Arithmétique et Polynômes

Exercice 1. Trouver tous les entiers n strictement positifs pour lesquels 2^n divise $3^n - 1$.

Exercice 2. Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des entiers deux à deux distincts dans $\{1, \dots, 2n\}$.

1. Montrer qu'il existe i et j tels que a_i est premier avec a_j.
2. Montrer qu'il existe i et j distincts tels que a_i divise a_j.

Exercice 3. Un nombre n est dit parfait si $\sigma(n) = 2n$ (où σ désigne la somme des diviseurs positifs). Montrer que l'entier n est parfait pair si et seulement s'il est de la forme $2^{k-1}(2^k - 1)$ avec $2^k - 1$ premier.

Exercice 4. Soient a, b et c des entiers strictement positifs, premiers entre eux dans leur ensemble, et tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Prouver que $a + b$ est un carré parfait.

Exercice 5. Trouver tous les entiers positifs x, y, z tels que : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{5}$

Exercice 6. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré ≥ 2, montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.

Exercice 8. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k + 1$$

Exercice 9. On cherche les polynômes P non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

1. Montrer que toute racine d'un tel P est de module 1.
2. Déterminer les polynômes P.

Exercice 10. Factoriser le polynôme $(X + \mathrm{i})^n - (X - \mathrm{i})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left((X^2 - 1)^n\right)^{(n)}$$

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$
3. En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1\,;1[$.
   Indication : On pourra raisonner sur les racines d'ordres impaires de L_n.