



Data Science Program

Statistics Sessions -5





Session - 5 Content

Content

- Probability Olasılık İhtimaliyet
- Permütasyon Kombinasyon
- Koşullu olasılık (Conditional Probability)
- Bayes teoremi













Olasılık – İhtimaliyet Prensibi

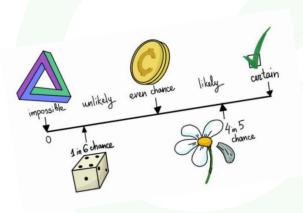


What is Probability



Olasılık Nedir?

- Olasılık, 0 ile 1 arasında bir sayı olarak ifade edilen, belirli bir olayın gerçekleşme olasılığını hesaplayan bir istatistik dalıdır
- Rastgele Değişken
- Neden Probabilistik yaklaşım?
- Örneklem Uzayı





What is Probability



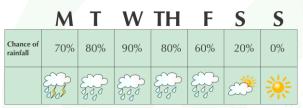
Olasılık Nedir?

- Günlük hayatta olasılık
- Tahmin nasıl yapılır
- Rastgele Olay

A olayının gerçekleşme ihtimali:

P (A) = Olaydaki sonuç sayısı (n) / Toplam Sonuçlar sayısı (N)

Örnek, iskambil destesinde sinek olma ihtimali P (Sinek) = 13/52 = 0,25







Probability and Statistical Experiment

Statistical Experiment

Eğer

- Bir deney birden fazla sonuç içeriyorsa
- Bu sonuçlar önceden tahmin edilebilir nitelikte ise
- Sonuçlar şansa dayalı ise burada istatistiksel deney şartları sağlanır.

Eğer 3 muhtemel sonuç var ise; A, B, C gibi... O zaman P(A) +P(B) + P(C)=1



Bir statistical experiment de olasılıklar toplamı 1'e eşit olur. Örneğin yazı – tura atma olayı da bu şartları sağlar.



Probability Computations



Olasılık Hesaplamaları

Örnek:

Bir torbada 5 kırmızı, 7 siyah ve 3 beyaz bilye bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele çekilecek bir bilyenin kırmızı gelme olasılığı

nedir?

Probability of a successful outcome (S)

$$P(S) = \frac{Number\ of\ successes}{Total\ number\ of\ outcomes} = \frac{r}{n}$$



P (A) = Olaydaki sonuç sayısı (n) / Toplam Sonuçlar sayısı (N)

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{5}{5+7+3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$



Probability Computations



Olasılık Hesaplamaları - 2

Örnek -2:

Bir önceki örnekteki bilgileri kullanarak;

- a) Herhangi bir renkte bilye gelme olasılığını hesaplayınız.
- b) Mavi renkte bilye gelme olasılığını hesaplayınız.
- c) Siyah renkte bilye gelme olasılığını hesaplayınız

a) P(bilye) =
$$\frac{5+7+3}{5+7+3} = \frac{15}{15} = 1$$

torbadan her durumda bir bilye çekileceğinden bu olay ortaya çıkması kesin bir olaydır

b)
$$P(mavi) = \frac{0}{5+7+3} = \frac{0}{15} = 0$$

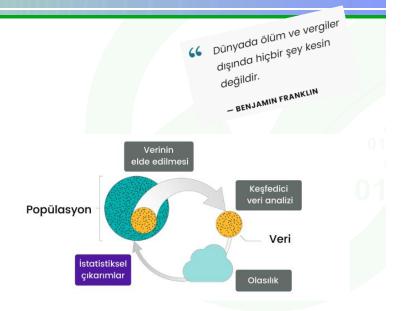
torbada hiç mavi bilye olmadığından, bu olay ortaya çıkması imkansız olan bir olaydır

c)
$$P(siyah) = \frac{7}{5+7+3} = \frac{7}{15}$$



Olasılık Özet ..

- Belirsizlik kavramı
- Data Science için Olasılık neden gerekli ?





