi(z)Q(z, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) \right] \right\}.$$

Cette expression recouvre deux cas : le fait de proposer  $Z = x$  et d'accepter cette valeur (avec probabilité 1), et le fait de proposer une autre valeur pour  $Z$ , puis de la rejeter.  $\square$

Passons aux choses concrètes. Pour commencer, supposons  $E = \mathbb{Z}$ , et supposons que  $Q(x, x+1) = Q(x, x-1) = 1/2$  pour tout  $x$ . En d'autres termes, lorsque  $X_t = x$ , on va proposer comme valeur suivante soit  $x+1$ , soit  $x-1$ , avec probabilités égales. La probabilité d'acceptation est alors  $\min(1, \pi(z)/\pi(x))$ , où  $z$  est la valeur proposée. Cette probabilité vaut 1 dès que  $\pi(z) \geq \pi(x)$ , et vaut  $\pi(z)/\pi(x)$  sinon.

Cette exemple illustre un cadre typique d'utilisation de l'algorithme HM : on définit via  $Q$  un mécanisme d'exploration locale (similaire à ce qu'on trouve dans certains algorithmes d'optimisation), et on garantit que la chaîne simulée laisse bien  $\pi$  invariante via le mécanisme d'acceptation-rejet.

Metropolis-Hastings est un exemple important d'algorithme MCMC (Markov chain Monte Carlo), c'est à dire, un algorithme permettant d'approcher numériquement une espérance sous une loi  $\pi$  :

$$\mathbb{E}_{X \sim \pi} [f(X)] = \int_E f(x) \pi(dx)$$

via une moyenne empirique (qui converge par la loi des grands nombres)

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f(X_t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int_E f(x) \pi(dx)$$

calculée à partir d'une chaîne de Markov  $(X_t)$   $\pi$ -invariante.

Ce n'est sans doute pas la première fois que vous rencontrez la notion de Monte Carlo ; elle est généralement présentée dans le cas simple où les variables  $X_t$  sont IID de loi  $\pi$ . Cependant, il y a beaucoup de lois qui ne sont pas faciles à simuler indépendamment. En revanche, toutes les lois peuvent être « simulées » via Metropolis-Hastings, du moment que l'on est en mesure d'évaluer  $\pi(x)$  pour tout  $x$  ; ou plus généralement d'évaluer  $\pi(x)$  à une constante près.

**Exemple 2.8.1.** Soit  $X$  une version discrète d'une variable aléatoire gaussienne :  $\mathbb{P}(X = i) = \pi(i) := c \exp(-i^2)$  où  $c$  est une constante multiplicative, que l'on n'a pas besoin de connaître ici (mais qui est déterminée par la contrainte  $\sum \pi(i) = 1$ ). On souhaite calculer  $\mathbb{E}[\cos(X)]$ . On propose d'utiliser l'algorithme de Metropolis avec la matrice de transition  $Q$  proposée ci-dessus, i.e.  $Q(x, x+1) = Q(x, x-1) = 1/2$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ .

Le fait de ne pas avoir besoin de connaître la constante de normalisation de la loi  $\pi$  donne une autre raison de la popularité des algorithmes de type MCMC, notamment en statistique bayésienne, où l'on a besoin de simuler la loi a posteriori, qui est proportionnelle (avec une constante difficile à calculer) au produit de la loi a priori et de la vraisemblance.

## 2.9 Un autre algorithme à base de chaîne de Markov : le Gibbs sampler

On considère dans cette partie une loi discrète, définie sur  $E = \mathbb{Z}^d$ , de la forme :

$$\pi(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{Z} \psi(x_1, \dots, x_d)$$

avec  $\psi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Noter que la constante  $Z$  est automatiquement fixée par normalisation :  $Z = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \psi(x)$ .

Il n'est pas a priori facile de simuler des vecteurs  $X$  suivant cette loi (exactement, ou via l'algorithme de Metropolis). En revanche, dans certains cas, les lois conditionnelles de chaque composante sont particulièrement simples. Peut-on utiliser cette propriété d'une façon ou d'une autre ?

Donnons quelques exemples pour fixer les esprits.

**Exemple 2.9.1.** *Le modèle d'Ising en physique statistique attribue une loi jointe à des variables binaires  $X_1, \dots, X_d$  (spins ferromagnétiques) associés à des emplacements sur une grille en  $k$  dimensions. Dans ce cas,*

$$\psi(x_1, \dots, x_d) = \exp \left\{ \alpha \sum_i x_i + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}\{x_i = x_j\} \right\}$$

où  $i \sim j$  est une relation de voisinage (sur la grille) ; par exemple, on peut décider que deux points sur la grille sont voisins s'ils sont à une distance de 1 (sur une grille en dimension deux, chaque point à quatre voisins). Noter que  $Z$  est alors une somme de  $2^d$  termes, impossible à calculer dès que  $d$  est grand, et que  $Z = Z(\alpha, \beta)$  dépend des paramètres.

Dans le cas particulier  $\beta = 0$  (pas intéressant), les composantes sont IID. En général, on prend  $\beta > 0$ , pour modéliser une corrélation « spatiale » : les spins proches ont tendance à être identiques. Il existe une valeur critique pour  $\beta$ , correspondant à une « transition de phase » : en dessous de cette valeur critique, les  $X_i$  sont relativement « libres » de prendre les valeurs 0 ou 1 ; au dessus, ils ont tendance à former des gros amas de spins identiques, avec forte probabilité. Déterminer ce genre de valeur critique est un problème important en physique.



## 2.9 Un autre algorithme à base de chaîne de Markov : le Gibbs sampler

La loi conditionnelle de  $X_i$  sachant  $X_{-i}$  (la collection des  $X_j$  pour  $j \neq i$ ) est automatiquement une Bernoulli, de paramètre

$$\frac{\exp \left\{ \alpha + \beta \sum_{j:j \sim i} \mathbb{1}\{x_j = 1\} \right\}}{\exp \left\{ \beta \sum_{j:j \sim i} \mathbb{1}\{x_j = 0\} \right\} + \exp \left\{ \alpha + \beta \sum_{j:j \sim i} \mathbb{1}\{x_j = 1\} \right\}}.$$

**Exemple 2.9.2.** On considère un graphe (non orienté) aléatoire, constitué d'un nombre fixe de  $n$  individus (noeuds), et des liens (arrêtes) aléatoires actifs ou non, représentés par un vecteur  $x$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^d$ ,  $d = n(n-1)/2$ . On attribue à  $x$  la loi de probabilité  $\propto \psi(x)$ , avec

$$\psi(x_1, \dots, x_d) = \exp \left\{ \theta^T s(x) \right\}$$

où  $s$  est une statistique  $s : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  résumant différentes propriétés du graphes (nombre d'arrêtes, nombre d'étoiles de rang  $k$ , etc.), et  $\theta \in \mathbb{R}^k$ . Ce genre de loi paramétrique peut être utilisée pour modéliser des graphes ; on parle d'ERGM (exponential random graph model). On vérifie aisément que la loi conditionnelle d'une composante suit une Bernoulli dont le paramètre est simple à calculer.

Appelons  $P_i$  la matrice de transition qui correspond à l'opération suivante : pour un vecteur  $x$ , remplacer la composante  $i$  par une simulation selon la loi de  $X_i$  sachant  $X_{-i}$ .

**Proposition 2.9.1.** Les matrices de transition suivantes sont  $\pi$ -invariantes : chaque  $P_i$ , le produit  $P = P_d \cdots P_1$ , et la moyenne  $Q = (P_1 + \dots + P_d)/d$ .

*Démonstration.* Posons  $d = 2$  pour simplifier les notations, et considérons une variable  $X = (X_1, X_2)$  de loi  $\pi$ . Cela implique notamment que la loi marginale de  $X_1$  est  $\pi_1(x_1) = \sum_{x_2} \pi(x_1, x_2)$ , et la loi conditionnelle de  $X_2|X_1 = x_1$  est  $\pi_{2|1}(x_2|x_1) = \pi(x_1, x_2)/\pi(x_1)$ . Considérons une nouvelle variable aléatoire  $X'_2$  (indépendante de  $X_2$ ), de même loi conditionnelle (sachant  $X_1 = x_1$ ). Alors clairement le vecteur  $X' = (X_1, X'_2)$  a pour loi  $\pi$ . On vient de démontrer que si  $X \sim \pi$ , et  $X'|X = x \sim P_2$ , alors  $X' \sim \pi$ , ou en d'autres termes  $P_2\pi = \pi$ . Le raisonnement est le même bien entendu pour  $P_1$ , et plus généralement pour tout  $P_i$  si  $d > 2$ . Pour le produit, par récurrence :  $\pi P_2 P_1 = \pi P_1 = \pi$  (pour  $d = 2$  encore une fois). De même, pour la moyenne,  $\pi Q = (\pi P_1 + \dots + \pi P_d)/d = \pi$ .  $\square$

Les deux matrices (produit et moyenne) introduites dans la proposition ci-dessus correspondent à deux algorithmes différents :

- Le produit correspond à un Gibbs sampler déterministe, où l'on met à jour la composante 1, puis la composante 2, etc. à tour de rôle.
- La moyenne correspond à un Gibbs sampler dit « random scan », où à chaque étape on choisit, avec une probabilité  $1/d$ , quelle composante sera mise à jour.

**Proposition 2.9.2.** Supposons  $\psi(x) > 0$  pour tout  $x \in E$ . Alors  $P$  et  $Q$  sont irréductibles.

*Démonstration.* Pour  $P$ , soient  $x, y \in E$ . On peut passer de  $x$  à  $y$  en une seule étape avec probabilité non-nulle : d'abord en changeant la première composante de  $x$  pour qu'elle soit égale à  $y_1$ , puis la deuxième, etc. Le raisonnement est sensiblement le même pour  $Q$ .  $\square$

Il est facile de construire des Gibbs samplers non irréductibles. Considérons par exemple le cas  $d = 2$ , et supposons  $\psi(0, 1) = \psi(1, 0) = 0$ . Alors, partant de  $(0, 0)$ , il est impossible d'atteindre  $(1, 1)$ . L'algorithme n'a alors aucun intérêt pratique.

Le Gibbs sampler nous donne un deuxième type d'algorithme MCMC (Markov chain Monte Carlo) pour approcher des espérances selon une certaine loi  $\pi$  (via la simulation d'une chaîne de Markov de loi invariante  $\pi$ ). Il est particulièrement intéressant quand on peut décomposer la loi d'intérêt en plusieurs « blocs » admettant des lois conditionnelles faciles à simuler. Nous nous sommes limités au cas où l'espace  $E$  est discret, mais la statistique bayésienne (où l'on cherche à approcher la loi des paramètres du modèle, typiquement continus) offre beaucoup d'exemples intéressants de Gibbs sampler ; cf. le cours de Monte Carlo et simulation que vous pouvez suivre au deuxième semestre (pub éhontée).

En ce concerne le lien entre Gibbs et Metropolis-Hastings, faisons deux remarques :

- On constate que dans les deux cas il est possible de simuler une loi  $\pi$  que l'on ne peut évaluer qu'à une constante  $Z$  près.
- En travaillant un peu (exercice), on peut montrer que Gibbs est un cas particulier de Metropolis-Hastings.

## 2.10 Extension à un espace d'états continu

Le but de cette section est d'expliquer, à la main, comment construire une chaîne de Markov sur un espace d'états  $E$  quelconque (par exemple  $E = \mathbb{R}$ ). On ne donnera pas de preuve, elles sont un peu plus complexes dans ce cas. Le lecteur est invité à se reporter à la bibliographie, en particulier Meyn and Tweedie (2009) mais c'est une lecture un peu violente par moments ! Ceci dit, on peut se faire une bonne intuition des cas simples...

Dans le cas discret, on construisait une chaîne homogène à l'aide d'une matrice de transition  $P$ ,

$$P(i, j) = \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i).$$

Dans le cas continu, il faut définir de la même façon un objet qui permette de donner la loi de  $X_{t+1}$  sachant  $X_t$ . Par contre, pour une loi continue,  $\mathbb{P}(X_{t+1} = j) = 0$  donc on va devoir passer par une mesure...

**Définition 2.10.1.** Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. On appelle noyau de transition  $P$  une fonction

$$P : E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$$

telle que :

1. pour tout  $x \in E$  fixé, l'application  $A \mapsto P(x, A)$  est une mesure de probabilités ;
2. pour tout  $A \in \mathcal{E}$  fixé, l'application  $x \mapsto P(x, A)$  est mesurable.

Etant donné une loi  $\mu$  et un noyau de transition  $P$  sur  $(E, \mathcal{E})$ , on pourra définir  $X_0$  comme une variable aléatoire de loi  $\mu$  et les  $(X_t)$  par récurrence :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} \in A | X_t = x) = P(x, A).$$

Remarquer qu'on peut étendre toutes les opérations que l'on a fait dans le cas discret sur les matrices de transition au cas de noyaux de transition. Par exemple,

$$P^2(i, j) = \sum_{k \in E} P(i, k)P(k, j)$$

dans le cas discret devient, dans le cas continu

$$P^2(x, A) = \int_E P(x, dy)P(y, A).$$

Pour une loi de probabilité  $\mu$ ,

$$\mu P(A) = \int \mu(dx)P(x, A).$$

En particulier, on dit qu'une loi  $\pi$  est invariante si  $\pi P = \pi$ .

**Exemple 2.10.1.** On considère un processus  $AR(1) : X_0 \sim \mu$  puis

$$X_{t+1} = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_{t+1}$$

où les  $(\varepsilon_n)$  sont i.i.d (et indép. de  $X_0$ ) de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Noter qu'on peut alors donner la loi de  $X_{t+1}|X_t$  directement, sans écrire  $\varepsilon_{n+1} : X_{t+1}|X_t \sim \mathcal{N}(\alpha + \beta X_t, \sigma^2)$ . On peut alors écrire le noyau de transition  $P$  sous une forme explicite :

$$P(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[y - (\alpha + \beta x)]^2}{2\sigma^2} \right\} dy.$$

En général, résoudre l'équation  $\pi P = \pi$  peut être très compliqué. Dans ce cas, on peut vérifier que si  $\mu = \mathcal{N}(m, s^2)$  alors  $X_1$ , en tant que somme de deux gaussiennes indépendantes, est aussi gaussienne, d'espérance  $\alpha + \beta m$  et de variance  $\beta^2 s^2 + \sigma^2$ . Donc, si  $|\beta| < 1$ , on voit que  $\pi = \mathcal{N}(\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{\sigma^2}{1-\beta^2})$  est une loi invariante.

**Exemple 2.10.2.** On peut généraliser l'algorithme de Metropolis-Hastings au cas continu, i.e.  $E = \mathbb{R}^d$ , en prenant pour  $Q(x, \cdot)$  un noyau de transition, qui correspond par exemple à une loi normale  $N(x, \Sigma)$  (pour un  $\Sigma$  bien choisi). En d'autres termes, pour  $X_{t-1} = x_{t-1}$ , on simule  $Z_t \sim N(x_{t-1}, \Sigma)$ , et on « accepte » cette valeur, i.e.  $X_t = Z_t$ , avec probabilité  $\alpha(X_{t-1}, Z_t)$ ,

$$\alpha(x, z) := \min \left( 1, \frac{\pi(z)q(z, x)}{\pi(x)q(x, z)} \right)$$

où  $q(x, \cdot)$  est la densité de  $Q(x, \cdot)$  (dont la densité d'une loi normale  $N(x, \Sigma)$ , que l'on notera  $\varphi(\cdot; x, \Sigma)$ ). Avec probabilité  $1 - \alpha(X_{t-1}, Z_t)$ , on rejette  $Z_t$  et on pose  $X_t = X_{t-1}$ .

