Topologie des espaces normés

Exercice 1. Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 2. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$..

1. Résultat préliminaire: On rappelle que (u_n) suite de Cauchy si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall p,q \geq N \quad |u_p - u_q| \leq \epsilon$$
Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est de Cauchy.
2. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non:
   (a) $A = \{$suites croissantes$\}$
   (b) $B = \{$suites convergeant vers 0$\}$
   (c) $C = \{$suites convergentes$\}$
   (d) $D = \{$suites admettant 0 pour v.a$\}$
   (e) $E = \{$suites périodiques$\}$.
   Indication : On pourra introduire $u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\delta^k$ où $\delta_n^p = 1$ si $p|n$ et 0 sinon.

Exercice 3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $\left|x-y\right| = d(x,A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\geq 0}$ appartient à E, on pose $\|a\| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Soit $F = \left\{a \in E \,\middle|\, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\right\}$.. L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 5. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une application continue vérifiant
$$f\circ f = f.$$

1. Montrer que l'ensemble
$$\left\{x \in [0;1] \,\middle|\, f(x) = x\right\}$$
est un intervalle fermé et non vide.
2. Donner l'allure d'une fonction f non triviale vérifiant les conditions précédentes.
3. On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est constante ou égale à l'identité.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
1) $\forall [a;b] \subset \mathbb{R}, f([a;b])$ est un segment ;
2) $y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$ est une partie fermée.

Montrer que f est continue.

Exercice 8. Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.

1. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E.
2. En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que
$$u_n \to +\infty, v_n \to +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \to 0.$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
Montrer que pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $\left\{u_n - v_p \,\middle|\, n,p \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\left\{\cos(\ln n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $[-1;1]$.
4. Déterminer l'adhérence de $\left\{\sin(u_n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
5. Déterminer l'adhérence de $\left\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.