Variables aléatoires

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right).$$

1. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.
2. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a;a[$.
   Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on a
   $$\mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0).$$

Exercice 2.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1;1]$. Montrer que
   $$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$
2. On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et
   $$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \leq \operatorname{ch} t \leq \exp(t^2/2).$$
3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout i, $|X_i| \leq a_i$. On pose
   $$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$
   Montrer
   $$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$
   Soit $\varepsilon > 0$. Montrer
   $$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$
4. En choisissant une bonne valeur de t, montrer
   $$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}\right).$$

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1. Calculer
   $$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$
2. Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 4. On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1. Reconnaˆitre la loi de T_1.
2. Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer le développement en série entière de
   $$\frac{1}{(1-t)^m}.$$
4. Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune des lois géométriques de paramètres p et $q \in]0;1[$. On pose

$$U = \min(X,Y) \quad \text{et} \quad V = \max(X,Y) - \min(X,Y)(ou\,|X-Y|??)$$

Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(X=j, Y=k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$.

Exercice 7. On lance cinq dés. Après ce premier lancer ceux des dés qui ont donné un « As » sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq « As ». On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer $P(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. En déduire que T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $(X = n)$ est-elle maximale ?
2. Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur du paramètre λ, la probabilité de $(X = n)$ est-elle maximale ?

Exercice 9. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ la matrice

$$\Sigma = \left(\text{Cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

1. Soit $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
   Exprimer la variance de X en fonction de la matrice Σ.
2. En déduire que les valeurs propres de la matrice Σ sont toutes positives.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques vérifiant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n) < +\infty.$$

Pour X un ensemble quelconque, on note 1_X la fonction indicatrice de X.

1. Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{E_n}$ (on convient $Z = +\infty$ si la série diverge).
   Prouvez que Z est une variable aléatoire discrète.
2. Soit
   $$F = \left\{\omega \in \Omega \middle| \omega \text{ n'appartient qu'à un nombre fini de } E_n\right\}.$$
   Prouver que F est un événement et que $P(F) = 1$.
3. Prouver que Z admet une espérance.

Exercice 11. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in \,]0;1[$ et l'on étudie la première apparition de deux succès consécutifs dans cette suite.

1. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe $n \geq 2$ vérifiant
   $$X_n = X_{n-1} = 1.$$
2. On note T la variable aléatoire donnée par
   $$T = \min\{n \geq 2 \mid X_n = X_{n-1} = 1\} \cup \{+\infty\}.$$
   Calculer $P(T = 2)$, $P(T = 3)$ et exprimer, pour $n \geq 4$, $P(T = n)$ en fonction de $P(T = n-1)$ et $P(T = n-2)$.
3. Justifier que T admet une espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 12. Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geq 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

1. Déterminer $P(T = k)$ et $P(T = k+1)$.
2. Soit $n \geq 1$, établir
   $$P(T = n+k) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n).$$
3. En déduire que la variable T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 13. Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$.
La variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ correspond alors au nombre de « six » obtenu après n lancers.

1. Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.
3. On définit alors la variable aléatoire
   $$T = \min\{n \geq 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}.$$
   Déterminer la loi de T.
4. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 14. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \text{ et } P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

1. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
   Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.

2. En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 15. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. On définit une fonction Y par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.