Devoir maison IV

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de montrer *l'inégalité de von Neumann*. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ deux matrices. Alors,

$$\left|\operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_j(B) \tag{1}$$

où $q = \min(m,k)$ et

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_q(A) \geq 0 \tag{2}$$
$$\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \cdots \geq \lambda_q(B) \geq 0 \tag{3}$$

sont les valeurs singulières de A et B.

Question 1.

En utilisant les SVD de A et B, montrer que

$$\left|\operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)\right| \leq \sum_{i,j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_i(B) d_{ij}$$

où les coefficients $d_{i,j}$ vérifient $\forall i,j :\quad d_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{q} d_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{q} d_{ij} \leq 1.$

Réponse 1.

Notons $u_j(A), v_j(A)$ (*respectivement* $u_j(B), v_j(B)$) les vecteurs intervenant dans la SVD de A (*respectivement* B).

En utilisant successivement la linéarité de la trace, l'inégalité triangulaire et la positivité des valeurs singulières, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)\right| &= \left|\operatorname{Tr}\left(\sum_{i,j} \lambda_i(A)\lambda_j(B) v_i(A) u_i(A)^T u_j(B) v_j(B)^T\right)\right| \\
&\leq \sum_{i,j} \lambda_i(A)\lambda_j(B) \left|\operatorname{Tr}\left(v_i(A) u_i(A)^T u_j(B) v_j(B)^T\right)\right| \\
&\leq \sum_{i,j} \lambda_i(A)\lambda_j(B) \left|\left(u_i(A)|u_j(B)\right)\cdot\left(v_i(A)|v_j(B)\right)\right| \\
&\leq \sum_{i,j} \lambda_i(A)\lambda_j(B)\cdot d_{i,j}
\end{aligned}$$

où $d_{i,j} = \left|\left(u_i(A)|u_j(B)\right)\cdot\left(v_i(A)|v_j(B)\right)\right|$ et $\left(\cdot\,|\,\cdot\right)$ désigne le produit scalaire usuel euclidien.

On a clairement $d_{i,j} \geq 0$.

- Montrons que $\sum_j d_{i,j} \leq 1$ à i fixé. En utilisant l'orthonomarlité des bases $\left(u_j(B) \right)_{1\leq j\leq q}$ et $\left(v_j(B) \right)_{1\leq j\leq q}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_j d_{i,j} &= \sum_j \left| \left(u_i(A) | u_j(B) \right) \right| \cdot \left| \left(v_i(A) | v_j(B) \right) \right| \\
&\leq \sum_j \frac{1}{2} \left\{ \left(u_i(A) | u_j(B) \right)^2 + \left(v_i(A) | v_j(B) \right)^2 \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |u_i(A)|_2^2 + |v_i(A)|_2^2 \right\} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

  la dernière inégalité provenant du caractère normé des vecteurs $u_i(A)$ et $v_i(A)$.
- Pour obtenir l'inégalité en sommant sur i à j fixé, il suffit de constater la symétrie de $D = \left(d_{i,j} \right)_{1\leq i,j\leq q}$ provenant de celle du produit scalaire.

Finalement les coefficients de D vérifient bien les inégalités demandées.

Question 2. Soit D la matrice avec les éléments $d_{i,j}$. Conclure que, pour montrer (1), il suffit de pouver l'inégalité

$$\sum_{i,j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_i(B)d_{ij} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_j(B) \leq 0 \tag{4}$$

pour tous $\left(\lambda_j(A)\right)_{j=1}^{d}$ et $\left(\lambda_j(B)\right)_{j=1}^{d}$ vérifiant (2), (3) et la condition $\lambda_1(A) = \lambda_1(B) = 1$.

Réponse 2.

Si $A = 0$ ou $B = 0$, l'inégalité est clairement vérifiée (*c'est même un égalité*). Supossons maintenant A et B non nuls. On a dans ce cas :

$$\lambda_1(A) > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1(B) > 0.$$

En normalisant les valeurs singulières $\lambda_i(A)$ et $\lambda_j(B)$ par $\lambda_1(A)$ et $\lambda_1(B)$ respectivement, l'inégalité (4) revient à montrer :

$$\sum_{i,j=1}^{q} \lambda'_j(A)\lambda'_i(B)d_{ij} - \sum_{j=1}^{q} \lambda'_j(A)\lambda'_j(B) \leq 0,$$

avec $\lambda'_k(\cdot) = \dfrac{\lambda_k(\cdot)}{\lambda_1(\cdot)}$ et les λ'_k vérifiant bien les conditions demandées.

Question 3.

