Sur le graphe divisoriel

Nicolas Cloarec

10 Juillet 2015

Qu'est ce qu'un graphe divisoriel ?

On définit sur l'ensemble des entiers de 1 à n la relation $\mathcal{R}$ suivante :

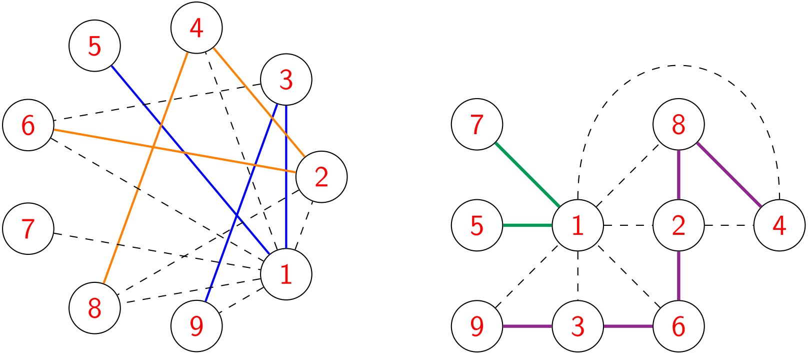
$$(a \, \mathcal{R} \, b) \quad \text{si et seulement si} \quad (a \mid b \text{ ou } b \mid a)$$

On appelle **graphe divisoriel** le graphe de la relation $\mathcal{R}$.

Notion de recouvrement

- On appelle **chaîne** de longueur l toute suite $(n_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ vérifiant pour tout $1 \leqslant i < l$: $\quad n_i \, \mathcal{R} \, n_{i+1}$.
- On appelle **recouvrement du graphe** un ensemble de chaînes disjointes tel que chaque entier de 1 à n apparaît exactement une fois dans l'une de ces chaînes.

Introduction du problème
Exemple de graphe divisoriel



Exemples de graphes pour $n = 9$

$\color{blue}{(9,3,1,5)}$, $\color{orange}{(8,4,2,6)}$ $\Longrightarrow$ chaînes

$\mathcal{C} = \{\color{purple}{(9,3,6,2,8,4)}$, $\color{green}{(7,1,5)}\}$ $\Longrightarrow$ recouvrement

Aspects du problème

Questions

- ☞ Quel est le **nombre minimal** de **chaînes** dans un recouvrement ?
- ☞ Quelle est la **longueur maximale** d'une chaîne ?

Résultats

Théorème 1 (Erdös-Saias) (1995)

Désignons par $\varphi(x)$ le nombre minimal de chaînes d'un recouvrement du graphe divisoriel pour $n = \lfloor x \rfloor$.
Il existe une constante strictement positive c telle que pour tout $x \geqslant 2$, on ait :

$$c \cdot x \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x}{2}$$

Théorème 2 (Saias) (2003)

Pour tout réel x suffisamment grand, on a :

$$\frac{x}{6} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x}{4}$$

Lemmes généraux

Lemme 1

Désignons par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de l'entier $n > 1$ et par $\Phi(x, z)$ la fonction suivante

$$\Phi(x, z) = card\{n \leqslant x \mid P^-(n) > z\}$$

On a alors pour $x \geqslant 2z \geqslant 4$ et x suffisamment grand :

$$\Phi(x, z) = \mathcal{O}\left(x \cdot \prod_{p \leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$$

Lemme 2 (Mertens)

Il existe $c > 0$ tel que

$$\prod_{p \leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{c}{\ln z}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right)$$

Démonstration du théorème (I)

Montrons que :

$$\varphi(x) \leqslant \frac{x}{2}$$

On construit le recouvrement suivant :

A tout **nombre impair** m inférieur ou égale à x, on associe la chaîne $\boldsymbol{\mathcal{C}_m = \{m, 2m, 2^2m, \ldots, 2^\alpha m\}}$ où α est la plus grande puissance de 2 telle que $2^\alpha m \leqslant x$.

En groupant les chaînes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ en une chaîne $\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_1$, on a

$$\varphi(x) \leqslant \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1 \leqslant \frac{x}{2}$$

Montrons qu'il existe $c > 0$ telle que,

$$\varphi(x) \geqslant c \cdot x$$

Soient $(\mathcal{C}_i)_{1 \leqslant i \leqslant k(x)}$ un recouvrement de $\boldsymbol{k(x)}$ **chaînes** et z un paramètre.
Notons $\boldsymbol{\mathcal{N}_{x,z}}$ les entiers vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} < n \leqslant x \quad \text{et} \quad P^{-}(n) > z & (1) \\ \text{la chaîne } \mathcal{C}_i \text{ qui contient } n \text{ n'est pas réduite à } \{n\} & (2) \end{cases}$$

Soit n un entier de $\mathcal{N}_{x,z}$. D'après (2) il admet un voisin v dans sa chaîne et v divise n. En notant q le plus petit facteur premier de n, on a $v \leqslant \underbrace{\frac{n}{q} < \frac{x}{z}}_{\text{d'après (1)}}$.

