Année 2018-2019

STATISTIQUE EN GRANDE DIMENSION

Feuille d'exercices 3

Date limite le 23/11/2018

Exercice 8.

Montrer que si $\hat\theta$ et $\hat\theta'$ sont deux solutions du problème de minimisation

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}^p} \left(\|y - X\theta\|^2 + h(\theta) \right),$$

où $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors $X\hat\theta = X\hat\theta'$.

Exercice 9.

Soit le cône $\mathcal{C}_J = \{\Delta \in \mathbb{R}^p : |\Delta_{J^c}|_1 \le c_0 |\Delta_J|_1\}$, où $c_0 > 0$. Pour $s \in \{1, \dots, p\}$, posons

$$\kappa(s, c_0) = \inf \left(\frac{\|X\Delta\|}{|\Delta|_2} : \Delta \in \mathcal{C}_J,\ J : |J| \le s \right),$$
$$\kappa'(s, c_0) = \inf \left(\frac{\|X\Delta\|}{|\Delta_J|_2} : \Delta \in \mathcal{C}_J,\ J : |J| \le s \right).$$

Le but de cet exercice est de établir que $\kappa'(s, c_0) \ge \kappa(s, c_0) \ge a\kappa'(s, c_0)$, où $a > 0$ est une constante ne dépendant que de c_0.

1. Noter que $\kappa'(s, c_0) \ge \kappa(s, c_0)$.
2. Monter que

$$\kappa'(s, c_0) = \inf_{\Delta\in\mathcal{C}^*} \frac{\|X\Delta\|}{|\Delta_{J_*}|_2},$$

   où $J_* = J_*(\Delta)$ est l'ensemble des indices des s plus grandes en valeur absolue composantes de Δ, et

$$\mathcal{C}^* = \{\Delta \in \mathbb{R}^p : |\Delta_{J_*^c}|_1 \le c_0 |\Delta_{J_*}|_1\}.$$

3. Monter que, pour tout $\Delta \in \mathcal{C}^*$,

$$|\Delta_{J_*^c}|_2^2 \le c_0 |\Delta_{J_*}|_2^2.$$

4. En déduire que $\kappa(s, c_0) \ge a\kappa'(s, c_0)$ avec une constante $a > 0$ est ne dépendant que de c_0 que l'on précisera.