On vient de décrire un algorithme, très couramment utilisé, dit de Metropolis-Hastings à marche aléatoire (random walk Metropolis). On peut écrire :

$$P(x, dy) = \alpha(x, y)Q(x, dy) + \{1 - \alpha(x, y)\} \delta_x(y)$$

$$= \alpha(x, y)\varphi(y; x, \Sigma)dy + \{1 - \alpha(x, y)\} \delta_x(y)$$

où le premier terme correspond à l'« acceptation » de la valeur proposée, et le second terme son rejet. Pour mieux comprendre la notation « infinitésimale »  $P(x, dy)$  ci-dessus, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} P(x, A) &= \int_{y \in A} \alpha(x, y)Q(x, dy) \\ &\quad + \left[ \int_{y \in E} \{1 - \alpha(x, y)\} Q(x, dy) \right] \mathbb{1}_A(x) \\ &= \int_{y \in A} \alpha(x, y)\varphi(x; y, \Sigma)dy \\ &\quad + \left[ \int_{y \in E} \{1 - \alpha(x, y)\} \varphi(x; y, \Sigma)dy \right] \mathbb{1}_A(x). \end{aligned}$$

Noter que le terme entre crochet est la probabilité de « ne pas bouger » lorsque la position actuelle est  $x$ .

On va juste donner maintenant deux théorèmes ergodiques dans ce contexte (sans les démontrer, là encore, on renvoie le lecteur à Meyn and Tweedie (2009)). L'intérêt est qu'ils permettront d'analyser les versions de l'Algorithme de Metropolis-Hastings dans le cas continu, cf. le cours de simulation et Monte-Carlo. Ces énoncés nécessitent de généraliser les notions d'irréductibilité, récurrence, etc...

Pour l'irréductibilité, attention :  $P(x, \{y\}) = 0$  pour une loi continue, donc, il faut là encore procéder autrement.

**Définition 2.10.2.** Soit  $\Phi$  une mesure  $\sigma$ -finie sur  $(E, \mathcal{E})$ . On dit que  $(X_t)$  est  $\Phi$ -irréductible si :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall x \in E : [\Phi(A) > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : P^n(x, A) > 0].$$

On peut vérifier que si  $E$  est dénombrable et si  $\Phi$  est la mesure de comptage, on retombe bien sur la définition précédente...

Il faudrait ensuite étendre la notion de récurrence, mais il n'y a pas une extension unique : il y a plusieurs définitions de récurrence, qui permettent de démontrer des propriétés différentes. Ceci dit, on se souvient que dans le cas discret, si une chaîne est irréductible et admet une loi invariante, alors on avait directement le théorème ergodique. C'est de ce résultat qu'on va donner une forme dans le cas continu, sans avoir à définir l'irréductibilité.

**Théorème 2.10.1.** Supposons que  $E = \mathbb{R}^d$  pour un  $d \geq 1$  et que  $\mathcal{E}$  est la  $\sigma$ -algèbre des boréliens. Si  $(X_t)$  est  $\lambda$ -irréductible, où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue, et si  $\pi$  est invariante pour  $(X_t)$ , alors  $\pi$  est unique, et pour toute fonction  $h$  intégrable par rapport à  $\pi$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int h(x)\pi(dx).$$

**Définition 2.10.3.** On dit que  $(X_t)$  est périodique si il existe une partition mesurable  $\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_k$  de  $E$ , avec  $k \geq 1$ , telle que pour tout  $x \in \mathcal{X}_i$  avec  $i < k$ ,  $P(x, \mathcal{X}_{i+1}) = 1$ , et pour tout  $x \in \mathcal{X}_k$ ,  $P(x, \mathcal{X}_0) = 1$ . On dit que  $(X_t)$  est apériodique si elle n'est pas périodique.

**Théorème 2.10.2.** Sous les hypothèses du Théorème 2.10.1, si en plus  $(X_t)$  est apériodique, alors pour tout borélien  $A$  on a

$$\mathbb{P}_\mu(X_t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi(A).$$

## 2.11 Chaînes de Markov cachées

On revient au cas discret dans cette dernière section, et on présente succinctement les modèles à chaînes de Markov cachées (ou modèles de Markov cachés), qui sont constitués de deux processus, définis aux temps  $0, \dots, T$  :

1. Une chaîne de Markov,  $(X_t)$ , à valeurs dans un espace fini  $E = \{1, \dots, K\}$ , non observée, de matrice de transition  $P$  et loi initiale  $\mu$  ;
2. Un processus  $(Y_t)$ , à valeurs dans un espace  $F$  (que l'on prendra discret pour commencer), tel que les variables  $Y_t$ , informellement, ne dépendent que de  $X_t$  ; plus précisément, la loi de  $Y_t$ , sachant toutes les autres variables (donc  $X_0, \dots, X_T$ , et les  $Y_s$  pour  $s \neq t$ ) ne dépend que de  $X_t$  ; appelons  $R(x, y)$  la probabilité d'observer  $Y_t = y$  conditionnellement à  $X_t = x$ . (On fait l'hypothèse supplémentaire que cette probabilité ne dépend pas de  $t$ ).

**Remarque 2.11.1.** Le processus joint  $(X_t, Y_t)$  est une chaîne de Markov, telle que la loi de  $(X_t, Y_t)$  sachant son passé ne dépend que de  $X_{t-1}$ . En revanche, le processus  $(Y_t)$  pris tout seul n'est pas une chaîne de Markov.

Ce genre de modèle est apparu dans les années 60 en traitement du signal, notamment en traitement de la parole, où les  $X_t$  représentaient les phonèmes prononcés par un sujet, et les  $Y_t$  leur enregistrements acoustiques. Ils sont devenus ensuite très populaires dans plusieurs domaines, notamment en génétique et en biostatistique. (Dans ce cas,  $t$  représente la position sur le génome.)

En traitement automatique des langues (natural language processing), ces modèles peuvent être utilisés pour faire de l'étiquetage grammatical (part-of-speech tagging) :  $Y_t$  est le  $t$ -ième mot du texte étudié, et  $X_t$  sa fonction grammaticale (sujet, verbe, article, etc.). Cet exemple montre bien ce que modélisent respectivement  $P$  (la loi de  $X_t|X_{t-1}$ ) et  $R$  (la loi de  $Y_t|X_t$ ). Le premier objet modélise comment différentes fonctions grammaticales s'articulent (un sujet est souvent suivi d'un verbe) ; le deuxième objet modélise le fait que certains mots ont des fonctions plus courantes que d'autres (Le mot « repas » n'est jamais un verbe, le mot « manger » est souvent un verbe, mais est parfois un mot commun qui peut servir de sujet).

Dans ce genre d'application, on cherche à retrouver (estimer) les  $X_t$ , sachant les variables observées  $(Y_0, \dots, Y_t)$ . Pour ce faire, on peut calculer la loi conditionnelle de

$(X_0, \dots, X_T)$  sachant  $Y_t = y_t$  pour  $t = 0, \dots, T$ . Pour alléger les notations, on pose  $X_{0:T} = (X_0, \dots, X_T)$ ,  $Y_{0:T} = (Y_0, \dots, Y_T)$ , etc.

**Proposition 2.11.1.** *On a :*

$$\mathbb{P}(X_{0:T} = x_{0:T} \mid Y_{0:T} = y_{0:T}) = \frac{\mathbb{P}(X_{0:T} = x_{0:T}, Y_{0:T} = y_{0:T})}{\mathbb{P}(Y_0 = y_0, \dots, Y_T = y_T)}$$

où le numérateur vaut :

$$\mathbb{P}(X_{0:T} = x_{0:T}, Y_{0:T} = y_{0:T}) = \mu(x_0) \prod_{t=1}^T P(x_{t-1}, x_t) \prod_{t=0}^T R(x_t, y_t)$$

et le dénominateur est égal à :

$$\mathbb{P}(Y_{0:T} = y_{0:T}) = \sum_{x_0=1}^K \cdots \sum_{x_T=1}^K \left\{ \mu(x_0) \prod_{t=1}^T P(x_{t-1}, x_t) \prod_{t=0}^T R(x_t, y_t) \right\}.$$

Ces expressions s'obtiennent en appliquant la formule de Bayes. Elles mettent en évidence le coût prohibitif à calculer directement ces probabilités : le dénominateur (la vraisemblance des observations) est une somme de  $K^{T+1}$  termes. On peut cependant calculer de telles probabilités (ou plus précisément, leurs marginales, voir plus loin) récursivement, grâce à la propriété de Markov.

Pour simplifier les écritures, on introduit les notations suivantes, pour  $t = 0, \dots, T$  :

$$\begin{aligned} \mu_t(x) &:= \mathbb{P}(X_t = x \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \\ \nu_t(x) &:= \mathbb{P}(X_t = x \mid Y_{0:t} = y_{0:t}) \\ \nu_{t|T}(x) &:= \mathbb{P}(X_t = x \mid Y_{0:T} = y_{0:T}) \\ L_t &:= \mathbb{P}(Y_{0:t} = y_{0:t}). \end{aligned}$$

De plus, on écrit  $\mu_t$ ,  $\nu_t$ , et  $\nu_{t|T}$  les vecteurs correspondants, i.e.  $\mu_t$  est le vecteur des  $\mu_t(x)$ . Ces trois types de vecteur correspondent respectivement aux lois dites de prédiction, de filtrage, et de lissage. Noter que, au temps 0, on doit interpréter la première ligne comme la loi initiale,  $\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu(x)$ , i.e.  $\mu_0 = \mu$ . Ces notations dépendent implicitement des données  $y_0, y_1, \dots$  qui sont considérées désormais comme fixes.

**Proposition 2.11.2.** *On a, pour  $x \in E = \{1, \dots, K\}$ , et  $t = 0, \dots, T$  (sauf la première ligne, qui n'est valable que pour  $t \geq 1$ ) :*

$$\mu_t(x') = \sum_{x=1}^K \nu_{t-1}(x) P(x, x') \quad \text{pour } t \geq 1 \quad (2.6)$$

$$\nu_t(x) = \frac{1}{\ell_t} \mu_t(x) R(x, y_t) \quad (2.7)$$

$$\text{où } \ell_t := \sum_{x=1}^K \mu_t(x) R(x, y_t) = \mathbb{P}(Y_t = y_t \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \quad (2.8)$$

$$L_t = L_{t-1} \times \ell_t \quad \text{pour } t \geq 1 \text{ (et } L_0 = \ell_0) \quad (2.9)$$

*Démonstration.* Pour obtenir (2.6) au temps  $t \geq 1$ , écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t = x' \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) &= \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_{t-1} = x, X_t = x' \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \\ &= \sum_{x \in E} \nu_{t-1}(x) \mathbb{P}(X_t = x' \mid X_{t-1} = x).\end{aligned}$$

La simplification du conditionnement dans le deuxième facteur est une conséquence de la remarque 2.11.1.

Pour montrer (2.7) au temps  $t \geq 0$ , on applique la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t = x \mid Y_{0:t} = y_{0:t}) &= \frac{\mathbb{P}(X_t = x, Y_t = y_t \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1})}{\mathbb{P}(Y_t = y_t \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_t = x \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \mathbb{P}(Y_t = y_t \mid X_t = x)}{\mathbb{P}(Y_t = y_t \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1})}\end{aligned}$$

et remarquer que le dénominateur est une constante de normalisation, qui vaut précisément  $\ell_t$  défini en (2.8).  $\square$

Ce premier résultat nous donne un algorithme pour calculer récursivement les lois de prédiction, de filtrage, et la vraisemblance. Il faut l'initialiser avec  $\mu_0 = \mu$ . Noter que la première ligne revient à effectuer un produit matriciel (de  $\nu_{t-1}$  avec  $P$ ).

Pour calculer les lois de lissage, on a besoin d'un second algorithme, dit « backward » (par opposition au premier algorithme, dit forward). Vous pouvez essayer de retrouver cet algorithme à titre d'exercice.

Le point essentiel à noter est que ces deux algorithmes ont une complexité  $\mathcal{O}(TK^2)$  : chaque algorithme effectue  $T$  itérations, et chaque itération calcule des produits matriciels sur des matrices  $K \times K$ . Cela donne une complexité beaucoup plus raisonnable que celle mentionnée ci-dessus. Le prix à payer est que l'on n'a calculé que des lois marginales, au lieu de la loi jointe définie dans la Prop. 2.11.1. Pour beaucoup de problèmes pratiques, ces probabilités sont suffisantes. Par exemple, pour l'étiquetage grammatical, on se contente de connaître la probabilité qu'un mot soit un verbe, après observation d'une suite de mots.

Le point peut-être un peu surprenant de cette partie est que l'on n'a utilisé que la propriété de Markov pour obtenir les résultats ci-dessus. La théorie des chaînes de Markov homogènes n'y joue aucun rôle. D'ailleurs, à titre d'exercice, vous pouvez essayer de généraliser les calculs ci-dessus :

- au cas où  $(X_t)$  n'est pas homogène ( $P$  devient  $P_t$ ), ou la loi de  $Y_t \mid X_t$  n'est pas constante (on remplace  $R$  par  $R_t$ ) ;
- un peu plus dur : au cas où  $Y_t \mid X_t = x_t$  suit une loi continue.

La généralisation au cas où la chaîne  $(X_t)$  est à valeurs dans un espace continu est largement hors programme, et sera traité dans un cours de troisième année. Mais les lectrices et lecteurs plus curieux peuvent lire la page Wikipedia du filtre de Kalman, et le rôle qu'il a joué dans le programme Apollo.





## 3 Martingales

### 3.1 Définitions

**Définition 3.1.1.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  un processus, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , adapté à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . On dit que le processus est une martingale si, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,

- i)  $X_t$  est intégrable, soit  $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ ,
- ii)  $\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t$ .

On dit que le processus est une martingale positive si, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,

- i)  $X_t \geq 0$  p.s.,
- ii)  $\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t$ .

On définit de la même façon une sous-martingale (resp. une sous-martingale positive) en remplaçant la condition (ii) dans la définition de martingale (resp. de martingale positive) par  $\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \geq X_t$ . On définit de la même façon une sur-martingale (une sur-martingale positive) en remplaçant (ii) par  $\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leq X_t$ .

Quelques propriétés évidentes :  $(X_t)$  est une martingale si et seulement si c'est une sur-martingale et une sous-martingale. L'espérance d'une martingale est constante. En effet,

$$\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t$$

et en prenant l'espérance des deux côtés, on obtient

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)] = \mathbb{E}(X_t),$$

soit

$$\mathbb{E}(X_{t+1}) = \mathbb{E}(X_t).$$

De la même façon, pour une sur-martingale, les espérances sont décroissantes  $\mathbb{E}(X_{t+1}) \leq \mathbb{E}(X_t)$  et pour une sous-martingale, les espérances sont croissantes  $\mathbb{E}(X_{t+1}) \geq \mathbb{E}(X_t)$ .

**Proposition 3.1.1.** Soit  $(X_t)$  une martingale, soit  $k, t \geq 0$ , alors

$$\mathbb{E}(X_{t+k}|\mathcal{F}_t) = X_t.$$

Pour une sur et une sous-martingale, la propriété tient en remplaçant le symbole  $=$  par  $\leq$  et  $\geq$  respectivement.

