Calculs - Sommations

Exercice 1. Calculer

$$a)\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j} \qquad b)\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij \qquad c)\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i+j$$

Exercice 2. Calculer :

$$a)\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j} \qquad b)\ \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} sup(i,j)$$

Exercice 3. Calculer :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[x^i\binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}\right]$$

Exercice 4. Calculer :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n^2} E\left(\sqrt{k}\right) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n^3} E\left(\sqrt[3]{k}\right)$$

Exercice 5. Calculer :

$$\sum_{i=0}^{2n} E\left(\frac{i}{2}\right)\binom{2n}{i}p^i(1-p)^{2n-i}$$

Exercice 6. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{3}\right)}\binom{n}{3k}$$

Indication : On pourra introduire $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 7. Calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{2n}{2k} \qquad n>1$$

Indication : On pourra introduire $S' = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2\binom{2n}{2k+1}$.