Nicolas CLOAREC
Tom ROUSSEAU

Devoir maison I

Formules de dérivation de la résolvante

Etant donnée une matrice hermitienne $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et la résolvante

$$Q(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X - zI_n\right)^{-1} \tag{1}$$

On peut montrer facilement les formules de differentiation suivantes :

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathrm{Re}\,(X_{k\ell})} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left(Q_{ik}Q_{\ell j} + Q_{i\ell}Q_{kj}\right) \quad \text{pour} \quad k \neq \ell \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathrm{Im}\,(X_{k\ell})} = -\frac{i}{\sqrt{n}}\left(Q_{ik}Q_{\ell j} - Q_{i\ell}Q_{kj}\right) \quad \text{pour} \quad k \neq \ell \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kk}} = -\frac{1}{\sqrt{n}} Q_{ik}Q_{kj} \tag{4}$$

Rappel de dérivation

On rappelle que pour $z = x + \mathrm{i}y$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{5}$$

Formule d'intégration par parties et inégalité de Poincaré

Etant donné un vecteur gaussien réel centré $\vec{x} = (X_1, \cdots, X_n)^T$, de matrice de covariance $R = \mathbb{E}\left[\vec{x}\vec{x}^T\right]$ et $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction régulière de croissance au plus polynomiale à l'infini, alors on a l'identité suivante :

$$\mathbb{E} X_i \Phi\left(X_1, \cdots, X_n\right) = \sum_{k=1}^{n} R_{ik} \mathbb{E} \frac{\partial}{\partial X_k} \Phi\left(X_1, \cdots, X_n\right) \tag{6}$$

appelée formule d'intégration par parties. Si de plus Φ admet des dérivés partielles de croissance au plus polynomiale à l'infini, alors

$$\mathrm{var}(\Phi(\vec{x})) \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} R_{ij} \mathbb{E} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j}\right)} \tag{7}$$

Problème

Soit X une matrice de Wigner et Q sa résolvante définie en (1).

Question 1. Montrer que pour $k \neq l$,

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{k\ell}} = -\frac{1}{\sqrt{n}} Q_{ik} Q_{\ell j}, \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \overline{X_{k\ell}}} = -\frac{1}{\sqrt{n}} Q_{i\ell} Q_{kj} \tag{8}$$

Réponse 1. En utilisant successivement la première formule de (5), (2), (3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kl}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Re}(X_{kl})} - \mathrm{i}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Im}(X_{kl})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(Q_{ik}Q_{\ell j} + Q_{i\ell}Q_{kj}\Big) - \mathrm{i}\left(-\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\Big(Q_{ik}Q_{\ell j} - Q_{i\ell}Q_{kj}\Big)\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{n}}\Big\{2Q_{ik}Q_{\ell j}\Big\} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}} Q_{ik}Q_{\ell j}
\end{aligned}$$

De même en utilisant la seconde formule de (5), (2), (3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \overline{X_{kl}}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Re}(X_{kl})} + \mathrm{i}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Im}(X_{kl})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(Q_{ik}Q_{\ell j} + Q_{i\ell}Q_{kj}\Big) + \mathrm{i}\left(-\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\Big(Q_{ik}Q_{\ell j} - Q_{i\ell}Q_{kj}\Big)\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{n}}\Big\{2Q_{i\ell}Q_{kj}\Big\} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}} Q_{i\ell}Q_{kj}
\end{aligned}$$

Question 2. Montrer que

$$\mathbb{E} X_{k\ell}\Phi(X) = \mathbb{E}\frac{\partial}{\partial \overline{X_{k\ell}}}\Phi(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\overline{X_{k\ell}}\Phi(X) = \mathbb{E}\frac{\partial}{\partial X_{k\ell}}\Phi(X). \tag{9}$$

Réponse 2. On suppose que l'on a toujours ici $k \neq l$. En utilisant la formule d'intégration par parties (6) et en utilisant le fait que X est centrée, on a

$$\mathbb{E}\left[X_{kl}\Phi(X)\right] = \sum_{1 \le i,j \le n} \underbrace{\mathbb{E}\Big[X_{kl}X_{ij}\Big]}_{=\operatorname{Cov}\left[X_{kl},\, X_{ij}\right]} \mathbb{E}\left[\frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_{ij}}\right]. \tag{10}$$

- Pour $(i,j) \notin \{(k,l),(l,k)\}$: par indépendance des entrées, on a

$$\mathbb{E}\Big[X_{kl}X_{ij}\Big] = \mathbb{E}\left[X_{kl}\right] \cdot \mathbb{E}\Big[X_{ij}\Big] = 0.$$

- Pour $(i,j) = (k,l)$

$$\mathbb{E}\Big[X_{kl}X_{ij}\Big] = \mathbb{E}\Big[X_{kl}^2\Big] = 0.$$

  car $X_{kl} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$.

