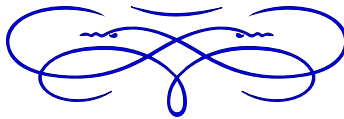


Groupes



Exercice 1.

1. Montrer que tout sous-groupe additif de \mathbb{R} qui n'est pas monogène est dense dans \mathbb{R} .
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.
3. Montrer la divergence de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n \sin n}$.

Exercice 2. Soit $(G, .)$ un groupe de cardinal $2n$.

1. Justifier que l'on définit une relation d'équivalence \mathcal{R} sur G en posant

$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}.$$

2. En déduire l'existence dans G d'un élément d'ordre 2.

Exercice 3. Soient a et b deux éléments d'ordre respectifs p et q d'un groupe abélien $(G, *)$.

1. On suppose que p et q sont premiers entre eux.
Montrer que l'élément ab est d'ordre pq .
2. On ne suppose plus p et q premiers entre eux.
L'élément ab est-il nécessairement d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$?

Exercice 4. Soit $(G, .)$ un groupe fini tel que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

où e est le neutre de G . On suppose G non réduit à $\{e\}$.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 5. Soit p un nombre premier. On pose

$$G_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1 \right\}.$$

1. Montrer que G_p est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
2. Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.

3. Montrer que G_p n'est pas engendré par un système fini d'éléments.

Exercice 6. Soit n un entier ≥ 3 .

1. Montrer que pour tout entier impair a , on a

$$a^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}.$$

2. Le groupe $((\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*, \times)$ est-il cyclique?

Exercice 7. Soit $(G, *)$ un groupe cyclique à n élément engendré par a .

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'application $f: G \rightarrow G$ définie par

$$\forall x \in G, f(x) = x^r.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $(G, *)$.
2. Déterminer le noyau f .
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe engendré par a^d avec $d = \text{pgcd}(n, r)$.
4. Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions?

Exercice 8. Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et (\mathbb{Q}^*, \times) sont-ils isomorphes?

Exercice 9. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G noté multiplicativement. On note $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer $\text{Card}(HK)\text{Card}(H \cap K) = \text{Card } H \text{ Card } K$.

Exercice 10. Soit $(G, .)$ un groupe abélien fini de neutre e .

1. Soient x et y deux éléments de G d'ordres finis p et q premiers entre eux.
Montrer que l'élément $z = xy$ est d'ordre pq .
2. On note m le ppcm des ordres des éléments de $(G, .)$ et l'on introduit sa décomposition en facteurs premiers $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}$. Montrer qu'il existe un élément x_i dans G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ pour chaque $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$.
3. Établir l'existence dans G d'un élément d'ordre m exactement.