Pour $r \in \{1 \ldots q\}$, définissons

$$\Lambda_r = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^q \ : \ \lambda_1 = 1, 1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0,\ \lambda_j = 0,\ j > r \right\}.$$

Montrer que

$$\Lambda_r \subseteq \operatorname{conv}(\mu_1, \ldots, \mu_r)$$

où

$$\mu_j = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j \text{ fois}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^q,$$

et, pour les vecteurs $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^q$, on désigne par $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_r)$ leur enveloppe convexe.

Réponse 3.

Montrons le résultat par récurrence forte sur r.

- **Initialisation** : $r=1$. Dans ce cas $\Lambda_r = \{\mu_1\} = \operatorname{conv}(\mu_1)$ et l'inclusion est vérifiée.
- **Hérédité** : Soit r tel que $2 \le r \le q$. Supposons le résultat acquis pour les rangs strictement inférieurs à r et soit $\lambda \in \Lambda_r$. On a :

$$\frac{\lambda - \lambda_r \cdot \mu_r}{1-\lambda_r} = \frac{1}{1-\lambda_r}(1-\lambda_r, \lambda_2 - \lambda_r, \ldots, \lambda_{r_0} - \lambda_r, 0, \ldots, 0)$$

avec $r_0 = \max\{i \in \{1 \ldots q\} \mid \lambda_i - \lambda_r > 0\}$. Notons γ le vecteur ci-dessus. On a $\gamma \in \Lambda_{r_0}$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r_0} \alpha_i \mu_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r_0} \alpha_i = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \ge 0.$$

D'où

$$\lambda = (1-\lambda_r)\gamma + \lambda_r \mu_r = \sum_{i=1}^{r_0} \alpha_i (1-\lambda_r)\mu_i + \lambda_r \mu_r$$

avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{r_0} \alpha_i(1-\lambda_r) + \lambda_r = 1$ et $\alpha_i(1-\lambda_r)$, λ_r positifs. D'où le résultat.

Question 4. Montrer que, pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ et tous $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^q$,

$$\sup_{\operatorname{conv}(x_1,\ldots\ldots,x_r)} f(x) = \max_{j=1,\ldots,r} f\left(x_j\right).$$

Réponse 4. Soit $x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_r)$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i$ où les α_i désignent des pondérations. En appliquant l'inégalité de Jensen, on a :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^r \alpha_i f(x_i) \le f\left(x_{i_0}\right)$$

avec $i_0 = \arg\max\{f(x_i) \mid i \in \{1 \ldots r\}\}$ et égalité pour $x = x_{i_0}$. En passant à gauche de l'inégalité au supremum lorsque x parcours $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_r)$, on obtient bien l'égalité souhaité.

Question 5.

Déduire des deux questions précédentes

$$\max_{\lambda \in \Lambda_r} \max_{\bar\lambda \in \Lambda_{\bar r}} \lambda^\top (D-I)\bar\lambda \le \max_{j=1,\ldots,r} \max_{i=1,\ldots,\bar r} \mu_j^\top (D-I)\mu_i$$

où $r = \operatorname{rg} A$, $\bar r = \operatorname{rg} B$ et I est la matrice identité $q \times q$.

Réponse 5. Tout d'abord remarquons que l'on peut transformer le membre de gauche dans (4) comme suit :

$$\sum_{i,j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_i(B)d_{ij} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(A)\lambda_j(B) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\bar{r}} \lambda_i(A)\left(d_{i,j}-\delta_{i,j}\right)\lambda_j(B) = \lambda(A)^T(D-I)\lambda(B)$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. Notons $f : \Lambda_r \times \Lambda_{\bar{r}} \to \mathbb{R}$, $(\lambda, \bar{\lambda}) \mapsto \lambda^T(D-I)\bar{\lambda}$ qui est bien convexe car linéaire. En utilisant $\Lambda_{\bar{r}} \subseteq \mathrm{conv}(\mu_1, \ldots, \mu_{\bar{r}})$ et la question précédente, on a successivement :

$$\forall \lambda \in \Lambda_r,\ \forall \bar{\lambda} \in \Lambda_{\bar{r}} \qquad f\left(\lambda, \bar{\lambda}\right) \le \sup_{\bar{\lambda}\in\Lambda_{\bar{r}}} f\left(\lambda, \bar{\lambda}\right) \le \sup_{\bar{\lambda}\in\mathrm{conv}\{\mu_1 \ldots \mu_{\bar{r}}\}} f\left(\lambda, \bar{\lambda}\right) = \max_{\bar{\lambda}\in\{\mu_1 \ldots \mu_{\bar{r}}\}} f\left(\lambda, \bar{\lambda}\right).$$

En réappliquant le même raisonnement à $g : \lambda \mapsto \max_{\bar{\lambda}\in\{\mu_1 \ldots \mu_{\bar{r}}\}} f\left(\lambda, \bar{\lambda}\right)$ qui est bien convexe en tant que maximum de fonctions convexes, on a le résultat souhaité.

