Grafos
Algoritmo de Kruskal
Algoritmo de Dijkstra

Estructuras de Datos

Andrea Rueda

Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Ingeniería de Sistemas

Algoritmo de Kruskal

Algoritmo de Kruskal

- Kruskal, J. B. (1956). “On the shortest spanning subtree and the traveling salesman problem”. Proceedings of the AMS (7): 48-50.
- Algoritmo voraz, busca un árbol de recubrimiento mínimo a partir de un bosque expandido mínimo.
- Agrega una arista de costo mínimo que conecta dos árboles del bosque (dos componentes distintos).
- Complejidad: $O(|E| \log |E|)$

Algoritmo de Kruskal

- Pasos:

1. Crear un bosque B (cada vértice un árbol)
2. Crear un conjunto C con todas las aristas
3. Mientras C no es vacío:

   3.1 eliminar una arista de costo mínimo de C

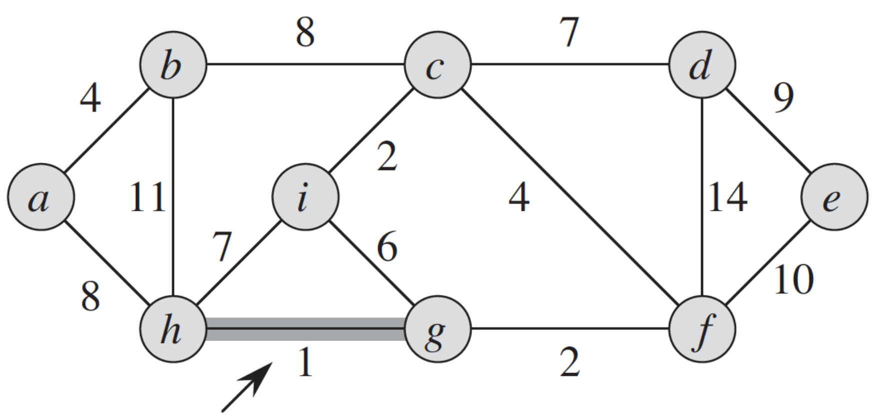
   3.2 si la arista conecta dos árboles diferentes, se añade a T y se combinan los árboles

   3.3 si no, se ignora

4. T contiene el árbol de recubrimiento mínimo

Algoritmo de Kruskal

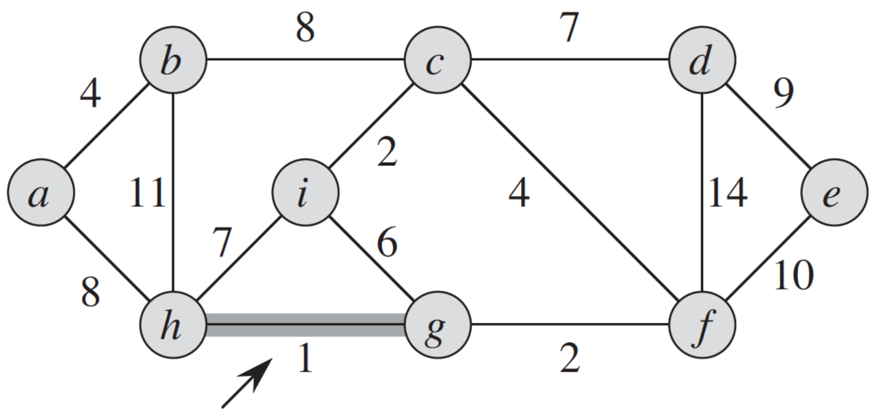
(a)



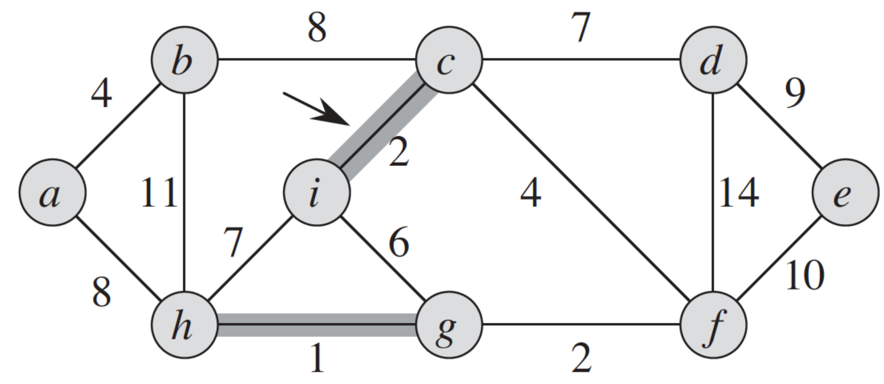
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal

(a)