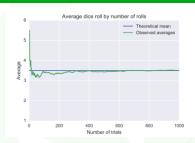
Law of Large Estimates

Büyük Sayılar Kanunu

- Bir deney tekrar tekrar tekrarlanırken, bir olayın ampirik olasılığı olayın teorik (gerçek) olasılığına yaklaşır
- Law of large numbers olarak da görülebilir

Relative frequency:

RF = Number of times event occurs / Number of trials



Number of flips	Relative frequency	Percent
10	0.4 to 0.6	66
100	0.49 to 0.51	92
1,000	0.499 to 0.501	97
10,000	0.4999 to 0.5001	99

Q20. What Is the Law of Large Numbers?

It is a theorem that describes the result of performing the same experiment a large number of times. This theorem forms the basis of **frequency-style** thinking. It says that the sample means, the sample variance and the sample standard deviation converge to what they are trying to estimate.





https://www.youtube.com/watch?v=XHmIRCw5CLY

https://www.youtube.com/watch?v=ynjHKBCiGXY

- Understanding Probability - Probability
- Probability, Sample Spaces, and the Complement Rule (6.1)

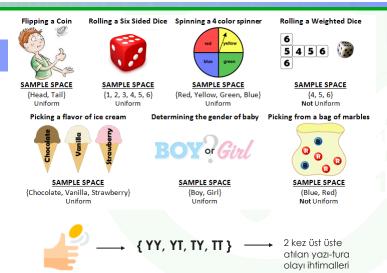




Sample Space

Örnek Uzayı ve Küme

- İlgilenen rastgele olayın alabileceği tüm değerleri içeren uzaydır
- küme teorisi, rastgele olayların tanımlanması kolaylaştıran bir yaklaşımdır





Sample Space - Event

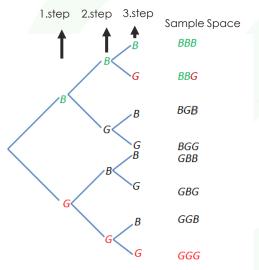
Örnek değerlendirme

- 3 çocuklu bir ailede sırayla 1.,
 2. ve 3. çocukların boy-girl olma ihtimallerini gösteren sample space
- Bu şekil Tree diagram olarak geçer
- Buradaki her output bir Event olur

Event'lar (Olaylar):

 $A = T\ddot{u}m \ cocuklar \ boy = \{ BBB \}$

B = En az ikisi Girl olanlar = { BGG, GBG, GGB, GGG }

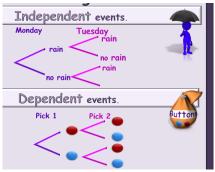




Independent - Dependent Event

Bağımlı / Bağımsız Olay

 Herhangi 2 olay Independent ve Dependent olaylar olarak sınıflandırılır.



A olayının (event) gerçekleşme ihtimali

P (A) = A olayına ait küme içindeki olay sayısı / Kümedeki Toplam olay sayısı

Independent:

Birininin olasılığı diğerini etkilemez

Dependent:

Bir olayın meydana gelmesi diğer bir olayı etkiliyor



Probability of 2 Independent Event

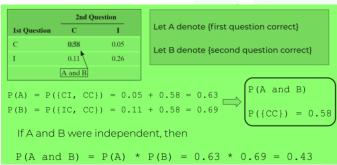
2 Bağımsız olayın Gerçekleşme İhtimali

 2 olay bağımsız ise, her ikisinin de meydana gelme ihtimali bireysel olayların ihtimallerinin

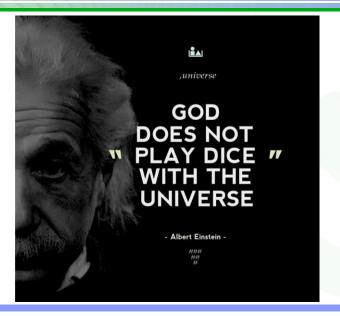
 \longrightarrow

 $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$

çarpımı olur.









