Khôlles de Mathématiques $\mathbb{HXII}$
Espace Vectoriel

N. CLOAREC

Du 20-02-17 au 04-03-17

Exercice 1 Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f$$

a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.

b) Justifier que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g = Id$. Montrer que $g \circ f$ est une projection et donner son noyau et son image.

Exercice 3 Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Exprimer $u^{-1}\big(u(F)\big)$ en fonction de F et de $\ker u$.

b) Exprimer $u\big(u^{-1}(F)\big)$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.

c) À quelle condition a-t-on $u\big(u^{-1}(F)\big) = u^{-1}\big(u(F)\big)$?

Exercice 4 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, V et W deux sous-espaces de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$f(V) \subset f(W) \quad \text{si et seulement si} \quad V + \operatorname{Ker}(f) \subset W + \operatorname{Ker}(f)$$

Exercice 5 Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln p_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soient p une projection dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. Trouver une CNS sur λ pour que $p - \lambda Id$ soit un isomorphisme.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application définie par

$$f(P) = P + P'$$

Démontrer que f est une application linéaire inversible.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projections dans E avec $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)$. Montrer que pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est une projection de même image que p et q.

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit a et b deux symétries de $\mathcal{L}(E)$. Etablir l'égalité

$$\operatorname{Im}(a \circ b - b \circ a) = \operatorname{Im}(a - b) \cap \operatorname{Im}(a + b)$$

Exercice 10 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \operatorname{Id} - p$ et on considère :

$$L = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\} \quad \text{et} \quad M = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}$$

Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 des sous espaces de E isomorphes tels que $E = E_1 \bigoplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire en commun dans E.
Indication : On pourra introduire $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ isomorphisme.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projections dans E avec $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(q)$ et $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est une projection et trouver son image et son noyau.
Indication : On pourra d'abord montrer que $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Im}(q)$ sont en somme directe.

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ infini. Montrer que E n'est pas la réunion d'un nombre fini de ses sous-espaces différents de E et de $\{0\}$.
Indication : On pourra considérer une suite d'éléments du type $w_n = v_1 + \lambda_n v_2$ avec $v_1 \in E_1 \setminus \cup_{i \neq 1} E_i$ et $v_2 \in E_2 \setminus \cup_{i \neq 2} E_i$.