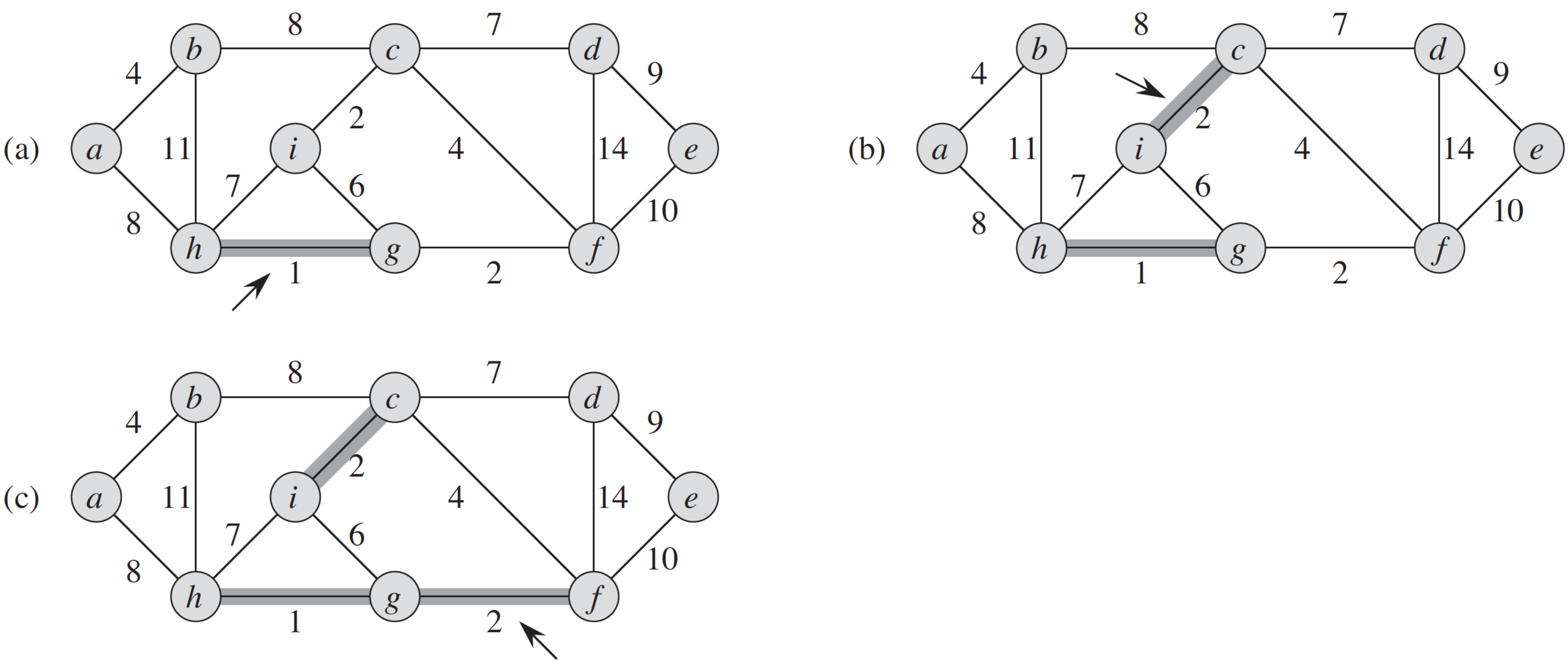


(b)



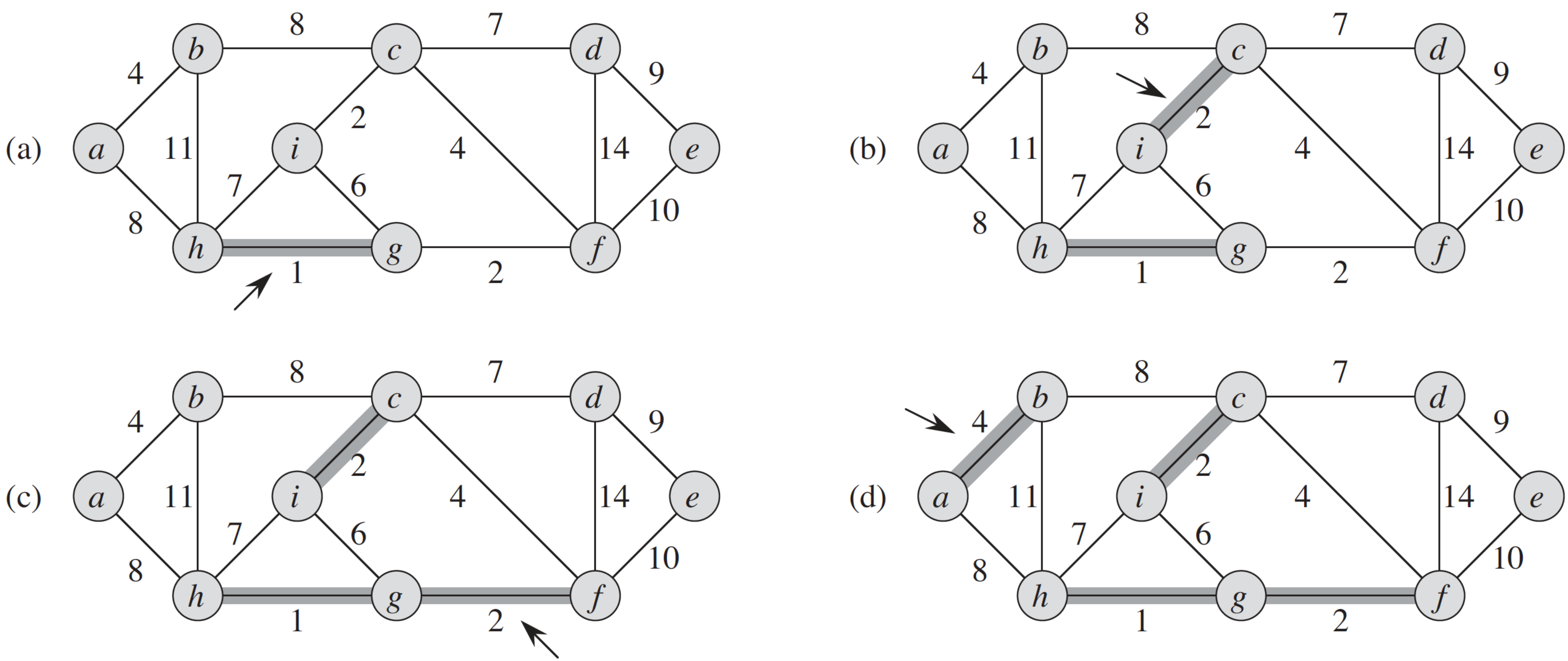
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

