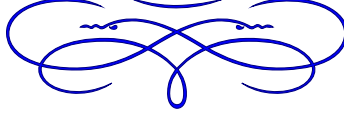


Exercices chapitre I



Exercice 1. Soient $\varepsilon, L > 0$ et \mathcal{F}_L l'ensemble des applications L -Lipschitziennes de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Soit \mathcal{A} un algorithme renvoyant, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_L$, un nombre $x^\star \in [0; 1]$ tel que $f(x^\star) \leq \min_{[0,1]} f + \varepsilon$. On suppose que \mathcal{A} fait uniquement appel à l'oracle d'ordre zéro.

Question 1. Montrer que \mathcal{A} doit faire appel à l'oracle d'ordre zéro au moins $\Omega(L/\varepsilon)$ fois. *Indice: Considérer la fonction nulle, et construire une fonction $g \in \mathcal{F}_L$ valant zéro en tous les points en lesquels l'oracle d'ordre zéro est appelé pour la fonction nulle, dont le minimum est le plus petit possible.*

Réponse 1.

Tout d'abord, notons que pour $f \in \mathcal{F}_L$ le problème d'optimisation $\min_{[0,1]} f$ est bien définie car on optimise une fonction continue¹ sur un compact.

Appliquons comme indiqué l'algorithme \mathcal{A} à la fonction nulle sur $[0; 1]$ notée f . Soient $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ la suite de points de $[0; 1]$ utilisés lors des appels à l'oracle d'ordre zéro. Posons $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$ et introduisons:

$$\alpha := \max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|, \quad k := \arg \max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i| \quad \text{et} \quad \tilde{x} := \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$$

Soit $g : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}$, la fonction continue et affine par morceaux de pente $-L$ et L sur $[x_k; \tilde{x}]$ et $[\tilde{x}; x_{k+1}]$ respectivement. g s'écrit simplement:

$$g(x) = \min \{0, L(|x - \tilde{x}| - |x_k - \tilde{x}|)\}$$

Notons que l'on a bien $g \in \mathcal{F}_L$.

Comme l'algorithme \mathcal{A} dépend uniquement des valeurs $f(x_i) = g(x_i)$ pour $i = 1$ à n , la sortie de \mathcal{A} noté x^\star ² sera la même pour f ou g . Par définition de \mathcal{A} , on a que : $g(x^\star) \leq \min_{[0,1]} g + \varepsilon$, ce qui s'écrit ici

$$0 \leq -L \frac{\alpha}{2} + \varepsilon. \tag{1}$$

De plus on a : $1 = \sum_{i=0}^n x_{i+1} - x_i \leq (n+1) \cdot \alpha$, d'où

$$\alpha \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on en déduit

$$n \geq \frac{L}{2\varepsilon} - 1, \tag{3}$$

d'où le résultat.

1. rappelons que lipschitzienne entraîne uniformément continue qui entraîne continue.

2. $x^\star = x_j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$.

Question 2. En déduire la complexité optimale sur \mathcal{F}_L , en fonction de L et ε , pour les algorithmes ne faisant appel qu'à l'oracle d'ordre zéro.

Réponse 2.

Notons $x_k := \frac{k}{n}$ pour $k = 0$ à n et introduisons l'algorithme \mathcal{A} renvoyant $x^\star = \arg \min_{x \in \{x_i\}_{i=0}^n} f(x)$. Soit \tilde{x} un minimum de f sur $[0; 1]$. Notons qu'il existe i tel que $x_i \leq \tilde{x} \leq x_{i+1}$.

En utilisant le fait que f est L -lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(x_i)| &\leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &\leq L|x_{i+1} - x_i| \\ &= \frac{1}{n} \cdot L \end{aligned}$$

En prenant $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \cdot L$ suffisamment grand, on a bien la précision attendue pour \mathcal{A} , ce qui permet de conclure à l'optimalité de $\mathcal{O}(L/\varepsilon)$.

