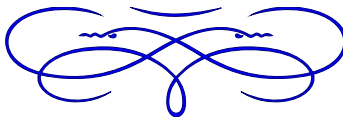


Intégration



Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes:

1.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

3. Avec $\alpha \in]0, \pi[$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha \cos x} dx$$

Exercice 2.

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Établir

$$\int_0^\pi t f(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt$$

2. En déduire la valeur de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx$$

Exercice 3. Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k/n^2) - n f(0)$$

Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Exercice 4. Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall k \in \{0 \dots n-1\}, \quad \int_0^1 x^k f(x) dx = 0$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0, 1[$.

Exercice 5. Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de

$$\int_0^1 x^n f(x) dx$$

Indication : On pourra commencer par le cas où f est \mathcal{C}^1 .