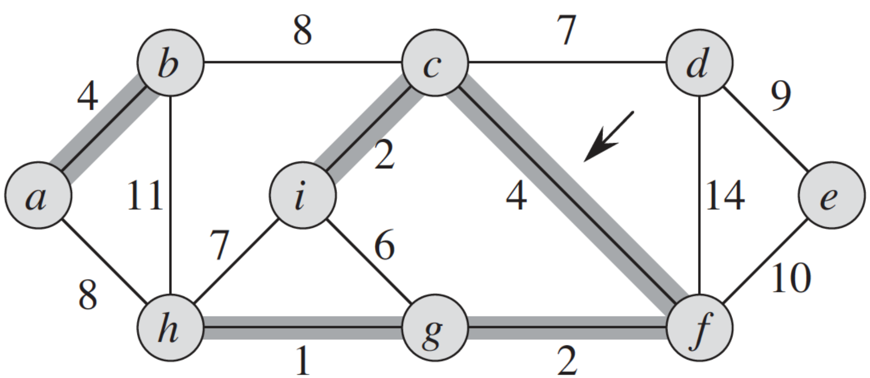
Algoritmo de Kruskal



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

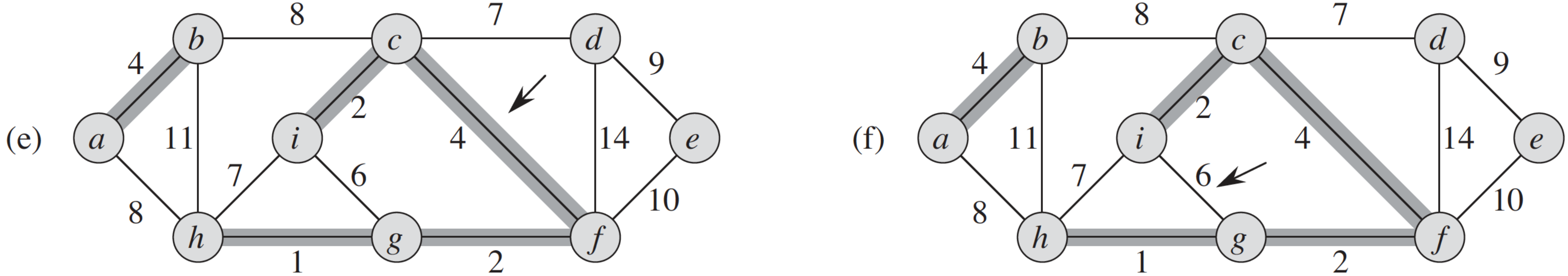
Algoritmo de Kruskal

(e)



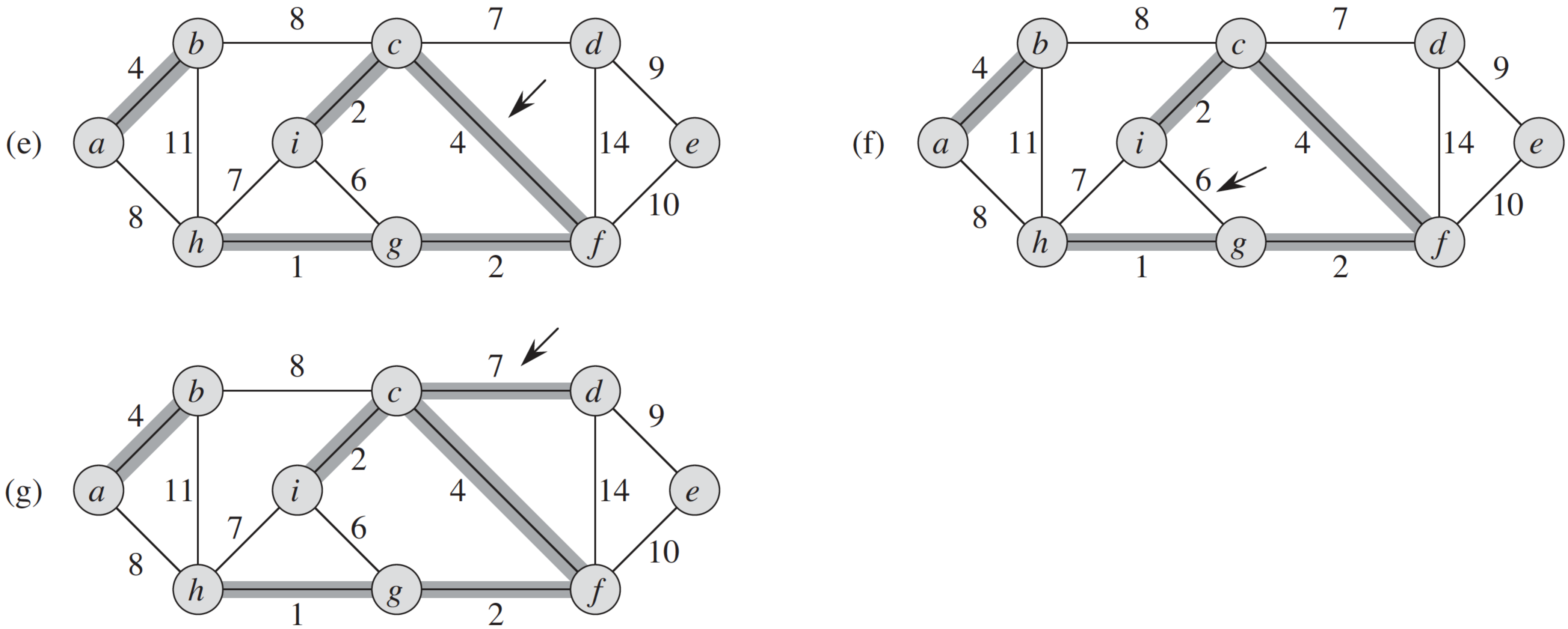
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



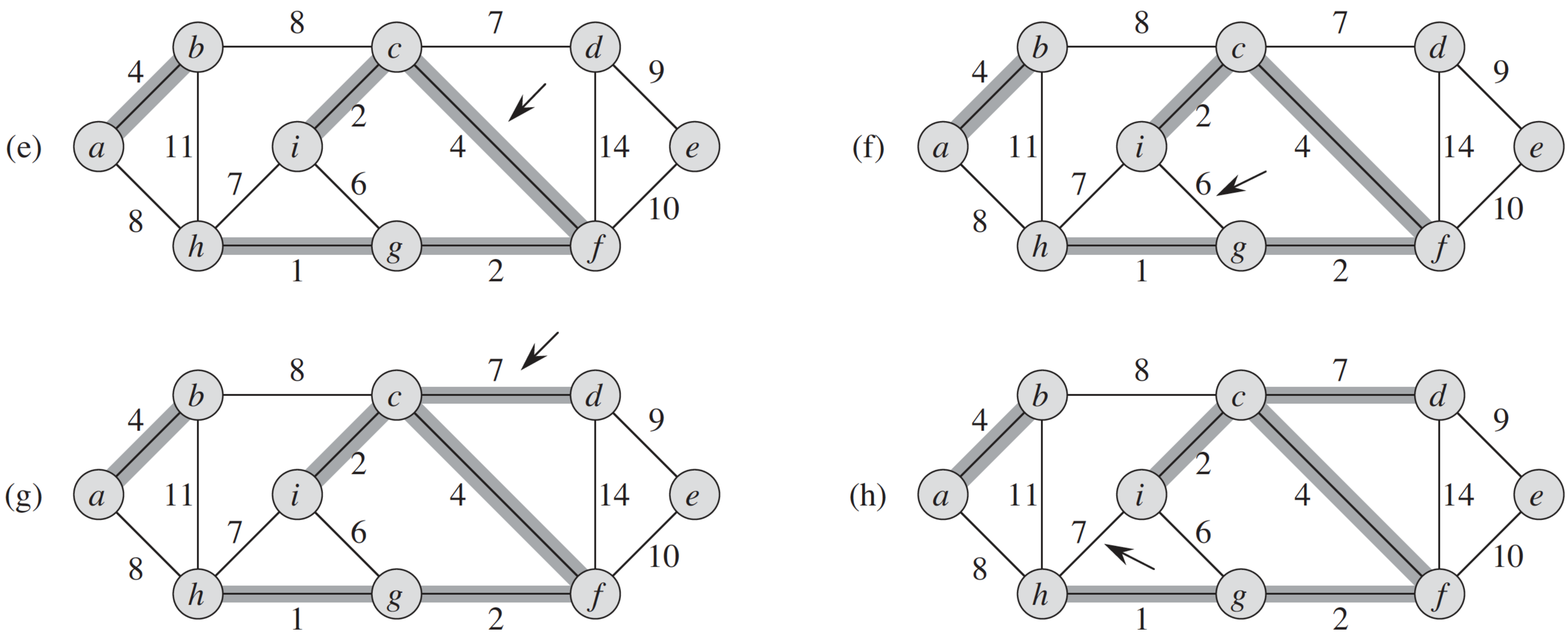
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



