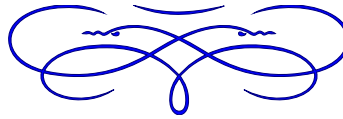


Topologie des espaces normés



Exercice 1. Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 2. On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

1. Résultat préliminaire: On rappelle que (u_n) suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall p, q \geq N \quad |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est de Cauchy.

2. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non:
 - (a) $A = \{\text{suites croissantes}\}$
 - (b) $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$
 - (c) $C = \{\text{suites convergentes}\}$
 - (d) $D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour v.a.}\}$
 - (e) $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Indication : On pourra introduire $u^p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} \delta^k$ où $\delta_n^p = 1$ si $p|n$ et 0 sinon.

Exercice 3. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{C} telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ appartient à E , on pose $\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
2. Soit $F = \left\{ a \in E \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$. L'ensemble F est-il ouvert? fermé? borné?

Exercice 5. Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une application continue vérifiant

$$f \circ f = f.$$

1. Montrer que l'ensemble

$$\{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$$

est un intervalle fermé et non vide.

2. Donner l'allure d'une fonction f non triviale vérifiant les conditions précédentes.
3. On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est constante ou égale à l'identité.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que \bar{F} est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 7. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- 1) $\forall [a; b] \subset \mathbb{R}, f([a; b])$ est un segment;
- 2) $y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$ est une partie fermée.

Montrer que f est continue.

Exercice 8. Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E .

1. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E .
2. En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \rightarrow 0.$$

1. Soient $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \epsilon$.
Montrer que pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \epsilon$.
2. En déduire que $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1; 1]$.
4. Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$.