Question 6.

Conclure en déduisant l'inégalité (4) de la question 5 et des propriétés de la matrice D.

Réponse 6.

On a que

$$\mu_j^\top(D-I)\mu_i = \sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}(d_{k,l}-\delta_{k,l}) = -\sum_{k=1}^{j}\left(1-\sum_{l=1}^{i} d_{k,l}\right) \le -\sum_{k=1}^{q}\left(1-\sum_{l=1}^{i} d_{k,l}\right) \le 0$$

car $1-\sum_{l=1}^{i} d_{k,l} \ge 1-\sum_{l=1}^{q} d_{k,l} \ge 0$ par la question 1. D'où $\max_{j=1,\ldots,r}\max_{i=1,\ldots,\bar{r}} \mu_j^\top(D-I)\mu_i \le 0$ et l'on a bien l'inégalité (4) demandé.

Exercice 2. Soit le modèle $Y = A^\star + W$ avec Y, $A^\star$, W dans $\mathbb{R}^{m\times k}$. On notera par la suite λ_j et $\hat{\lambda}_j$ les valeurs singulières des matrices $A^\star$ et Y respectivement. On suppose que la matrice W est σ-SG .

Soit l'estimateur *soft-thresholding* matriciel :

$$\hat{A}^S = \sum_{j=1}^{q}\left(\hat{\lambda}_j(Y)-\tau\right)_+ \hat{u}_j\hat{v}_j^\top,$$

avec $\tau > 0$ et soit δ dans $(0,1)$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}\left(\left\|\hat{A}^S - A^\star\right\|_F^2 \le C\sigma^2 \,\mathrm{rg}\, A^\star\left(m+k+\log\frac{1}{\delta}\right)\right) \ge 1-\delta,$$

avec C une constante absolue et τ que l'on spécifiera.

Solution 2.

On se place sur

$$\mathcal{A} := \{\|W\|_\infty \le r\} \qquad \text{avec} \qquad r = \sigma.3\sqrt{\log 3}\sqrt{m+k} + 2\sqrt{2\log\frac{1}{\delta}}.$$

Par le lemme 6.2, on a $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \ge 1-\delta$.

En introduisant $\hat{A} := \hat{A}^S$ pour alléger les notations, on a successivement:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{A}-A^\star\right\|_F^2 &\le \mathrm{rg}\left(\hat{A}-A^\star\right) \cdot \left\|\hat{A}-A^\star\right\|_\infty^2\\ &\le \left(\mathrm{rg}\,\hat{A}+\mathrm{rg}\,A^\star\right)\cdot\left\|\hat{A}-A^\star\right\|_\infty^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

- Montrons que $\operatorname{rg}\hat{A} \leq \operatorname{rg} A^\star$. On a

$$\operatorname{rg}\hat{A} = \operatorname{Card}\left\{j : \lambda_j\left(\hat{A}\right) > 0\right\} = \operatorname{Card}\left\{j : \left(\hat{\lambda}_j - \tau\right)_+ > 0\right\} = \operatorname{Card}\left\{j : \hat{\lambda}_j > \tau\right\}.$$

Soit j tel que $\hat{\lambda}_j > \tau$. En utilisant l'inégalité de Weyl, on a

$$\lambda_j = \lambda_j - \hat{\lambda}_j + \hat{\lambda}_j \geq -\max\left|\lambda_j - \hat{\lambda}_j\right| + \hat{\lambda}_j > -\left\|A^\star - Y\right\|_\infty + \tau = \tau - \|W\|_\infty \geq \tau - r$$

sur $\mathcal{A}$. En prenant $\tau = r$, on a bien $\lambda_j > 0$ et

$$\operatorname{rg}\hat{A} = \operatorname{Card}\left\{j : \hat{\lambda}_j > \tau\right\} \leq \operatorname{Card}\left\{j : \lambda_j > 0\right\} = \operatorname{rg} A^\star.$$

- Majorons le terme de droite dans l'inégalité (5). On a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A} - A^\star\right\|_\infty &\leq \left\|\hat{A} - Y\right\|_\infty + \left\|Y - A^\star\right\|_\infty \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{\lambda}_j - \left(\hat{\lambda}_j - \tau\right)_+\right)\hat{u}_j\hat{v}_j^{T}\right\| + \|W\|_\infty \\
&\leq \max_{1\leq j\leq q}\left\{\hat{\lambda}_j - \left(\hat{\lambda}_j - \tau\right)_+\right\} + r \\
&\leq \tau + r = 2r
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $0 \leq \hat{\lambda}_j - \left(\hat{\lambda}_j - \tau\right)_+ \leq \tau$ [1] et le fait que l'on soit sur $\mathcal{A}$.
En utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on a donc sur $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A}^S - A^\star\right\|_F^2 &\leq 2\operatorname{rg} A^\star \cdot 4r^2 \\
&= 8\operatorname{rg} A^\star \sigma^2\left(3\sqrt{\log 3}\sqrt{m+k} + 2\sqrt{2\log\frac{1}{\delta}}\right)^2 \\
&\leq C\operatorname{rg} A^\star \sigma^2\left(m+k+\log\frac{1}{\delta}\right)
\end{aligned}$$

avec $C := 16\max\{9\log 3, 8\}$ constante indépendante des variables du problème.

