Optimisation avancée
2018-2019. Exercices d'entraînement (Chapître 1: Idées générales)

Exercice 1

Soit $L > 0$ et $\mathcal{F}_L$ l'ensemble des applications L-Lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathcal{A}$ un algorithme renvoyant, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_L$, un nombre $x^* \in [0, 1]$ tel que $f(x^*) \leq \min_{[0,1]} f + \varepsilon$. On suppose que $\mathcal{A}$ fait uniquement appel à l'oracle d'ordre zéro.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ doit faire appel à l'oracle d'ordre zéro au moins $\Omega(L/\varepsilon)$ fois.
   Indice: Considérer la fonction nulle, et construire une fonction $g \in \mathcal{F}_L$ valant zéro en tous les points en lesquels l'oracle d'ordre zéro est appelé pour la fonction nulle, dont le minimum est le plus petit possible.
2. En déduire la complexité optimale sur $\mathcal{F}_L$, en fonction de L et ε, pour les algorithmes ne faisant appel qu'à l'oracle d'ordre zéro.

Exercice 2

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \ldots, n\}$ un polytope supposé borné, où $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. On dit qu'un point $x \in P$ est un *centre de Chebychev* de P si et seulement si x est le centre d'une boule de volume maximal incluse dans P.

1. Montrer qu'une telle boule existe. Est-elle nécessairement unique ?
2. Montrer que le centre et le rayon d'une telle boule sont une solution d'un programme linéaire.

Exercice 3 Estimateur Ridge en régréssion linéaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ (n est un entier supérieur ou égal à d) une matrice de rang d et $y \in \mathbb{R}^n$. On considère les problèmes d'optimisation suivants:

$$(P_\lambda) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^d} \|y - Ax\|^2 + \lambda \|x\|^2$$

et

$$(Q_\tau) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^d} \begin{cases} \|y - Ax\| \\ \text{s.c. } \|x\| \leq \tau, \end{cases}$$

où *lambda* et τ sont deux nombres strictement positifs.

1. Résoudre (P_λ) et (Q_τ) analytiquement.

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe $\tau(\lambda) > 0$ tel que les problèmes (P_λ) et $(Q_{\tau(\lambda)})$ sont équivalents.
3. Réciproquement, montrer que pour tout $\tau > 0$, il existe $\lambda(\tau) > 0$ tel que les problèmes (Q_τ) et $(P_{\lambda(\tau)}$ sont équivalents.

Exercice 4 Estimateur Lasso en régréssion linéaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ (cette fois-ci, n est un entier quelconque) et $y \in \mathbb{R}^n$. On considère les problèmes d'optimisation suivants:

$$(P_\lambda) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^d} \|y - Ax\|^2 + \lambda\|x\|_1$$

et

$$(Q_\tau) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^d} \begin{cases} \|y - Ax\| \\ \text{s.c. } \|x\|_1 \leq \tau, \end{cases}$$

où *lambda* et τ sont deux nombres strictement positifs.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe $\tau(\lambda) > 0$ tel que les problèmes (P_λ) et $(Q_{\tau(\lambda)})$ sont équivalents.
2. Réciproquement, montrer que pour tout $\tau > 0$, il existe $\lambda(\tau) > 0$ tel que les problèmes (Q_τ) et $(P_{\lambda(\tau)}$ sont équivalents.
3. Montrer que pour tout $\tau > 0$, (Q_τ) peut s'écrire comme un programme linéaire. En pratique, pensez-vous que cela est utile pour la résolution du probléme ?

Exercice 5

Ecrire les problèmes suivants sons la forme d'un programme linéaire, si possible, ou d'un programme quadratique sinon.

1. $$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \|Ax - b\|^2,$$
   où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$.
2. $$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \begin{cases} \|Ax - b\| \\ \text{s.c. } x \in B(x_0, r), \end{cases}$$
   où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$.
3. (*Square-root Lasso*)
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \|y - Ax\| + \lambda\|x\|_1,$$
   où $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$ et $\lambda > 0$.

Optimisation avancée
2018-2019. Exercices d'entraînement (Chapître 2 - Convexité et dualité)

Exercice 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top Ax \leq 1\}$.

1. Montrer l'existence d'une matrice symétrique $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ telle que $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top \tilde{A}x \leq 1\}$. Dorénavant, on supposera donc que A est symétrique, sans perte de généralité.
2. Montrer que E est un ensemble fermé.
3. Montrer que E est convexe si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de même signe.
4. Montrer que E est borné si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de même signe et sont non nulles.
5. Supposons que A est définie positive. Trouver une matrice $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ telle que $E = TB(0,1) = \{Tx : x \in B(0,1)\}$.

Exercice 2 Programmation linéaire et dualité

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^d$. On suppose que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ est borné.

1. Montrer que nécessairement, $n \geq d + 1$.
2. On considère le programme linéaire suivant:

$$(P) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^d} \begin{cases} c^\top x \\ \text{s.c. } Ax \leq b. \end{cases}$$

   Ecrire le problème dual, qu'on notera (Q).
3. Montrer que (P) est le probléme dual de (Q).

Exercice 3 L'oracle de séparation

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^d$, où $n \geq 1$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^d : f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, n\}$.

1. Montrer qu'on peut réécrire E comme $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq 0\}$, où f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$ à déterminer.

2. Proposer un algorithme produisant l'oracle de séparation pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par-rapport à E, en faisant appel aux oracles d'ordres zéro et un de f.

Exercice 4

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout $x \in \mathring{E}$, $\partial f(x)$ est compact.