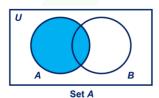
11

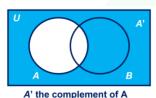


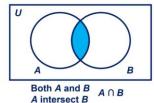
Intersection, Union, Complement

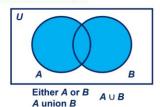
Birleşim, Kesişim, Tümleyen Kümeleri

- Union: "AuB" ile gösterilir ve A ve B kümesinin tüm öğelerini içeren kümedir. "veya" kullanılarak birleştirilmesine karşılık gelir.
- Intersection: ANB ile sembolize edilir, A ve B kümesinde ortak olan tüm öğeleri içeren kümedir. "ve" kullanılarak birleştirilmesine karşılık gelir.
- Comploments: Bir A kümesinin tümleyeni A' ile gösterilir ve evrensel kümedeki A'da olmayan tüm öğelerin kümesidir









Intersection, Union, Complement

Union Örnek

Set A = {1, 2, 3} Set B = {3, 6, 8} AUB = {1, 2, 3, 6, 8}

Intersection Örnek

Set A = $\{1, 2, 3\}$ Set B = $\{2, 4, 5\}$ A \cap B = $\{2\}$

Comploment Örnek

Set U =
{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
Set A = {1, 2, 3}
Set B = {3, 4, 5}
Set A' =
{4,5,6,7,8,9,10}



Complement

Comploment – Tümleyen Örnek

E olayının tümleyeni, E olayına dahil edilmeyen örneklem uzayındaki tüm sonuçların kümesidir (E' ile gösterilir).

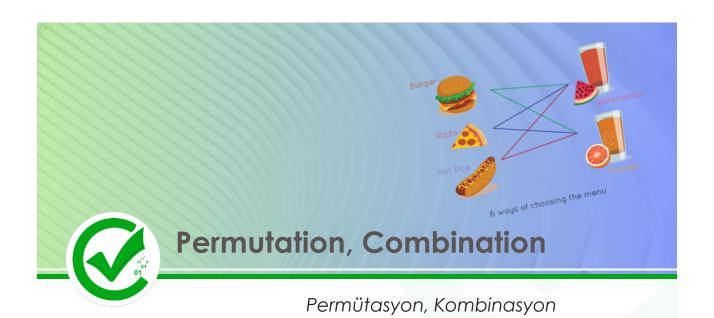
$$P(E) + P(E') = 1$$
 $P(E) = 1 - P(E')$ $P(E') = 1 - P(E)$

Örnek:

Bir sepetin içinde 5 kırmızı pul, 4 mavi pul ve 6 beyaz pul olsun. Rasgele seçilen bir pulun mavi olmaması olasılığını bulun.

P (mavi pul seçilmesi) = 4/15 = 0.267

P (mavi olmayan pul seçilmesi) = 1 - (4/15) = 0.733





Permutation

Permütasyon

- Permütasyon, nesnelerin belirli bir şekilde veya sırayla düzenlenmesidir.
- bir kümedeki öğelerin sırasını göz önünde bulundurarak düzenlenebileceği tüm olası yollar olarak tanımlanır

Order	1st	2nd
1	blue	pink
2	blue	green
3	blue	white
4	pink	blue
5	pink	green
6	pink	white
7	green	blue
8	green	pink
9	green	white
10	white	blue
11	white	pink
12	white	green



Permutation

Permütasyon

- n farklı nesnelerin farklı permütasyonlarının sayısı n! dir .
- İncelenen n bireyden her defasında r adedi alınarak, sıra gözetilmek kaydıyla, kaç farklı dizi oluşturulabileceği

Örnek

Bir ankette 7 soru varsa, olası tüm soru düzenlemelerini

karşılamak için kaç farklı ankete ihtiyaç vardır?

 $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ anket

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Örnek:

8 listeden 5 kitap okumak için gereklidir. Ne kadar farklı sıralama yapabilirsiniz?

$$_{n}P_{r} = {_{8}P_{5}} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4}} = 6720 \text{ yol}$$



Combination

Kombinasyon

- Kombinasyonlar neredeyse permütasyonlara benzer, ancak fark, elemanların sırasının önemli olmamasıdır.
- Kombinasyon, sıralamanın önemli olmadığında n gruptan r nesnenin seçilmesidir

Order	1 st	2 nd
1	blue	pink
2	blue	green
3	blue	white
4	pink	green
5	pink	white
6	green	white



Combination

Kombinasyon

 n gruptan seçilen r nesnesi kombinasyonlarının sayısı

Örnek:

10 profesörün bulunduğu bir gruptan seçilecek 3 kişilik jürinin istenen şahıslardan meydana gelme olasılığı nedir?

