Anneaux

Exercice 1. Soient a, b deux éléments d'un anneau $(A, +, \times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0.
Montrer que a et b sont inversibles.

Exercice 2. On note

$$\mathbb{Z}[i] = \left\{a + ib \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication des nombres complexes.
2. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, on pose $N(z) = |z|^2$. Vérifier
$$\forall (z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2, N(zz') = N(z)N(z') \text{ et } N(z) \in \mathbb{N}.$$
3. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 3. Soit

$$A = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*, \text{ impair}\right\}.$$

1. Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 4. Un anneau A est dit régulier si

$$\forall x \in A, \exists y \in A, xyx = x.$$

On considère un tel anneau A et l'on introduit

$$Z = \{x \in A \,|\, \forall a \in A, ax = xa\}.$$

1. Montrer que Z est un sous-anneau de A.
2. Vérifier que Z est régulier.

Exercice 5. Soit $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une $\mathbb{Q}$-base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K.
2. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$.

1. Calculer $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
2. Soient m et n premiers entre eux.
On considère l'application $f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ définie par $f(\overline{x}) = (\hat{x}, \tilde{x})$.
Montrer que f est bien définie et réalise un isomorphisme d'anneaux.
3. En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
4. Exprimer $\varphi(n)$ selon la décomposition primaire de n.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

1. Montrer que si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, il existe a divisant n vérifiant $H = <\overline{a}>$.
2. Observer que si $d \mid n$ il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'ordre d.
3. Justifier que si $d \mid n$ le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.
4. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Exercice 8. Quels sont les idéaux d'un corps $\mathbb{K}$?

Exercice 9. On note

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{p}{10^n} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

l'ensemble des nombres décimaux.

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Montrer que les idéaux de $\mathbb{D}$ sont principaux (c'est-à-dire de la forme $a\mathbb{D}$ avec $a \in \mathbb{D}$).

Exercice 10. Soit I un idéal d'un anneau commutatif A. On note $R(I)$ l'ensemble des éléments x de A pour lesquels il existe un entier n non nul tel que $x^n \in I$.

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.
2. Montrer que si I et J sont deux idéaux alors
$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \text{ et } R(I + J) \supset R(I) + R(J).$$

3. On suppose que $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers n non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est exactement l'ensemble des entiers sans facteurs carrés.

Exercice 11. Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

1. Soit p un entier et q un entier strictement positif premier avec p. Montrer que si $p/q \in A$ alors $1/q \in A$.
2. Soit I un idéal de A autre que $\{0\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $I \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ et qu'alors $I = nA$.
3. Soit p un nombre premier. On pose
$$Z_p = \left\{ a/b \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, p \wedge b = 1 \right\}.$$
Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ alors x ou $1/x$ appartient à Z_p.
4. On suppose ici que x ou $1/x$ appartient à A pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$. On note I l'ensemble des éléments non inversibles de A.
Montrer que I inclut tous les idéaux stricts de A. En déduire que $A = \mathbb{Q}$ ou $A = Z_p$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 12. Soit A un anneau intègre. On suppose que l'anneau A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux.
Montrer que A est un corps.

Exercice 13. Soit p un nombre premier. Calculer dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$$\sum_{k=1}^{p} \overline{k} \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \overline{k}^2.$$

Exercice 14. On se propose d'établir qu'il n'existe pas d'entiers $n \geq 2$ tels que n divise $2^n - 1$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'un tel entier n existe. On introduit p un facteur premier de n.

1. Montrer que la classe de 2 est élément du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que son ordre divise n et $p-1$.
2. Conclure