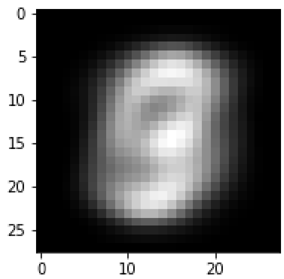
PHW1

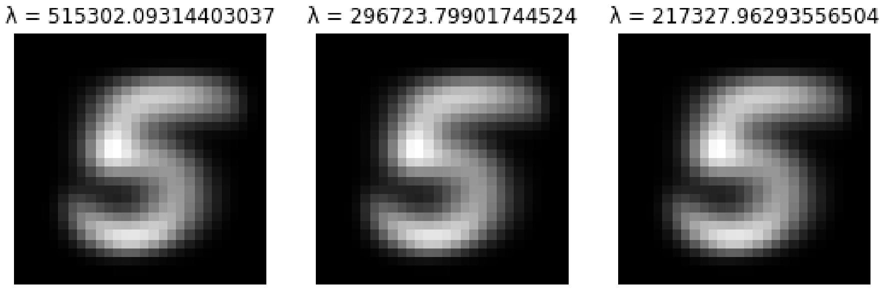
姓名: 吳添毅　　系所: 網媒所　　學號: R10944011

Part1: PCA

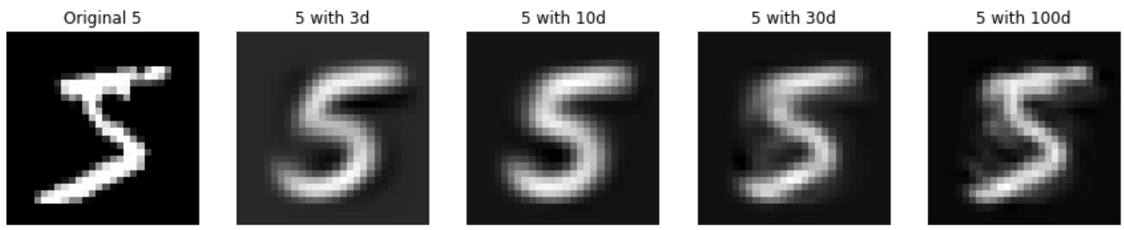
Q1.



Q2.

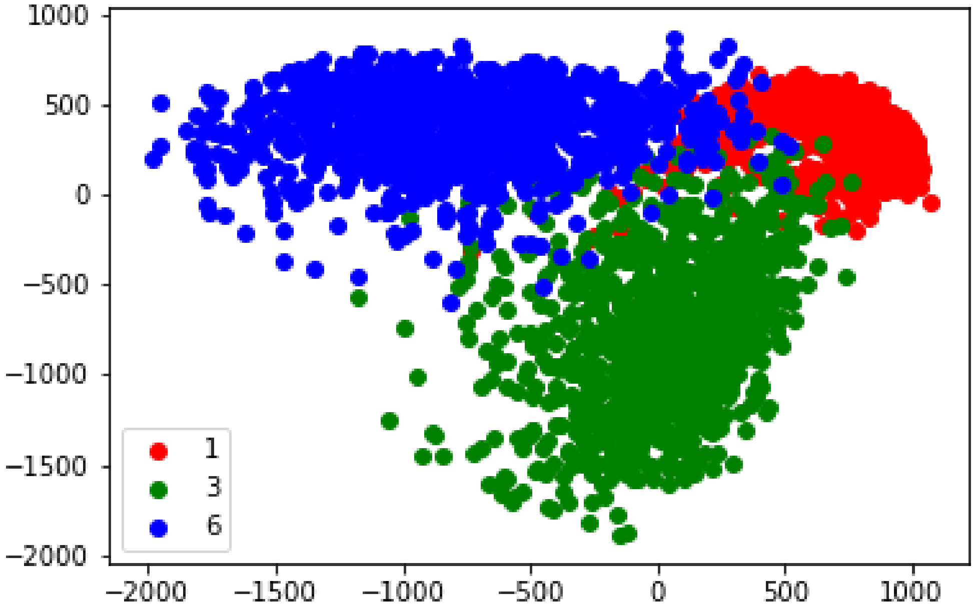


Q3.



使用 3、10 個 bases 所重建出來的 5 形狀跟原本的 5 還有蠻大的落差，但從 30 個 bases 後重建出來的結果基本上就和原圖的輪廓蠻像的了，到 100 個 bases 重建的結果基本跟原圖一樣，差了一些亮暗的地方而已。

Q4.