Cevap

3 pozisyon için yapılacak seçimde sıra gözetilmeyeceğinden (yani oluşturulan bir XYZ jürisinde heyetinde X jüri üyesi, Y jüri üyesi, Z jüri üyesi iken, YXZ jürisinde de Y jüri üyesi, X jüri üyesi, Z jüri üyesidir) kombinasyon formülü kullanılır

$$\binom{r}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
grup sayı
$$C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
Gruptan seçilen

$$10C3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120 \quad \text{farklı jüri oluşturulabilir.}$$

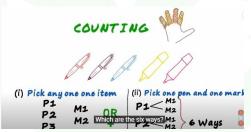


Hangisinde Order (Sıralama) önemlidir?



https://www.youtube.com/watch?v=0NAASclUm4k

 Permutations and Combinations | Counting | Don't Memorise





Conditional Probability

Koşullu Olasılık



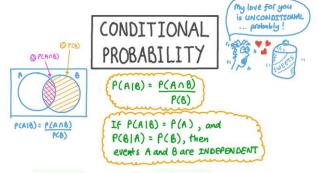
Conditional Probability

Koşullu Olasılık

- başka bir olayın gerçekleşmiş olması koşuluyla, meydana gelen bir olayın olasılığıdır
- P (A | B) → "B verildiğinde A nın olması olasılığı



'P(A) given B' diye ifade edilir.



Conditional Probability Formula

 $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)}$ Probability of A given B P(B)Probability of B



Conditional Probability

Koşullu Olasılık

· Örnek:

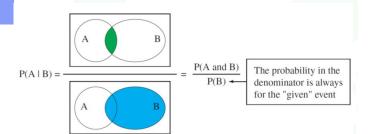
100 üniversite öğrencisine anket uygulanmış ve haftada kaç saat ders çalıştıkları sorulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki tablodadır. Bir öğrencinin, bir erkek olması şartıyla 10 saatten fazla ders çalışması olasılığını bulun. (Yandaki tabloya göre)

· Cevap:

Örneklem uzayı 49 erkek öğrenciden oluşmaktadır. Bunlardan 16'sı haftada 10 saatten fazla çalışarak geçiriyor

P (10 saatten fazla çalışma | erkek) = 16 / 49 = 0,327

Conditional Probability Video - StatQuest



	<5	5 -10	>10	Toplam
Erkek	11	22	16	49
Kadın	13	24	14	51
Toplam	24	46	30	100

Conditional Probability

Koşullu Olasılık

Örnek:

Bir okulun öğrencilerinden **%45'i** fizik, **%35'i matematik** derslerinden ve **%25'i hem fizik** hem de matematik derslerinden başarısızdır. Rasgele seçilen bir öğrencinin,

- a) Fizikten başarısız olduğu
 biliniyorsa, matematikten de
 başarısız olma olasılığını bulunuz
 b)Matematikten başarısız olduğu
- biliniyor ise, fizikten de başarısız olma olasılığını bulunuz

P (M) = 0,35 (Matematikten başarısız olanlar)
P (F) = 0,45 (Fizikten başarısız olanlar)
P (M N F) = 0,25 (Hem M hem F den başarısız olanlar)

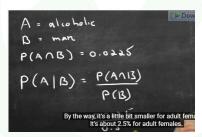
- a) $P(M \mid F) \rightarrow (P(M) \text{ given } F) \text{ bulunmalı..}$ $P(M \mid F) = P(M \cap F) / P(F)$ $P(M \mid F) = 0.25 / 0.45 = 0.55$
- b) P (F | M) \rightarrow (P(F) given M) bulunmalı.. P (F | M) = P (F \cap M) / P(M) P (F | M) = 0,25 / 0,35 = 0,71



