Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1. Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
On pose $g : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = f(x)\sin x.$$

Montrer que les intégrabilités de f et de g sont équivalentes.

Exercice 2. Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne sont pas intégrables sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 3. Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et positive. On suppose

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in [0\,;1[.$$

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = x^2\cos\left(1/x^2\right) \text{ si } x \in\,]0\,;1] \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0\,;1]$ mais que sa dérivée f' n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

Exercice 5. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.
Justifier l'existence, puis calculer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(f(a+x) - f(b+x)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t\lfloor 1/t\rfloor\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est continue, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Étudier le prolongement par continuité de g en 0.
2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.
3. Pour $0 < a < b$, montrer que
$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + ag^2(a) - bg^2(b)$$
puis montrer que $\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$
4. Étudier la nature de
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable.

1. Justifier
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \left|\int_0^{+\infty} \left|g(t)\right|\mathrm{d}t - \int_0^M \left|g(t)\right|\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$
2. En déduire que toute primitive de g est uniformément continue.

Exercice 9. Justifier et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)}.$$

Exercice 10. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$