

O metoda de rezolvare a unor ecuatii care contin module

Atunci cand rezolvam ecuatii care contin module, principala grija este sa eliminam modulele si sa obtinem astfel o ecuatie algebrica pe care stim cum sa o rezolvam.

Putem sa eliminam modulul unei expresii algebrice daca cunoastem semnul expresiei, ceea ce nu este intotdeauna simplu, uneori, avand nevoie de multe calcule.

De exemplu avem de rezolvat ecuatia: $||| 2x - 1 | - 9 | - 5 | = 3$.

Pentru a elimina cele trei module folosind semnul expresiilor din modul avem nevoie de timp si de multe calcule.

Va voi prezenta in continuare o metoda simpla de rezolvare a acestui tip de ecuatii.

In rezolvarea ecuatiei $|x| = a$, in \mathbb{R} , unde $a \in \mathbb{R}$, intalnim trei cazuri :

1. daca $a < 0$, ecuatia $|x| = a$ nu are solutii, este imposibila.
2. daca $a = 0$, ecuatia $|x| = 0$ are solutia $x = 0$, $S = \{0\}$.
3. daca $a > 0$, ecuatia $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ sau $x = -a$, ecuatia are doua solutii, $S = \{-a, a\}$.

Procedand similar putem rezolva ecuatii de forma:

- a) $|2 - x| = 3$;
- b) $|| 2x + 3 | - 5 | = 9$;
- c) $||| 5x - 1 | - 4 | - 3 | = 2$;
- d) $||| 2x - 1 | - 9 | - 5 | = 3$.

Rezolvare:

$$\text{a) } |2 - x| = 3 \Leftrightarrow 2 - x = 3 \text{ sau } 2 - x = -3 \Leftrightarrow -x = 3 - 2 \text{ sau } -x = -3 - 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ sau } x = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S = \{-1, 5\};$$

$$\text{b) } || 2x + 3 | - 5 | = 9 \Leftrightarrow |2x + 3| - 5 = 9 \text{ sau } |2x + 3| - 5 = -9 \Leftrightarrow |2x + 3| = 14 \text{ sau } |2x + 3| = -4 \\ |2x + 3| = 14 \Leftrightarrow 2x + 3 = 14 \text{ sau } 2x + 3 = -14 \Leftrightarrow 2x = 14 - 3 \text{ sau } 2x = -14 - 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} \text{ sau } x = -\frac{17}{2} \Leftrightarrow S_1 = \left\{ -\frac{17}{2}, \frac{11}{2} \right\}.$$

$$|2x + 3| = -4 \text{ (ecuatie imposibila deoarece } -4 < 0) \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

$$\text{Deci } S = S_1 \cup S_2 = \left\{ -\frac{17}{2}, \frac{11}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } ||5x - 1| - 4| - 3| = 2 &\Leftrightarrow ||5x - 1| - 4| - 3 = 2 \text{ sau } ||5x - 1| - 4| - 3 = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ||5x - 1| - 4| = 5 \text{ sau } ||5x - 1| - 4| = 1 \Leftrightarrow |5x - 1| - 4 = 5 \text{ sau } |5x - 1| - 4 = -5 \text{ sau } |5x - 1| - 4 = 1 \\ &\text{sau } |5x - 1| - 4 = -1 \Leftrightarrow |5x - 1| = 9 \text{ sau } |5x - 1| = -1 \text{ sau } |5x - 1| = 5 \text{ sau } |5x - 1| = 3 \end{aligned}$$

$$|5x - 1| = 9 \Leftrightarrow 5x - 1 = 9 \text{ sau } 5x - 1 = -9 \Leftrightarrow x = 2 \text{ sau } x = -\frac{8}{5} \Rightarrow S_1 = \left\{-\frac{8}{5}, 2\right\}.$$

$$|5x - 1| = -1 \text{ (ecuatie imposibila deoarece } -1 < 0) \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

$$|5x - 1| = 5 \Leftrightarrow 5x - 1 = 5 \text{ sau } 5x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \text{ sau } x = -\frac{4}{5} \Rightarrow S_3 = \left\{-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right\}.$$

$$|5x - 1| = 3 \Leftrightarrow 5x - 1 = 3 \text{ sau } 5x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \text{ sau } x = -\frac{2}{5} \Rightarrow S_4 = \left\{\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right\}.$$

$$\text{Deci } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left\{-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, 2\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } ||2x - 1| - 9| - 5| = 3 &\Leftrightarrow ||2x - 1| - 9| - 5 = 3 \text{ sau } ||2x - 1| - 9| - 5 = -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ||2x - 1| - 9| = 8 \text{ sau } ||2x - 1| - 9| = 2 \Leftrightarrow |2x - 1| - 9 = 8 \text{ sau } |2x - 1| - 9 = -8 \text{ sau } |2x - 1| - 9 = 2 \\ &\text{sau } |2x - 1| - 9 = -2 \Leftrightarrow |2x - 1| = 17 \text{ sau } |2x - 1| = 1 \text{ sau } |2x - 1| = 11 \text{ sau } |2x - 1| = 7 \end{aligned}$$

$$|2x - 1| = 17 \Leftrightarrow 2x - 1 = 17 \text{ sau } 2x - 1 = -17 \Leftrightarrow x = 9 \text{ sau } x = -8 \Rightarrow S_1 = \{-8, 9\}.$$

$$|2x - 1| = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \text{ sau } 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ sau } x = 0 \Rightarrow S_2 = \{0, 1\}$$

$$|2x - 1| = 11 \Leftrightarrow 2x - 1 = 11 \text{ sau } 2x - 1 = -11 \Leftrightarrow x = 6 \text{ sau } x = -5 \Rightarrow S_3 = \{-5, 6\}.$$

$$|2x - 1| = 7 \Leftrightarrow 2x - 1 = 7 \text{ sau } 2x - 1 = -7 \Leftrightarrow x = 4 \text{ sau } x = -3 \Rightarrow S_4 = \{-3, 4\}.$$

$$\text{Deci } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{-8, -5, -3, 0, 1, 4, 6, 9\}.$$

Pentru consolidare rezolvati urmatoarele ecuatiile:

$$|x - 3| = 12 ; |3x - 7| = 2 ; |7 - 3x| = 5 ; |2x + 3| = 0 ; ||2x - 3| + 1| = 6 ; ||1 - x| + 1| - 12| = 6$$