Etude des matrices de Wigner à entrées gaussiennes complexes

- *Documents autorisés.*
- *La* **clarté** *et la* **précision** *de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation finale.*
- *Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale.*

Le modèle de Wigner à entrées gaussiennes complexes

On dit qu'une variable X est une gaussienne complexe centrée réduite, notée $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, si

$$X = \frac{U + \boldsymbol{i}V}{\sqrt{2}} \ ,$$

où U et V sont des gaussiennes réelles indépendantes, centrées et réduites, i.e. $U, V \sim \mathcal{N}(0,1)$. On vérifiera que pour une telle variable,

$$\mathbb{E}(X) = 0\,, \quad \mathbb{E}|X|^2 = 1\,, \quad \mathbb{E}(X^2) = 0\ .$$

On appelera matrice de Wigner a entrées gaussiennes complexes une matrice $X = (X_{k\ell}; 1 \le k, \ell \le n)$ de dimensions $n \times n$ définie par

- Les $X_{k\ell}$ sont indépendantes pour $1 \le k \le n$ et $k \le \ell \le n$ ($=$ entrées sur et au dessus de la diagonale indépendantes).
- Pour $k > \ell$, $X_{k\ell} = \overline{X_{\ell k}}$.
- $X_{kk} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X_{k\ell} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ pour $k < n$.

Une telle matrice est hermitienne, avec entrées réelles sur la diagonale et complexes au dessus. L'objectif du problème est d'étudier les propriétés du spectre de $\frac{1}{\sqrt{n}}X$ lorsque $n \to \infty$.

Rappels et compléments

La loi du demi-cercle

La loi du demi-cercle est une distribution de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{P}_{sc}(\,dx) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+} \quad \text{où} \quad x_+ = \max(x,0)\,.$$

La transformée de Stieltjes $g_{sc}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{P}_{sc}(\,d\lambda)}{\lambda - z}$ est l'unique solution X de l'équation

$$X^2 + zX + 1 = 0$$

qui est une transformée de Stieltjes.

Formules de dérivation de la résolvante

Étant donnée une matrice hermitienne X $n \times n$ et la résolvante

$$Q(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - zI_n\right)^{-1} \ . \tag{1}$$

On peut montrer facilement les formules de différentiation suivantes :

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathrm{Re}(X_{k\ell})} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left(Q_{ik}Q_{\ell j} + Q_{i\ell}Q_{kj}\right) \quad \text{pour} \quad k \ne \ell, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathrm{Im}(X_{k\ell})} = -\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{n}}\left(Q_{ik}Q_{\ell j} - Q_{i\ell}Q_{kj}\right) \quad \text{pour} \quad k \ne \ell, \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kk}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{ik}Q_{kj}\ . \tag{4}$$

On rappelle que pour $z = x + \boldsymbol{i}y$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \ .$$

Formule d'intégration par parties et inégalité de Poincaré

Étant donné un vecteur gaussien **réel** centré $\vec{\boldsymbol{x}} = (X_1, \cdots, X_n)^T$, de matrice de covariance $R = \mathbb{E}(\vec{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{x}}^T)$ et $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction régulière de croissance au plus polynomiale à l'infini, alors on a l'identité suivante :

$$\mathbb{E}X_i\Phi(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{k=1}^{n} R_{ik}\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial X_k}\Phi(X_1, \cdots, X_n) \ ,$$

appelée formule d'intégration par parties.
Si de plus Φ admet des dérivées partielles de croissance au plus polynomiale à l'infini, alors

$$\mathrm{var}(\Phi(\vec{\boldsymbol{x}})) \ \leq \ \sum_{1\leq i,j\leq n} R_{ij}\mathbb{E}\,\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}\overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j}\right)} \ .$$

En particulier, si les composantes X_i du vecteur $\vec{\boldsymbol{x}}$ sont indépendantes, chacune de variance σ_i^2, alors

$$\mathbb{E}X_i\Phi(X_1, \cdots, X_n) = \sigma_i^2\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial X_i}\Phi(X_1, \cdots, X_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(\Phi(\vec{\boldsymbol{x}})) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \ \mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}\right|^2 \ .$$

Préliminaires

Soit X une matrice de Wigner et Q la résolvante définie en (1).

