Khôlles de Mathématiques $\mathbb{HXII}$
Fonctions usuelles

N. CLOAREC

Du 17-10-16 au 5-11-16

Exercice 1

a) Établir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y - x|}$.

b) Ce résultat est-il encore vrai en terme de racine cubique ?

Exercice 2

a) Calculer $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$ et $\tan 3\theta$ respectivement en fonction de $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$.

b) Résoudre l'équation :

$$x^3 - 3\tan\frac{\pi}{12}x^2 - 3x + \tan\frac{\pi}{12} = 0$$

Exercice 3 Soit $0 < a \leq b$. On pose $f\colon x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
En étudiant f et montrer que $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$.

Exercice 4 Résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c = 3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$

b) $\sin x + \sin 3x = 0$

c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

d) $\cos x + \cos^5 x + \cos 7x = 3$

Exercice 6 Soient $x_1, \dots, x_{13}$ des réels. Montrer qu'il existe i et j dans $\{1, \dots, 13\}$ tels que $i \neq j$ et

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 2 - \sqrt{3}$$

Exercice 7 Simplifier :

a) $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

b) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$.

Exercice 8 Étudier les fonctions suivantes afin de les représenter :

a) $f\colon x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$

b) $f\colon x \mapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$

c) $f\colon x \mapsto \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

d) $f\colon x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exercice 9 Soient a et α deux réels.
Résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2a\operatorname{ch}\alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2a\operatorname{sh}\alpha \end{cases}$$

Exercice 10 Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, il existe un entier n tel que

$$\left|x - n^2\right| \leq \sqrt{x - \frac{1}{4}}$$