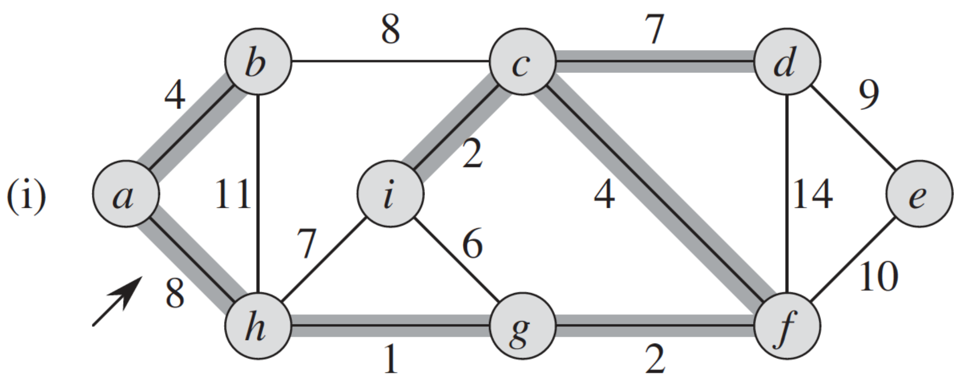
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



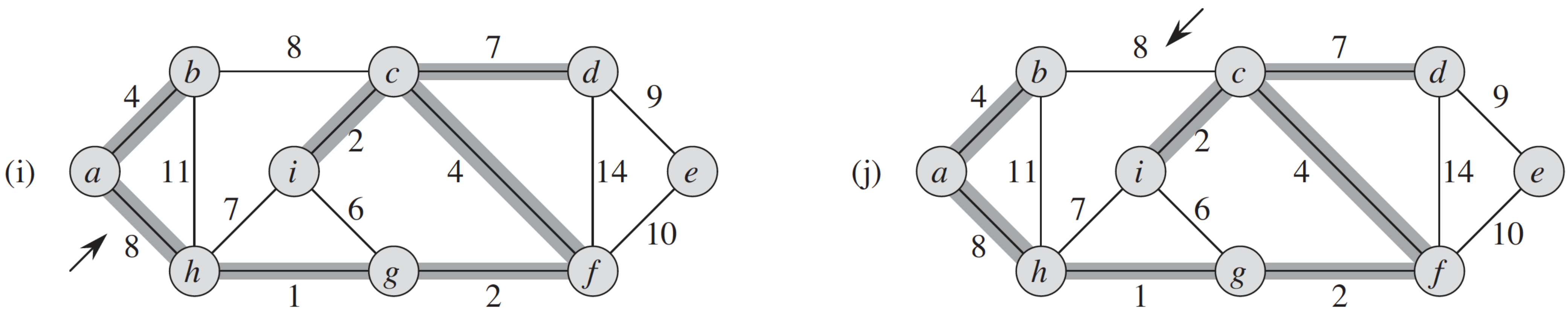
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

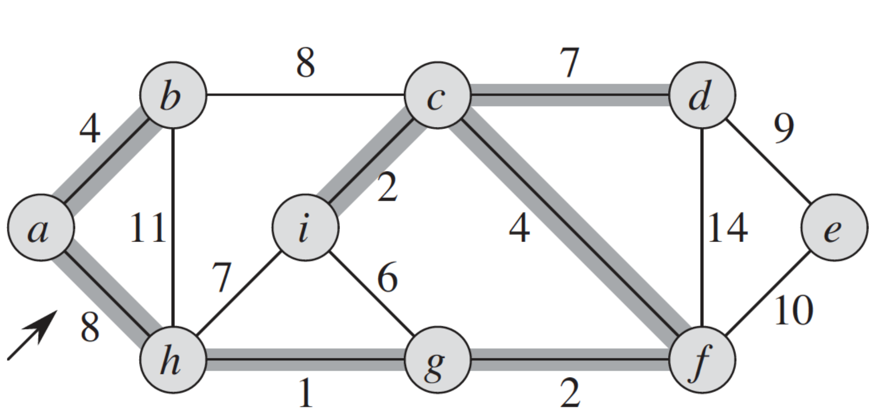
Algoritmo de Kruskal



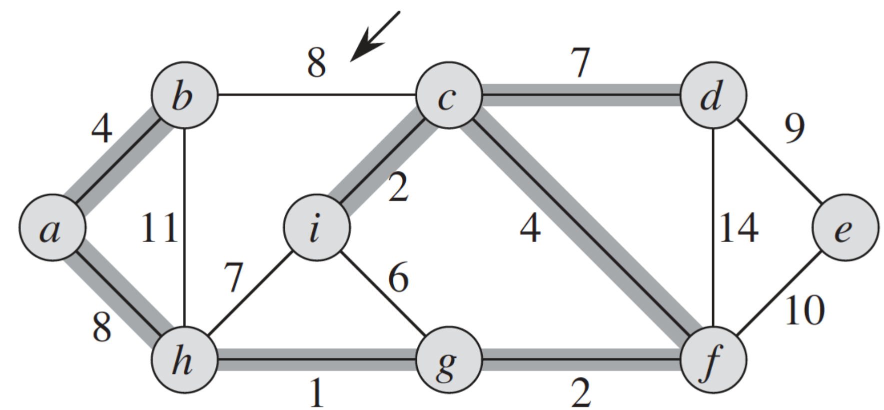
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal

