Solutions des exercices

Chapitre 1.

Exercice 1. Soient $\varepsilon, L > 0$ et $\mathcal{F}_L$ l'ensemble des applications L-Lipschitziennes de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ un algorithme renvoyant, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_L$, un nombre $x^\star \in [0;1]$ tel que $f\left(x^\star\right) \leq \min\limits_{[0,1]} f + \varepsilon$. On suppose que $\mathcal{A}$ fait uniquement appel à l'oracle d'ordre zéro.

Question 1. Montrer que $\mathcal{A}$ doit faire appel à l'oracle d'ordre zéro au moins $\Omega(L/\varepsilon)$ fois. *Indice: Considérer la fonction nulle, et construire une fonction $g \in \mathcal{F}_L$ valant zéro en tous les points en lesquels l'oracle d'ordre zéro est appelé pour la fonction nulle, dont le minimum est le plus petit possible.*

Réponse 1.
Tout d'abord, notons que pour $f \in \mathcal{F}_L$ le problème d'optimisation $\min\limits_{[0,1]} f$ est bien définie car on optimise une fonction continue [1] sur un compat.

Appliquons comme indiqué l'algorithme $\mathcal{A}$ à la fonction nulle sur $[0;1]$ notée f. Soient $x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n$ la suite de points de $[0;1]$ utilisés lors des appels à l'oracle d'ordre zéro. Posons $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$ et introduisons:

$$\alpha := \max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|, \quad k := \operatorname*{arg\,max}_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i| \quad \text{et} \quad \widetilde{x} := \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$$

Soit $g : [0;1] \mapsto \mathbb{R}$, la fonction continue et affine par morceaux de pente $-L$ et L sur $[x_k;\widetilde{x}]$ et $[\widetilde{x};x_{k+1}]$ respectivement. g s'écrit simplement:

$$g(x) = \min\{0, L(|x - \widetilde{x}| - |x_k - \widetilde{x}|)\}$$

Notons que l'on a bien $g \in \mathcal{F}_L$.

Comme l'algorithme $\mathcal{A}$ dépend uniquement des valeurs $f(x_i) = g(x_i)$ pour $i = 1$ à n, la sortie de $\mathcal{A}$ noté $x^\star$ [2] sera la même pour f ou g. Par définition de $\mathcal{A}$, on a que : $g\left(x^\star\right) \leq \min\limits_{[0,1]} g + \varepsilon$, ce qui s'écrit ici

$$0 \leq -L\frac{\alpha}{2} + \varepsilon. \tag{1}$$

De plus on a: $1 = \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - x_i \leq (n+1) \cdot \alpha$, d'où

$$\alpha \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

En combinant(1) et (2), on en déduit

$$n \geq \frac{L}{2\varepsilon} - 1, \tag{3}$$

d'où le résultat.

---

1. rappelons que lipschitzienne entraîne uniformément continue qui entraîne continue.
2. $x^\star = x_j$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Question 2. En déduire la complexité optimale sur $\mathcal{F}_L$, en fonction de L et ε, pour les algorithmes ne faisant appel qu'à l'oracle d'ordre zéro.

Réponse 2.

Notons $x_k := \frac{k}{n}$ pour $k = 0$ à n et introduisons l'algorithme $\mathcal{A}$ renvoyant $x^\star = \underset{x \in \{x_i\}_{i=0}^n}{\arg\min} f(x)$. Soit $\widetilde{x}$ un minimum de f sur $[0;1]$. Notons qu'il existe i tel que $x_i \leq \widetilde{x} \leq x_{i+1}$.

En utilisant le fait que f est L-lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned} |f(\widetilde{x}) - f(x_i)| &\leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &\leq L|x_{i+1} - x_i| \\ &= \frac{1}{n} \cdot L \end{aligned}$$

En prenant $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \cdot L$ suffisamment grand, on a bien la précision attendue pour $\mathcal{A}$, ce qui permet de conclure à l'optimalité de $\mathcal{O}(L/\varepsilon)$.

Chapitre 2.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et $E = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x^\top A x \leq 1\right\}$.

Question 1. Montrer l'existence d'une matrice symétrique $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $E = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x^\top \widetilde{A} x \leq 1\right\}$. Dorénavant, on supposera que A est symétrique, sans perte de généralité.

Réponse 1. On a succesivement:

$$\begin{aligned} x \in E &\leftrightarrow x^T A x \leq 1 && (4) \\ &\leftrightarrow (x^T A x)^T \leq 1 \\ &\leftrightarrow x^T A^T x \leq 1 && (5) \end{aligned}$$

En moyennant les équations (4) et (5), on a donc

$$x \in E \implies x^T \left(\frac{A + A^T}{2}\right) x \leq 1 \tag{6}$$

Réciproquement, si l'inégalité (6) est vérifiée, on a

$$\begin{aligned} x^T \left(\frac{A + A^T}{2}\right) x &= \frac{1}{2}\{x^T A x + x^T A^T x\} \\ &= \frac{1}{2} 2 x^T A x = x^T A x \leq 1. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $\widetilde{A} := \frac{A + A^T}{2}$ pour nous permettre de conclure.

Question 2. Montrer que E est fermé.

Réponse 2. Remarquons que la topologie de E ne dépend pas de la norme choisie car $E \subset \mathbb{R}^d$ de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ la nome euclidienne et $\{x_n\}$ une suite de E convergeant vers $x \in \mathbb{R}^d$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la définition des x_n appartenant à E:

$$\begin{aligned} \left\langle x\,,\, Ax \right\rangle &= \left\langle x - x_n\,,\, Ax \right\rangle \quad + \left\langle x_n\,,\, A(x - x_n) \right\rangle \quad + \left\langle x_n\,,\, Ax_n \right\rangle \\ &\leq \|x - x_n\| \cdot \|Ax\| + \|x_n\| \cdot |||A||| \cdot \|x - x_n\| + 1 \end{aligned}$$

En utilisant la convergence des x_n et le fait que toute suite convergeante est bornée, on en déduit bien par passage à la limite que x appartient à E.