Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1. Établir que
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Montrer que la fonction f_n donnée par
$$f_n(x)=\frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la suite de terme général $u_n = n\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 3. Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,
$$I_n=\int_0^{+\infty} nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$
Déterminer la limite de I_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 4. Étudier
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. Déterminer un équivalent de
$$\int_0^n\sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 7. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8. Établir que
$$\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 9.

1. Établir
$$\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire
$$\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

   Cette valeur est appelée constante de Catalan, elle vaut approximativement $0,916$.

Exercice 10. Montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}=\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11. Déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de
$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 12. On pose
$$I_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$
pour tout entier $n>0$.

1. Trouver la limite ℓ de (I_n).
2. Donner un équivalent de $(\ell-I_n)$.
3. Justifier
$$\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$
4. Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

Exercice 13. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 14. Donner la nature de la série de terme général

$$u_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15. Montrer que, pour $a>0$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}.$$

Exercice 16. Pour tout $\alpha>0$, établir que

$$\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$$

Exercice 17.

1. Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x>0$

$$f(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
3. Calculer $f(x)+f(x+1)$ pour $x>0$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x\to 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 18. Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 19. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Définition de f.
2. Continuité et dérivabilité de f.
3. Écrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 20. Pour $x>0$, on pose

$$F(x)=\int_0^1\frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x)=F(x)+F(1/x).$$

3. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1\frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2+2t\,\mathrm{ch}(\theta)+1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21. Pour tout x réel, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 22. Ensemble de définition, dérivée et valeur de

$$f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 23. Pour $x\in[0;\pi/2]$, on pose

$$F(x)=\int_0^1\frac{\ln\left(1+2t\cos(x)+t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

- Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$
- Calculer $F'(x)$ sur $[0;\pi/2]$
- Donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$ sachant

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 24. L'objectif de ce sujet est de calculer

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x\geq 0$, on pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie
2. Déterminer une équation linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0;+\infty[$.
3. Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 25. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, soit

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier la définition de $f(x)$.
2. Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $f(x)$ si $x\in\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 26. Soit F la fonction définie par:

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer l'expression de $F(x)$.
3. Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$