- Pour $(i,j)=(l,k)$

$$\mathbb{E}\left[X_{kl}X_{ij}\right]=\mathbb{E}\left[|X_{kl}|^2\right]=1.$$

L'équation (10) devient donc

$$\mathbb{E}\left[X_{kl}\Phi(X)\right]=\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{lk}}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\overline{X_{kl}}}\right]$$

car X est hermitienne, ce qui permet de conclure.

La deuxième égalité s'en déduit facilement en échangeant k et l et en utilisant $X_{kl}=\overline{X_{lk}}$.

Question 3. Soit $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ différentiable et $z=x+iy$. Montrer que

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right|^2=\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\right\}\tag{11}$$

Réponse 3. En utilisant les formules (5) de dérivation d'une variable complexe, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right|^2&=\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right|^2+\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left\{2\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+2\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\right\}\end{aligned}$$

Question 4. En remarquant que

$$\Phi(X)=\Phi\left(X_{kk},\mathrm{Re}\left(X_{k\ell}\right),\mathrm{Im}\left(X_{k\ell}\right);1\le k,\ell\le n;k<\ell\right)\tag{12}$$

montrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\Phi(X)&\le\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\mathrm{Re}\left(X_{k\ell}\right)}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\mathrm{Im}\left(X_{k\ell}\right)}\right|^2\\&\le\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{k\ell}}\right|^2+\sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\overline{X_{k\ell}}}\right|^2\end{aligned}\tag{13}$$

Réponse 4. Commençons par remarquer que

$$\mathbb{E}\left[X_{ij}X_{kk}\right]=\delta_{i,j}\cdot\delta_{ik}.\tag{14}$$

En effet

- Pour $(i\neq j)$ ou $(i=j$ et $i\neq k)$, on a par indépendance

$$\mathbb{E}\left[X_{ij}X_{kk}\right]=\underbrace{\mathbb{E}\left[X_{ij}\right]}_{=0}\mathbb{E}\left[X_{kk}\right]=0$$

- Pour $i = j = k$,

$$\mathbb{E}\Big[X_{ij}X_{kk}\Big] = \mathbb{E}\Big[X_{kk}^2\Big] = 1.$$

En utilisant l'équation (7) de Poincaré, la formule d'au-dessus ainsi que l'équation suivante

$$\mathrm{Cov}\Big[X_{ij}\,,\,X_{kl}\Big] = \delta_{il}\cdot\delta_{jk} \tag{15}$$

lorsque $k \neq l$, démontrée à la question 2, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,[\Phi(X)] &\leq \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\overline{\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}}\right] + \sum_{k\neq l}\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{lk}}\overline{\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}}\right]\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2\right] + \sum_{k<l}\underbrace{\left\{\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{lk}}\overline{\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}\overline{\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{lk}}}\right]\right\}}_{:=A_{kl}}\end{aligned}$$

En utilisant successivement les inégalités

$$z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z) \leq 2|z| \quad \text{ et } \quad 2xy \leq x^2+y^2,$$

on a

$$A_{kl} \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}\right|\left|\overline{\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{lk}}}\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{lk}}\right|^2\right].$$

Il suffit alors d'utiliser $X_{lk} = \overline{X_{kl}}$ ainsi que la formule (11) de la question précédente [1] pour nous permettre de conclure.

Question 5. Soit $g_n(z) := \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,Q(z)$. Montrer que pour $k < l$

$$\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}} = \alpha_n[Q^2]_{kk}, \quad \frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kl}} = \beta_n[Q^2]_{lk}, \quad \frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{kl}}} = \delta_n[Q^2]_{kl}, \tag{16}$$

où α, β et δ sont des constantes dépendant de n à déterminer.

