Suites et séries de fonctions

Exercice 1. On pose, pour $x \geq 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. On pose

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0;n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(t) = n\big(f(t+1/n) - f(t)\big).$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.

Exercice 5. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Préciser le sens de variation de S.
3. Établir
$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x.$$
4. Donner un équivalent de S en 0.
5. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0;1].$$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

Exercice 7. Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}.$$

Exercice 8. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

1. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 9. Pour $x \geq 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

1. Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}_+$, $S(x)$ est définie ?
2. Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.
3. Étudier la continuité de S sur $[0;1[$ puis sur $]1;+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variation de S.

Exercice 10. On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^-.

Exercice 11. Définition, continuité et dérivabilité de

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Exercice 12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan \sqrt{n+x} - \arctan \sqrt{n}.$$

1. Étudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 13. Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n.
On suppose que la série de terme général $a_n\big(1+|x_n|\big)$ converge.
On pose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 14. Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th} n.$$

1. Établir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \operatorname{th} x.$$

4. Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 16. On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I:

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x).$$