Année 2018-2019

STATISTIQUE EN GRANDE DIMENSION

Feuille d'exercices 4

Date limite le 21/12/2018 (après le 11/12/2018 soumettre uniquement par mail)

Exercice 10.

Le but de cet exercice est de montrer *l'inégalité de von Neumann*. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ deux matrices. Alors,

$$|\mathrm{Tr}(A^\top B)| \leq \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_j(B) \tag{1}$$

où $q = \min(m, k)$ et

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_q(A) \geq 0, \tag{2}$$

$$\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \cdots \geq \lambda_q(B) \geq 0 \tag{3}$$

sont les valeurs singulières de A et B.

1. En utilisant les SVD de A et B, montrer que

   $$|\mathrm{Tr}(A^\top B)| \leq \sum_{i,j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_i(B)d_{ij},$$

   où les coefficients d_{ij} vérifient

   $$\forall\ i, j : \quad d_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{d} d_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{d} d_{ij} \leq 1.$$

2. Soit D la matrice avec les éléments d_{ij}. Conclure que, pour montrer (1), il suffit de prouver l'inégalité

   $$\sum_{i,j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_i(B)d_{ij} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_j(B) \leq 0, \tag{4}$$

   pour tous $(\lambda_j(A))_{j=1}^{d}$ et $(\lambda_j(B))_{j=1}^{d}$ vérifiant (2), (3) et la condition

   $$\lambda_1(A) = \lambda_1(B) = 1.$$

3. Pour $r \in \{1, \dots, q\}$, définissons
$$\Lambda_r = \big\{\lambda \in \mathbb{R}^q : \ \lambda_1 = 1, \ 1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0, \ \lambda_j = 0, j > r\big\}.$$
Montrer que
$$\Lambda_r \subseteq \mathsf{conv}(\mu_1, \dots, \mu_r),$$
où
$$\mu_j = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j \text{ fois}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q,$$
et, pour les vecteurs $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^q$, on désigne par $\mathsf{conv}(x_1, \dots, x_r)$ leur enveloppe convexe.
4. Montrer que, pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ et tous $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^q$,
$$\sup_{\mathsf{conv}(x_1,\dots,x_r)} f(x) = \max_{j=1,\dots,r} f(x_j).$$
5. Déduire des deux questions précédentes que
$$\max_{\lambda \in \Lambda_r} \max_{\bar{\lambda} \in \Lambda_{\bar{r}}} \lambda^\top (D - I)\bar{\lambda} \leq \max_{j=1,\dots,r} \ \max_{i=1,\dots,\bar{r}} \ \mu_j^\top (D - I)\mu_i,$$
où $r = \text{rang}(A)$, $\bar{r} = \text{rang}(B)$ et I est la matrice identité $q \times q$.
6. Conclure en déduisant l'inégalité (4) de la Question 5 et des propriétés de la matrice D.

Exercice 11.

Montrer que le résultat du Théorème 6.1 du cours reste vrai si l'on remplace l'estimateur $\hat{A}^H$ par l'estimateur *soft thresholding* matriciel :
$$\hat{A}^S = \sum_{j=1}^{q} (\hat{\lambda}_j(Y) - \tau)_+ \hat{u}_j \hat{v}_j^\top.$$

Exercice 12.

Montrer que l'estimateur $\hat{A}^H$ est solution du problème de minimisation
$$\min_{A \in \mathbb{R}^{m \times k}} \Big(\|Y - A\|_F^2 + \tau^2 \text{rang}(A)\Big).$$