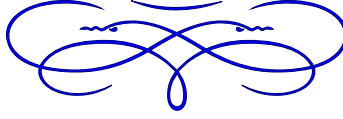


Notes optimisation avancée



Théorème 0.1. Soit f une fonction réelle α -fortement convexe et L -lipschitzienne sur E . Soit $x^\star := \arg \min_{x \in E} f(x)$. On a le résultat suivant:

$$f(\hat{x}) - f(x^\star) \leq \frac{2L^2}{\alpha T} \quad (1)$$

Démonstration. Pour $t = 1$ à T , introduisons le pas:

$$\mu_t := \frac{2}{\alpha t} \quad (2)$$

En utilisant l'identité classique $2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$, on a pour $t = 0$ à $T - 1$:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) - f(x^\star) &\leq f(x_t) - \left(f(x_t) + u_t^T (x^\star - x_t) + \frac{\alpha}{2} \|x^\star - x_t\|^2 \right) \\ &= -u_t^T (x^\star - x_t) - \frac{\alpha}{2} \|x^\star - x_t\|^2 \\ &= -\frac{\mu_{t+1}}{\mu_{t+1}} \cdot u_t^T (x^\star - x_t) - \frac{\alpha}{2} \|x^\star - x_t\|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_{t+1}} \left(\|\mu_{t+1} \cdot u_t\|^2 + \|x^\star - x_t\|^2 - \|\mu_{t+1} \cdot u_t + x^\star - x_t\|^2 \right) - \frac{\alpha}{2} \|x^\star - x_t\|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_{t+1}} \left(\|\mu_{t+1} \cdot u_t\|^2 + \|x^\star - x_t\|^2 - \|x^\star - y_t\|^2 \right) - \frac{\alpha}{2} \|x^\star - x_t\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\mu_{t+1}} \left(\mu_{t+1}^2 \cdot L^2 + \|x^\star - x_t\|^2 - \|x^\star - x_{t+1}\|^2 \right) - \frac{\alpha}{2} \|x^\star - x_t\|^2 \\ &= \frac{\mu_{t+1} L^2}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu_{t+1}} - \frac{\alpha}{2} \right)}_{\frac{\alpha(t-1)}{4}} \|x^\star - x_t\|^2 - \underbrace{\frac{1}{2\mu_{t+1}}}_{\frac{\alpha(t+1)}{4}} \|x^\star - x_{t+1}\|^2 \end{aligned}$$

Travaillons sur les deux termes de droites afin de faire apparaître une somme télescopique. \square