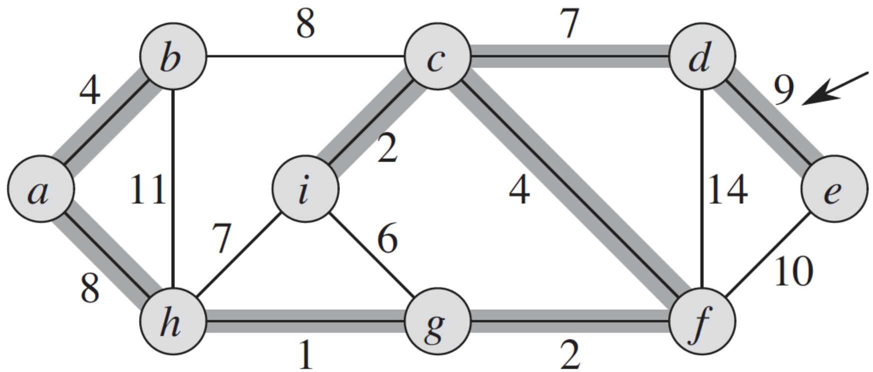
(i)



(j)

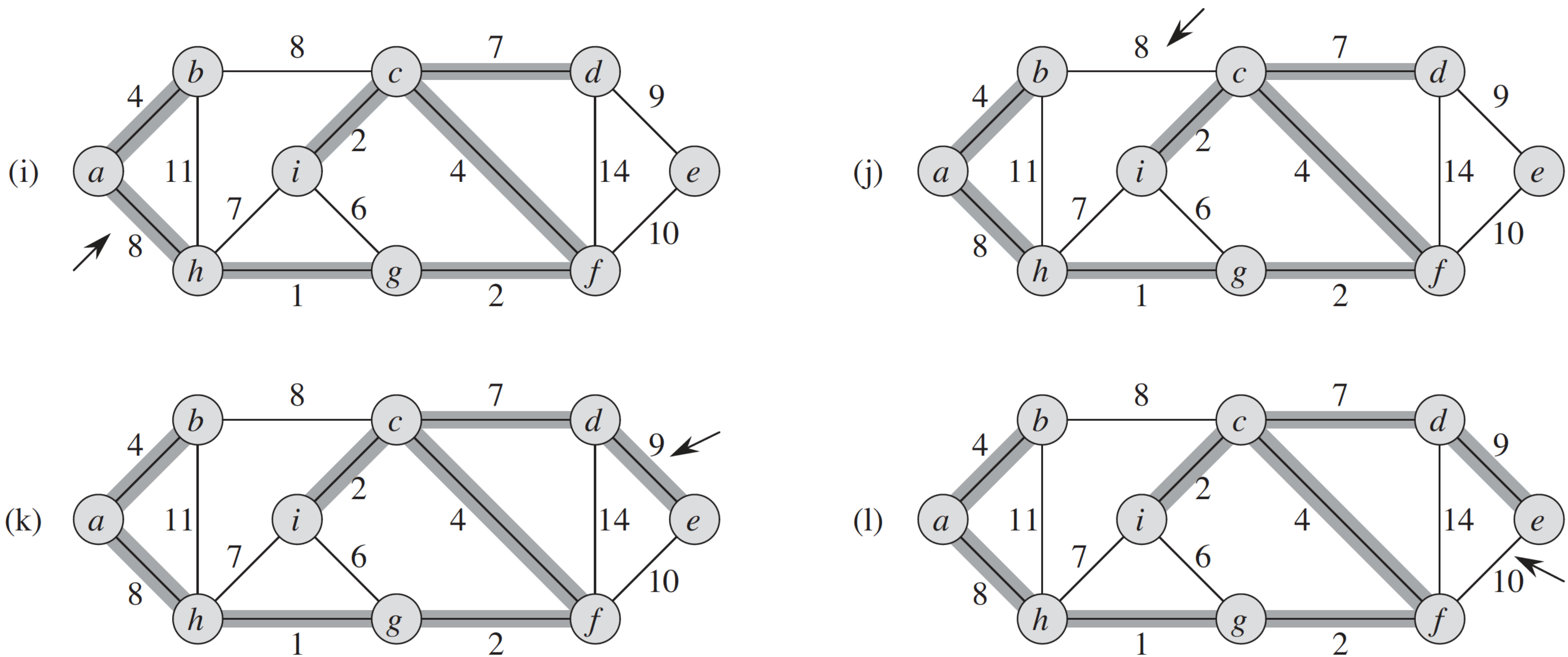


(k)



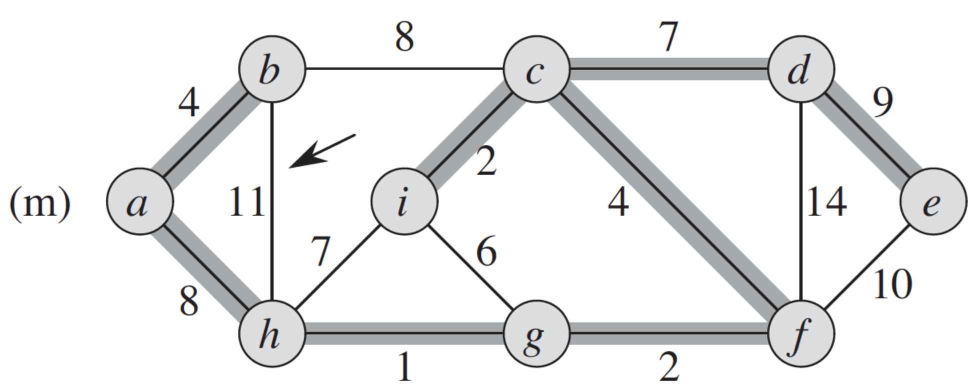
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



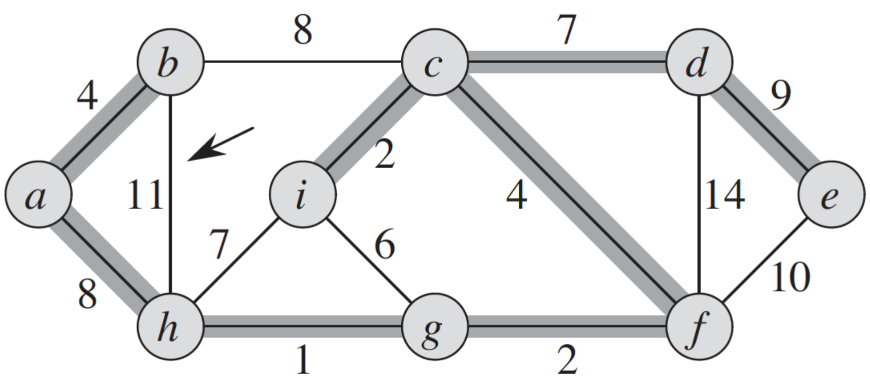
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