On construit ainsi une application

$$\mathcal{V} : \mathcal{N}_{x,z} \longrightarrow \mathcal{V}_{x,z} = \left\{ v : v < \frac{x}{z} \right\}$$

Comme chaque entier de $\mathcal{V}_{x,z}$ admet au plus deux antécédents par $\mathcal{V}$, on a :

$$\frac{card\, \mathcal{N}_{x,z}}{2} \leqslant card\, \mathcal{V}_{x,z} \quad \text{ie} \quad \boldsymbol{card\, \mathcal{N}_{x,z} < \frac{2x}{z}}\ (*)$$

De plus, on a d'après les lemmes pour $2 \leqslant z \leqslant \ln x$ et x suffisamment grand :

$$card\, \underbrace{\left\{ \frac{x}{2} < n \leqslant x \mid P^{-}(n) > z \right\}}_{:= \mathcal{A}_{x,z}} = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\ln z} \right) (**)$$

Démonstration du théorème (II)

On a donc le schéma asymptotique suivant :

On peut donc choisir un z_0 suffisement grand pour que :

$card\,\mathcal{N}_{x,z_0} \leqslant \dfrac{card\,\mathcal{A}_{x,z_0}}{2}$

ie

$$card\,\mathcal{N}_{x,z_0} \leqslant \frac{1}{2} \cdot card\left\{\frac{x}{2} < n \leqslant x \mid P^{-}(n) > z_0\right\}$$

Donc au moins la moitié des entiers de $\mathcal{A}_{x,z_0}$ ne vérifient pas la condition (2) et donc leurs chaînes se réduisent à un entier.

Comme $card\,\mathcal{A}_{x,z_0} = \mathcal{O}(x)$, on a bien $\boldsymbol{k(x) = \mathcal{O}(x)}$

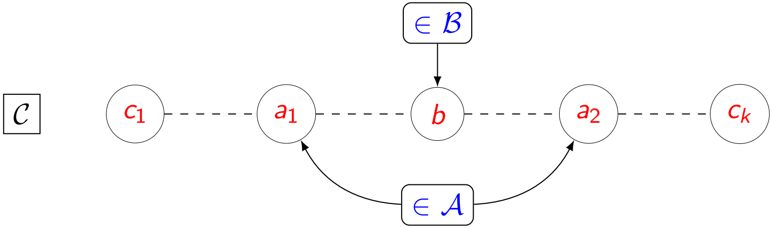
Lemme

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant la condition suivante :

"Pour toute chaîne $\mathcal{C}$ d'entiers inférieurs à n et toute paire $\{a_1, a_2\}$ d'éléments distincts de $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$, il existe dans $\mathcal{C}$ au moins un élément de $\mathcal{B}$ entre a_1 et a_2"

Alors

$$\varphi(n) \geqslant card\,\mathcal{A} - card\,\mathcal{B}$$



Démonstration du lemme

Soit $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{\varphi(n)}\}$ un recouvrement minimal du graphe en différentes chaînes. On a pour toute chaîne $\mathcal{C}_i$ que

$$card\,(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_i) \leqslant card\,(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_i) + 1$$

En sommant sur toutes les chaînes, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} card\,(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\varphi(n)} card\,(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_i) + \varphi(n)$$

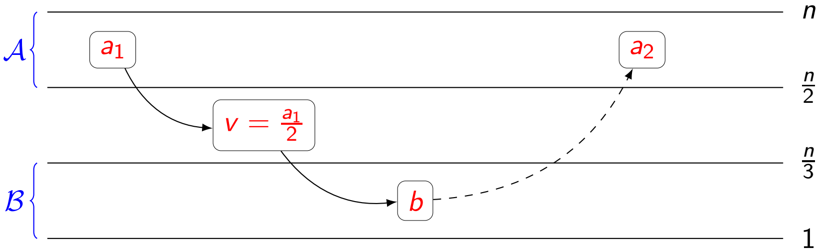
Comme les $\mathcal{C}_i$ forment une partition, on a bien le résultat souhaité

$$card\,\mathcal{A} \leqslant card\,\mathcal{B} + \varphi(n)$$

Démonstration du théorème

On applique le lemme aux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivant

$$\mathcal{A} = \left\{ k \mid \frac{n}{2} < k \leqslant n \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \left\{ k \mid 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{3} \right\}$$



On a alors

$$\varphi(n) \geqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \geqslant \frac{n}{6}$$