Nicolas CLOAREC

Exercices chapitre *I*

Exercice 1. Soient $\varepsilon, L > 0$ et $\mathcal{F}_L$ l'ensemble des applications L-Lipschitziennes de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ un algorithme renvoyant, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_L$, un nombre $x^\star \in [0\,;1]$ tel que $f\left(x^\star\right) \leq \min\limits_{[0,1]} f + \varepsilon$. On suppose que $\mathcal{A}$ fait uniquement appel à l'oracle d'ordre zéro.

Question 1. Montrer que $\mathcal{A}$ doit faire appel à l'oracle d'ordre zéro au moins $\Omega(L/\varepsilon)$ fois. *Indice: Considérer la fonction nulle, et construire une fonction $g \in \mathcal{F}_L$ valant zéro en tous les points en lesquels l'oracle d'ordre zéro est appelé pour la fonction nulle, dont le minimum est le plus petit possible.*

Réponse 1.

Tout d'abord, notons que pour $f \in \mathcal{F}_L$ le problème d'optimisation $\min\limits_{[0,1]} f$ est bien définie car on optimise une fonction continue [1] sur un compat.

Appliquons comme indiqué l'algorithme $\mathcal{A}$ à la fonction nulle sur $[0\,;1]$ notée f. Soient $x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n$ la suite de points de $[0\,;1]$ utilisés lors des appels à l'oracle d'ordre zéro. Posons $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$ et introduisons:

$$\alpha := \max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|, \quad k := \underset{0 \leq i \leq n}{\arg\max} |x_{i+1} - x_i| \quad \text{et} \quad \widetilde{x} := \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Soit $g : [0\,;1] \mapsto \mathbb{R}$, la fonction continue et affine par morceaux de pente $-L$ et L sur $[x_k\,;\widetilde{x}]$ et $[\widetilde{x}; x_{k+1}]$ respectivement.

$$g(x) = \longrightarrow \min\{0, L\,(|x - \widetilde{x}| - |x_k - \widetilde{x}|)\}$$

Question 2. En déduire la complexité optimale sur $\mathcal{F}_L$, en fonction de L et ε, pour les algorithmes ne faisant appel qu'à l'oracle d'ordre zéro.

Réponse 2.

1. rappelons que lipschitzienne entraîne, uniformément continue qui entraîne continue