### 3 Martingales

*Démonstration.* Par récurrence sur  $k$  : le cas  $k = 1$  est vrai par définition. Supposons que la propriété est vraie au rang  $k$ . Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{t+k+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{t+k+1}|\mathcal{F}_{t+k})\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}(X_{t+k}|\mathcal{F}_t) \text{ par définition d'une martingale} \\ &= X_t \text{ par hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.1.2.** Soit  $(X_t)$  une martingale et  $f$  une fonction convexe telle que  $f(X_t)$  soit intégrable pour tout  $t$ . Alors le processus  $[f(X_t)]_{t \in \mathbb{N}}$  est une sous-martingale.

*Démonstration.* Par Jensen,  $\mathbb{E}[f(X_{t+1})|\mathcal{F}_t] \geq f[\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)] = f(X_t)$  par définition. □

Donnons maintenant quelques exemples de martingales.

**Exemple 3.1.1.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite de variables centrées et indépendantes. Posons

$$M_t = \sum_{i=0}^t X_i.$$

On pose  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$ , on peut vérifier qu'on a également la relation  $\mathcal{F}_t = \sigma(M_0, \dots, M_t)$ . Alors  $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . En effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(X_{t+1} + M_t|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(X_{t+1}|X_0, \dots, X_t) + \mathbb{E}(M_t|M_0, \dots, M_t) \\ &= 0 + M_t.\end{aligned}$$

Un exemple :  $X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ . Dans ce cas, notons que

$$M_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^t \sigma_i^2\right).$$

Si  $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 = S < \infty$ , on se doute que  $M_t$  va converger vers une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, S)$ . A l'inverse, si  $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ , la loi de la variable s'étale de plus en plus et on a l'impression qu'il n'y aura pas de convergence. Une bonne partie de ce chapitre sera consacré à étudier le comportement asymptotique des martingales.

**Définition 3.1.2.** Soit  $(\varepsilon_t)$  un processus. On dit que c'est un *incrément de martingale* si il existe une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et une martingale  $(M_t)$  telles que  $\varepsilon_t = M_t - M_{t-1}$  pour tout  $t > 0$ .

Un des intérêts des incréments de martingales est qu'il existe énormément de propriétés vraies pour les variables indépendantes centrées que l'on peut étendre aux incréments de martingales. Par exemple, la loi faible des grands nombres.

**Proposition 3.1.3.** Soit  $(\varepsilon_t)$  un incrément de martingale avec  $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 < \infty$ . Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xrightarrow{\text{proba.}} 0.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| > t \right) &\leq \frac{\mathbb{E} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right|^2 \right)}{t^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j)}{n^2 t^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n t^2} + \frac{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j)}{n^2 t^2}. \end{aligned}$$

Dans le cas de variables indépendantes, on a  $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \mathbb{E}(\varepsilon_i) \mathbb{E}(\varepsilon_j) = 0$ , ce qui prouve que

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| > t \right) \leq \frac{\sigma^2}{n t^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Or, pour des incréments de martingales  $\varepsilon_t = M_t - M_{t-1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) &= \mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})(M_j - M_{j-1})] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})(M_j - M_{j-1}) | \mathcal{F}_{j-1}]] \\ &= \mathbb{E}[(M_i - M_{i-1}) \mathbb{E}[(M_j - M_{j-1}) | \mathcal{F}_{j-1}]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

par définition d'une martingale. □

Une question naturelle est alors : “est-ce qu'il existe des exemples de martingales autres que les sommes de variables indépendantes” ou de façon équivalente, “est-ce qu'il existe des exemples d'incrément de martingales qui ne sont pas indépendants”. L'exemple suivant fournit une réponse positive.

**Exemple 3.1.2** (Processus ARCH). Soit  $(\eta_k)$  une suite de variables i.i.d gaussiennes centrées réduites et, pour tout  $k$ ,  $\mathcal{F}_k = \sigma(\eta_1, \dots, \eta_k)$ . Soit  $(Z_k)$  un processus défini par récurrence :  $z_0 = 1$  et

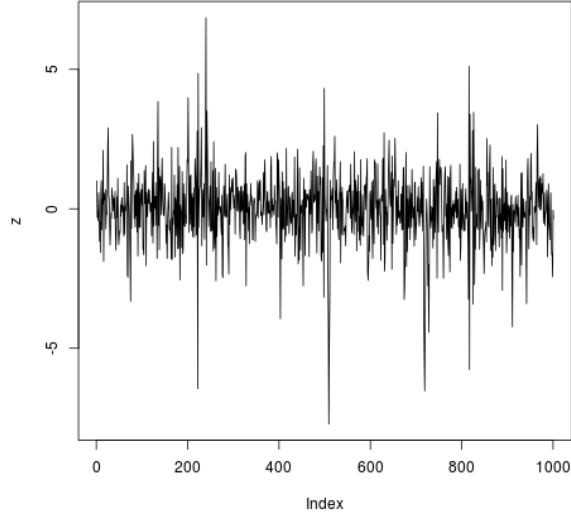
$$Z_{k+1} = \eta_{k+1} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 Z_k^2}$$

où  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha_1 \geq 0$ . Le processus  $(Z_k)$  est appelé processus ARCH(1) et est très souvent utilisé en finance. On pose

$$M_t = \sum_{k=1}^t Z_k.$$

### 3 Martingales

FIGURE 3.1 – Voici un exemple de réalisation de  $(Z_t)$  : ressemble à un bruit blanc, avec des périodes de bruits extrêmes. Ici  $\alpha_0 = 0.5$  et  $\alpha_1 = 0.7$ .



On vérifie bien que  $(M_t)$  est une martingale, en montrant l'intégrabilité par récurrence puis

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(M_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(Z_{t+1} + M_t|\mathcal{F}_t) \\
 &= \mathbb{E}(\eta_{t+1}\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 Z_t^2}|Z_0, \dots, Z_t) + M_t \\
 &= \mathbb{E}(\eta_{t+1}|Z_0, \dots, Z_t)\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 Z_t^2} + M_t \\
 &= M_t.
 \end{aligned}$$

Les incréments de la martingale  $(M_t)$  sont les  $Z_t$  et ceux-ci ne sont bien entendu pas indépendants, par exemple,

$$\mathbb{E}(Z_{t+1}^2|Z_t) = \mathbb{E}(\eta_{t+1}^2(\alpha_0 + \alpha_1 Z_t^2)|Z_t) = (\alpha_0 + \alpha_1 Z_t^2)\mathbb{E}(\eta_{t+1}^2) = (\alpha_0 + \alpha_1 Z_t^2).$$

En général, en finance, les actifs financiers ne sont pas modélisés directement par des processus ARCH, mais plutôt par la martingale associée  $(M_t)$  ou par une transformation de celle-ci comme  $Y_t = \exp(\lambda - \gamma M_t)$  avec  $\lambda, \gamma > 0$ . La Proposition 3.1.2 montre que  $(Y_t)$  est une sur-martingale. Les Figures 3.1, 3.2 et 3.3 montrent des exemples de réalisation de tels processus.

FIGURE 3.2 – Le processus  $(M_t)$  correspondant.

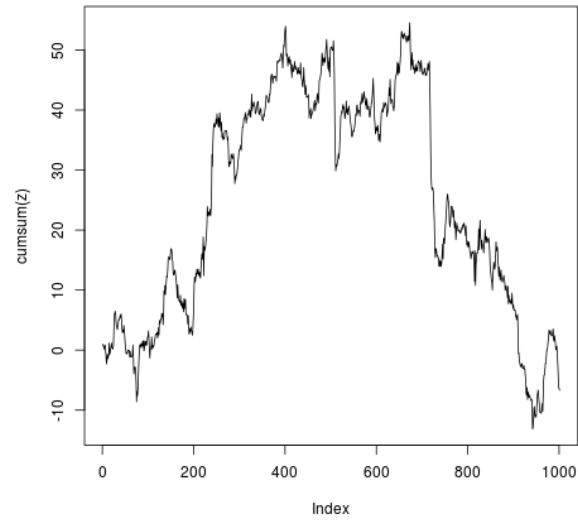
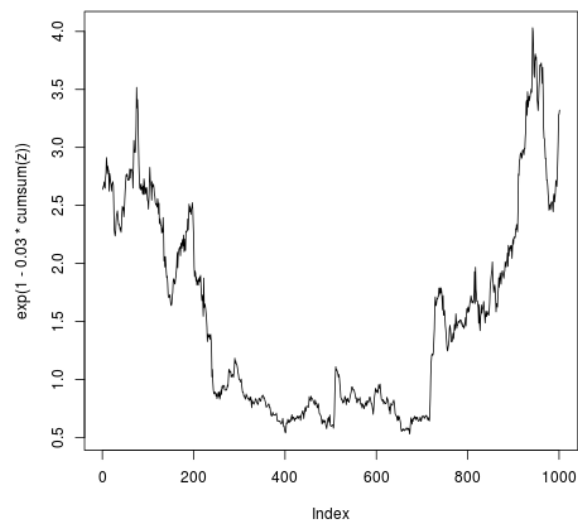


FIGURE 3.3 – Le prix  $(Y_t)$  correspondant. Ici  $\lambda = 1$  et  $\gamma = 0.03$ .



### 3.2 Temps d'arrêt

Idée : supposons que je possède un actif financier, soit  $X_t$  sa valeur à la date  $t$ . A un instant  $t$ , je peux décider de vendre l'actif, ou pas. Notons  $\tau$  l'instant auquel je me décide à vendre l'actif (noter qu'il s'agit d'une variable aléatoire, puisque ma décision dépendra des valeurs, aléatoires, de l'actif). Si ma modélisation est réaliste, il est important que le fait de vendre à l'instant  $t$  (i.e.  $\tau = t$ ) ne dépende que de l'information disponible à la date  $t$ . On rappelle qu'on représentait l'information disponible à la date  $t$  à l'aide d'une filtration.

**Définition 3.2.1.** Soit  $\tau$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  ou dans  $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une filtration. La variable  $\tau$  est dite "temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ " si et seulement si, pour tout  $t$  dans  $\bar{\mathbb{N}}$ , ou  $\bar{\mathbb{R}}_+$  respectivement,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Proposition 3.2.1.** Dans le cas où  $\tau$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}}$ ,  $\tau$  est un temps d'arrêt ssi pour tout  $t$  dans  $\bar{\mathbb{N}}$ ,  $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ .

*Démonstration.* Si  $\tau$  est un temps d'arrêt, alors  $\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau \leq t-1\} = \{\tau \leq t\} \cap (\{\tau \leq t-1\})^c$  et par définition,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  et  $\{\tau \leq t-1\} \in \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$ . Comme une  $\sigma$ -algèbre est stable par passage au complémentaire et par intersection,  $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ .

Réciproquement, si pour tout  $t$  dans  $\bar{\mathbb{N}}$ ,  $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ , alors, pour  $t$  fixé,  $\{\tau \leq t\} = \{\tau = 0\} \cup \dots \cup \{\tau = t\}$  et chacun de ces ensembles sont dans  $\mathcal{F}_t$  donc  $\{\tau \leq t\}$ . Donc  $\tau$  est un temps d'arrêt. □

A partir de maintenant (et jusqu'à la fin du chapitre) on ne considèrera que des processus à temps discret avec  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$  et des temps d'arrêt à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}}$ .

**Exemple 3.2.1.** Exemples de temps d'arrêt :  $\tau = 3$  (ou n'importe quelle constante). Un exemple plus intéressant est le temps d'entrée dans un ensemble  $A$  :

$$\tau_A := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$$

avec la convention habituelle  $\inf \emptyset = \infty$ .

**Définition 3.2.2.** Soit  $\tau$  un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . On définit

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left( \bigcup_{t=0}^{\infty} \mathcal{F}_t \right)$$

et

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_n\}.$$

**Proposition 3.2.2.** Les ensembles  $\mathcal{F}_\infty$  et  $\mathcal{F}_\tau$  sont deux  $\sigma$ -algèbres.

*Démonstration.* C'est évident pour  $\mathcal{F}_\infty$ , on passe directement à  $\mathcal{F}_\tau$ . Il faut vérifier que  $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ , que  $\mathcal{F}_\tau$  est stable par passage au complémentaire et est stable par réunion dénombrable.

Pour tout  $n$ ,  $\{\tau \leq n\} \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{F}_n$  et donc  $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ .

Soit  $A \in \mathcal{F}_\tau$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\tau \leq n\} \cap A^c = \{\tau \leq n\} \cap (A \cap \{\tau \leq n\})^c \in \mathcal{F}_n$ . Donc  $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ .

Enfin, supposons que  $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{F}_\tau$ . Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\{\tau \leq n\} \cap \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\{\tau \leq n\} \cap A_k) \in \mathcal{F}_n$$

et donc  $\bigcup_k A_k \in \mathcal{F}_\tau$ .

□

**Proposition 3.2.3.** Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux temps d'arrêt. Alors

1.  $\tau_1 + \tau_2$ ,  $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min(\tau_1, \tau_2)$  et  $\tau_1 \vee \tau_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$  sont aussi des t.a.
2.  $\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ .
3.  $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ .
4.  $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$ ,  $\{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$ .

*Démonstration.* On prouve 1., les autres propriétés sont laissées en exercice.

Pour  $\tau_1 + \tau_2$  :

$$\{\tau_1 + \tau_2 = n\} = \bigcup_{k=0}^n (\{\tau_1 = k\} \cup \{\tau_2 = n - k\})$$

et  $\{\tau_1 = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ ,  $\{\tau_2 = n - k\} \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$  et donc  $\{\tau_1 + \tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$ . Donc  $\tau_1 + \tau_2$  est un t.a.

Pour  $\tau_1 \wedge \tau_2$  :  $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . De même pour  $\tau_1 \vee \tau_2$  :  $\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . □

**Définition 3.2.3.** Soit  $\tau$  un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , et  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  un processus. Si  $\tau < \infty$  p.s, on pose

$$X_\tau = \sum_{t \in \mathbb{N}} X_t \mathbf{1}_{\{\tau = t\}}.$$

Dans les cas où  $\tau$  peut être infini, on peut parfois étendre la définition. Par exemple, si  $X_n \xrightarrow{p.s} X$  il est naturel de poser

$$X_\tau = \sum_{t \in \mathbb{N}} X_t \mathbf{1}_{\{\tau = t\}} + X \mathbf{1}_{\{\tau = \infty\}}.$$

On conclut cette section par une application de la notion de temps d'arrêt pour énoncer une version de l'identité de Wald. L'idée est la suivante. Supposons que l'on a des

### 3 Martingales

variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$  indépendantes, intégrables (ou positives), avec la même espérance  $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \dots$ . Pour un  $N \in \mathbb{N}$  (déterministe), on a évidemment

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \right) = N\mathbb{E}(X_1).$$

La question est : si  $N$  est aléatoire, a-t'on

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)?$$

Cette égalité n'est pas vraie en général. Quand elle est vraie, elle porte le nom d'identité de Wald. Il en existe plusieurs versions, avec des hypothèses différentes. On en démontre ici une version où  $N$  est un temps d'arrêt.

