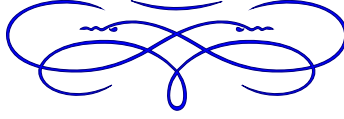


Exercices chapitre I



Exercice 1. Soient $\varepsilon, L > 0$ et \mathcal{F}_L l'ensemble des applications L -Lipschitziennes de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Soit \mathcal{A} un algorithme renvoyant, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_L$, un nombre $x^* \in [0; 1]$ tel que $f(x^*) \leq \min_{[0,1]} f + \varepsilon$. On suppose que \mathcal{A} fait uniquement appel à l'oracle d'ordre zéro.

Question 1. Montrer que \mathcal{A} doit faire appel à l'oracle d'ordre zéro au moins $\Omega(L/\varepsilon)$ fois. *Indice: Considérer la fonction nulle, et construire une fonction $g \in \mathcal{F}_L$ valant zéro en tous les points en lesquels l'oracle d'ordre zéro est appelé pour la fonction nulle, dont le minimum est le plus petit possible.*

Réponse 1.

Tout d'abord, notons que pour $f \in \mathcal{F}_L$ le problème d'optimisation $\min_{[0,1]} f$ est bien définie car on optimise une fonction continue¹ sur un compact.

Appliquons comme indiqué l'algorithme \mathcal{A} à la fonction nulle sur $[0; 1]$ notée f . Soient $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ la suite de points de $[0; 1]$ utilisés lors des appels à l'oracle d'ordre zéro. Posons $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$ et introduisons:

$$\alpha := \max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|, \quad k := \arg \max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i| \quad \text{et} \quad \tilde{x} := \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Soit $g : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}$, la fonction continue et affine par morceaux de pente $-L$ et L sur $[x_k; \tilde{x}]$ et $[\tilde{x}; x_{k+1}]$ respectivement.

$$g(x) = \min \{0, L(|x - \tilde{x}| - |x_k - \tilde{x}|)\}$$

Question 2. En déduire la complexité optimale sur \mathcal{F}_L , en fonction de L et ε , pour les algorithmes ne faisant appel qu'à l'oracle d'ordre zéro.

Réponse 2.



1. rappelons que lipschitzienne entraîne, uniformément continue qui entraîne continue