Groupes

Exercice 1.

1. Montrer que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.
3. Montrer la divergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \sin n}$.

Exercice 2. Soit $(G,.)$ un groupe de cardinal $2n$.

1. Justifier que l'on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G en posant
$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}.$$
2. En déduire l'existence dans G d'un élément d'ordre 2.

Exercice 3. Soient a et b deux éléments d'ordre respectifs p et q d'un groupe abélien $(G,*)$.

1. On suppose que p et q sont premiers entre eux.
Montrer que l'élément ab est d'ordre pq.
2. On ne suppose plus p et q premiers entre eux.
L'élément ab est-il nécessairement d'ordre $\operatorname{ppcm}(p,q)$?

Exercice 4. Soit $(G,.)$ un groupe fini tel que
$$\forall g \in G, g^2 = e$$
où e est le neutre de G. On suppose G non réduit à $\{e\}$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 5. Soit p un nombre premier. On pose
$$G_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1 \right\}.$$

1. Montrer que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.
3. Montrer que G_p n'est pas engendré par un système fini d'éléments.

Exercice 6. Soit n un entier ≥ 3.

1. Montrer que pour tout entier impair a, on a
$$a^{2^{n-2}} \equiv 1 \; [2^n].$$
2. Le groupe $\left((\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*, \times\right)$ est-il cyclique ?

Exercice 7. Soit $(G,*)$ un groupe cyclique à n élément engendré par a.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'application $f : G \to G$ définie par
$$\forall x \in G, f(x) = x^r.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $(G,*)$.
2. Déterminer le noyau f.
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe engendré par a^d avec $d = \operatorname{pgcd}(n,r)$.
4. Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions ?

Exercice 8. Les groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^*,\times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 9. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G noté multiplicativement. On note $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer $\operatorname{Card}(HK)\operatorname{Card}(H \cap K) = \operatorname{Card} H \operatorname{Card} K$.

Exercice 10. Soit $(G,.)$ un groupe abélien fini de neutre e.

1. Soient x et y deux éléments de G d'ordres finis p et q premiers entre eux.
Montrer que l'élément $z = xy$ est d'ordre pq.
2. On note m le ppcm des ordres des éléments de $(G,.)$ et l'on introduit sa décomposition en facteurs premiers $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}$. Montrer qu'il existe un élément x_i dans G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ pour chaque $i \in [\![1\,;N]\!]$.
3. Établir l'existence dans G d'un élément d'ordre m exactement.