Devoir maison III

Exercice 1.

Montrer que si $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont deux solutions du problème de minimisation:

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}^p}\left(\|y-X\theta\|^2+h(\theta)\right),$$

où $h:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors $X\hat{\theta}=X\hat{\theta}'$.

Solution 1.

Par le lemme 4.1, pour $\hat{\theta}\in\arg\min-\theta\in\mathbb{R}^p\left(\left\|y-X\theta\right\|^2+h(\theta)\right)$, on a l'inégalité suivante:

$$\forall\theta\in\mathbb{R}^p\quad \left\|y-X\hat{\theta}\right\|^2\leq\left\|y-X\theta\right\|^2+h(\theta)-h\left(\hat{\theta}\right)-\left\|X\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|^2.$$

En évaluant en $\theta=\hat{\theta}_1$ pour $\hat{\theta}=\hat{\theta}_2$ et réciproquement, on obtient:

$$\begin{cases}\left\|y-X\hat{\theta}_1\right\|^2 & \leq\left\|y-X\hat{\theta}_2\right\|^2+h\left(\hat{\theta}_2\right)-h\left(\hat{\theta}_1\right)-\left\|X\left(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right)\right\|^2\\ \left\|y-X\hat{\theta}_2\right\|^2 & \leq\left\|y-X\hat{\theta}_1\right\|^2+h\left(\hat{\theta}_1\right)-h\left(\hat{\theta}_2\right)-\left\|X\left(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1\right)\right\|^2\end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à sommer les deux inégalités pour obtenir $\left\|X\left(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1\right)\right\|^2=0$, d'où le résultat.

Exercice 2.

Soit le cône $\mathcal{C}_J=\left\{\Delta\in\mathbb{R}^p:\left|\Delta_{J^c}\right|_1\leq c_0\left|\Delta_J\right|_1\right\}$, où $c_0>0$. Pour $s\in\{1,\ldots,p\}$, posons:

$$\kappa(s,c_0)=\inf\left(\frac{\|X\Delta\|}{|\Delta|_2}:\Delta\in\mathcal{C}_J,J:|J|\leq s\right),$$

$$\kappa'(s,c_0)=\inf\left(\frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_J\right|_2}:\Delta\in\mathcal{C}_J,J:|J|\leq s\right).$$

Le but de cet exercice est d'établir que $\kappa'(s,c_0)\geq\kappa(s,c_0)\geq a\kappa'(s,c_0)$, où $a>0$ est une constante ne dépendant que de c_0.

Question 1.

Noter que $\kappa'(s,c_0)\geq\kappa(s,c_0)$.

Réponse 1.

On a $\left|\Delta_J\right|_2\leq\left|\Delta_J^{\mathcal{C}}\right|_2+\left|\Delta_J\right|_2=|\Delta|_2$. D'où

$$\forall J\text{ tq }|J|\leq s,\ \Delta\in\mathcal{C}_J\qquad\frac{\|X\Delta\|}{|\Delta|_2}\leq\frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_J\right|_2}$$

d'où le résultat en passant à l'infimum.

Question 2.

Montrer que

$$\kappa'(s,c_0) = \inf_{\Delta \in \mathcal{C}^\star} \frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_{J_\star}\right|_2},$$

où $J_\star = J_\star(\Delta)$ est l'ensemble des indices des s plus grandes composantes de Δ en valeur absolue, et

$$\mathcal{C}^\star = \left\{\Delta \in \mathbb{R}^p : \left|\Delta_{J_\star^{\mathcal{C}}}\right|_1 \leq c_0 |\Delta_{J_\star}|_1\right\}.$$

Réponse 2.

Soit J un ensemble d'indice quelconque vérifiant les hyptohèses.

- Tout d'abord, il est bon de noté que $\mathcal{C}^\star \neq \mathcal{C}_{J_\star}$ puisque contrairement aux ensemble J dont les indices sont fixés, $J^\star$ n'a de sens que pour Δ donné, *i.e.*que les indices dans $J^\star$ varient au fur et à mesure que Δ parcours $\mathbb{R}^p$.
- Commençons par montrer que $\mathcal{C}_J \subseteq \mathcal{C}^\star$. Soit $\Delta \in \mathcal{C}_J$. On note entre parenthèses les indices réordonnés, *i.e.*tels que $\left|\Delta_{(1)}\right| \geq \left|\Delta_{(2)}\right| \geq \ldots \geq \left|\Delta_{(p)}\right|$. En utilisant $|J| \leq s$ et l'optimalité des coefficients de $J_\star$, on a:

  $$\left|\Delta_J\right|_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j \in J}}^{|J|} \left|\Delta_{i_j}\right| \leq \sum_{j=1}^{s} \left|\Delta_{(j)}\right| = \left|\Delta_{J_\star}\right|_1$$

  d'où $\left|\Delta_J\right|_1 \leq \left|\Delta_{J_\star}\right|_1$.