**Théorème 3.2.4** (Identité de Wald). *Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables ou positives, de même espérance. Soit  $N$  un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$ . On suppose que  $\mathbb{E}(N) < \infty$ . Alors*

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

*Démonstration.* On commence par le cas positif. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{\{N \geq i\}} \right) \\ &\text{on utilise Fubini, tout est positif} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} (X_i \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} (X_i \mathbb{1}_{\{N \leq i-1\}^c}) \\ &\text{on utilise la définition de l'espérance conditionnelle} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} (\mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) \mathbb{1}_{\{N \leq i-1\}^c}) \\ &\text{or } X_i \text{ indep. de } \sigma(X_1, \dots, X_{i-1}) = \mathcal{F}_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} (\mathbb{E}(X_i) \mathbb{1}_{\{N \leq i-1\}^c}) \\ &\text{or } \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) \text{ non aléatoire} \\ &= \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N \leq i-1\}^c} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N \geq i\}} \right) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N). \end{aligned}$$

Dans le cas où les  $X_i$  ne sont plus forcément positifs mais intégrables, la preuve précédente peut être réutilisée pour prouver que

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |X_i| \mathbf{1}_{\{N \geq i\}} \right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(|X_1|) < \infty. \quad (3.1)$$

On réutilise ensuite la même preuve que dans le cas positif, l'unique différence étant que l'utilisation de Fubini n'est plus justifiée par le fait que les  $X_i$  sont positifs, mais par (3.1).  $\square$

On conclut par un contre-exemple amusant. Supposons que l'on les  $X_i$  sont i.i.d avec  $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$ , et posons

$$N = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n X_i = 1 \right\}.$$

Avec la terminologie de l'Exemple 3.2.1,  $N$  est le temps d'entrée du processus  $\sum_{i=1}^n X_i$  dans l'ensemble  $\{1\}$ . On garde bien entendu la convention que  $\inf \emptyset = +\infty$ . Supposons que  $\mathbb{E}(N) < \infty$ . Alors en particulier,  $N < \infty$  p.s et

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1.$$

L'identité de Wald que l'on vient de démontrer dit alors que

$$1 = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1) = 0.$$

C'est donc que la supposition initiale, à savoir  $\mathbb{E}(N) < \infty$ , est fausse. On a donc établi que  $\mathbb{E}(N) = \infty$ .

### 3.3 Théorème d'arrêt : le cas borné

Pour une martingale  $(X_t)$  on a vu qu'on a toujours  $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ . Une question naturelle est alors : est-ce que pour un temps aléatoire  $\tau$ , on a  $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ ? Noter que ceci est assez proche de la question qu'on se posait pour l'identité de Wald, et en fait, il s'agit de la même question dans le cas particulier où  $X_t$  est une somme d'accroissements indépendants. On appelle "théorème d'arrêt" un théorème qui assure que  $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$  pour un temps d'arrêt  $\tau$  - ceci ne peut s'obtenir qu'avec certaines hypothèses sur la martingale  $(X_t)$  et/ou sur  $\tau$ . De façon directe, on peut alors étendre ces résultats aux

### 3 Martingales

cas de sur-martingales pour montrer que  $\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_0)$ , et de sur-martingales pour montrer que  $\mathbb{E}(X_\tau) \geq \mathbb{E}(X_0)$ .

Dans cette section, on va démontrer un premier théorème d'arrêt, lorsque  $\tau$  est borné.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $(X_t)$  une martingale pour  $(\mathcal{F}_t)$  et  $\tau$  un temps d'arrêt. Soit le processus  $(Y_t)$  donné par  $Y_t = X_{t \wedge \tau}$ . Alors  $(Y_t)$  est une martingale. On notera  $X_t^\tau := Y_t$ , on appelle le processus  $(X_t^\tau)$  une “martingale arrêtée”.*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(X_{(t+1) \wedge \tau}|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} + X_{t+1} \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}^c}|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^t X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + X_{t+1} \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}^c} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \sum_{k=0}^t X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}^c} \mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \\ &= X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} + \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}^c} X_t \\ &= X_{t \wedge \tau} = Y_t \end{aligned}$$

□

Comme pour toutes les propriétés précédentes, on adapte celle-ci de façon directe pour les martingales positives et les sur et sous-martingales.

**Théorème 3.3.2** (Théorème d'arrêt — cas borné). *Soit  $(X_n)$  une martingale pour  $(\mathcal{F}_n)$  et  $\tau$  un temps d'arrêt. On suppose que  $\tau$  est borné p.s, autrement dit, il existe  $T_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{P}(\tau \leq T_0) = 1$ . Alors :*

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

*Démonstration.* D'après la proposition précédente,  $(X_t^\tau)$  est une martingale donc  $\mathbb{E}(X_{T_0}^\tau) = \mathbb{E}(X_0^\tau)$ . De plus, il est immédiat que  $X_{T_0}^\tau = X_\tau$  et d'autre part  $X_0^\tau = X_0$ . On récapitule :

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_{T_0}^\tau) = \mathbb{E}(X_0^\tau) = \mathbb{E}(X_0)$$

ce qui conclut. □

Il existe en fait une formulation un peu plus générale.

**Théorème 3.3.3** (Théorème d'arrêt — cas borné, deuxième version). *Soit  $(X_n)$  une martingale pour  $(\mathcal{F}_n)$  et  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux temps d'arrêt avec  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_0$  p.s Alors :*

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}.$$

Pour voir que ceci implique bien la première version, prendre  $\tau_1 = 0$  pour obtenir  $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_0) = X_0$ , et en prenant l'espérance des deux côtés,  $\mathbb{E}(X_{\tau_2}) = \mathbb{E}(X_0)$ .

*Démonstration.* Par définition de l'espérance conditionnelle, il s'agit de démontrer que pour tout  $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$  on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_{\tau_2}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_{\tau_1}).$$

On commence donc le calcul :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_{\tau_2}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_{\tau_2 \wedge T_0}) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_1=t\}} X_{\tau_2 \wedge T_0} \right) \\ &= \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{E} (\mathbb{1}_{A \cap \{\tau_1=t\}} X_{\tau_2 \wedge T_0}) \\ &= \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{E} [\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A \cap \{\tau_1=t\}} X_{\tau_2 \wedge T_0} | \mathcal{F}_t)] , \text{ or } A \cap \{\tau_1 = t\} \in \mathcal{F}_t \\ &= \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{A \cap \{\tau_1=t\}} \mathbb{E}(X_{T_0}^{T_2} | \mathcal{F}_t)] \\ &= \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{E} (\mathbb{1}_{A \cap \{\tau_1=t\}} X_t^{T_2}) \\ &= \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{E} (\mathbb{1}_{A \cap \{\tau_1=t\}} X_{t \wedge \tau_2}) , \text{ or } t = \tau_1 \leq \tau_2 \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{t=0}^{T_0} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_1=t\}} X_t \right) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_{\tau_1}) \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

### 3.4 Décomposition de Doob

**Définition 3.4.1.** On appelle processus croissant un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  tel que pour tout  $t$ ,  $Y_t \leq Y_{t+1}$  p.s.

**Définition 3.4.2.** On appelle processus prévisible pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$  un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  tel que pour tout  $t$ ,  $Y_{t+1}$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable.

**Théorème 3.4.1** (Théorème de décomposition de Doob). Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une SOUS-martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . Alors on a la décomposition :

$$X_t = M_t + Y_t$$

où  $(M_t)$  est une martingale, et  $Y_t$  est un processus croissant prévisible. Si on rajoute la condition  $Y_0 = 0$ , cette décomposition est unique. Elle s'appelle "décomposition de Doob" de  $(X_t)$  et le processus  $(Y_t)$  s'appelle le "compensateur de  $(X_t)$ ".

### 3 Martingales

*Démonstration.* Poser  $Y_0 = 0$ ,  $Y_{t+1} = Y_t + \mathbb{E}(X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t)$  puis  $M_t = X_t - Y_t$ . On a par récurrence que  $Y_{t+1}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, et donc  $(Y_t)$  est prévisible. De plus

$$Y_{t+1} - Y_t = \mathbb{E}(X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) - X_t \geq 0$$

car  $(X_t)$  est une sous-martingale, donc  $(Y_t)$  est croissant. Il reste à vérifier que  $(M_t)$  est une martingale. Or :

$$\mathbb{E}(M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_{t+1} - Y_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_{t+1} - (Y_t + X_{t+1} - X_t) | \mathcal{F}_t) = M_t$$

donc  $(M_t)$  est bien une martingale.

Démontrons enfin l'unicité. Supposons  $X_t = M_t + Y_t = M'_t + Y'_t$  avec  $(M'_t)$  martingale,  $Y'_0 = 0$  et  $(Y'_t)$  croissant prévisible. Alors

$$Y'_{t+1} - Y'_t = X_{t+1} - X_t + M'_{t+1} - M'_t$$

et en prenant  $\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$  on a

$$Y'_{t+1} - Y'_t = \mathbb{E}(X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t).$$

Comme  $Y'_0 = 0 = Y_0$ , par récurrence,  $Y'_t = Y_t$  pour tout  $n$ , et du coup  $M'_t = M_t$  pour tout  $n$ .  $\square$

**Exemple 3.4.1.** Soit  $(X_t)$  une martingale pour  $(\mathcal{F}_t)$  avec  $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$  pour tout  $n$ . Alors en utilisant la Proposition 3.1.2, ou en invoquant directement l'inégalité de Jensen, on a immédiatement que  $(X_t^2)$  est une sous-martingale. On en déduit que

$$X_t^2 = M_t + Y_t$$

où  $(M_t)$  est une martingale et  $(Y_t)$  un processus croissant prévisible, avec  $Y_0 = 0$ . On appelle le processus  $(Y_t)$  la “variation quadratique de la martingale  $(X_t)$ ” ou parfois le “crochet de  $(X_t)$ ”, et on note  $\langle X \rangle_t = Y_t$ , donc la décomposition se ré-écrit :

$$X_t^2 = M_t + \langle X \rangle_t.$$

Le terme “crochet” se justifie par la notation, le terme “variation quadratique” par le fait qu'on peut démontrer que

$$\langle X \rangle_t = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}). \quad (3.2)$$

En effet, à partir de la preuve de la décomposition de Doob, on a  $\langle X \rangle_0 = 0$  et  $\langle X \rangle_{n+1} = \langle X \rangle_t + \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - X_t^2 | \mathcal{F}_t)$ , et par récurrence on obtient :

$$\langle X \rangle_t = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2 - X_{i-1}^2 | \mathcal{F}_{i-1}).$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) - 2\mathbb{E}(X_{i-1}X_i | \mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 \\
&= \mathbb{E}(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) - 2X_{i-1}\mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 \\
&\text{or } (X_t) \text{ est une martingale donc} \\
&= \mathbb{E}(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) - 2X_{i-1}^2 + X_{i-1}^2 \\
&= \mathbb{E}(X_i^2 - X_{i-1}^2 | \mathcal{F}_{i-1})
\end{aligned}$$

et donc (3.2) est prouvée.

### 3.5 Inégalités maximales

Il s'agit de borner le max de martingales.

Lorsqu'on souhaite borner la probabilité qu'une variable  $X \geq 0$  soit trop grande, on utilise en général l'inégalité de Markov. On la rappelle ici avec sa preuve, car la construction des inégalités maximales repose sur une sophistication de cette preuve.

**Théorème 3.5.1** (Inégalité de Markov). *Soit  $X$  une v.a. positive. Pour tout  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

*Démonstration.* On a  $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geq t\}}) \geq \mathbb{E}(t \mathbb{1}_{\{X \geq t\}}) = t\mathbb{P}(X \geq t)$ .  $\square$

Si l'on souhaite borner le max de  $N$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  de même espérance, de façon générale, on utilise un outil appelé borne d'union :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq N} X_i \geq t) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq N} \{X_i \geq t\}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_i \geq t) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbb{E}(X_i)}{t} \\
&= \frac{N\mathbb{E}(X_1)}{t}.
\end{aligned}$$

Le facteur  $N$  semble être le prix à payer pour passer au max. Cette borne est très grossière, mais sans hypothèse supplémentaire sur les  $X_i$ , on ne peut pas vraiment l'améliorer. On peut faire par exemple des hypothèses de moments, etc. ceci est énormément utilisé dans les cours de statistique et machine learning théorique. Ici, on va voir que si on suppose que les  $(X_i)$  sont en fait une (sur ou sous) martingale, il n'y a pas de prix à payer pour passer au max.

### 3 Martingales

**Proposition 3.5.2.** *Soit  $a > 0$ . Soit  $(X_n)$  une SUR-martingale positive. Alors*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n > a \right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_0)}{a}.$$

*Démonstration.* On définit le temps d'arrêt

$$\tau_a = \inf \{n \in \mathbb{N} : X_n > a\},$$

on remarque que

$$\{\tau_a < \infty\} = \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n > a \right\}$$

et que

$$X_{n \wedge \tau_a} \geq a \mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}}. \quad (3.3)$$

Puisque  $(X_n^{\tau_a})$  est une sur-martingale,  $\mathbb{E}(X_0^{\tau_a}) \geq \mathbb{E}(X_n^{\tau_a})$ , et donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_0) &= \mathbb{E}(X_0^{\tau_a}) \geq \mathbb{E}(X_{n \wedge \tau_a}) \\ &\geq \mathbb{E}(a \mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}}) \text{ d'après (3.3)} \\ &= a \mathbb{P}(\tau_a \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \mathbb{P}(\tau_a < \infty) \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.5.3.** *Soit  $a > 0$ . Soit  $(X_n)$  une SOUS-martingale positive. Alors*

$$\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n} X_k > a \right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{a}.$$

*Démonstration.* On utilise le même temps d'arrêt  $\tau_a$ , et cette fois-ci on veut contrôler

$$\left\{ \max_{0 \leq k \leq n} X_k > a \right\} = \{\tau_a \leq n\}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} a \mathbb{P}(\tau_a \leq n) &= \mathbb{E}(a \mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}}) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^n a \mathbb{1}_{\{\tau_a = k\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^n X_k \mathbb{1}_{\{\tau_a = k\}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{\{\tau_a = k\}}) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) \mathbb{1}_{\{\tau_a = k\}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_a=k\}} | \mathcal{F}_k)) \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\tau_a=k\}}) \\
 &= \mathbb{E}\left(X_n \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_a=k\}}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\}}\right) \\
 &\leq \mathbb{E}(X_n).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

□

### 3.6 Espaces $\mathcal{L}_p$ et inégalité de Doob

On rappelle que  $\mathcal{L}_p$  est l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles telles

$$\|X\|_p := \mathbb{E}\{|X|^p\}^{1/p} < \infty.$$

On peut définir cette quantité pour tout  $p > 0$ , mais nous ne considérerons que le cas  $p \geq 1$ , pour lequel c'est une norme (si l'on travaille sur les classes d'équivalence définies par  $X = Y$  p.s.); notamment on a l'inégalité triangulaire (dite inégalité de Minkowski) :

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

encore une fois pour  $p \geq 1$ . Une autre inégalité utile est l'inégalité d'Hölder :

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q \text{ pour } p, q \text{ tels que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On peut aussi définir  $\mathcal{L}_\infty$ , l'ensemble des variables bornées p.s. Noter que les ensembles  $\mathcal{L}_p$  forment une suite décroissante ( $X \in \mathcal{L}_p \Rightarrow X \in \mathcal{L}_q$  si  $p > q$ ).