Réponse 5. En utilisant les propriétés de la composée de différentielle ainsi que les formules de différentiation de la résolvante (4) et (8), on a successivement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}} &= \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,\frac{\partial Q}{\partial X_{kk}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial Q}{\partial X_{kk}}\right]_{ii} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial X_{kk}} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Q_{ik}Q_{ki} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}[\,Q^2\,]_{kk}\\ \frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kl}} &= \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,\frac{\partial Q}{\partial X_{kl}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial Q}{\partial X_{kl}}\right]_{ii} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial X_{kl}} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Q_{ik}Q_{li} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}[\,Q^2\,]_{lk}\\ \frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{kl}}} &= \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,\frac{\partial Q}{\partial \overline{X_{kl}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial Q}{\partial \overline{X_{kl}}}\right]_{ii} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial \overline{X_{kl}}} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Q_{il}Q_{ki} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}[\,Q^2\,]_{kl}\end{aligned}$$

d'où $\alpha_n = \beta_n = \delta_n = -\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1. On note cependant que Φ n'est pas à valeur dans $\mathbb{C}$ mais $\mathbb{C}^n$. En supposant, les variables X_{ij} fixées pour $i<j$ et $(i,j)\neq(k,l)$, on a bien Φ qui ne dépend que de la variable X_{kl} dans $\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}$. On peut donc bien appliquer le résultat de la question 3.

Question 6. Démontrer que

$$\operatorname{Var}[\,g_n(z)\,] \le \frac{1}{n^3}\mathbb{E}[\,\operatorname{Tr} Q^2(z)Q^2(\overline{z})\,] = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{17}$$

Réponse 6. Appelons $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$, $X \mapsto \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X - zI)^{-1}$. On note tout d'abord que à z et X matrice de Wigner fixés, $\Phi(X) = g_n(z)$.

Par le cours, nous savons que Φ vérifie les conditions de régularités rendant l'inégalité (7) de Poincaré valide. En appliquant successivement l'inégalité (13) de la question 4 et les formules (16) de la question 5, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[\,g_n(z)\,] = \operatorname{Var}[\,\Phi(X)\,] &\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{k\ell}}\right|^2 + \sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial \overline{X_{k\ell}}}\right|^2 \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{k\ell}}\right|^2 + \sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{k\ell}}}\right|^2 \\
&= \underbrace{\sum_{1\le k,l\le n}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2\mathbb{E}\left[\left|[\,Q^2\,]_{kl}\right|^2\right]}_{:=A}
\end{aligned}$$

En introduisant les notations $P := Q^2(z) = (p_{kl})$, $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius, et en utilisant la relation $Q(z)^* = Q(\overline{z})$, on a :

$$A = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}\left[\sum_{1\le k,l\le n}|p_{kl}|^2\right] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}[\,\|P\|_F^2\,] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}[\,\operatorname{Tr} P^*P\,] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}[\,\operatorname{Tr}\{(\,Q^2(z))^*\,Q^2(z)\}\,] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}[\,\operatorname{Tr} Q^2(\overline{z})Q^2(z)\,].$$

Il nous reste maintenant à montrer

$$\mathbb{E}[\,\operatorname{Tr} Q^2(\overline{z})Q^2(z)\,] = \mathcal{O}_z(\,n\,). \tag{18}$$

En vertu du théorème spectral, on peut écrire X, matrice de Wigner de la façon suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}X = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*,$$

puis,

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i - z}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^* \qquad Q(\overline{z}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i - \overline{z}}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*$$

$$Q^2(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\,\lambda_i - z)^2}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^* \qquad Q^2(\overline{z}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\,\lambda_i - \overline{z})^2}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*$$

On a donc

$$Q^2(\overline{z})Q^2(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_i - z|^4}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^*$$

puis,

$$\mathbb{E}[\,\operatorname{Tr} Q^2(\overline{z})Q^2(z)\,] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_i - z|^4}\right] \le \frac{n}{|\operatorname{Im}(\,z\,)|^4} = \mathcal{O}_z(\,n\,),$$

la dernière inégalité provenant du fait que les λ_i sont réels car X est hermitienne. D'où le résultat.

Question 7. Soit f la transformée de Stieltjes dune probabilité sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$g(z) = -\frac{1}{z+f(z)} \tag{19}$$

eſt la transformée de Stieltjes dune probabilité sur $\mathbb{R}$. En déduire une majoration de $|z+f(z)|^{-1}$.

