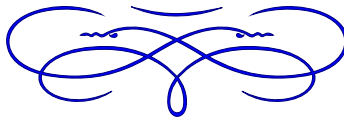


Arithmétique et Polynômes



Exercice 1. Trouver tous les entiers n strictement positifs pour lesquels 2^n divise $3^n - 1$.

Exercice 2. Soient a_1, \dots, a_{n+1} des entiers deux à deux distincts dans $\{1, \dots, 2n\}$.

1. Montrer qu'il existe i et j tels que a_i est premier avec a_j .
2. Montrer qu'il existe i et j distincts tels que a_i divise a_j .

Exercice 3. Un nombre n est dit parfait si $\sigma(n) = 2n$ (où σ désigne la somme des diviseurs positifs). Montrer que l'entier n est parfait pair si et seulement s'il est de la forme $2^{k-1}(2^k - 1)$ avec $2^k - 1$ premier.

Exercice 4. Soient a, b et c des entiers strictement positifs, premiers entre eux dans leur ensemble, et tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Prouver que $a + b$ est un carré parfait.

Exercice 5. Trouver tous les entiers positifs x, y, z tels que : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$

Exercice 6. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n .

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré ≥ 2 , montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.

Exercice 8. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t) dt = k + 1$$

Exercice 9. On cherche les polynômes P non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X - 1)P(X)$$

1. Montrer que toute racine d'un tel P est de module 1.
2. Déterminer les polynômes P .

Exercice 10. Factoriser le polynôme $(X + i)^n - (X - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$$

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n .
2. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 L_n(t)Q(t)dt = 0$
3. En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $] -1; 1[$.
Indication : On pourra raisonner sur les racines d'ordres impaires de L_n .