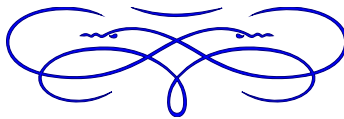


# Intégration sur un intervalle quelconque



**Exercice 1.** Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive et décroissante.

On pose  $g: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$g(x) = f(x) \sin x.$$

Montrer que les intégrabilités de  $f$  et de  $g$  sont équivalentes.

**Exercice 2.** Montrer que les fonctions  $t \mapsto \sin t$  et  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  ne sont pas intégrables sur  $[0; +\infty[$ .

**Exercice 3.** Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et positive. On suppose

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in [0; 1[.$$

Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

**Exercice 4.** Soit  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x) = x^2 \cos(1/x^2) \text{ si } x \in ]0; 1] \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0; 1]$  mais que sa dérivée  $f'$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ .

**Exercice 5.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  et  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admettant une limite finie  $\ell$  en  $-\infty$  et telle que  $\int_0^{+\infty} f$  existe.

Justifier l'existence, puis calculer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx.$$

**Exercice 6.** Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t \lfloor 1/t \rfloor dt.$$

**Exercice 7.** Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

où  $f$  est continue, de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Étudier le prolongement par continuité de  $g$  en 0.

2. Exprimer  $g'(x)$  en fonction de  $f(x)$  et de  $g(x)$  pour  $x > 0$ .

3. Pour  $0 < a < b$ , montrer que

$$\int_a^b g^2(t) dt = 2 \int_a^b f(t)g(t) dt + ag^2(a) - bg^2(b)$$

puis montrer que 
$$\sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t) dt}.$$

4. Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt.$$

**Exercice 8.** Soit  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et intégrable.

1. Justifier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \left| \int_0^{+\infty} |g(t)| dt - \int_0^M |g(t)| dt \right| \leq \varepsilon.$$

2. En déduire que toute primitive de  $g$  est uniformément continue.

**Exercice 9.** Justifier et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)}.$$

**Exercice 10.** Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx.$$