https://www.youtube.com/watch?v= XAqXGJ7fu 0

https://www.youtube.com/watch?v=ibINrxJLvIM

- GCSE Mathematics: Conditional Probability
- Intro to Conditional Probability





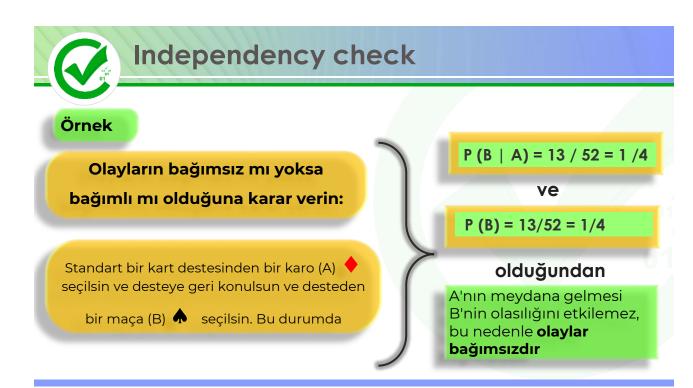
Independency check

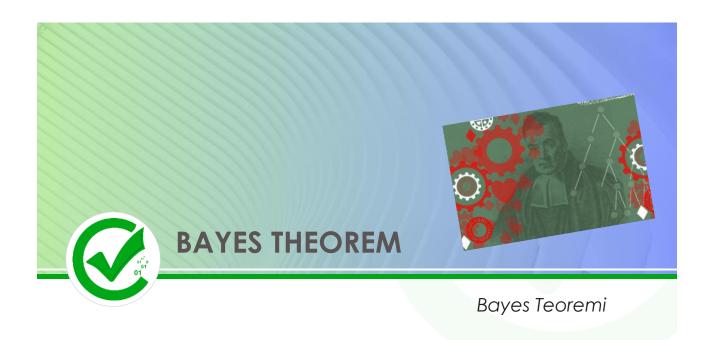
$$P(A | B) = P(A) ...?$$

$$P(B \mid A) = P(B) \dots$$
?

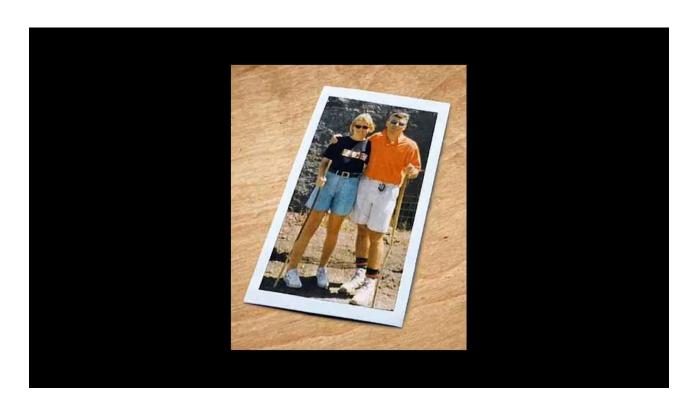
$$P (A \text{ and } B) = P(A) * P(B) ...?$$

Eğer bu 3 şarttan birisi sağlanıyor ise; A ve B olayları bağımsızdır denilebilir ve diğer 2 şart da gerçekleşir







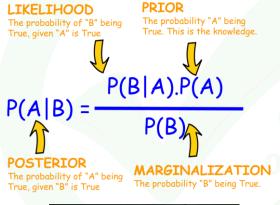


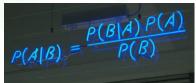


Bayes Theorem

Bayes Teoremi

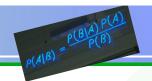
- olayla ilgili olabilecek koşulların ön bilgisine dayalı olarak bir olayın olasılığını tanımlar.
- Bayes Teorem, diğer belirli olasılıkları bildiğimizde, bir olasılık bulmanın yoludur.
- Bu teorem conditional probability den faydalanır.







Bayes Theorem



Bayes Teoremi Kurallar

- Sample Space (çözüm Uzayı yani tüm ihtimallerin içinde bulunduğu uzay) birbiriyle kesişmeyen ayrık olaylardan oluşur (A₁, A₂,...,A_k,....,A_n)
- Bu örnek uzayındaki P(B)>0 şartını sağlayan (ihtimali 0'dan büyük olan bir B olayı)) B olayı vardır
- Hedefimiz bir koşullu olasılık hesaplamaktır ($P(A_k \mid B)$
- Bazı olasılık değerlerini biliyoruz (her A_k için P (A_k ∩ B) değeri ile P (A_k) ve P(B | A_k)