可以發現經過 PCA 降維投影到 2 維平面上的結果發現不同數字會各自形成一個 cluster。

Part2: OMP

Q5.

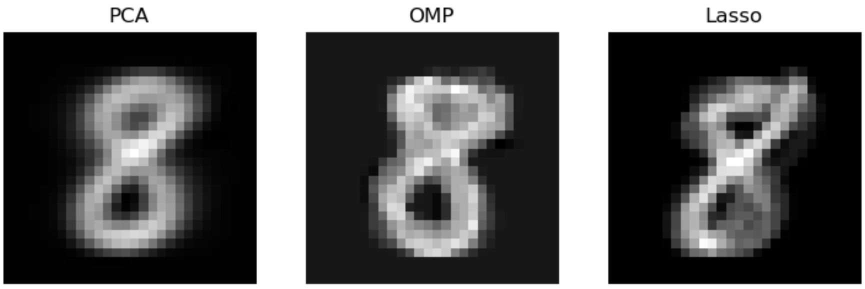
可以發現 Base1, 2, 3 都剛好是 3 這個數字，可以得知說其實 Base 的圖若是原本就跟原圖 ”3” 很接近的話就越有可能當 base。

Q6.

Sparsity 為 5 的時候雖然已經有 8 的形狀出現了，但還有很多雜訊以及背景不夠黑，但可以看到若是增加 sparsity(不為 0) 數值的話，可以發現雜訊會慢慢減少。

Part3.

Q7.



上圖為 1. 2. 3. 結果。其中:

PCA 使用 5 個 bases (L2 norm=2168.0160…)、

OMP sparsity 為 5 (L2 norm=905.2425…)、

Lasso 使用預設參數且使用 coefficients 最高的 5 個 bases (L2 norm=1744.7328…)。

4. 其實調整參數並且 plot 出來其實肉眼看不出什麼差距，頂多原本會出現 ConvergenceWarning， max_iter 調高一點就不會出現了。 L2 norm 出現 3.7795…(alpha=0.15, max_iter=10000)，而且跑很久， alpha 值越高代表 penalty 越高，越難收斂，alpha=1 時最難收斂，max_iter=50000 還無法收斂(L2 norm=18.9240…)，可以發現如果沒收斂 L2 norm 還是會比收斂的時候大一些。

Bonus:

1. 定義好一些符號: (格式為 “程式內變數”: “對應公式的符號”)

N: N(number of features: 784)

p: p(number of bases: 6824)

x: x(bases with size: N * p and is pre-normalized to mean 0 & variance 1)

B: β(coefficient with size p)

y: y(original signal)

alpha: λ(penalty)

r_j: r_{ij}(partial residuals)

2. 定義一些 function 方便計算:

計算 soft-thresholding: $S_a(x) = sign(x)\max(|x| - a, 0)$

```python
# Soft-threshold: S_a(x) = sign(x)max(|x| - a, 0)
def soft_threshold(B, alpha):
    if B > 0:
        return max(abs(B) - alpha, 0)
    else:
        return -max(abs(B) - alpha, 0)
```

計算 partial residuals:

依照此公式 $r_{ij} = y_i - \sum_{k \neq j} x_{ik}\beta_k$ 直接計算 r_j 的 residual

```python
def compute_partial_residual(j, y, x, B):
    assert B.shape[0] == x.shape[1], "Size of x is not equal to size of B"
    B[j] = 0
    sum_of_product_exclude_j = np.dot(x, B)
    r_j = y - sum_of_product_exclude_j
    return r_j
```

計算 Simple least square coefficient:

依照公式 $\beta_j^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}r_{ij}$ 算出 β_j^*

```python
def least_square_coefficient(j, x, r, N):
    x_j = x[:, j]
    return (np.dot(x_j, r)) / N
```

3. 主程式架構

初始化 B(6824*1) 為 0。接著用跑規定的 iteration 次數，每個 iteration 都針對 6824 個 basis 做下列事情:

a. 計算 partial residuals

b. 計算 β_j^*

c. 更新 β_j

```python
def lasso(x, y, alpha=0.5, max_iter=500):
    N, p = x.shape
    B = np.zeros(p)
    for iter in range(max_iter):
        for j in range(p):
            r_j = compute_partial_residual(j, y, x, B)
            B_star = least_square_coefficient(j, x, r_j, N)
            B[j] = soft_threshold(B_star, alpha) / (x[:, j]**2).sum()
    return B
```

結果圖(參數 alpha = 0.5, max_iter=2):

L2-norm: 2298.6070499682282