On dira qu'un processus  $(X_t)$  est borné dans  $\mathcal{L}_p$  si les  $X_t$  sont bornés *uniformément* dans  $\mathcal{L}_p$  :

**Définition 3.6.1.** *Un processus  $(X_t)$  est dit borné dans  $\mathcal{L}_p$  s'il existe  $C$  tel que  $\|X_t\|_p \leq C$  pour tout  $t \geq 0$ . (Cela implique notamment que  $X_t \in \mathcal{L}_p$  pour tout  $t \geq 0$ .)*

**Théorème 3.6.1** (Inégalité de Doob). *Soit  $p \in ]1, \infty]$ ,  $(X_t)$  une martingale (ou une sous-martingale positive) bornée dans  $\mathcal{L}_p$ . Alors  $\sup_{t \in \mathbb{N}} |X_t|$  est dans  $\mathcal{L}_p$ , et on a*

$$\left\| \sup_{t \in \mathbb{N}} |X_t| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t \in \mathbb{N}} \|X_t\|_p.$$

Bien remarquer que la borne ne s'étend pas au cas  $p = 1$ , ceci aura des conséquences importantes dans l'étude de la convergence des martingales dans la section suivante.

### 3 Martingales

*Démonstration.* Dans le cas  $p = \infty$ , l'inégalité est en fait une égalité trivialement vraie. On va maintenant supposer  $p \in ]1, \infty[$ . Remarquons que si  $(X_n)$  est une martingale, par Jensen,  $(|X_n|)$  est une sous-martingale positive. Dans le cas où  $(X_n)$  est une sous-martingale positive,  $X_n = |X_n|$ . Donc, dans les deux cas,  $(|X_n|)$  est une sous-martingale positive. On fixe  $a > 0$ , et pour faire court, on pose  $Y_n = \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|$ . On peut utiliser la Proposition 3.5.3, ou plutôt l'inégalité (3.4) dans la preuve de la Proposition 3.5.3, qui donne :

$$a \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Y_n > a\}}) \leq \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{Y_n > a\}}).$$

On multiplie les deux membres par  $pa^{p-2}$  :

$$pa^{p-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Y_n > a\}}) \leq pa^{p-2} \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{Y_n > a\}}).$$

On intègre pour  $a$  dans  $\mathbb{R}_+$  et on obtient :

$$\int_0^\infty pa^{p-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Y_n > a\}}) da \leq \int_0^\infty pa^{p-2} \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{Y_n > a\}}) da.$$

Les quantités intégrées étant toutes positives, on peut utiliser Fubini :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^\infty pa^{p-1} \mathbf{1}_{\{Y_n > a\}} da \right) \leq \mathbb{E} \left( \int_0^\infty pa^{p-2} |X_n| \mathbf{1}_{\{Y_n > a\}} da \right)$$

soit

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{Y_n} pa^{p-1} da \right) \leq \mathbb{E} \left( |X_n| \frac{p}{p-1} \int_0^{Y_n} (p-1)a^{p-2} da \right).$$

On fait le changement de variable  $b = a^p$  à gauche et  $c = a^{p-1}$  à droite

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{Y_n^p} db \right) \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E} \left( |X_n| \int_0^{Y_n^{p-1}} dc \right)$$

et le calcul des deux intégrales devient trivial. On obtient :

$$\mathbb{E}(Y_n^p) \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(|X_n| Y_n^{p-1}).$$

On remarque que le membre de gauche est  $\|Y_n\|_p^p$  et on applique Hölder sur le membre de droite :

$$\|Y_n\|_p^p \leq \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p \|Y_n^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} = \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p \|Y_n\|_p^{p-1}.$$

Une simplification des deux membres par  $\|Y_n\|_p^{p-1}$  donne

$$\|Y_n\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p,$$

soit, en revenant à la définition de  $Y_n$ ,

$$\left\| \max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p.$$

En prenant le sup en  $n \in \mathbb{N}$  des deux membres on obtient

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_p$$

ce qui est bien le résultat voulu. □



### 3.7 Convergence dans $\mathcal{L}_2$ (et plus généralement $\mathcal{L}_p$ , $p > 1$ )

Les deux espaces  $\mathcal{L}_p$  les plus importants en pratique sont  $\mathcal{L}_2$  (qui est un espace de Hilbert), et  $\mathcal{L}_1$  (l'espace des variables intégrables). Les résultats concernant  $\mathcal{L}_2$  sont souvent plus simples à établir, mais, par construction, les résultats concernant  $\mathcal{L}_1$  sont plus généraux. On s'intéresse donc pour commencer à des martingales bornées dans  $\mathcal{L}_2$ .

**Proposition 3.7.1.** *Soit  $(X_t)$  une martingale bornée dans  $\mathcal{L}_2$ . Alors  $(X_t)$  converge p.s et dans  $\mathcal{L}_2$ .*

**Exemple 3.7.1.** *Avant de passer à la preuve, revenons à un exemple présenté au début du chapitre : des variables indépendantes  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$  et*

$$X_t = \sum_{i=0}^t \varepsilon_i.$$

*Dans ce cas, notons que*

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^t \sigma_i^2\right) \Rightarrow \|X_t\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^t \sigma_i^2}.$$

*Si  $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 = S < \infty$ , la martingale  $(X_t)$  est bornée dans  $\mathcal{L}_2$ , et donc elle converge p.s et dans  $\mathcal{L}_2$  vers une variable aléatoire que l'on pourra noter  $X_{\infty}$ . Par ailleurs, en passant par exemple par la fonction caractéristique, on démontre que*

$$X_{\infty} \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2\right).$$

**Exemple 3.7.2.** *Un exemple plus amusant. On sait que la série harmonique diverge, en fait*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

*Mais quid de la série*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \pm \frac{1}{k}$$

*où les signes sont tirés à pile-ou-face ? Soient donc des variables i.i.d  $(X_k)$  avec  $\mathbb{P}(X_k = +1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$  et on définit  $M_0 = 0$  puis*

$$M_t = \sum_{k=1}^t \frac{X_k}{k}.$$

*On vérifie que  $(M_t)$  est une martingale, que*

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \sum_{k=1}^t \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

### 3 Martingales

et donc  $(M_t)$  converge p.s (et dans  $\mathcal{L}_2$ ). Autrement dit, presque sûrement par rapport au tirage des signes  $\pm$  à pile-ou-face, la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \pm \frac{1}{k}$$

converge.

*Démonstration.* On commence par montrer la convergence dans  $\mathcal{L}_2$ . Pour ceci, il suffit de démontrer que  $(X_t)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}_2$ .

Par Jensen,  $(X_t^2)$  est une sous-martingale, donc  $\mathbb{E}(X_t^2)$  est une suite croissante. De plus c'est une suite bornée par hypothèse. Donc  $\mathbb{E}(X_t^2)$  converge vers une limite  $C > 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} \|X_{t+p} - X_t\|_2^2 &= \mathbb{E}[(X_{t+p} - X_t)^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}((X_{t+p} - X_t)^2 | \mathcal{F}_t)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{t+p}^2 | \mathcal{F}_t) - 2X_t \mathbb{E}(X_{t+p} | \mathcal{F}_t) + X_t^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{t+p}^2 | \mathcal{F}_t) - X_t^2] \\ &= \mathbb{E}(X_{t+p}^2) - \mathbb{E}(X_t^2) \\ &\leq C - \mathbb{E}(X_t^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc  $(X_t)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}_2$ , donc elle converge dans  $\mathcal{L}_2$ .

Reste à démontrer que  $(X_t)$  converge également presque sûrement. Là encore, on va démontrer que  $(X_t)$  est p.s de Cauchy. Pour cela, on pose

$$V_t = \sup_{i,j \geq t} |X_i - X_j|.$$

On note que  $(V_t)$  est p.s positive et décroissante, donc, elle converge presque sûrement vers une limite  $V$ . De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_t > c) &= \mathbb{P}\left(\sup_{i,j \geq t} |X_i - X_j| > c\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} |X_{k+t} - X_t| > \frac{c}{2}\right) \\ &\leq \left(\frac{2}{c}\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(\sup_{k \geq 0} |X_{k+t} - X_t|\right)^2\right] \text{ par Markov} \\ &\leq \left(\frac{2}{c}\right)^2 \frac{2}{2-1} \sup_{k \geq 0} \mathbb{E}(|X_{k+t} - X_t|^2) \text{ par Doob avec } p = 2 \\ &= \frac{8}{c^2} \sup_{k \geq 0} \mathbb{E}(|X_{k+t} - X_t|^2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

car  $(X_t)$  est de Cauchy dans  $\mathcal{L}_2$ . Ceci prouve que

$$V_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{proba.}} 0.$$

Or on a déjà montré que

$$V_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} V.$$

Par unicité de la limite (à un p.s. près),  $V = 0$  p.s et donc

$$V_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$$

ce qui prouve que  $(X_t)$  est p.s. une suite de Cauchy, donc elle converge p.s. □

**Remarque 3.7.1.** *La proposition 3.7.1 est vraie plus généralement pour tout  $p > 1$  (mais PAS pour  $p = 1$ ) ; la démonstration correspondante est un peu plus technique et ne sera pas faite en cours.*

### 3.8 Interlude : urnes de Polya

Le problème de l'urne de Polya fournit une première illustration de la théorie des martingales (et notamment des théorèmes de convergence de la section précédente).

On place dans une urne deux boules, une blanche, une noire. Puis on répète l'opération suivante : tirage d'une boule au hasard, remise de cette boule, et ajout d'une boule supplémentaire de même couleur que la boule tirée. Soit  $N_t$  le nombre de boules blanches à l'itération  $t$  (parmi un total de  $t + 2$  boules). On pose  $N_0 = 1$ , et on voit que :

$$\mathbb{E}(N_t - N_{t-1} | N_{t-1} = n) = \frac{n}{t+1} \quad (3.5)$$

donc

$$\mathbb{E}(N_t | N_{t-1}) = \left( \frac{t+2}{t+1} \right) N_{t-1}.$$

(Noter que le processus est aussi Markovien.)

On considère désormais la *proportion* de boules blanches :  $M_t = N_t/(t+2)$ . C'est une martingale :  $\mathbb{E}(M_t | M_{t-1}) = M_{t-1}$ .

Cette martingale est à valeur dans  $[0, 1]$  (c'est une proportion), donc elle est bornée, de façon déterministe et a fortiori dans  $\mathcal{L}_p$  pour tout  $p \geq 1$ . On sait donc que  $M_t \rightarrow M_\infty$  p.s. et dans  $\mathcal{L}_p$ ,  $p > 1$  (Théorème 3.7.1). On veut maintenant déterminer la loi de  $M_\infty$ . Pour ce faire, on détermine d'abord la loi de  $N_t$ .

**Proposition 3.8.1.** *La variable  $N_t$  suit une loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, \dots, t+1\}$ .*

*Démonstration.* Par récurrence : on a bien  $P(N_1 = 1) = P(N_1 = 2) = 1/2$  (ou même  $N_0 = 1$ , ce qui est bien une loi uniforme sur le singleton  $\{1\}$ ). Si la propriété est vraie au temps  $t-1$ , on a, pour  $1 \leq n \leq t+1$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(N_{t-1} = n-1) \frac{n-1}{t+1} + P(N_{t-1} = n) \left(1 - \frac{n}{t+1}\right) \\ &= \frac{1}{t+1}\end{aligned}$$

□

On en déduit aisément que  $M_t$  converge en loi vers une loi uniforme sur  $[0, 1]$  ; puis par unicité de la limite, que  $M_\infty \sim U[0, 1]$ .

Ce problème peut se généraliser comme suit : on place initialement  $n_i$  boules de couleur  $i$  dans l'urne, pour  $i = 1, \dots, k$ . Quelle est alors la loi limite ? La façon la plus élégante de traiter cette généralisation est d'utiliser des propriétés des lois gamma et de Dirichlet.

**Lemme 3.8.2.** *Une variable aléatoire positive de densité :*

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$$

où  $\alpha, \beta > 0$  est dite de loi  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ . La somme de variables indépendantes  $V_1, \dots, V_k$  telles que  $V_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$  suit une loi  $\text{Gamma}(\sum_{i=1}^k \alpha_i, \beta)$ . En particulier une somme de  $k$  variables exponentielles ( $\alpha_i = 1$ ) de paramètre  $\beta$  suit une loi  $\text{Gamma}(k, \beta)$ .

**Lemme 3.8.3.** *Soient  $V_1, \dots, V_k$ ,  $k \geq 2$ , des variables aléatoires indépendantes telles que  $V_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, 1)$ ,  $\alpha_i > 0$ . Soient  $U_i = V_i / \sum_{j=1}^k V_j$ . Le vecteur  $(U_1, \dots, U_{k-1})$  suit une loi dite de Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ), de densité :*

$$f(u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^k u_i^{\alpha_i-1} \mathbb{1}_{S_k}(u_1, \dots, u_{k-1})$$

où  $u_k = 1 - u_1 - \dots - u_{k-1}$ , et

$$S_k = \{(u_1, \dots, u_{k-1}) : u_i > 0, \sum_{i=1}^{k-1} u_i \leq 1\}.$$

Pour  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1$ , on parlera de loi uniforme sur le simplexe.

On notera que cette loi est définie pour le vecteur  $(U_1, \dots, U_{k-1})$ , plutôt que  $(U_1, \dots, U_k)$ , pour éviter les problèmes techniques liées aux lois définies sur des variétés (l'espace fermé défini par la contrainte  $U_1 + \dots + U_k = 1$ .) Mais, par abus de langage, on dira aussi que le vecteur  $(U_1, \dots, U_k)$  suit aussi cette loi de Dirichlet.

**Lemme 3.8.4.** *Si  $(U_1, \dots, U_k) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , alors pour des entiers  $j \geq 2$ ,  $l_1, \dots, l_j \geq 1$  tels que  $l_1 + \dots + l_j = k$ , le vecteur  $(W_1, \dots, W_j)$  des sommes partielles  $W_1 = U_1 + \dots + U_{l_1}$ , ...,  $W_j = U_{k-l_j+1} + \dots + U_k$  suit une loi de Dirichlet, de paramètres  $\beta_1, \dots, \beta_j$ , avec  $\beta_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_{l_1}$ , ...,  $\beta_j = \alpha_{k-l_j+1} + \dots + \alpha_k$ .*

### 3.9 Convergence : résultats plus généraux

Les preuves sont laissées au lecteur. On peut maintenant généraliser assez aisément le résultat précédent.

**Proposition 3.8.5.** *Soit une urne de Polya contenant initialement  $n_i$  boules de couleur  $i$ , pour  $i = 1, \dots, k$ , et soit  $M_t$  le vecteur des proportions de chaque couleur au temps  $t$ . Le processus  $M_t$  converge p.s. vers une variable  $M_\infty$  de loi de Dirichlet( $n_1, \dots, n_k$ ).*

*Démonstration.* On suppose pour commencer que  $n_1 = \dots = n_k = 1$ . Comme dans le cas  $k = 2$ , on montre aisément que  $M_t$  suit une certaine loi uniforme (sur des ensembles d'entiers), qui doit converger (en loi) vers une loi uniforme sur le simplexe. Noter aussi que chaque composante du vecteur  $M_t$  est bien une martingale (par rapport à quelle filtration?), et donc converge p.s.

Pour une configuration de départ quelconque, on peut toujours numérotter les boules de départ de 1 à  $m = \sum_{i=1}^k n_i$  pour distinguer les boules de même couleur. Puis on effectue un tirage de Polya, en remplaçant les « couleurs » par les catégories définies par ces nombres : i.e. au temps 1 on tire une boule au hasard, et on replace dans le sac deux boules avec le même nombre. Le résultat précédent montre que le vecteur des proportions tend vers une loi uniforme (c'est à dire, une Dirichlet( $1, \dots, 1$ )). On réunit ensuite les boules de même couleur, et on applique le Lemme 3.8.4, pour conclure.  $\square$

### 3.9 Convergence : résultats plus généraux

Lorsqu'un processus est borné dans  $\mathcal{L}_1$ , les choses deviennent nettement plus techniques. En particulier, on peut avoir convergence presque sûre sans convergence dans  $\mathcal{L}_1$ . On commence par énoncer et démontrer deux résultats de convergence p.s.

