Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u,v,w) avec $u=(1,0,1), v=(1,1,1), w=(-1,1,0)$.

Exercice 2. Soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right\|\leq M$. Montrer $\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2\leq M^2$.

Exercice 3. Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi\colon E\times E\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle+k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 4. Soient $e=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $f=(f_j)_{1\leq j\leq n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On pose

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f_i\mid u(e_j)\right)^2$$

Montrer que A ne dépend pas des bases orthonormales choisies.

Exercice 5. Soit $\mathcal{F}=(x_1,\dots,x_n)$ une famille de $n\geq 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On suppose

$$\forall 1\leq i\neq j\leq n, \left(x_i\mid x_j\right)<0$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 6. On définit une application $\varphi\colon\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ par $\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Après avoir montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, calculer $\varphi(X^p,X^q)$.
2. Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{F}=(x_1,\dots,x_n)$ une famille d'obtusangle de $n\geq 2$ vecteurs d'un espace E préhilbertien réel définie par $\forall 1\leq i\neq j\leq n, \left(x_i\mid x_j\right)<0$.

1. Si E est de dimension 1, que dire des familles obtusangles ?
2. Supposons $E=\mathbb{R}^2$. Exhiber une famille obtusangle de cardinal 3 et montrer qu'il n'existe pas de famille obtusangle de cardinal 4.
3. Supposons $E=\mathbb{R}^3$. Exhiber une famille obtusangle de cardinal 4.
4. Montrer que si E est de dimension n, alors il n'existe pas de famille obtusangle de cardinal $n+2$.

Exercice 8. Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien non nul et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(u)=0$.

1. Montrer qu'il existe $x\in E\setminus\{0\}$ tel que $\langle u(x)\mid x\rangle=0$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 9. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \ge 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer
$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0$$
2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 11. Soient a et b deux vecteurs distincts d'un espace vectoriel euclidien E tels que

$$\|a\| = \|b\|$$

Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b.

Exercice 12. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \le i,j \le n} \left(a_{i,j} - m_{i,j}\right)^2 \right)$$

Exercice 13. Calculer le minimum de

$$\int_0^1 \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t$$

pour a, b, c parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

Montrer que f est linéaire.