Réponse 7.

- Par hypothèse, f eſt la transformée de Stieltjes d'une mesure positive, et vérifie donc $\forall z \in \mathbb{C}^+, \operatorname{Im} f(z) > 0$. Par suite :

$$\forall z \in \mathbb{C}^+, \operatorname{Im} g(z) = \frac{\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} f(z)}{|z+f(z)|} > 0$$

- D'autre part, $z+f(z)$ ne s'annule jamais pour $z \in \mathbb{C}$. En effet,

$$\forall z \in \mathbb{C}^+, \quad \operatorname{Im}(z+f(z)) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(f(z)) > 0$$

  par ſtabilité de $\mathbb{C}^+$ par f, transformée de Stieltjes d'une mesure positive. En utilisant le fait que $z \mapsto z+f(z)$ holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ puis $z \mapsto 1/z$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, on a bien par composition g analytique sur $\mathbb{C}^+$.
- Enfin, commençons par remarquer que $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(f(z))$ sont de même signe pour tout z tel que $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. En effet, en notant μ_0 la mesure de probabilité dont eſt issue f, un calcul direct montre que

$$\operatorname{Im} g_{\mu_0}(x+iy) = y \int \frac{\mu_0(d\lambda)}{(\lambda-x)^2+y^2}.$$

  On peut donc écrire que

$$\forall z \in \mathbb{C}^+, \quad |g(z)| = \left|\frac{1}{z+f(z)}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z+f(z))|} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}. \tag{20}$$

  En vertu du théorème d'identification vu en cours, g définit donc bien la transformée de Stieltjes d'une certaine mesure positive μ de masse totale $\mu(\mathbb{R}) \leq 1$.
- Enfin, montrons que μ eſt une mesure de probabilité.

$$-\mathrm{i}y \cdot g(x+\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{i}y}{\mathrm{i}y + f(\mathrm{i}y)} = \frac{\mathrm{i}y}{\mathrm{i}y + \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{y}\right)} \tag{21}$$

  puisque $|f(z)| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}$ pour tout z tel que $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. En faisant tendre y vers $+\infty$, g définit bien la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité. L'équation (20) donnant la majoration attendue.

Question 8. Soit $z \mapsto g_\delta(z)$ la transformée de Stieltjes dune mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation :

$$g_\delta^2 + z g_\delta + 1 = \delta \tag{22}$$

Montrer que $g_\delta(z) - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z(\delta)$

Réponse 8. Pour alléger les notations nous noterons ici, nous ometterons le z pour $g_{sc}(z)$ et $g_\delta(z)$.

Par définition, $g_{sc}(z)$ eſt l'unique solution de : $X^2 + z \cdot X + 1 = 0$. On a donc les deux équations suivantes :

$$g_\delta^2 + z \cdot g_\delta + 1 = \delta \quad \text{et} \quad g_{sc}^2 + z \cdot g_{sc} + 1 = 0, \tag{23}$$

soit par soustraction

$$g_\delta^2 - g_{sc}^2 + z \cdot (g_\delta - g_{sc}) = \delta$$

ou encore

$$g_\delta - g_{sc} = \frac{\delta}{g_\delta + g_{sc} + z}. \tag{24}$$

En utilisant le même argument que pour la question précédente sur le fait que

$$\operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(g_\delta) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(g_{sc}) > 0,$$

on a successivement

$$|g_\delta - g_{sc}| \leq \frac{|\delta|}{|g_\delta + g_{sc} + z|} \leq \frac{|\delta|}{|\operatorname{Im}(g_\delta + g_{sc} + z)|} \leq \frac{|\delta|}{|\operatorname{Im}(z)|} = \mathcal{O}_z(\delta), \tag{25}$$

d'où le résultat.

Convergence de la mesure spectrale

On prendra $z \in \mathbb{C}$.