**Théorème 3.9.1.** *Soit  $(X_t)$  une sous-martingale bornée dans  $\mathcal{L}_1$ . Alors elle converge presque sûrement.*

La preuve nécessite un lemme qui est un résultat intéressant en soi.

**Lemme 3.9.2.** *Soit  $(X_t)$  une sur-martingale positive. Alors  $X_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} X_\infty$ . De plus,  $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \leq X_t$ .*

Noter que ces deux résultats sont assez intuitifs, par analogie avec les suites déterministes : une suite croissante (resp. décroissante) et bornée supérieurement (resp. inférieurement) converge vers une limite finie.

*Preuve du Lemme 3.9.2.* Comme  $(X_t)$  est une sur-martingale positive,  $(Y_t)$  défini par  $Y_t = \exp(-X_t)$  est une sous-martingale positive (Jensen) avec  $0 \leq Y_t \leq 1$ . On peut donc écrire sa décomposition de Doob :

$$Y_t = M_t + A_t \tag{3.6}$$

où  $(M_t)$  est une martingale,  $(A_t)$  un processus croissant prévisible et  $A_0 = 0$ . Comme  $(A_t)$  est un processus croissant, il converge presque sûrement vers  $A_\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ . Par le TCM,  $\mathbb{E}(A_t) \rightarrow \mathbb{E}(A_\infty)$  et de plus,

$$\mathbb{E}(A_t) = \mathbb{E}(Y_t) - \mathbb{E}(M_t) \text{ par (3.6)}$$

### 3 Martingales

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(Y_t) - \mathbb{E}(M_0) \text{ car } (M_t) \text{ martingale} \\
&= \mathbb{E}(Y_t) - \mathbb{E}(Y_0) \text{ par (3.6) encore} \\
&\leq 1 \text{ car } 0 \leq Y_t \leq 1.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\mathbb{E}(A_\infty) \leq 1$  et donc que  $A_\infty < \infty$  p.s.

Pour  $p \in \mathbb{N}$  posons  $\tau_p = \inf\{t \in \mathbb{N} : A_{t+1} > p\}$ , comme  $(A_t)$  est prévisible,  $\tau_p$  est bien un temps d'arrêt. De plus,  $A_{t \wedge \tau_p} \leq p$ . Donc :

$$|M_t^{\tau_p}| = |M_{t \wedge \tau_p}| = |Y_{t \wedge \tau_p} - A_{t \wedge \tau_p}| \leq 1 + p$$

donc la martingale arrêtée  $(M_t^{\tau_p})$  est une martingale bornée, donc bornée dans  $\mathcal{L}_2$ , et donc d'après la Proposition 3.7.1 elle converge presque sûrement et dans  $\mathcal{L}_2$ . Donc

$$Y_{t \wedge \tau_p} = M_t^{\tau_p} + A_{t \wedge \tau_p}$$

converge p.s. Autrement dit :

$$\{\tau_p = \infty\} \subset \{(Y_t) \text{ converge}\}$$

soit (passage au complémentaire)

$$\{(Y_t) \text{ diverge}\} \subset \{\tau_p < \infty\} \subset \{A_\infty > p\}$$

et donc

$$\mathbb{P}((Y_t) \text{ diverge}) \leq \mathbb{P}(\tau_p < \infty) \leq \mathbb{P}(A_\infty > p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

car  $A_\infty < \infty$  p.s. Or  $\mathbb{P}((Y_t) \text{ diverge})$  ne dépend bien entendu pas de  $p$  donc on a  $\mathbb{P}((Y_t) \text{ diverge}) = 0$ , autrement dit,  $(Y_t)$  converge p.s. En revenant à  $X_t = -\log(Y_t)$ , on a directement que  $(X_t)$  converge également p.s, la limite étant à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ .

Reste à prouver la relation sur l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_t \middle| \mathcal{F}_k\right) \\
&\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_k) \text{ par Fatou conditionnel} \\
&\leq X_k \text{ car } (X_t) \text{ sur-martingale.}
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant prouver le théorème.

*Preuve du Théorème 3.9.1.* Rappel :  $(X_t)$  est cette fois une sous-martingale bornée dans  $\mathcal{L}_1$ . On pose  $X_t^+ = X_t \vee 0$ , en tant que fonction convexe de  $(X_t)$ , c'est une sous-martingale (positive). On peut donc encore une fois écrire la décomposition de Doob :

$$X_t^+ = M_t + A_t$$

### 3.10 Deuxième interlude : processus de branchement (Galton-Watson)

et, comme dans la preuve du Lemme 3.9.2,  $(A_t)$  étant positif et croissant, il converge vers une limite  $A_\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ . Cette fois

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_\infty) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(A_t) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} [\mathbb{E}(X_t^+) - \mathbb{E}(M_t)] \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_t|) - \mathbb{E}(M_0) \\ &< \infty \text{ par hypothèse,}\end{aligned}$$

donc là encore  $\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$  et  $A_\infty < \infty$  p.s. On définit un nouveau processus,

$$Y_t = M_t + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_t).$$

Le processus  $(M_t)$  est une martingale, quand à  $(\mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_t))$ , c'est une martingale régulière (notion définie dans la prochaine section, mais la démonstration du fait que c'est bien une martingale est immédiate). Donc  $(Y_t)$  est aussi une martingale. Comme  $(A_t)$  est un processus croissant,  $A_\infty \geq A_t \Rightarrow \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_t) \geq \mathbb{E}(A_n | \mathcal{F}_t) = A_t$ . Donc,

$$Y_t = M_t + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_t) \geq M_t + A_t = X_t^+ \geq 0.$$

Donc  $(Y_t)$  est une (sur-)martingale positive, d'après le Lemme 3.9.2,  $Y_t \xrightarrow{p.s.} Y_\infty$ . On pose également

$$Z_t = Y_t - X_t,$$

en tant que somme d'une martingale et d'une sur-martingale, c'est une sur-martingale et comme  $Y_t \geq X_t^+ \geq X_t$  on a immédiatement  $Z_t \geq 0$ . On peut là-encore invoquer le Lemme 3.9.2,  $Z_t \xrightarrow{p.s.} Z_\infty$ . Comme  $X_t = Y_t - Z_t$  on a presque établi la convergence p.s. de  $(X_t)$ , il faut juste vérifier qu'il n'y a pas de forme indéterminée. En fait, on va montrer que  $Y_\infty$  et  $Z_\infty$  sont finies p.s.

Tout d'abord,  $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(M_t) + \mathbb{E}(A_\infty) < \infty$ , or le Lemme 3.9.2 dit également que  $\mathbb{E}(Y_\infty | \mathcal{F}_t) \leq Y_t$  donc

$$\mathbb{E}(Y_\infty) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y_\infty | \mathcal{F}_t)] \leq \mathbb{E}(Y_t) < \infty$$

et donc  $Y_\infty < \infty$  p.s.

De la même façon,

$$\mathbb{E}(Z_\infty) \leq \mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(Y_t) - \mathbb{E}(X_t) < \infty$$

et donc  $Z_\infty < \infty$  p.s. □

### 3.10 Deuxième interlude : processus de branchement (Galton-Watson)

On considère une population évoluant dans le temps : chaque individu au temps  $t - 1$  aura un nombre aléatoire de descendants au temps  $t$ . Ce nombre de descendants suit une

### 3 Martingales

loi fixe. Donc, au temps  $t \geq 1$ , le nombre d'individu est :

$$Z_t = \sum_{i=1}^{Z_{t-1}} X_{t,i}$$

où les  $X_{t,i}$  sont des copies IID de  $X$ . On prend classiquement  $Z_0 = 1$ . On va supposer que  $P(X = 0) > 0$  et  $P(X > 1) > 0$  pour rendre l'étude plus intéressante. (Pourquoi?) Bien entendu, le nombre de descendants  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Les processus de branchement sont très utiles pour modéliser différents phénomènes en biologie notamment. Ils présentent aussi une belle application de la théorie des martingales.

Posons d'abord le décor. Soit  $\mu := \mathbb{E}(X)$  et  $G(x) := \mathbb{E}(x^X)$ , pour  $x \in [0, 1]$ ;  $G$  est la fonction génératrice de la loi de  $X$  :

$$G(x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)x + \mathbb{P}(X = 2)x^2 + \dots$$

On montre aisément les propriétés suivantes :  $G(0) = P(X = 0)$ ,  $G'(1) = \mu$ ,  $G$  est croissante, convexe. Par ailleurs, si  $G_t$  est la fonction génératrice de  $Z_t$ , on a :  $G_t = G \circ G_{t-1}$  (par récurrence).

Par ailleurs  $\mathbb{E}[Z_t | Z_{t-1}] = \mu Z_{t-1}$ , donc  $\mathbb{E}[Z_t] = \mu^t$ , et :

- si  $\mu > 1$  (cas sur-critique) :  $(Z_t)$  est une sous-martingale (positive).
- si  $\mu = 1$  (cas critique) :  $(Z_t)$  est une martingale (positive).
- si  $\mu < 1$  (cas sous-critique) :  $(Z_t)$  est une sur-martingale (positive).

(Dans les trois cas, la filtration associée est la filtration canonique.) On peut en déduire que pour  $\mu \leq 1$ ,  $Z_t$  converge p.s. vers une limite  $Z_\infty$ . Nous aimerions en savoir plus sur  $Z_\infty$ . (Et sur le comportement asymptotique de  $Z_t$  quand  $\mu > 1$ .)

Intéressons-nous tout d'abord à la probabilité d'extinction de la population ; soit l'événement  $E : Z_t = 0$  au bout d'un certain temps  $t$ . On note que

$$E = \cup_{t=1}^{\infty} \{Z_t = 0\}$$

et donc  $\pi := \mathbb{P}(E)$  est la limite de la suite croissante  $\mathbb{P}(Z_t = 0) = G_t(0)$  (théorème de la convergence monotone). Reste à savoir dans quels cas  $\pi = 1$  ou  $\pi < 1$ . (On sait déjà que  $\pi > 0$ .)

Puisque  $\pi = \lim_{t \rightarrow +\infty} G_t(0)$ , c'est une solution de l'équation  $\pi = G(\pi)$ . ( $G_{t+1}(0) = G(G_t(0))$ , et on passe à la limite ;  $G$  est continue.)

Le lemme suivant devient évident si l'on trace les graphes correspondants (se rappeler que  $G$  est croissante, convexe, que  $G(0) = P(X = 0) > 0$  et  $G'(1) = \mu$ ).

**Lemme 3.10.1.** *Si  $\mu \leq 1$ , l'unique solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $\pi = G(\pi)$  est  $\pi = 1$ . Si  $\mu > 1$ , cette équation admet une solution dans  $]0, 1[$  que l'on notera  $\pi$  par la suite (reste à démontrer que c'est bien la probabilité d'extinction.)*

En d'autres termes, pour  $\mu \leq 1$ ,  $Z_t$  s'annule en un temps fini. (Et donc la limite  $Z_\infty$  est simplement un Dirac en 0). Pour  $\mu < 1$ , on peut de plus montrer que la probabilité de survie jusqu'à la date  $t$  décroît exponentiellement. Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Z_t \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_t) = \mu^t.$$



Pour  $\mu = 1$ , il est possible de montrer que la probabilité de survie décroît en  $1/t$  : montrer que  $(1 - G(x))^{-1} - (1 - x)^{-1} = c + \mathcal{O}((1 - x)^3)$  pour une certaine constante  $c$ , en déduire un développement similaire pour  $(1 - G_n(x))^{-1} - (1 - x)^{-1}$ , le reste est laissé à titre d'exercice. Noter que cela implique que le temps jusqu'à extinction a une espérance infinie.

Pour étudier plus finement le cas  $\mu > 1$ , on introduit la martingale suivante :  $M_t := Z_t/\mu^t$ . (Expliquer pourquoi c'est une martingale.)

**Proposition 3.10.2.** *Si  $X \in \mathcal{L}_2$  (et donc  $\sigma^2 := \text{Var}(X) < \infty$ ), la martingale  $M_t$  est bornée dans  $\mathcal{L}_2$ . Donc elle converge p.s. et dans  $\mathcal{L}_2$  vers une limite  $M_\infty$ .*

*Démonstration.* On peut écrire par exemple (en partant de  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ) que

$$\mathbb{E}(Z_t^2 | Z_{t-1} = z) = \sigma^2 z + \mu^2 z^2$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}(M_t^2 - M_{t-1}^2 | M_{t-1}) = \frac{\sigma^2}{\mu^{t+1}} M_{t-1}$$

et donc

$$\mathbb{E}(M_t^2) = 1 + \sigma^2 \sum_{s=1}^t \frac{1}{\mu^{s+1}} \leq 1 + \frac{\sigma^2}{\mu(\mu - 1)}.$$

□

La preuve ci-dessus nous donne d'ailleurs la variance de la loi limite  $M_\infty$ . Puisque cette variance est non-nulle, on a bien montré que la probabilité d'extinction est strictement inférieure à 1. (Si cette probabilité valait 1, alors  $Z_t$  et donc aussi  $M_t$  s'annulerait au bout d'un certain  $t$ .)

Donc, pour conclure, quand  $\mu > 1$ , le comportement asymptotique de la population est le suivant :

- Avec probabilité  $\pi$  (l'unique solution dans  $]0, 1[$  de l'équation  $\pi = G(\pi)$ ), la population s'éteint en un temps fini.
- Avec probabilité  $(1 - \pi)$ , la taille de la population diverge exponentiellement, au taux  $M_\infty(\omega)\mu^t$ . (La constante devant le  $\mu^t$  est aléatoire, et suit la loi de  $M_\infty$  conditionnellement à  $M_\infty > 0$ .)

Si la loi de  $X$  n'a pas de variance, on peut avoir des comportements un peu plus compliqués.

Notons enfin que si la martingale  $M_t$  n'est pas très utile en soi dans le cas  $\mu \leq 1$ , c'est un exemple simple de martingale qui converge p.s. (vers 0 comme on l'a déjà expliqué) mais pas dans  $\mathcal{L}_1$ , puisque  $E(M_t) = 1$ . Intuitivement, la loi de  $M_t$  s'écrase vers zéro, mais avec une probabilité non nulle de prendre de très grandes valeurs, qui « compensent ».

### 3.11 Martingales régulières et théorème d'arrêt

On a insisté dans les sections précédentes sur le fait qu'une martingale pouvait converger p.s. sans converger dans  $\mathcal{L}_1$ . (Les processus de branchement nous ont donné un tel

### 3 Martingales

exemple). On va caractériser dans cette section les martingales qui convergent selon ces deux modes.

On commence par définir les martingales régulières :

**Définition 3.11.1.** *Un processus  $(X_t)$  qui peut se mettre sous la forme*

$$X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$$

*pour une certaine filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et une certaine variable intégrable  $X$ , est appelé martingale régulière.*

(Le fait qu'un tel processus soit effectivement une martingale associée à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  est facile à démontrer.)

