Déterminants

Exercice 1.

1. Calculer le déterminant (à coefficients réels)

$$D_n = \det A_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

2. Si $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ et si $a_i > 0$ pour tout i, montrer que $P(\lambda) = \det(A_n - \lambda \cdot I_n)$ est scindé simple dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^*$, tous distincts et $P(x) = \det(A + xI_n)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $P(a_i)$ et décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)}$$

2. En déduire $\det A$.

Exercice 3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par $\varphi_A(M) = AM$. Calculer la trace et le déterminant de φ_A.

Exercice 4. On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geq 2)$$

1. Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.
2. Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite (H_n) avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 6. Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On pourra introduire $P(\lambda) = \det(A_n + \lambda \cdot J)$ où J désigne la matrice avec des 1 partout.

Exercice 7. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Exercice 8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer, en utilisant la dérivation, le déterminant suivant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \ddots & \ddots & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \ddots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}_{[n]}$$