**Grafuri orientate**

**Definiţie** Se numeşte graf orientat o pereche ordonată de mulţimi G=(X,U), unde: X este o mulţime finită şi nevidă numită mulţimea vârfurilor (nodurilor), iar U este o mulţime formată din perechi ordonate de elemente distincte din X numită mulţimea arcelor.

Not. Orice arc se notează u=(x,y) şi spunem că x este extremitate iniţială şi y este extremitate finală a arculuui.

**Definiţie** Pentru graful G=(X,U) dacă există arcul u=(x,y) spunem că vârfurile x şi y sunt adiacente şi amândouă sunt incidente cu arcul u.

Figura 1

Obs. Arcul (x,y) diferă de arcul (y,x).

*u4 u6*

Exemplu: pentru graful G=(X,U) u3 u5

X={1,2,3,4,5,6},

U={(2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (1,5), (5,1), (3,5), (5,6)} u2 u1 u8

u7=(5,6) , deci 5, 6 incidente cu u7 *u7*

Obs. Intr-un graf pot exista mai multe arce identice. Un graf în care numărul arcelor identice nu depăşeşte un număr natural p se numeşte p-graf. Se vor stiudia 1-grafuri fără bucle (nu există un arc de la un vârf la el însuşi).

**Definiţie** Se numeşte grad exterior al unui vârf x notat cu d+(x), numărul arcelor de forma (x,y)∈U.

**Definiţie** Se numeşte grad interior al unui vârf x notat cu d-(x), numărul arcelor de forma (y,x)∈U.

Not. Γ+(x)={y∈X|(x,y) ∈U}- mulţimea succesorilor lui x Not. Γ-(x)={y∈X|(y,x) ∈U}- mulţimea predecesorilor lui x

Not. ω+(x)={u=(x,y)| u∈U } – mulţimea arcelor ce ies din x Not. ω-(x)={u=(y,x)| u∈U } – mulţimea arcelor ce intră in x

Obs. Vor avea loc egalităţile:

d+(x)=| Γ+(x)|=| ω+(x)| d-(x)=| Γ-(x)|=| ω-(x)|

Exemplu: Pentru graful din figura de mai sus:

d+(1)=2 d-(1)=2 d+(4)=0 d-(4)=0 d+(5)=1 d-(5)=3 d+(6)=0 d-(6)=1

Γ+(1)={3,5} Γ-(1)={2,5} Γ+(4)=Ф Γ-(4)=Ф Γ+(5)={6} Γ-(5)={1,3} Γ+(6)=Ф Γ-(6)={5}

ω+(1)={u3,u2} ω-(1)={u1,u4} ω+(4)=Ф ω-(4)=Ф ω+(5)={u7} ω-(5)={u2,u8} ω+(6)=Ф ω-(6)={u7}

Obs. Un vârf este izolat dacă are gradul interior şi gradul exterior egale cu 0.

Obs. Un vârf se numeşte terminal dacă are gradul interior 1 şi gradul exteror 0.

Obs. Suma gradelor interioare ale unui graf orientat este egală cu suma gradelor exterioare.

**Definiţie** Se numeşte lanţ într-un graf orientat o succesiune de L=(u1,u2,…,un) cu proprietatea că orice două arce vecine (ui şi ui+1) au o extremitate comună.

**Definiţie** Extremitatea x0 a arcului u1 se numeşte extremitate iniţială, extremittea xn a arcului un se numeşte extremitate finală.

Exemplu. Pentru graful din figura 1 un lanţ este: L1=(u4, u1, u2, u3, u8), sau L2=(u7,u1,u4).

Obs. In definirea unui lanţ nu se ţine cont de orientarea arcelor sale.

**Definiţie** Se numeşte drum într-un graf orientat G=(X,U) unde X={x1, x2, ..., xn} este un şir de vârfuri notat D=( xi1, xi2, ..., xim) cu proprietatea că ( xi1, xi2), ( xi2, xi3), ..., ( xim-1,xim) sunt arce ale grafului.

Obs. Un drum este un lanţ în care toate arcele au aceeaşi orientare dată de sensul de deplasare de la x0 către xm.

**Definiţie** Dacă toate vârfurile unui drum sunt distincte, drumul se zice elementar. Altfel este neelementar.

Exemplu. Pentru graful din figura 1 un drum este: D1=(2, 3, 5, 6), sau D2=(1, 5, 1, 3, 2, 3, 5).

Drumul D1 este elementar. Drumul D2 este neelementar.

**Definiţie** Dacă toate arcele unui drum sunt distincte, drumul se zice simplu. Altfel se zice drum compus.

**Definiţie** Lungimea unui drum este dată de numărul de arce care îl compun.

**Definiţie** Un drum în care toate arcele sunt distincte şi extremitaţile coincid (xi1=xim) se numeşte circuit.

**Definiţie** Dacă toate vârfurile circuitului cu excepţia primului şi ultimului vârf sunt distincte două căte două circuitul se zice elementar. Altfel este neelementar.

Exemplu. Pentru graful din figura 1 exemple de circuite: C1=(1, 2, 1), C2=(1, 2, 3, 5, 1), C3=(2, 1, 3, 5, 1, 3, 2).