**Théorème 3.11.1.** *Soit  $X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$  (avec  $X$  variable intégrable) une martingale régulière, alors  $X_t$  converge p.s. et dans  $\mathcal{L}_1$  vers  $X_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ .*

*Réciproquement, si  $(X_t)$  est une martingale qui converge vers une certaine limite  $X_\infty$  dans  $\mathcal{L}_1$ , alors c'est une martingale régulière, et elle converge p.s. vers  $X_\infty$ .*

*Démonstration.* Commençons par la réciproque. Noter que Si  $X_t \xrightarrow{\mathcal{L}_1} X_\infty$  alors

$$|X_t| \leq |X_\infty| + |X_t - X_\infty|$$

donc  $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ , et on peut invoquer le Théorème 3.9.1 qui montre que  $X_t \xrightarrow{p.s.} X_\infty$  (même limite, car convergence  $\mathcal{L}_1$  et convergence p.s. impliquent convergence en probabilité).

Par ailleurs,  $X_t = \mathbb{E}(X_{t+k}|\mathcal{F}_t)$  pour tout  $k \geq 0$ , et pour faire tendre  $k \rightarrow \infty$ , prendre  $A \in \mathcal{F}_t$ , et noter que  $\mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_{t+k} \mathbf{1}_A)$ , et

$$|\mathbb{E}(X_{t+k} - X_\infty) \mathbf{1}_A| \leq \mathbb{E}(|X_{t+k} - X_\infty| \mathbf{1}_A) \leq \|X_{t+k} - X_\infty\|_1 \rightarrow 0$$

et donc  $\mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_A)$ , on a bien  $X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)$ , et  $(X_t)$  est une martingale régulière. ( $X_\infty$  est bien intégrable, puisque c'est la limite dans  $\mathcal{L}_1$ .)

Dans l'autre sens, supposons que  $X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$  avec  $X$  intégrable. On a alors

$$\mathbb{E}(|X_t|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| |\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(|X|)$$

donc  $(X_t)$  est bornée dans  $\mathcal{L}_1$  et le Théorème 3.9.1 dit qu'elle converge p.s vers une v.a.  $X_\infty$ . Démontrons maintenant que la convergence a aussi lieu dans  $\mathcal{L}_1$  (vers la même limite  $X_\infty$ , même argument que ci-dessus). Pour ceci on va démontrer que  $(X_t)$  est de Cauchy dans  $\mathcal{L}_1$ . On a  $X = X^+ - X^-$  avec  $X^+ = X \vee 0$  et  $X^- = (-X) \vee 0$ ; on décompose  $X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X^+|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{F}_t)$  et on va démontrer que  $\mathbb{E}(X^+|\mathcal{F}_t)$  et  $\mathbb{E}(X^-|\mathcal{F}_t)$  sont des suites de Cauchy. On traite le cas de  $\mathbb{E}(X^+|\mathcal{F}_t)$ , le cas  $\mathbb{E}(X^-|\mathcal{F}_t)$  est identique. On a :

$$\|\mathbb{E}(X^+|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X^+|\mathcal{F}_t)\|_1 = \underbrace{\|\mathbb{E}(X^+|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X^+ \wedge a|\mathcal{F}_s)\|_1}_{\xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \text{ (TCD)}}$$

$$+ \|\mathbb{E}(X^+ \wedge a | \mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X^+ \wedge a | \mathcal{F}_t)\|_1 + \underbrace{\|\mathbb{E}(X^+ \wedge a | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(X^+ | \mathcal{F}_t)\|_1}_{\xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \text{ (TCD)}}.$$

Pour le terme  $\|\mathbb{E}(X^+ \wedge a | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(X^+ \wedge a | \mathcal{F}_s)\|_1$ , noter que  $(\mathbb{E}(X^+ \wedge a | \mathcal{F}_n))$  est une martingale bornée dans  $\mathcal{L}_1$ , donc elle converge p.s, et de plus c'est une martingale bornée, donc, la convergence p.s implique la convergence dans  $\mathcal{L}_1$ . Donc cette suite est de Cauchy dans  $\mathcal{L}_1$  et donc le terme peut être rendu aussi petit que l'on veut quand  $s$  et  $t$  sont assez grands.

La dernière étape est de démontrer que  $X_\infty = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$ . On procède de la même façon que ci-dessus (dans la réciproque). Pour  $A \in \mathcal{F}_t$ , on a

$$\forall k \geq 0, \quad \mathbb{E}(X_{t+k} \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A)$$

et puisque

$$|\mathbb{E}(X_{t+k} - X_\infty) \mathbf{1}_A| \leq \mathbb{E}(|X_{t+k} - X_\infty| \mathbf{1}_A) \leq \|X_s - X_\infty\|_1 \rightarrow 0$$

on a bien :

$$\mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A). \quad (3.7)$$

et cette relation est plus généralement vraie pour tout  $A \in \cup_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_t$ .

Malheureusement, ceci ne montre pas que c'est vrai pour tout  $A \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$ . On s'en sort avec le théorème de classe monotone (admis, hors programme) : tout d'abord, l'ensemble des  $A$  qui satisfait (3.7) est une classe monotone (contient  $\Omega$ , stable par union croissante et par différence). De plus,  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$  est un  $\pi$ -système (stable par intersection finie) inclus dans cette classe monotone. Le théorème de classe monotone dit alors que  $\sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$  est aussi inclus dans la classe monotone.  $\square$

**Théorème 3.11.2.** Soit  $X_t = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)$  une martingale régulière et  $\tau$  un temps d'arrêt quelconque (à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ). Alors  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$ .

En particulier, en prenant l'espérance, on obtient  $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_0)$ .

*Démonstration.*

$$X_\tau = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty) \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}}.$$

En particulier  $\mathbb{E}(|X_\tau|) \leq \mathbb{E}(|X|) < \infty$  donc  $X_\tau$  est intégrable.

Pour démontrer  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$ , il suffit de démontrer que pour tout  $A \in \mathcal{F}_\tau$ ,  $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_\tau)$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X) &= \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_A \sum_{k \in \mathbb{N}} X \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + \mathbf{1}_A X \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A \cap \{\tau=k\}})}_{\in \mathcal{F}_k} + \underbrace{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A \cap \{\tau=\infty\}})}_{\in \mathcal{F}_\infty} \end{aligned}$$

### 3 Martingales

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{A \cap \{\tau=k\}}) + \mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_{A \cap \{\tau=\infty\}}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_\tau). \end{aligned}$$

□

## 4 Processus en temps continu

Le but de cette section est d'introduire les deux processus en temps continu les plus couramment utilisés :

- le processus de Wiener, dit mouvement brownien ;
- le processus de Poisson ;

sans trop rentrer dans la théorie.

Comme bien expliqué dans la préface du livre de Kingman (1993), il est plus intuitif de présenter certaines propriétés de ces processus dans un cadre plus général que le cadre temporel ; c'est à dire comme des fonctions aléatoires  $\tau \rightarrow \mathbb{R}$ , sans se restreindre à  $\tau = \mathbb{R}^+$  (espace des temps). C'est l'approche que nous suivrons.

### 4.1 Processus ponctuels, processus de Poisson

#### 4.1.1 Préliminaires : loi de Poisson

On commence par rappeler la définition d'une loi de Poisson.

**Définition 4.1.1.** La *loi de Poisson* de paramètre  $\mu > 0$  est la loi d'une variable aléatoire  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telle que :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Il sera utile par la suite d'étendre cette définition :

- au cas  $\mu = 0$  :  $X = 0$  p.s. ;
- au cas  $\mu = +\infty$  :  $X = +\infty$  p.s.

La fonction génératrice d'une loi de Poisson se calcule aisément :

$$G(x) := \mathbb{E}[x^X] = \exp\{\mu(x-1)\}, \quad |x| \leq 1,$$

et permet d'obtenir tous ces moments par dérivation :  $G'(1) = \mathbb{E}[X]$ ,  $G''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)]$ , etc. Notamment :

$$\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = \mu.$$

Une propriété fondamentale des lois de Poisson est leur additivité, ou plus généralement leur **sigma-additivité**.

**Proposition 4.1.1.** Soient  $X_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$  des variables indépendantes, avec  $\mu_i \in [0, \infty]$ . Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\right).$$

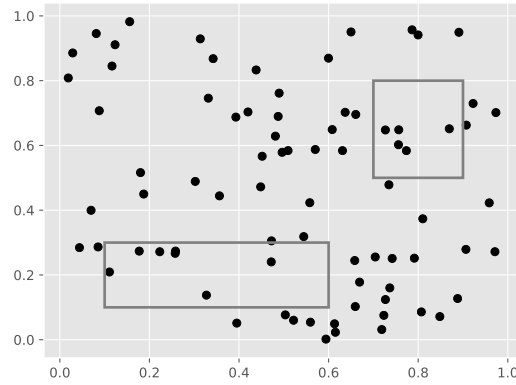


FIGURE 4.1 – Réalisation d’un processus ponctuel sur  $[0, 1]^2$  ; pour un processus de Poisson, les nombres de points qui tombent dans chacun des deux rectangles sont indépendants.

*Démonstration.* Dès qu’un des  $\mu_i = +\infty$ , le résultat devient évident. On suppose tous les  $\mu_i < +\infty$ .

On montre aisément que cette propriété est vraie pour une somme finie :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right).$$

(Preuve par récurrence, et pour  $n = 2$ , simple calcul de probabilité discrète, laissé à votre soin. Ou alors passer par la fonction génératrice.) Il suffit ensuite d’invoquer le théorème de convergence monotone pour conclure. Ce raisonnement est valable que la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$  converge ou pas. (Exercice : vérifier les détails du raisonnement dans ces deux cas!).  $\square$

#### 4.1.2 Les processus de Poisson comme processus ponctuels

On appelle **processus ponctuel** (*point process*) dans un espace  $E$  une variable aléatoire  $\Pi$  dont les réalisations sont des ensembles, au plus dénombrables, de points dans  $E$  ; la figure 4.1 représente une telle réalisation pour  $E = [0, 1]^2$ .

Ces processus ponctuels sont utilisés par exemple en statistique spatiale, pour modéliser la positions de tremblements de terre, d’arbres, d’étoiles, etc. Un exemple historique est l’étude du caractère « aléatoire » des impacts de missiles V1 sur la ville de Londres à la fin de la seconde guerre mondiale ; cf. Shaw and Shaw (2019).

Il est commode de représenter un tel processus via le **processus de comptage** (*counting process*) associé. Soit l’application (aléatoire) qui à un ensemble  $A \subset E$  associe le nombre de points de  $\Pi$  qui tombe dans  $A$  :

$$N(A) = \# \{ \Pi \cap A \}.$$

**Remarque 4.1.1.** *Techniquement, il faut donc imposer que pour des ensembles  $A$  « intéressants », la variable aléatoire  $N(A)$  soit bien définie, i.e. l'application  $\omega \rightarrow \#\{\Pi(\omega) \cap A\}$  soit bien mesurable. Les ensembles « intéressants » seront généralement les éléments d'une tribu associée à  $E$ , comme cela va apparaître clairement par la suite.*

Les processus de Poisson sont des processus ponctuels vérifiant les propriétés suivantes.

**Définition 4.1.2.** *Soit  $(E, \mathcal{E})$  un ensemble mesurable, et  $\mu$  une mesure associée à cet ensemble. On appelle **processus de Poisson de mesure moyenne**  $\mu$  un processus ponctuel  $\Pi$  tel que le processus de comptage associé,  $N(A) = \#\{\Pi \cap A\}$ , vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *Pour  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$  disjoints, les variables  $N(A_i)$  sont indépendantes.*
2. *Pour  $A \in \mathcal{E}$ ,  $N(A) \sim \text{Poisson}(\mu(A))$ .*

La première propriété est la plus fondamentale : un processus de Poisson modélise une notion d'« indépendance locale » : la position d'un point n'a pas d'influence sur la position des autres ; voir à nouveau la figure 4.1. Cette propriété est vraisemblable dans beaucoup d'applications. Il est aussi possible de construire des processus ponctuels répulsifs (les points se repoussent), ou attractifs (les points s'agglutinent) mais ces processus sont nettement plus compliqués et ne seront pas abordés dans le cours.

Dans la définition, la mesure  $\mu$  sert bien de « moyenne » dans le sens où

$$\mathbb{E}[N(A)] = \mu(A).$$

Si  $\mu(E) < +\infty$  (resp.  $= \infty$ ),  $\Pi$  est p.s. un ensemble fini (resp. infini dénombrable).

Dans beaucoup d'applications,  $E \subset \mathbb{R}^d$ , et  $\mu$  est dominée par la mesure de Lebesgue :  $\mu(dx) = \lambda(x)dx$ , où la fonction  $\lambda$  est dite **fonction d'intensité**. Quand  $\lambda$  est constante, on dit que le processus est **homogène**. Pour une mesure  $\mu$  plus générale, il n'est pas forcément possible de construire un processus de Poisson de mesure moyenne  $\mu$ . En particulier, si  $\mu$  est atomique (i.e.  $\mu(\{x\}) > 0$  pour un certain  $x \in E$ ), l'existence d'un tel processus entraînerait la contradiction suivante :  $N(\{x\}) \leq 1$  (par définition), et  $N(\{x\}) \sim \text{Poisson}(c)$  pour une certaine constante  $c > 0$ . Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur  $\mu$  pour l'existence d'un processus de Poisson.

**Théorème 4.1.2. (Existence)** *Soit  $\mu$  une mesure sigma-finie non-atomique sur  $(E, \mathcal{E})$ . Alors il existe un processus de Poisson de mesure moyenne  $\mu$ .*

*Démonstration.* On commence par le cas où  $\mu$  est une mesure finie,  $\mu(E) < \infty$ . On pose  $\mu_p = \mu/\mu(E)$  ; c'est une mesure de probabilité.

On se donne un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sur lequel on peut construire les variables aléatoires suivantes :  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables IID de loi  $\mu_p$ , et  $N$  une variable indépendante des  $X_i$ , de loi  $\text{Poisson}(\mu(E))$ . On pose alors :

$$\Pi = \{X_1, \dots, X_N\}.$$

#### 4 Processus en temps continu

Montrons que  $\Pi$  est bien un processus de Poisson. Pour  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ , soit  $A_0$  le complémentaire de  $\cup_{i=1}^k A_i$ . Conditionnellement à  $N = n$ , le vecteur des  $N(A_i)$  suit une loi multinomiale :

$$\mathbb{P}(N(A_0) = n_0, \dots, N(A_k) = n_k | N = n) = \frac{n!}{\prod_{i=0}^k n_i!} \prod_{i=0}^k \left\{ \frac{\mu(A_i)}{\mu(E)} \right\}^{n_i}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(A_0) = n_0, \dots, N(A_k) = n_k) &= \left\{ e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^n}{n!} \right\} \frac{n!}{\prod_{i=0}^k n_i!} \prod_{i=0}^k \left\{ \frac{\mu(A_i)}{\mu(E)} \right\}^{n_i} \\ &= \prod_{i=0}^k \frac{e^{-\mu(A_i)} \mu(A_i)^{n_i}}{n_i!}. \end{aligned}$$

Les  $N(A_i)$  sont bien indépendants et de loi Poisson  $(\mu(A_i))$ .

Dans le cas sigma-fini,  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ , avec  $\mu_i(E) < \infty$ . Soit

$$\Pi = \cup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$$

où  $\Pi_i$  est un processus de Poisson de mesure moyenne  $\mu_i$ . On invoque le théorème (admis) de superposition, qui dit que  $\Pi$  suit alors un processus de Poisson de mesure  $\mu$ .