Question 9. En utilisant l'identité $Q^{-1}Q = I$, montrer que pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E} X_{ii} Q_{ij} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \neq i} \mathbb{E}\left(X_{ik} Q_{kj}\right) - z \mathbb{E} Q_{ij} = \delta_{ij} \tag{26}$$

Réponse 9. En utilisant l'indication, on a

$$\mathrm{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X - zI\right) Q = \frac{1}{\sqrt{n}} XQ - zQ$$

En évaluant cette expression en $[\cdot]_{ij}$, ce qui revient à multiplier par $\mathbf{e_i^*}$, $\mathbf{e_j}$ à gauche et à droite respectivement, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\mathbf{e_i^*} X\right)\left(Q\mathbf{e_j}\right) - zQ_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{(X^* \mathbf{e}_i)^* \left(Q\mathbf{e_j}\right)}_{=\langle X^* \mathbf{e}_i, Q\mathbf{e_j}\rangle} - zQ_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \overline{X_{ki}^*} Q_{kj} - zQ_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_{ik} Q_{kj} - zQ_{ij}
\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre l'espérance de l'égalité du dessus et d'utiliser la linéarité de cette dernière pour conclure.

Question 10. En déduire que

$$-\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(Q_{ij}\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\right)-z\mathbb{E}Q_{ij}=\delta_{ij} \tag{27}$$

Réponse 10.

Question 11. Puis que

$$[\mathbb{E}g_n(z)]^2+z\mathbb{E}g_n(z)+1=\mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{28}$$

Réponse 11. En utilisant (27) lorsque $i=j$, puis en sommant pour $i=1$ à n, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} n &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[Q_{ii}\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\right]-z\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Q_{ii}] \\ &= -\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}Q_{ii}^2\right]-z\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}Q_{ii}\right] \end{aligned}$$

soit, en utilisant la définition de $g_n(z)=\frac{1}{n}\operatorname{Tr}Q(z)$, et après division par n :

$$\mathbb{E}[g_n(z)^2]+z\mathbb{E}[g_n(z)]+1=0. \tag{29}$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème de König-Huygens reliant $\mathbb{E}[g_n(z)^2]$ et $\mathbb{E}[g_n(z)]^2$ grâce à la variance de $g_n(z)$ que l'on contrôle par l'équation (17) :

$$\begin{aligned} 0=\mathbb{E}[g_n(z)^2]+z\mathbb{E}[g_n(z)]+1 &= \mathbb{E}[g_n(z)]^2+\operatorname{Var}[g_n(z)]+z\mathbb{E}[g_n(z)]+1 \\ &= \mathbb{E}[g_n(z)]^2+\mathrm{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)+z\mathbb{E}[g_n(z)]+1 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure.

Question 12. En déduire que

$$\mathbb{E}g_n(z)-g_{sc}(z)=\mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{30}$$

Réponse 12. Commençons par montrer que $\mathbb{E}[g_n(z)]$ eﬅ la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

- On a que $\operatorname{Im}(g_n(z))$ eﬅ une variable aléatoire positive :

$$\forall z\in\mathbb{C}^+,\quad \operatorname{Im}(g_n(z))=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i-z}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i-\bar{z}}{|\lambda_i-z|^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{Im}(z)}{|\lambda_i-z|^2}\geq 0. \tag{31}$$

  En passant à l'espérance, on a donc $\mathbb{E}[\operatorname{Im}(g_n(z))]\geq 0$. Il suffit alors de remarquer que

$$\mathbb{E}[\operatorname{Im}(g_n(z))]=\mathbb{E}\left[\frac{g_n(z)-\overline{g_n(z)}}{2i}\right]=\frac{\mathbb{E}[g_n(z)]-\mathbb{E}\left[\overline{g_n(z)}\right]}{2i}=\frac{\mathbb{E}[g_n(z)]-\overline{\mathbb{E}[g_n(z)]}}{2i}=\operatorname{Im}(\mathbb{E}[g_n(z)]) \tag{32}$$

  pour nous permettre de conclure.

- Montrons que $\mathbb{E}[g_n(z)]$ est bien $\mathbb{C}$-dérivable. On a

$$\forall \omega \in \Omega, \quad z \mapsto g_n(z,\omega) \quad \mathbb{C}\text{-dérivable et } \frac{\partial g_n(z,\omega)}{\partial z} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q^2(z,\omega)\}, \tag{33}$$

la dépendance en ω dans la résolvante Q provenant de celle de $X(\omega)$. En effet, en utilisant l'identité de la résolvante, on a pour $z \neq z'$

$$\frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q(z)\} - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q(z')\} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q(z) - Q(z')\} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{-Q(z)(-z+z')I\, Q(z)\}$$

d'où l'on en déduit la formule de l'équation (33)

$$\frac{\partial g_n(z,\omega)}{\partial z} = \lim_{z'\to z} \frac{g_n(z,\omega) - g_n(z',\omega)}{z - z'} = \lim_{z'\to z} \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q(z,\omega)Q(z',\omega)\} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q^2(z,\omega)\}. \tag{34}$$

