Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières:

1. $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$?

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n\geq 1} d(n) z^n \text{ et } \sum_{n\geq 1} s(n) z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 5. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum a_n^2 z^n.$$

Exercice 6. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

1. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$
2. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
3. Exprimer alors R' en fonction de R.

Exercice 7.

1. Donner l'intervalle de définition I de la fonction s qui au réel x associe

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

2. Quel est le signe de s' sur $I \cap \mathbb{R}_+$?
   Quelle est la limite de s en l'extrémité droite de $I \cap \mathbb{R}_+$?
3. Écrire $(1 - x)s'(x)$ sous forme d'une série et en déduire le signe de s' sur I.
4. Étudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)x.$$

   En déduire que la fonction s est convexe.

Exercice 8. Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
4. Montrer que quand $x \to 1^-$

$$(1 - x)f(x) \to 0.$$

Exercice 9. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1.$$

Exercice 10. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

1. Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.
2. Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 11. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n=\sum_{k=0}^n a_k$ et on suppose

$$S_n \to +\infty \text{ et } a_n/S_n \to 0.$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

Exercice 12. Donner un équivalent simple quand $x\to 1^-$ de

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Exercice 13.

1. Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence de
$$\sum (a_n \ln n) x^n \text{ et } \sum\left(a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n.$$
2. Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand $x\to 1^-$.

Exercice 14. Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R=1$.
On suppose l'existence d'un réel

$$\ell=\lim_{x\to 1^-} f(x).$$

1. Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?
2. Que dire si l'on sait de plus $a_n=o(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 15. Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n=o(p_n)$. On pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}.$$

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
2. Ici $p_n=n^q$ avec $q\in\mathbb{N}$ et $q\geq 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 16. Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de carré sommable, on pose

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

où la variable t est réelle.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
3. Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2\,;1/2]$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiquement nulle.

Exercice 17. Pour $x\in\,]-1\,;1[$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\alpha)=\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right).$$

Exercice 18. Soient $p\in\mathbb{N}$ et

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p} x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
2. Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 19. Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f: x\mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 20. Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{3n+2}.$$

Exercice 21. Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

Exercice 22. On pose $a_0=1$ puis pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k} a_{n-k}a_k.$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!}x^n$.

Exercice 23. On pose $a_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^n a_{n-k}a_k.$$

1. Donner une formule permettant de calculer
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
2. Calculer $S(x)$.
3. Calculer les a_n.
4. Donner un équivalent de la suite (a_n).

Exercice 24. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n}.$$