Circuitele C1 şi C2 sunt elementare C3 este un circuit neelementar.

Obs. Două vârfuri între care există două arce cu orientări diferite este circuitul de lungime minimă care se poate forma într-un graf.

**Definiţie** Un drum hamiltonian într-un graf orientat este un drum care conţine toate vârfurile grafului.

**Definiţie** Intr-un graf orientat G=(X,U) se numeşte circuit hamiltonian un circuit elementar care conţine toate vârfurile grafului.

**Definiţie** Se numeşte graf hamiltonian un graf care conţine un circuit hamiltonian.

**Definiţie** Un drum eulerian într-un graf orientat este un drum simplu care conţine toate arcele grafului.

**Definiţie** Intr-un graf orientat G=(X,U) se numeşte circuit eulerian un circuit care conţine toate arcele grafului.

**Definiţie** Se numeşte graf eulerian un graf care conţine un circuit eulerian.

**Definiţie** Un graf parţial al grafului orientat G=(X,U) este un graf G1=(X,V) cu proprietatea că V⊆U (este graful însuşi sau se obţine din graful iniţial prin eliminarea unor arce). Se mai spune că graful parţial G1 este indus de mulţimea de arce V.

Figura 2

Exemplu: graful din figura 2

G1=(X, U) este graf parţial al lui G

X={1, 2, 3, 4, 5, 6} V={(5,1), (5,6), (3,5)}

**Definiţie** Un subgraf al unui graf orientat G=(X,U) este un graf H=(Y,V) astfel incât Y⊆X şi V conţine toate arcele din U care au ambele extremităţi în Y (poate fi graful însuşi sau se obţine din acesta prin eliminarea unor vârfuri şi a arcelor incidente cu acestea). Spunem că subgraful H este indus de mulţimea de vârfuri Y.

Figura 3

Exemplu: graful din figura 3

H=(Y,V) este subgraf al lui G: Y={1, 4, 3, 5} V={(1,5), (1,3), (5,1), (3,5)}

**Definiţie** Un graf orientat G=(X,U) se numeşte conex dacă pentru oricare două vârfuri distincte x, y ∈ X există un lanţ cu extremităţile x şi y.

Def. Se numeşte componentă conexă a unui graf orientat g un subgraf conex al său maximal în raport cu această proprietate (oricare ar fi un vârf din subgraf, nu există un lanţ între acel vârf şi vârfurile care nu fac parte din subgraf).

Figura 3

Obs. Un graf cu o singură componentă conexă este conex.

Exemplu: Graful din figura 4 este conex. Graful din figura 5 nu este conex şi are trei componente conexe C1=(X1,V1) X1={1, 3, 4} V1=((1,2), (2,4)}; C2=(X2,V2) X1={2} V2= Ф; C3=(X3,V3) X3={5, 6} V3=((5,6), (6,5)}.

Figura 4

Figura 5

**Definiţie** Un graf orientat este complet dacă oricare două vârfuri distincte ale sale sunt adiacente.

Obs. Spre deosebire de grafurile neorientate unde graful complet este unic, la grafurile orientate se pot construi mai multe grafuri orientate complete cu n vârfuri. Două vârfuri x şi y sunt adiacente într-un graf orientat în oricare din situaţiile: există arcul (x,y) sau arcul (y,x) sau arcele (x,y) şi (y,x). Sunt n(n-1)/2 posibilităţi de a alege două vârfuri dstincte. Pentru fiecare dintre acestea există 3 situaţii deci în total sunt 3n(n-1)/2grafuri orientate complete cu n vârfuri.

**Definiţie** Un graf este tare conex dacă pentru oricare două vârfuri x, y ∈ X există un drum de la x la y şi un drum de la y la x.

**Definiţie** O componentă tare conexă a unui graf orientat G=(X, U) este un subgraf G1=(X1,Y1) al lui G care este tare conex şi care este maximal în raport cu această proprietate (adică oricare ar fi x ∈ X\X1, subgraful lui G generat de X1∪{x} nu mai este tare conex).

Exemplu: graful din figura 6 este tare conex, iar graful din figura 7 nu este tare conex dar are două componente tare conexe.

Figura 6

Figura 7

**Definiţie** Fiecărei muchii a unui graf orientat i se poate asocia o valoare care reprezintă costul acelei muchii.

**Definiţie** Un graf orientat în care fiecărei muchii i s-a asociat o valoare se numeşte graf ponderat sau graf valoric.

**Definiţie** Fie un graf orientat G=(X, U) şi o funcţie L: U→R+, care asociază fiecărui arc u∈U lungimea (costul sau ponderea) sa L(u). Lungimea unui drum în acest graf este egală, prin **Definiţie**  cu suma lungimilor asociate arcelor sale.

**Definiţie** Un graf orientat cu prprietatea că între oricare două vârfuri x şi y există un arc şi numai unul se numeşte graf turneu.

**Definiţie** Numim transpusul unui graf orientat G=(X, U) un graf G’=(X, U’) care are aceeaşi mulţime de vârfuri ca şi graful iniţial, arcele sale fiind cele ale grafului iniţial dar având sens opus.