Révisions

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que le produit de n matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nul.

Exercice 2. On pose $f : x \mapsto [(x^2-1)^n]^{(n)}$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1\,;1[$.

Exercice 3. Soient $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k/n^2) - nf(0)$.

Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 4. Former le développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n}$ de

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

quand l'entier n tend vers l'infini.

Exercice 5. Soient $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\forall k \in \{0 \ldots n-1\}$, $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0,1[$.

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = AMB$$

Exprimer la trace de φ en fonction des traces de A et B.

Exercice 7. Pour tout entier naturel n on pose $L_n = \dfrac{n!}{(2n)!}((X^2-1)^n)^{(n)}$

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$
3. En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1\,;1[$.
   Indication : On pourra raisonner sur les racines d'ordres impaires de L_n.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et même somme.

Exercice 9. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, que l'on calculera, tel que, lorsque l'entier n tend vers l'infini

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = a + \frac{b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$