1. **[1 pt]** Montrer que pour $k \neq \ell$,

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{k\ell}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{ik}Q_{\ell j} \ , \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \overline{X_{k\ell}}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{i\ell}Q_{kj} \ .$$

Soit $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant les hypothèses pour l'i.p.p. et l'inégalité de Poincaré.

2. **[2 pts]** Montrer que

$$\mathbb{E}X_{k\ell}\Phi(X) = \mathbb{E}\frac{\partial}{\partial \overline{X_{k\ell}}}\Phi(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\overline{X_{k\ell}}\Phi(X) = \mathbb{E}\frac{\partial}{\partial X_{k\ell}}\Phi(X) \ .$$

3. **[2 pts]** Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ différentiable et $z = x + \boldsymbol{i}y$. Montrer que

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2\right\}$$

4. **[2 pts]** En remarquant que

$$\Phi(X) = \Phi(X_{kk}, \mathrm{Re}(X_{k\ell}), \mathrm{Im}(X_{k\ell});\ 1 \leq k, \ell \leq n;\ k < \ell) \ ,$$

montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\,\Phi(X) \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial \mathrm{Re}(X_{k\ell})}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial \mathrm{Im}(X_{k\ell})}\right|^2 \ , \\ &\leq \quad \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_{k\ell}}\right|^2 + \sum_{k<\ell}\mathbb{E}\left|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial \overline{X_{k\ell}}}\right|^2 \ . \end{aligned}$$

5. **[3 pts]** Soit $g_n(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Trace}\, Q(z)$. Montrer pour $k < \ell$

$$\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}} = \alpha_n [Q^2]_{kk} \ , \quad \frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{k\ell}} = \beta_n [Q^2]_{\ell k} \ , \quad \frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{k\ell}}} = \delta_n [Q^2]_{k\ell} \ ,$$

où α_n, β_n et δ_n sont des constantes dépendant de n à déterminer.

6. **[4 pts]** Démontrer que

$$\mathrm{var}\, g_n(z) \quad \leq \quad \frac{1}{n^3}\mathbb{E}\,\mathrm{Trace}\, Q^2(z) Q^2(\bar{z}) \ = \ \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7. **[1 pt]** Soit f la transformée de Stieltjes d'une probabilité sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$g(z) = -\frac{1}{z + f(z)}$$

est la transformée de Stieltjes d'une probabilité sur $\mathbb{R}$. En déduire une majoration de $|z + f(z)|^{-1}$.

8. **[3 pts]** Soit $z \mapsto g_\delta(z)$ la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation

$$g_\delta^2 + z g_\delta + 1 = \delta \ .$$

Montrer que $g_\delta(z) - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z(\delta)$.

Convergence de la mesure spectrale

On prendra $z \in \mathbb{C}^+$.

9. **[1 pt]** En utilisant l'identité $Q^{-1}Q = I$, montrer que pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E} X_{ii} Q_{ij} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\neq i}\mathbb{E}\left(X_{ik}Q_{kj}\right) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}$$

10. **[2 pts]** En déduire que

$$-\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(Q_{ij}\sum_{k=1}^n Q_{kk}\right) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij} \ .$$

11. **[3 pts]** Puis que

$$[\mathbb{E}g_n(z)]^2 + z\mathbb{E}g_n(z) + 1 = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \ .$$

12. **[2 pts]** En déduire que

$$\mathbb{E}g_n(z) - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \ . \qquad (5)$$

13. **[2 pts]** Soit L_n la mesure spectrale de la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}X$. Montrer que presque sûrement

$$L_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{sc} \ ,$$

où $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ représente la convergence en distribution.