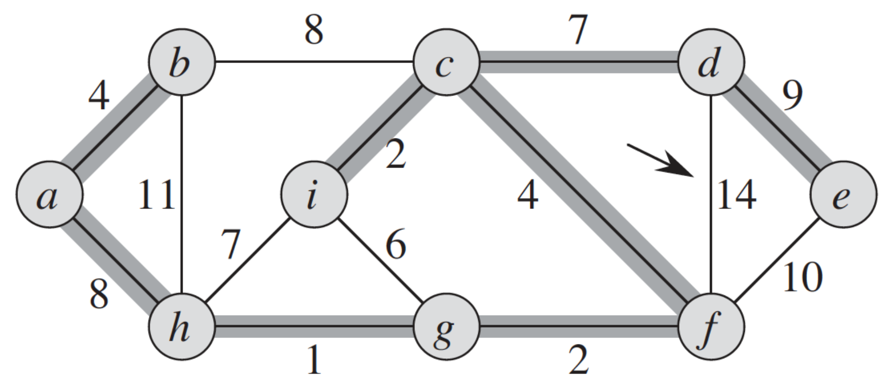
Algoritmo de Kruskal



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

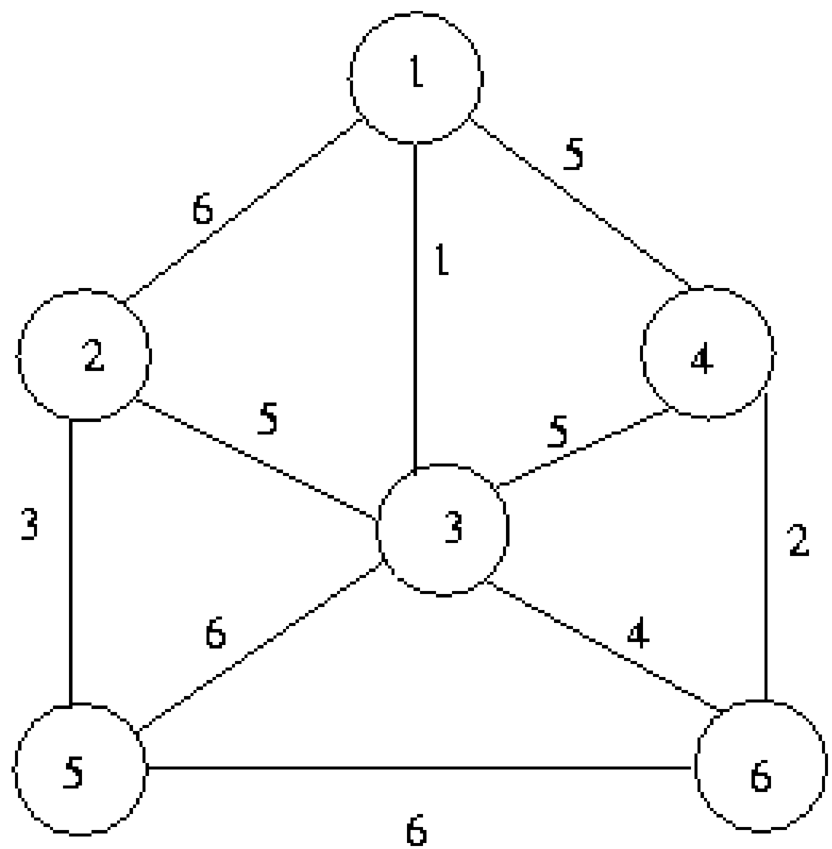
Algoritmo de Kruskal

(m) 

(n) 

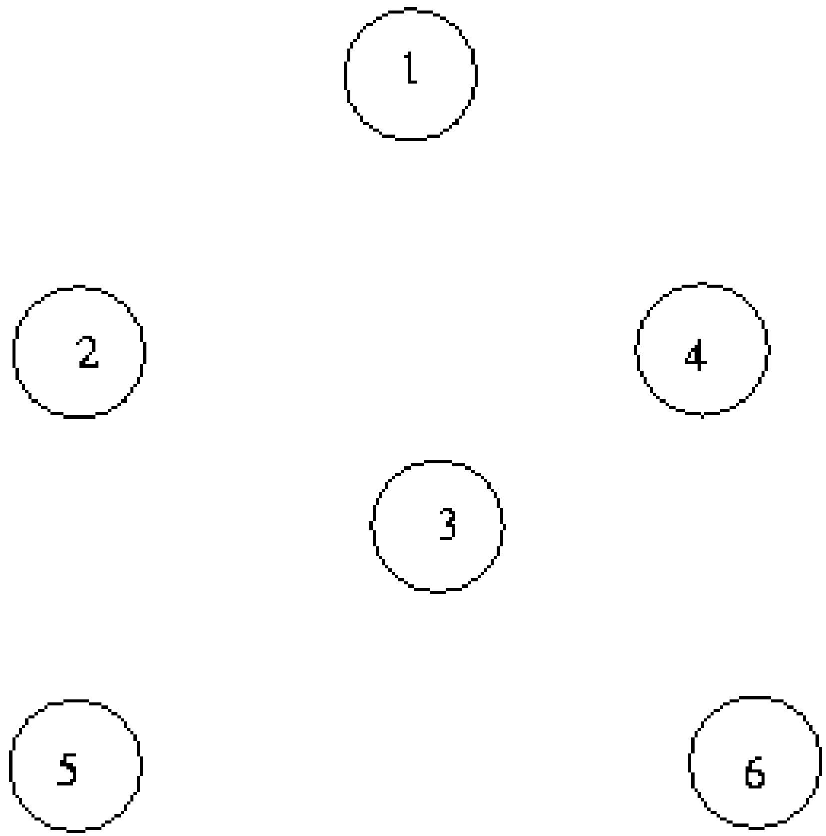
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Kruskal