Exercice 3.
Montrer que l'estimtaeur $\hat{A}^H$ est solution du problème de minimisation

$$\min_{A\in\mathbb{R}^{m\times k}}\left(\|Y - A\|_F^2 + \tau^2\operatorname{rg} A\right). \tag{6}$$

Solution 3. Notons $\hat{A}$ une solution du problème de minimisation (6). Développons le premier terme :

$$\|A - Y\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|Y\|_F^2 - 2\operatorname{Tr} A^T Y.$$

Le terme $\|Y\|_F^2$ ne dépendant pas de la variable d'optimisation A, on a

$$\hat{A} \in \operatorname*{arg\,min}_{A\in\mathbb{R}^{m\times k}}\{\|A\|_F^2 - 2\operatorname{Tr} A^T Y + \tau^2\operatorname{rg} A\}.$$

1. En effet si $\hat{\lambda}_j \leq \tau$, alors l'expression évaluée vaut $\hat{\lambda}_j$ qui est bien inférieur à τ. Sinon $\hat{\lambda}_j > \tau$ et l'expresssion évaluée vaut exactement τ. Pour la positivité, il suffit de constater que λ_j et τ sont tous deux positifs.

Notons $V : \mathbb{R}^{m\times k} \to \mathbb{R}, A \mapsto \|A\|_F^2 - 2\operatorname{Tr} A^\intercal Y + \tau^2 \operatorname{rg} A$. En exprimant les quantités en terme de valeurs singulières et en appliquant l'inégalité de Von Neumann, on a :

$$\begin{aligned}
V(A) &\geq \sum_j \lambda_j^2(A) - 2\sum_j \hat{\lambda}_j \lambda_j(A) + \tau^2 \sum_j \mathbb{1}_{\lambda_j(A)>0} \\
&= \sum_j \left\{ \lambda_j^2(A) - \hat{\lambda}_j \lambda_j(A) + \tau^2 \mathbb{1}_{\lambda_j(A)>0} \right\} \\
&\geq \min_{\substack{t=(t_1\dots t_q) \\ t_1\geq t_2\geq \dots t_q \geq 0}} \sum_j \left\{ t_j^2 - \hat{\lambda}_j t_j + \tau^2 \mathbb{1}_{t_j>0} \right\} \\
&\geq \min_{t_j\geq 0} \sum_j \left\{ t_j^2 - \hat{\lambda}_j t_j + \tau^2 \mathbb{1}_{t_j>0} \right\}.
\end{aligned}$$

On notera que le passage de l'avant-dernière inégalité à la dernière est en réalité une égalité, la valeur de la somme ne dépendant pas de l'indexation choisie pour les t_j.

Introduisons la fonction réelle $g(x) = x^2 - 2\hat{\lambda}x + \tau^2 \mathbb{1}_{x>0}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. On peut réécrire g comme

$$g(x) = \begin{cases} \left(x - \hat{\lambda}\right)^2 + \tau^2 - \hat{\lambda}^2 & \text{si x>0} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Si $\tau^2 > \hat{\lambda}^2$[2], alors $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ d'où $x = 0$ est la seule solution qui minimise g.
- Si $\tau^2 = \hat{\lambda}^2$, alors les valeurs optimales sont $x = 0$ et $x = \hat{\lambda}$.
- Si $\tau^2 < \hat{\lambda}^2$, alors g est négative strictement sur l'intervalle $(\hat{\lambda} - \sqrt{\hat{\lambda}^2 - \tau^2}, \hat{\lambda} + \sqrt{\hat{\lambda}^2 - \tau^2})$ avec un minimum atteint en $x = \hat{\lambda}$.

Finalement l'estimateur de *hard-thresholding* matricielle définie par

$$\hat{A}^H = \sum_{j=1}^q \hat{\lambda}_j I\left(\hat{\lambda} > \tau\right) \hat{u}_j \hat{v}_j^\top$$

a bien ses valeurs singulières vérifiant les conditions d'optimalités ci-dessus, d'où le résultat.

2. *i.e.* $\tau > \hat{\lambda}$ puisque les deux termes sont positifs.