  Si les coefficients de Δ sont maximales en valeur absolue sur $J_\star$, ils sont donc minimales sur $J_\star^{\mathcal{C}}$ et l'on montre par un même raisonnement qu'au dessus que l'on a: $\left|\Delta_{J_\star^{\mathcal{C}}}\right|_1 \leq \left|\Delta_{J^{\mathcal{C}}}\right|_1$.

  On a donc finalement que

  $$\left|\Delta_{J_\star^{\mathcal{C}}}\right|_1 \leq \left|\Delta_{J^{\mathcal{C}}}\right|_1 \leq c_0 \left|\Delta_J\right|_1 \leq c_0 \left|\Delta_{J_\star}\right|_1,$$

  d'où $\Delta \in \mathcal{C}^\star$.
- Par le même raisonnement que pour la norme $\ell 1$, on montre que

  $$\left|\Delta_J\right|_2 \leq \left|\Delta_{J_\star}\right|_2.$$

- On a donc l'inégalité suivante

  $$\forall \Delta \in \mathcal{C}_J \quad \frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_{J_\star}\right|_2} \leq \frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_J\right|_2},$$

  d'où $\kappa'(s,c_0) \geq \inf_{\Delta \in \mathcal{C}^\star} \frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_{J_\star}\right|_2}$ en passant à l'infimum sur J de cardinal inférieur à s.
- On obtient l'inégalité inverse en remarquant pour tout $\Delta \in \mathcal{C}^\star$, Δ appartient au cône $\mathcal{C}_{J_\star(\Delta)}$ avec un ensemble d'indices qui est bien de cardinal inférieur à s.

Question 3.

Montrer que pour tout $\Delta \in \mathcal{C}^\star$,

$$\left|\Delta_{J_\star^{\mathcal{C}}}\right|_2^2 \leq c_0 \left|\Delta_{J_\star}\right|_2^2.$$

Réponse 3.

En exploitant la définition de $J_\star$ et en utilisant la caractérisation de $\Delta \in \mathcal{C}^\star$, on a:

$$\forall j \in \{1, \ldots, s\} \quad \sum_{i \in J_\star^{\mathcal{C}}} \Delta_i^2 \leq \left|\Delta_{(j)}\right| \cdot \sum_{i \in J_\star^{\mathcal{C}}} |\Delta_i| \leq c_0 \left|\Delta_{(j)}\right| \cdot \left|\Delta_{J_\star}\right|.$$

Pour $j = s$ et en utilisant l'ordonnement des $\Delta_{(i)}$ on a la majoration suivante:

$$\left|\Delta_{(j)}\right| \cdot \left|\Delta_{J_\star}\right| \leq \sum_{i=1}^{s} \left|\Delta_{(s)} \cdot \Delta_{(i)}\right| \leq \sum_{i=1}^{s} \Delta_{(i)}^2 = \left|\Delta_{J_\star}\right|_2^2$$

ce qui permet de conclure.

Question 4.

En déduire que $\kappa(s, c_0) \geq a\kappa'(s, c_0)$ avec une constante $a > 0$ ne dépendant que de c_0 que l'on précisera.

Réponse 4.

On a par ce qui précède que $|\Delta|_2 = \left|\Delta_{J_\star^{\mathcal{C}}}\right|_2 + \left|\Delta_{J_\star}\right|_2 \leq (1 + \sqrt{c_0}) \left|\Delta_{J_\star}\right|_2$ pour tout $\Delta \in \mathcal{C}^\star$. D'où

$$\forall \Delta \in \mathcal{C}^\star \quad \frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_{J_\star}\right|_2} \leq (1 + \sqrt{c_0}) \frac{\|X\Delta\|}{|\Delta|_2},$$

Comme par 2. on a que $\mathcal{C}_J \subseteq \mathcal{C}^\star$ pour tout J de cardinal inférieur à s, on a

$$\forall J \text{ tq } |J| \leq s,\ \Delta \in \mathcal{C}_J \qquad \frac{\|X\Delta\|}{\left|\Delta_{J_\star}\right|_2} \leq (1 + \sqrt{c_0}) \frac{\|X\Delta\|}{|\Delta|_2},$$

d'où l'inégalité demandée par passage à l'infimum avec $a = \dfrac{1}{1 + \sqrt{c_0}} > 0$.