http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

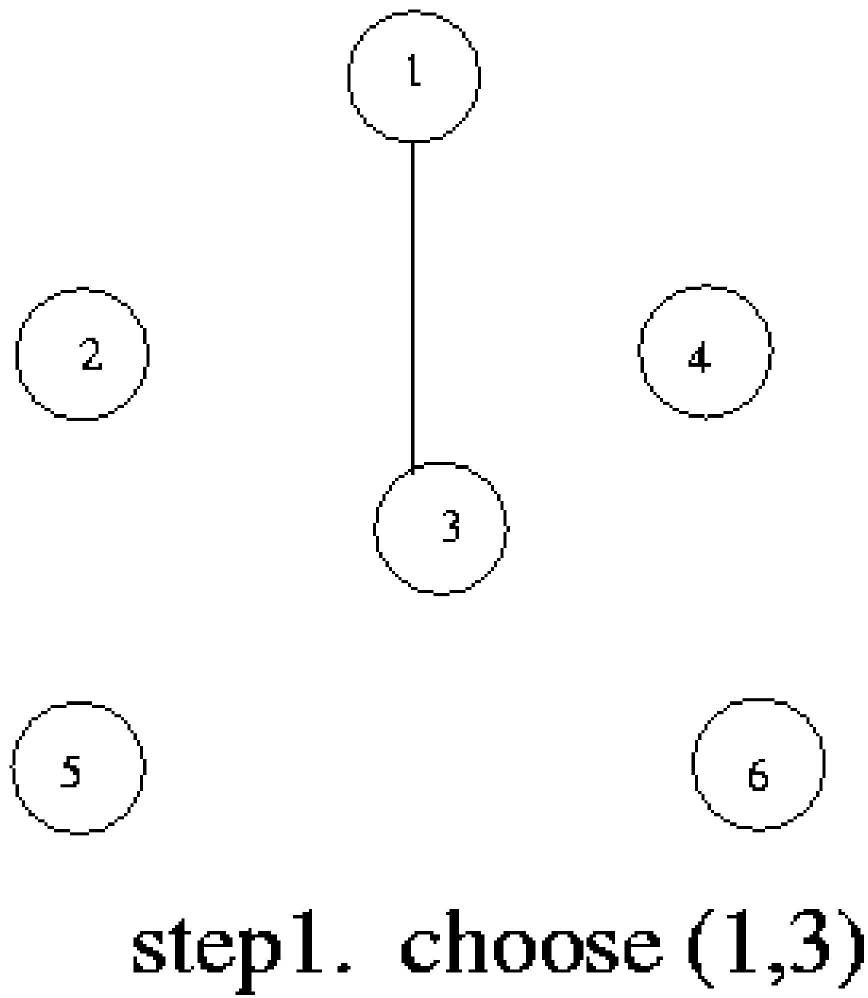
Algoritmo de Kruskal



Initial Configuration

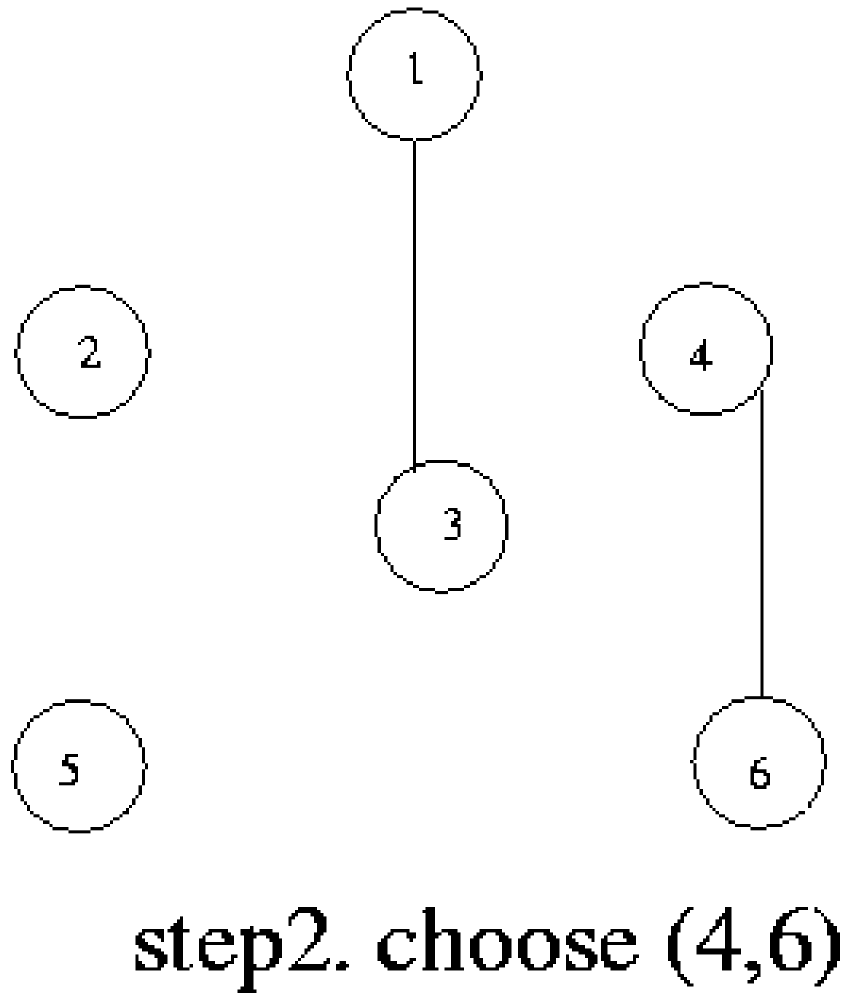
http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