Bayes Theorem

Bayes Teoremi Formülü

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) P(B \mid A)}{P(B)}$$

- P(A|B) = B olayı gerçekleştiğinde A olayının gerçekleşme olasılığı
- P(A) = A olayının gerçekleşme olasılığı
- P(B|A) = A olayı gerçekleştiğinde B olayının gerçekleşme olasılığı
- P(B) = B olayının gerçekleşme olasılığı

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) * P(A_i)}{\sum P(B | A_i) * P(A_i)}$$



Bayes Theorem Example - Basic



Verilenler

- Tehlikeli yangınlar çok az olur %1
- Duman genelde pikniklerde ve %10 seviyede görülür
- Yangınların %90 ında duman görülür

$$P(Yangin) = 0.01$$

P(Duman) = 0.10

P(Duman | Yangın) = 0,90

P (Yangın | Duman) → Bir duman görülünce ne sıklıkla yangın çıkmış olduğu (Duman verildi, yangın olasılığı)

P (Duman | Yangın) → Bir yangın olduğu zaman ne sıklıkla duman görüleceği



Bayes Theorem Example - Basic



Çözüm

- P(Yangın) = 0,01
- P(Duman) = 0,10
- P(Duman | Yangın) = 0,90

P(Yangın | Duman) = ??

 $P(Yangin \mid Duman) = [P(Yangin) * P(Duman \mid Yangin)]$



P(Duman)

 $P(Yangin \mid Duman) = (\%1 * \%90) / \%10 = \%9$

P (Yangın | Duman) → Bir duman görülünce ne sıklıkla yangın çıkmış olduğu (*Duman verildi, yangın olasılığı*)

P (Duman | Yangın) → Bir yangın olduğu zaman ne sıklıkla duman görüleceği

Duman gördüğümüzde %9 ihtimalle bu yangından dolayıdır (Genelde pikniklerden dolayı idi zaten)



Bayes Theorem Example - 2

Örnek

- Ali kaşındığını söylüyor. Kedi alerjisi için bir test var, ancak bu test her zaman doğru değil:
- Gerçekten alerjisi olan insanlar için, testin "Evet" sonucu vermesi %80 oranında.
- Alerjisi olmayan insanlar için, testin "Evet" sonucu vermesi %10 oranında ("false positive ").
- Nüfusun %1'inde alerji varsa ve test "Evet" çıkıyorsa, Ali'nin gerçekten alerji olma olasılığı nedir?

 P (A) → Alerji olma ihtimali → 0,01
 P (B) → Testin evet çıkması ihtimali - ?? (Hesaplayacağız)

P (B | A) → Alerji olması durumunda testin evet çıkma olasılığı = 0.80

P (A | B) → Testin evet çıkması durumunda alerji olasılığı = ?? (bizden istenen olasılık)



Bayes Theorem Example - 2

Çözüm

- Önce P(B) yi bulalım. Testin evet çıkma olasılığını alerjisi olan ve olmayanlar için yani tüm nüfus için hesaplayacağız. (42.slayttaki alttaki formülün paydasına göre hesaplıyoruz)
- P(B) = 0.01 * 0.80 + 0.99 * 0.10 = 0.107 bulunur.

P (A | B) = P(A)*P(B | A) / P(B) = 0.01*0.80 / 0.107 = 0.075

%7,5 olasılık bulunmuş olur.

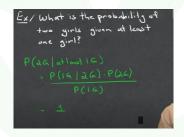
(Testin evet çıkması durumunda alerji olasılığı)



https://www.youtube.com/watch?v=XQoLVI31ZfQ

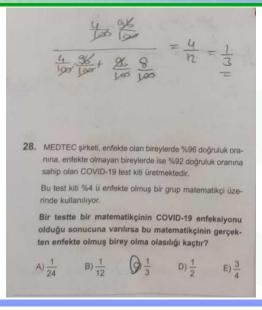
https://www.youtube.com/watch?v=9wCnvr7Xw4E

- Bayes' Theorem The Simplest Case
- ayes' Theorem, Clearly Explained!!!!





Güncel Bayes örneği – YKS Sorusu





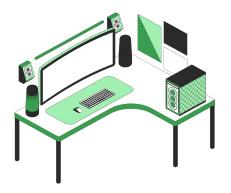
Final Question



Bu dersi tamamen anladım..







Do you have any questions?

Send it to us! We hope you learned something new.