Familles sommables

Exercice 1. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.
Quelle est la nature de

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}?$$

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses moyennes de Cesàro:

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

1. Montrer que $(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_n v_n$ pour tout $n \geq 2$.

On suppose désormais que la série de terme général u_n^2 converge.

1. Montrer que la série de terme général v_n^2 converge et vérifier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

2. En déduire la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{u_n u_m}{n+m}\right)_{m,n\geq 1}$$

Exercice 3. Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k.$$

1. On suppose dans cette question la série $\sum u_n$ absolument convergente.
   En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.
2. On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n)
3. On suppose dans cette dernière question la série $\sum u_n$ convergente.
   Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 4. Établir

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

avec

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}.$$

Pour quels α la série de terme général u_n converge ?

Exercice 6. Pour quels $\alpha > 0$, la famille suivante est-elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}.$$

Exercice 7. Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$