Par ailleurs, en utilisant les propriétés classiques sur la norme spectrale [2], on a

$$\left|\frac{\partial g_n(z,\omega)}{\partial z}\right| \leq \left\|Q^2(z,\omega)\right\| \leq \|Q(z,\omega)\|^2 \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} \tag{35}$$

qui est bien $\mathbb{P}$-intégrable. Par convergence dominé, on aura donc bien $\mathbb{E}[g_n(z)]$ $\mathbb{C}$-dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbb{E}[g_n(z)] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial g_n(z,\omega)}{\partial z}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\operatorname{Tr}\{Q^2(z,\omega)\}\right] \tag{36}$$

- Comme $g_n(z,\omega)$ est la transformée de Stieltjes de la mesure spectrale $L_n(\omega)$ de $\frac{1}{\sqrt{n}}X(\omega)$ [3], on a donc $g_n(z,\omega) \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Puis, en passant à l'espérance, on aura bien $\mathbb{E}[g_n(z,\omega)] \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ pour $z \in \mathbb{C}^+$.
- Enfin, comme les $g_n(z,\omega)$ sont les transformées de Stieltjes de mesure de probabilité $L_n(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(\omega)}$, on a

$$\forall \omega \in \Omega, \quad -\mathrm{i}y \cdot g_n(\mathrm{i}y,\omega) \to 1 \quad \text{lorsque} \quad y \to +\infty. \tag{37}$$

En utilisant, la domination $\left|-\mathrm{i}y \cdot g_n(\mathrm{i}y,\omega)\right| \leq \frac{y}{y} = 1$ pour $y > 0$, on peut donc intervertir limite et espérance comme suit :

$$\lim_{y\to+\infty} -\mathrm{i}y \cdot \mathbb{E}[g_n(z,\omega)] = \mathbb{E}\left[\lim_{y\to+\infty} -\mathrm{i}y \cdot g_n(z,\omega)\right] = \mathbb{E}[1] = 1. \tag{38}$$

On a donc $\mathbb{E}[g_n(z)]$ transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, solution par la question précédente de l'équation (30)

$$(\mathbb{E}[g_n(z)])^2 + z \cdot \mathbb{E}[g_n(z)] + 1 = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{39}$$

En prenant $\delta = \frac{1}{n^2}$, la question 8 nous permet alors de conclure.

Question 13. Soit L_n la mesure spectrale de la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}X$. Montrer que presque sûrement

$$L_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{sc} \tag{40}$$

où $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ représente la convergence en distribution.

Réponse 13.

2. notamment l'inégalité $\left|\operatorname{Tr}\{Q^2\}\right| \leq n \cdot \left\|Q^2\right\|$.
3. de masse égale à 1 puisque $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(\omega)}(\mathbb{R}) = 1$.

- Commençons par montrer pour tout $z \in \mathbb{C}^+$
$$g_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_{sc}(z) \quad p.s. \tag{41}$$
Soit $z \in \mathbb{C}^+$ fixé. On commence par écrire :
$$g_n(z) - g_{sc}(z) = \underbrace{g_n(z) - \mathbb{E}[\,g_n(z)\,]}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{E}[\,g_n(z)\,] - g_{sc}(z)}_{(2)}. \tag{42}$$
Commençons par traité le terme (2). On a, d'après la question 12 :
$$\mathbb{E}[\,g_n(z)\,] - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{ce qui entraîne} \quad g_{sc}(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\,g_n(z)\,].$$
On remarque que dans cette dernière limite, ω n'intervient pas puisque $\mathbb{E}[\,g_n(z)\,]$ et $g_{sc}(z)$ sont déterministes.

