

ARBORELE (TREE)

- *Arborii* și variantele lor sunt printre cele mai comune și cele mai frecvent utilizate structuri de date, fiind utilizate într-o gamă foarte variată de aplicații cum ar fi teoria compilării, prelucrarea de imagini, etc., oferind o modalitate eficientă de memorare și manipulare a unei colecții de date.
- În teoria grafurilor, un arbore este un graf neorientat conex și fără cicluri.
- În informatică, *arborii cu rădăcină* sunt cei utilizați. De aceea, termenul *arbore* este asociat în informatică *arborelui cu rădăcină*.

Definiție 0.1 *Un arbore este o mulțime finită \mathcal{T} cu 0 sau mai multe elemente numite noduri, care are următoarele caracteristici:*

- Dacă \mathcal{T} este vidă, atunci arborele este vid.
- Dacă \mathcal{T} este nevidă, atunci:
 - Există un nod special R numit rădăcină.
 - Celelalte noduri sunt partiționate în k (≥ 0) arbori disjuncți, T_1, T_2, \dots, T_k , nodul R fiind legat de rădăcina fiecărui T_i ($1 \leq i \leq k$) printr-o muchie. Arborii T_1, T_2, \dots, T_k se numesc subarbori (fii) ai lui R , iar R se numește părintele subarborilor T_i ($1 \leq i \leq k$).

Arbore ordonat - fii fiecărui nod se consideră a forma o listă și nu doar o mulțime – adică ordinea fiilor este bine definită și relevantă.

- *gradul* unui nod este definit ca fiind numărul de fii ai nodului.
- *Adâncimea (nivelul)* unui nod în arbore este definită ca fiind lungimea (numărul de arce) drumului unic de la rădăcină la acel nod. Ca urmare, rădăcina arborelui este pe nivelul 0.
- *Înălțimea* unui nod în arbore este definită ca fiind lungimea (numărul de arce) celui mai lung drum de la nod la un nod frunză.
- *Înălțimea (adâncimea)* unui arbore este definită ca fiind înălțimea rădăcinii arborelui, adică nivelul maxim al nodurilor din arbore.

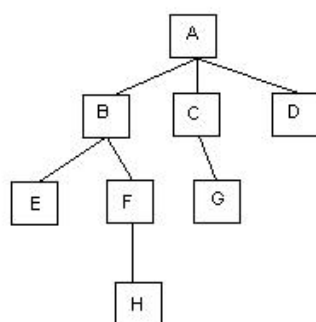


Figura 1: Arbore – exemplu.

Spre exemplu, arborele din Figura 1 are următoarele caracteristici:

- Rădăcina A este situată pe nivelul 0. Nodurile situate pe nivelul 1 sunt: B , C și D . Nodurile situate pe nivelul 2 sunt: E , F și G . Pe nivelul 3 există un singur nod, nodul H .
- Adâncimea (înălțimea) arborelui este 3.
- Nodul B are adâncimea 1 și înălțimea 2.

Definiție 0.2 (Arbore binar) *Un arbore ordonat în care fiecare nod poate să aibă cel mult 2 subarbori se numește arbore binar. Mai exact, putem defini arborele binar ca având următoarele proprietăți:*

- *Un arbore binar poate fi vid.*
- *Într-un arbore binar nevid, fiecare nod poate avea cel mult 2 fii (subarbori). Subarborii sunt identificați ca fiind subarborile stâng, respectiv drept. În Figura 2, nodul r are subarborile stâng $A1$ și subarborile drept $A2$.*

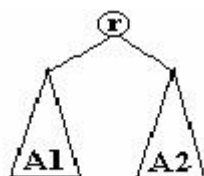


Figura 2: Arbore binar.

- într-un arbore binar se face o distincție clară între subarborile drept și cel stâng.
- Dacă subarborile stâng este nevid, atunci rădăcina lui se numește fiul stâng al rădăcinii arborelui binar.

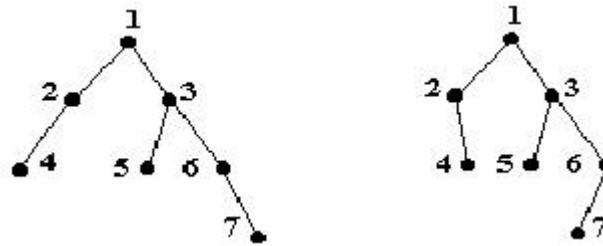


Figura 3: Arbori binari distincți.

- Dacă subarboarele drept este nevid, rădăcina lui se numește fiul drept al rădăcinii arborelui binar.
- Arborii binari din Figura 3 sunt distincți, deși conțin aceeași mulțime de noduri.

Între arborii binari putem deosebi câteva categorii speciale:

- Un arbore binar pentru care fiecare nod interior are 2 fii (vezi Figura 4).
- Un arbore binar este *plin* dacă fiecare nod interior are 2 fii și toate nodurile frunză au aceeași adâncime (vezi Figura 5).
- Un arbore binar are o structură de *ansamblu* (*heap*) dacă arborele este plin, exceptând ultimul nivel, care este plin de la stânga la dreapta doar până la un anumit loc (vezi Figura 6).

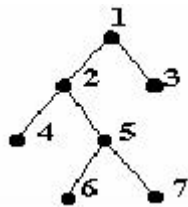


Figura 4: Arbore binar - nodurile interioare au 2 fii.

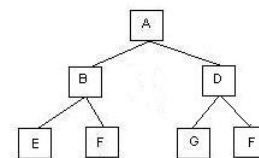


Figura 5: Arbore binar plin.

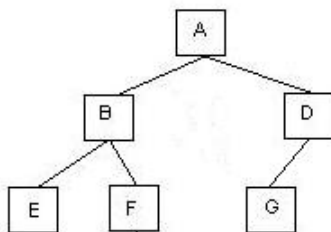


Figura 6: Arbore binar cu structură de ansamblu.



Figura 7: Arbori binari degenerați.

- Arborii binari se poate spune că au *formă*, forma lor fiind determinată de numărul nodurilor și de distanțele dintre noduri.
- Arborii binari din Figura 7 se numesc *degenerați*, deoarece au forma unui lanț de valori.

- Forma unui arbore influențează timpul necesar localizării unei valori în arbore.

Arbore binar echilibrat este un arbore binar cu proprietatea că înălțimea sub-arborelui său stâng nu diferă cu mai mult de ± 1 de înălțimea subarborelui său drept.

Proprietăți ale AB:

1. Un arbore (nu neapărat binar) cu N vârfuri are $N-1$ muchii.
2. Numărul de noduri dintr-un arbore binar plin de înălțime N este $2^{N+1}-1$.
3. Numărul maxim de noduri dintr-un arbore binar de înălțime N este $2^{N+1}-1$.
4. Un arbore binar cu n vârfuri are înălțimea cel puțin $\lceil \log_2 n \rceil$.
5. Un arbore binar având o structură de ansamblu și n vârfuri are înălțimea $\theta(\log_2 n)$.