Intégration

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes:

1. $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3}\,\mathrm{d}x$$

3. Avec $\alpha \in]0,\pi[$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2.

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Établir
$$\int_0^{\pi} t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire la valeur de
$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3. Soient $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2) - nf(0)$$

Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 4. Soient $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $n \in \mathbb{N}^{\star}$ tels que

$$\forall k \in \{0\ldots n-1\}, \quad \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0,1[$.

Exercice 5. Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ tel que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Indication : On pourra commencer par le cas où f est $\mathcal{C}^1$.