Passons maintenant au terme (1) en montrant la convergence *p.s.* de $g_n(z)$ vers $\mathbb{E}[\,g_n(z)\,]$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a par Tchebychev :
$$\mathbb{P}\left(|g_n(z) - \mathbb{E}[\,g_n(z)\,]| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}[\,g_n(z)\,]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{43}$$
d'après la question 6. On a donc convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|g_n(z) - \mathbb{E}[\,g_n(z)\,]| > \varepsilon\right)$, d'où le résultat par Borel-Cantelli.
- La mesure de probabilité $L_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(\omega)}$ admet $g_n(z,\omega)$ pour transformée de Stieltjes. Comme par (41), on a convergence presque sûr de $g_n(z)$ vers $g_{sc}(z)$, transformée de Stieltjes de $\mathbb{P}_{sc}$ mesure de probabilité, on aura donc $L_n \xrightarrow[n\to\infty]{etr} \mathbb{P}_{sc}$, ce qui conclut la preuve.

Problème : Transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle

Dans la suite de l'exercice, on considèrera la branche suivante de la racine carrée, définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$ par
$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \quad \text{si} \quad z = re^{\mathrm{i}\theta}. \tag{44}$$
On rappelle alors que $z \mapsto \sqrt{z}$ est une application analytique sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$.

Question 1. En analysant l'argument de $(z-2)(z+2)$ pour $z \in \mathbb{C}^+$, montrer que $z \to \sqrt{z^2-4}$ est une application analytique de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathbb{C}^+$.

Réponse 1. Comme la partie imaginaire est invariante par addition d'un réel quelconque, on a
$$\mathrm{Im}\,(z-2) = \mathrm{Im}\,(z+2) = \mathrm{Im}\,(z) > 0 \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C}^+.$$
En posant $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in (0,\pi)$ pour $z \in \mathbb{C}^+$, on a
$$\mathrm{Arg}\,(z-2)(z+2) = \underbrace{\mathrm{Arg}\,(z-2)}_{\in(0,\pi)} + \underbrace{\mathrm{Arg}\,(z+2)}_{\in(0,\pi)} \in (0, 2\pi). \tag{45}$$
On a donc $z^2 - 4 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$, d'où le passage à la racine est bien justifié et l'on a
$$\mathrm{Arg}\left(\sqrt{z^2-4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Arg}\,(z^2-4) \in (0,\pi). \tag{46}$$
En utilisant le fait que $z \mapsto z^2 - 4$ analytique sur $\mathbb{C}^+$, $z \mapsto \sqrt{z}$ analytique sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$, on a bien $z \mapsto \sqrt{z^2-4}$ analytique sur $\mathbb{C}^+$ par composition.

Question 2. Pour x réel, on pose $x_+ = \max(0, x)$. Soit $z = x + iy$, montrer que

$$\lim_{z\in\mathbb{C}^+,\, \mathrm{Im}(z)\downarrow 0} \mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) = \sqrt{(4-x^2)_+}. \tag{47}$$

Réponse 2. Ecrivons $z = x + iy$.

- Concernant le module de $\sqrt{z^2-4}$:

$$\left|\sqrt{z^2-4}\right| = \sqrt{|z^2-4|} = \sqrt{\left|(x^2-y^2-4)+i(2xy)\right|} \to \sqrt{|x^2-4|} \quad \text{lorsque} \quad y\downarrow 0. \tag{48}$$

- D'autre part,

$$\mathrm{Arg}\left(\sqrt{z^2-4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Arg}(z^2-4) = \frac{1}{2}\{\mathrm{Arg}(z-2)+\mathrm{Arg}(z+2)\} \tag{49}$$

  En utilisant le fait que $\lim_{y\downarrow 0}\mathrm{Arg}(z) \in \{\pi, 0\}$ pour $x<0$ et $x>0$ respectivement, on aura donc

$$\mathrm{Arg}\left(\sqrt{z^2-4}\right) = \begin{cases} \pi & \text{pour } x<-2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pour } x\in(-2,2) \\ 0 & \text{pour } x>2 \end{cases} \tag{50}$$

- Pour $z\in\mathbb{C}^+$ tel que $\mathrm{Re}(z)\notin\{-2,2\}$, on peut simplement dire

$$\left|\mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right)\right| \le \left|\sqrt{z^2-4}\right| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad y\downarrow 0 \tag{51}$$

  d'après le premier point.
  On déduit donc des équations (48), (50) et (51)

$$\sqrt{z^2-4} \to \begin{cases} -\sqrt{|x^2-4|} & \text{pour } x\le -2 \\ i\sqrt{|x^2-4|} & \text{pour } x\in(-2,2) \\ \sqrt{|x^2-4|} & \text{pour } x\ge 2 \end{cases} \quad \text{lorsque} \quad y\downarrow 0 \tag{52}$$

  La partie imaginaire $\mathrm{Im}(z^2-4)$ se réécrit donc simplement

$$\mathrm{Im}(z^2-4) = \sqrt{(4-x^2)_+} \tag{53}$$

  ce qu'on voulait montrer.