Noter que ce théorème de superposition est à première vue un corollaire direct de la sigma-additivité des lois de Poisson : si  $N_i(A) = \# \{ \Pi_i \cap A \} \sim \text{Poisson}(\mu_i(A))$ , alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i(A) \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A)).$$

Mais, pour que cette somme soit bien le cardinal de  $\Pi \cap A$ , il faut s'assurer que les ensembles  $\Pi_i \cap A$  sont bien disjoints p.s. C'est vrai pour  $A$  tel que  $\mu(A) < \infty$  mais non trivial, voir les pages 14 à 17 du livre de Kingman (1993).  $\square$

La construction explicite ci-dessus (dans le cas  $\mu$  finie) donne une nouvelle interprétation d'un processus de Poisson : chaque réalisation est un « jeu de données » (une collection de variables IID) dont la taille est aléatoire.

##### 4.1.3 Cas $E = \mathbb{R}^+$

On s'intéresse désormais au cas  $E = \mathbb{R}^+$ . Il est alors possible d'ordonner les points de  $\Pi$  ; soit  $0 < X_1 < X_2 < \dots$ . Ces variables sont interprétées comme des dates d'événements (par exemple de tremblements de terre). On pose

$$N_t := N([0, t]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1} \{X_i \leq t\}.$$

C'est ce processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  que l'on appelle communément processus de Poisson. Ses propriétés principales se déduisent immédiatement de sa définition et de celle des processus de Poisson généraux.



**Proposition 4.1.3.** *La trajectoire  $t \rightarrow N_t$  est p.s. constante par morceaux, càdlàg (continue à droite, limitée à gauche) et croissante. Le processus  $(N_t)$  est à accroissements indépendants : i.e. les variables  $N_s$  et  $N_t - N_s$  sont indépendants pour  $0 \leq s \leq t$ .*

Le processus  $(N_t)$  nous donne un premier exemple de processus Markovien en temps continu : pour  $0 \leq s \leq t$ ,  $N_t = N_s + (N_t - N_s)$ , où l'accroissement est indépendant de la trajectoire sur  $[0, s]$  ; donc  $N_t$  sachant cette même trajectoire ne dépend que de  $N_s$ . Nous formaliserons la notion de processus Markovien en temps continu à la fin du chapitre. De la même façon, on se doute que  $M_t = N_t - \mu([0, t])$  définit une martingale en temps continu, puisque  $\mathbb{E}[M_t | M_s] = M_s$ .

On s'intéresse désormais au cas homogène :  $\mu([0, t]) = \lambda t$ , pour un certain  $\lambda > 0$ . Dans ce cas, les lois des dates  $X_i$  des événements, et des durées d'attente entre ces événements,  $Y_i := X_i - X_{i-1}$  ( $i \geq 2$ ,  $Y_1 := X_1$ ) sont particulièrement simples.

**Proposition 4.1.4.** *Les variables  $Y_i$  sont IID (indépendantes et identiquement distribuées) de loi  $\text{Exp}(\lambda)$ . Les variables  $X_i$  sont de loi  $\text{Gamma}(i, \lambda)$ .*

*Démonstration.* Pour  $X_1 = Y_1$ , on a :

$$\mathbb{P}(X_1 > t) = P(N_t = 0) = \exp(-\lambda t)$$

puisque  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ . Ceci est bien la fonction de survie d'une loi exponentielle. Plus généralement pour  $X_i$  :

$$S_i(t) := \mathbb{P}(X_i > t) = P(N_t \leq i-1) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

et on obtient la densité de  $X_i$  en dérivant (par rapport à  $t$ ) :

$$\begin{aligned} -S'_i(t) &= -\exp(-\lambda t) \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right\} \\ &= \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} \exp(-\lambda t) \end{aligned}$$

qui est bien la densité d'une loi  $\text{Gamma}(i, \lambda)$ .

Pour montrer que  $Y_1$  et  $Y_2$  sont IID, de loi exponentielle, on peut partir de (pour  $0 \leq s \leq t$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 > s, X_2 > t) &= \mathbb{P}(N_s = 0, N_t \leq 1) \\ &= \mathbb{P}(N_s = 0) \mathbb{P}(N_t - N_s \leq 1) \end{aligned}$$

puis dériver (en  $s$  et en  $t$ ) pour obtenir la densité jointe de  $(X_1, X_2)$ , et en déduire la densité jointe de  $(Y_1, Y_2)$ . Mais c'est rapidement laborieux pour  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ .

Le résultat devient évident si l'on admet que le processus  $N'_t = N_{t-X_1} - 1$  (qui compte le nombre d'événements à partir du temps  $X_1$ ) est indépendant de  $X_1$ , et de même

loi que  $(N_t)$ ; alors  $Y_2 = X_2 - X_1$  a forcément la même loi que  $X_1$ . Cette propriété admise est essentiellement la propriété de Markov forte en temps continu ; pour une preuve relativement simple (mais spécifique au processus de Poisson), voir par exemple les pages 39 et 40 de Kingman (1993).  $\square$

**Remarque 4.1.2.** *Indirectement, on vient de redémontrer que la somme de variables IID de loi exponentielle suit une loi Gamma. A titre d'exercice, démontrer la réciproque de la Proposition 4.1.4 : un processus ponctuel défini à partir de durées inter-événements IID, de loi exponentielle est un processus de Poisson.*

**Remarque 4.1.3.** *L'apparition de lois exponentielles n'est pas très surprenante. On rappelle qu'une loi exponentielle est dite sans mémoire, car sa fonction de hasard (la densité de  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  conditionnellement à  $Y \geq y$ ) est constante. En d'autres termes : la probabilité instantanée d'occurrence d'un événement est constante, ce qui est bien le comportement attendu pour un processus de Poisson.*

La proposition ci-dessus est liée au « paradoxe » dit du temps d'attente : Pour une ligne de bus « poissonnienne », le temps de passage entre deux bus suit une loi  $\text{Exp}(\lambda)$ , d'espérance  $1/\lambda$ . En revanche, si j'arrive à une date arbitraire  $t > 0$  à l'arrêt de bus, la durée entre le passage du bus précédent et le bus suivant est la somme de deux variables exponentielles, soit une loi  $\text{Gamma}(2, \lambda)$  d'espérance  $2/\lambda$ . En d'autres termes, si un bus passe toutes les dix minutes (en moyenne), mon temps d'attente moyen est aussi de 10 minutes.

#### 4.1.4 Généralisation aux processus Markovien en temps discret

Pour un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+h} = n+1 | N_t = n) &= \lambda h + o(h), \\ \mathbb{P}(N_{t+h} = n | N_t = n) &= 1 - \lambda h + o(h),\end{aligned}$$

et les autres valeurs  $n+2, \dots$  ont une probabilité en  $o(h)$ . En d'autres termes, d'un point de vue « infinitésimal »,  $(N_t)$  ressemble à une chaîne de Markov dont les seules transitions possibles sont  $n \rightarrow n$ , et  $n \rightarrow n+1$ . Une généralisation naturelle est de considérer un processus  $(X_t)$ , à valeurs dans  $\mathcal{X} \subset \mathbb{Z}$ , permettant d'autres transitions : pour  $i, j \in \mathcal{X}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) &= A(i, j)h + o(h), \quad i \neq j, \\ \mathbb{P}(X_{t+h} = i | X_t = i) &= 1 - \left\{ \sum_{j \neq i} A(i, j) \right\} h + o(h).\end{aligned}$$

On pose  $A(i, i) = -\sum_{j \neq i} A(i, j)$  : chaque ligne de la matrice  $A$  somme à 0. (Comme pour  $P$  dans les chaînes de Markov,  $A$  est bien une matrice si l'espace d'état  $\mathcal{X}$  est fini ; sinon c'est juste une application  $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .)

Dans le cas particulier où  $A(i, j) > 0$  si et seulement si  $|i-j| \leq 1$ , on parle de **processus de vie et de mort**. Le processus de Poisson est un cas particulier (processus de vie pur).

On admettra les propriétés suivantes, qui semblent intuitives, par analogie avec les propriétés correspondantes du processus de Poisson :

1. de tels processus existent.
2. Le temps passé dans un état  $i$  suit une loi exponentielle  $\text{Exp}\left(\sum_{j \neq i} A(i, j)\right)$ . Une fois ce temps écoulé, on choisit un nouvel état  $j \neq i$ , avec probabilité  $A(i, j) / \sum_{k \neq i} A(i, k)$ .
3. Si  $(X_t)$  admet une loi invariante, alors  $\pi A = 0$ .
4. La loi marginale de  $(X_t)$  est donnée par le vecteur  $p(t) = p(0) \exp(At)$ .

Pour justifier (informellement) la propriété 4, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+h} = j) &= \sum_i \mathbb{P}(X_t = i) \mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i), \\ &= \mathbb{P}(X_t = j) \{1 + A(i, i)h\} + \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(X_t = i) A(i, j)h + o(h), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = j) - \mathbb{P}(X_t = j)}{h} = \sum_i \mathbb{P}(X_t = i) A(i, j)$$

et passer à la limite  $h \rightarrow 0$  :

$$p'(t) = p(t)A$$

où  $p(t)$  est le vecteur des  $\mathbb{P}(X_t = i)$ . Cette équation justifie aussi indirectement la propriété 3 : dans le régime stationnaire,  $p(t) = \pi$ ,  $p'(t) = 0$ , donc  $\pi A = 0$ .

## 4.2 Mouvement brownien

### 4.2.1 Processus gaussiens

On appelle **processus gaussien** une variable aléatoire  $f$  à valeurs dans un espace de fonctions  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  (typiquement  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ ) telle que, pour tout  $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{X}$ ,  $d \geq 1$ , le vecteur

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{pmatrix}$$

suit une loi normale (multivariée de dimension  $d$ ).

La théorie des processus gaussiens (notamment leur existence, la nature de leur support, etc) dépasse très largement le cadre de ce cours. On admettra donc que de tels processus existent, et qu'ils sont caractérisés entièrement par leurs « moments d'ordre deux » définis comme suit :

- La fonction moyenne  $m : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : m(x) := \mathbb{E}(f(x))$ .
- La fonction de covariance,  $C : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui définit  $C(x_1, x_2) := \text{Cov}(f(x_1), f(x_2))$ .

La fonction de covariance  $C$  est souvent appelé « noyau » (un terme polysémique en statistiques...). Cette fonction doit être choisie de manière à ce que, pour tous  $x_1, \dots, x_d$ , la matrice de covariance  $(C(x_i, x_j))_{i,j=1,\dots,d}$  soit bien définie positive. Un noyau couramment utilisé est le noyau dit Gaussien (ou *squared exponential*) :

$$C(x_1, x_2) = c \exp \left\{ -\frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\ell^2} \right\}.$$

Les réalisations d'un processus avec un tel noyau sont très régulières (infiniment dérivables). Ces processus sont beaucoup utilisés dans différents domaines du machine learning, notamment en optimisation bayésienne et en apprentissage par renforcement.

#### 4.2.2 Mouvement brownien

Le **mouvement brownien** (ou **processus de Wiener**) est un processus en temps continu, noté classiquement  $(W_t)_{t \geq 0}$  ou simplement  $(W_t)$ . Vu comme une fonction  $t \rightarrow W_t$ , c'est un processus gaussien tel que :

- $W_0 = 0$  p.s.
- la fonction moyenne est nulle :  $\mathbb{E}[W_t] = 0$ .
- la fonction de covariance est :  $C(s, t) := \text{Cov}(W_s, W_t) = \sigma^2 s \wedge t$ , pour  $s, t \geq 0$  et un certain  $\sigma^2 > 0$ .

On déduit de la dernière propriété que ce processus est à accroissements indépendants. En effet, pour  $0 \leq s \leq t$  :

$$\text{Cov}(W_s, W_t - W_s) = C(s, t) - C(s, s) = 0.$$

donc  $W_s$  et  $W_t - W_s$  sont non corrélés et donc indépendants (en tant que composantes d'un vecteur gaussien).

Comme pour le processus de Poisson, on peut utiliser cette propriété d'accroissements indépendants pour en déduire (informellement) que

- $(W_t)$  est Markovien :  $W_t = W_s + (W_t - W_s)$ , donc  $W_t$  ne dépend de  $(W_u)_{u \in [0, s]}$  que via  $W_s$ .
- $(W_t)$  est une martingale en temps continu :  $\mathbb{E}(W_t | W_s) = W_s$  pour  $s \leq t$ .

On admet par ailleurs la propriété suivante.

**Proposition 4.2.1.** *La trajectoire d'un mouvement brownien est p.s. une fonction continue, non-dérivable.*

La quantité suivante :

$$W_{t+h} - W_t \sim N(0, \sigma^2 h)$$

tend bien vers 0 quand  $h \rightarrow 0$  (continuité), mais à un taux  $O(h^{1/2})$  trop lent pour en faire une fonction dérivable. On peut montrer plus précisément que la trajectoire est  $\alpha$ -Hölder pour tout  $\alpha < 1/2$  :

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h^\alpha} \sim N(0, \sigma^2 h^{1-2\alpha})$$

(Une fonction  $\alpha$ -Hölder  $f$  est telle que  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$  ; pour  $\alpha = 1$ ,  $f$  est Lipschitz et donc dérivable.)

### 4.2.3 Processus markovien en temps continu

On conclut ce chapitre par un aperçu de la théorie des processus Markoviens (homogènes) en temps continu.

En temps discret, une chaîne de Markov homogène est définie via un noyau  $P(x, dy)$ , qui donne la loi de  $X_{t+1}$  sachant  $X_t$ . La loi de  $X_{t+k}$  sachant  $X_t$  est alors donnée par le noyau  $P^k(x, dy)$ . On a notamment :

$$P^{k+l}(x, dz) = \int_y P^k(x, dy) P^l(y, dz)$$

En temps continu, on est obligé de se donner une *collection* de noyaux de transition,  $(P_h)_{h \geq 0}$ , qui définit la loi de  $X_{t+h}$  sachant  $X_t$ . Par analogie avec le temps discret, on doit imposer la contrainte suivante :

$$P_{t+h}(x, dz) = \int P_t(x, dy) P_h(y, dz).$$

Une collection de noyau de transition est appelé **semi-groupe Markovien**.

On peut remarquer notamment que le semi-groupe markovien :

1. d'un processus de Weiner (de volatilité  $\sigma^2 > 0$ ) est tel que  $P_h(x, dy)$  est la loi  $N(x, \sigma^2 h)$  ;
2. d'un processus de Poisson (d'intensité constante  $\lambda > 0$ ) est tel que  $P_h(x, dy)$  est la loi Poisson( $\lambda h$ ) translatée de  $x$  vers la droite.

Cependant, pour les processus à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  (comme le processus de Poisson), il est plus commode de caractériser leur comportement via la notion de générateur infinitésimal, comme expliqué en Section 4.1.4.



# Bibliographie

- Baldi, P., Mazliak, L., and Priouret, P. (2002). *Martingales and Markov chains*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. Solved exercises and elements of theory, Translated from the 1998 French original.
- Brémaud, P. (1999). *Markov chains*, volume 31 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York. Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues.
- Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson processes*, volume 3 of *Oxford Studies in Probability*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. Oxford Science Publications.
- Lawler, G. F. (2006). *Introduction to stochastic processes*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second edition.
- Meyn, S. and Tweedie, R. L. (2009). *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition. With a prologue by Peter W. Glynn.
- Shaw, L. P. and Shaw, L. F. (2019). The flying bomb and the actuary. *Significance*, 16(5) :12–17.