Déterminants

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$. Montrer que $2^{n-1} \mid \det A$.

Exercice 2. Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Établir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par $\varphi_A(M) = AM$. Calculer la trace et le déterminant de φ_A.

Exercice 4. On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geq 2)$$

1. Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.
2. Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite (H_n) avec $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 6. Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On pourra commencer par traiter le cas $b = c$.

Exercice 7. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Exercice 8.

1. Résoudre suivant $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ x - ay + z = 1 \\ ax - 2y + z = a \end{cases}$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Résoudre

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4 \end{cases}$$

Indication: On pourra introduire un polynôme.

Exercice 9. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer, en utilisant la dérivation, le déterminant suivant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \ddots & \ddots & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \ddots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}_{[n]}$$