On considère $m(z)$ solution de l'équation $X^2 + z\cdot Z + 1 = 0$ définie par

$$m(z) = \frac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2}. \tag{54}$$

Question 3. Montrer que $m(z)$ est la transformée de Stieltjes d'une mesure positive μ dont on précisera la masse totale.

Réponse 3.

- On commence par examiner le signe de la partie imaginaire de $m(z)$ pour $z \in \mathbb{C}^+$:

$$\forall z \in \mathbb{C}^+, \quad m(z) = \frac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2} = \frac{-2}{z+\sqrt{z^2-4}} \tag{55}$$

Or, par hypothèse et d'après Q1 :

$$\forall z \in \mathbb{C}^+, \quad \mathrm{Im}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) > 0$$

En notant $\tilde{z} := z+\sqrt{z^2-4}$, on a donc

$$\mathrm{Im}(m(z)) = \mathrm{Im}\left(\frac{-2}{\tilde{z}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-2\bar{\tilde{z}}}{|z|^2}\right) = \frac{2}{|z|^2}\mathrm{Im}(\tilde{z}) > 0. \tag{56}$$

- D'après Q1, $z \mapsto \sqrt{z^2-4}$ est analytique pour tout z dans $\mathbb{C}^+$. Comme combinaison linéaire de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}^+$, $m(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}^+$.
- En se servant de la reformulation (55), on peut écrire :

$$|m(z)| = \frac{2}{|z+\sqrt{z^2-4}|} \leqslant \frac{2}{|\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right)|} \leqslant \frac{2}{\mathrm{Im}(z)}$$

Ainsi, d'après le théorème d'identification vu en cours, $m(z)$ est bien la transformée de Stieljes d'une certaine mesure μ de masse finie.
- Sa masse est donnée par la relation :

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{y\to+\infty} -iym(iy) = \lim_{y\to+\infty} \frac{2iy}{iy+i\sqrt{y^2+4}} = 1 \tag{57}$$

On en déduit que μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que pour $z = x+iy \in \mathbb{C}^+$,

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(m(x+iy)) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}. \tag{58}$$

Réponse 4. On a par linéarité de la partie imaginaire

$$\mathrm{Im}(m(z)) = \frac{1}{2}\left\{-\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right)\right\}. \tag{59}$$

Il suffit alors d'utiliser le résultat (47) de la question 2 avec $\mathrm{Im}(z^2-4) \to \sqrt{(4-x^2)_+}$ lorsque $y \downarrow 0$ pour arriver à la formule souhaitée.

Question 5. En déduire que $\mu(dx) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}\,dx$.

Réponse 5.
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mu(\{x\}) = \lim_{y\downarrow 0} y \cdot \mathrm{Im}(m(x+iy)) = 0 \tag{60}$$

par continuité de la fonction $y \mapsto \mathrm{Im}(m(x+iy))$ en 0.
- En vertu du point 9 de la proposition 22 et du point précédent, pour tout a, b réels

$$\mu(a,b) = \lim_{y\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_a^b m(x+iy)dx = \int_a^b \lim_{y\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(m(x+iy))\,dx \tag{61}$$

l'interversion limite et partie imaginaire étant similaire au point 1 de la question 12 et celle entre limite et intégrale provenant de la domination de $(x,y) \mapsto \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(m(x+iy))$ sur le compact[4] $[a;b] \times$

4. on suppose sans perte de généralité que $y \in [-\varepsilon;\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$ fixé.

$[-\varepsilon\,;\varepsilon]$ par son sup, cette dernière étant continue par la question 1.

- La question précédente permet alors de conclure que

$$\mu(a,b) = \int_a^b \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}\,\mathrm{d}x. \tag{62}$$

On a donc μ qui admet $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}$ comme densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, ce qui conclut la preuve.