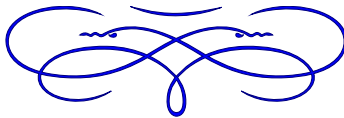


# Déterminants



## Exercice 1.

1. Calculer le déterminant (à coefficients réels)

$$D_n = \det A_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

2. Si  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$  et si  $a_i > 0$  pour tout  $i$ , montrer que  $P(\lambda) = \det(A_n - \lambda \cdot I_n)$  est scindé simple dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$ , tous distincts et  $P(x) = \det(A + xI_n)$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $P(a_i)$  et décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}$$

2. En déduire  $\det A$ .

**Exercice 3.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$  déterminé par  $\varphi_A(M) = AM$ . Calculer la trace et le déterminant de  $\varphi_A$ .

**Exercice 4.** On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geq 2)$$

1. Montrer que  $P_n$  admet  $n$  racines distinctes  $z_1, \dots, z_n$  dans  $\mathbb{C}$ .
2. Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + z_n \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite  $(H_n)$  avec  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Exercice 6.** Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On pourra introduire  $P(\lambda) = \det(A_n + \lambda \cdot J)$  où  $J$  désigne la matrice avec des 1 partout.

**Exercice 7.** Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n & 0 & 2 & \\ & n-1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

**Exercice 8.** Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer, en utilisant la dérivation, le déterminant suivant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ x^{n-1} & \ddots & \ddots & x & 1 \\ \frac{(n-1)!}{x^n} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \ddots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}_{[n]}$$