Algoritmo de Kruskal



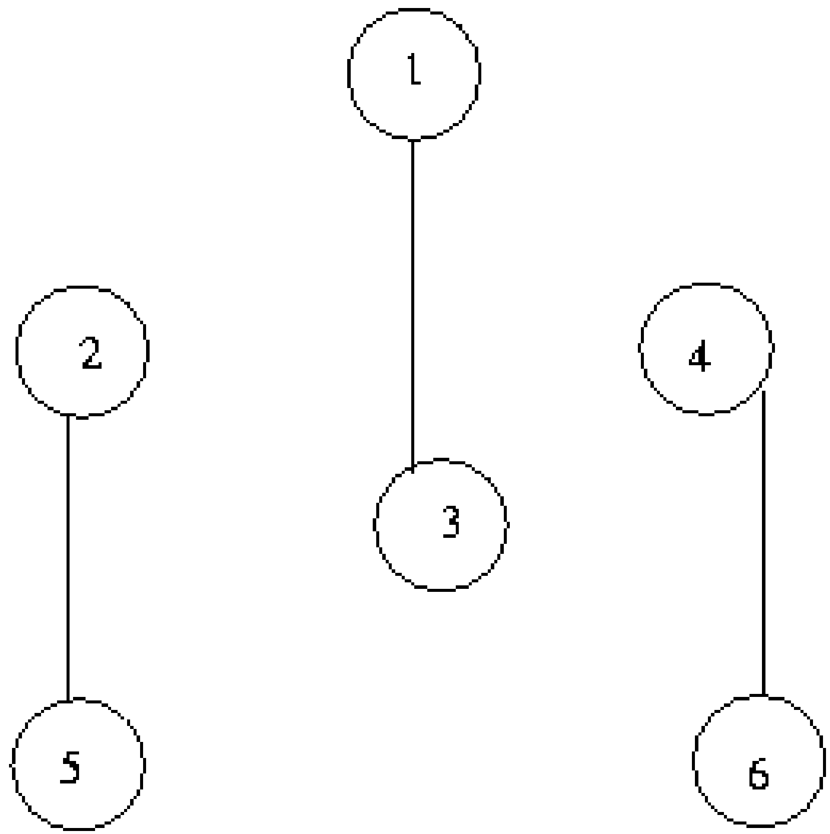
http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

Algoritmo de Kruskal



http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

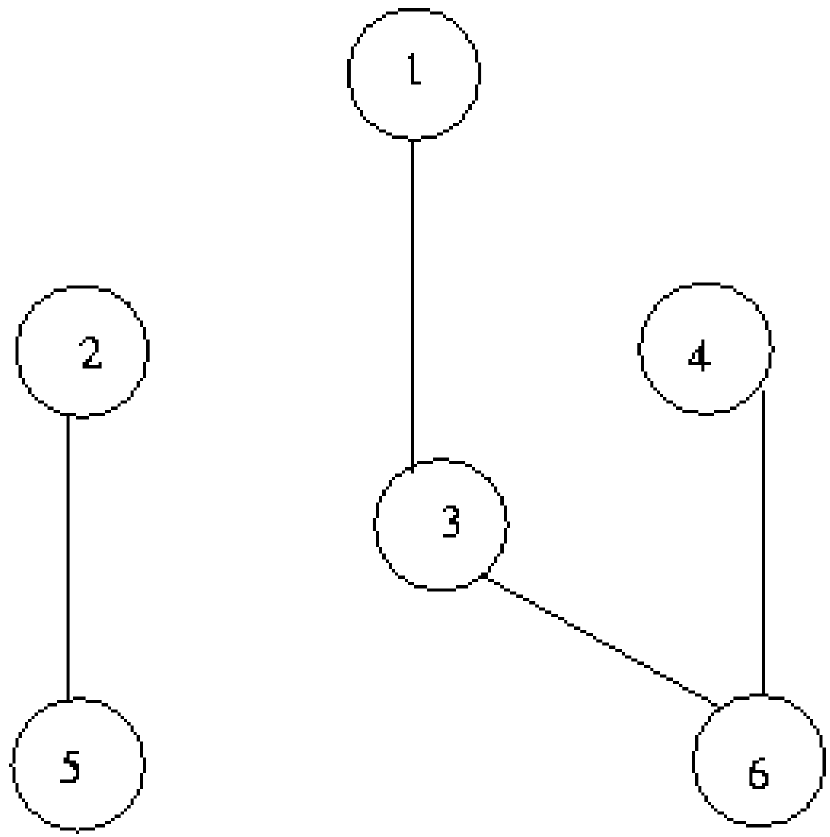
Algoritmo de Kruskal



step3. choose (2,5)

http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

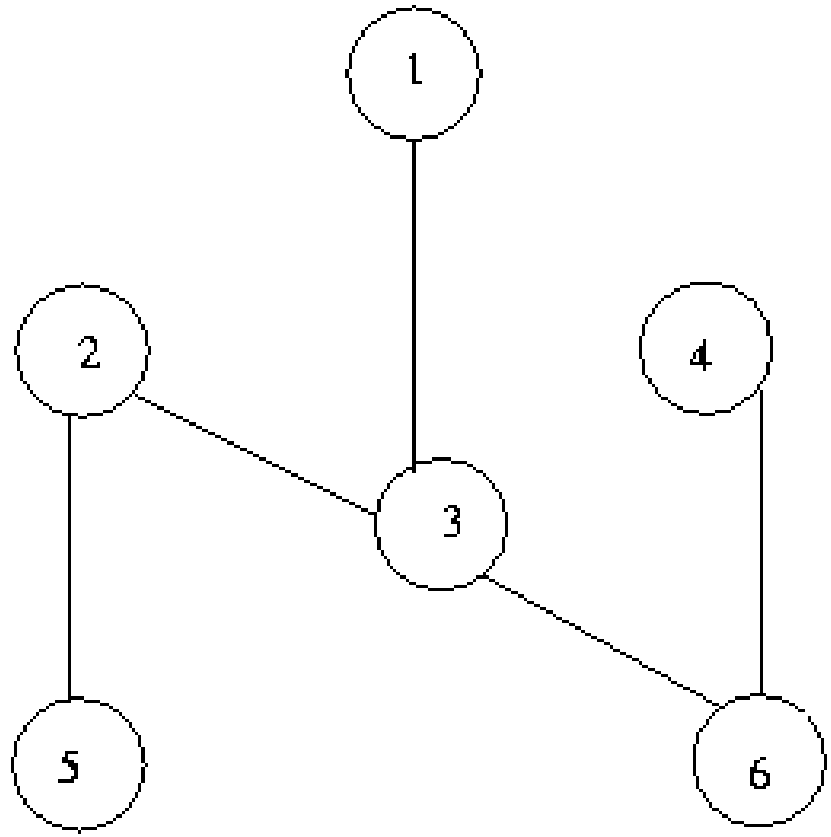
Algoritmo de Kruskal



step4. choose (3,6)

http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

Algoritmo de Kruskal



step5. choose (2,3)

http://lcm.csa.iisc.ernet.in/dsa/node184.html

Algoritmo de Kruskal

- Applet de demostración:

  https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Kruskal.html

Algoritmo de Dijkstra

Algoritmo de Dijkstra

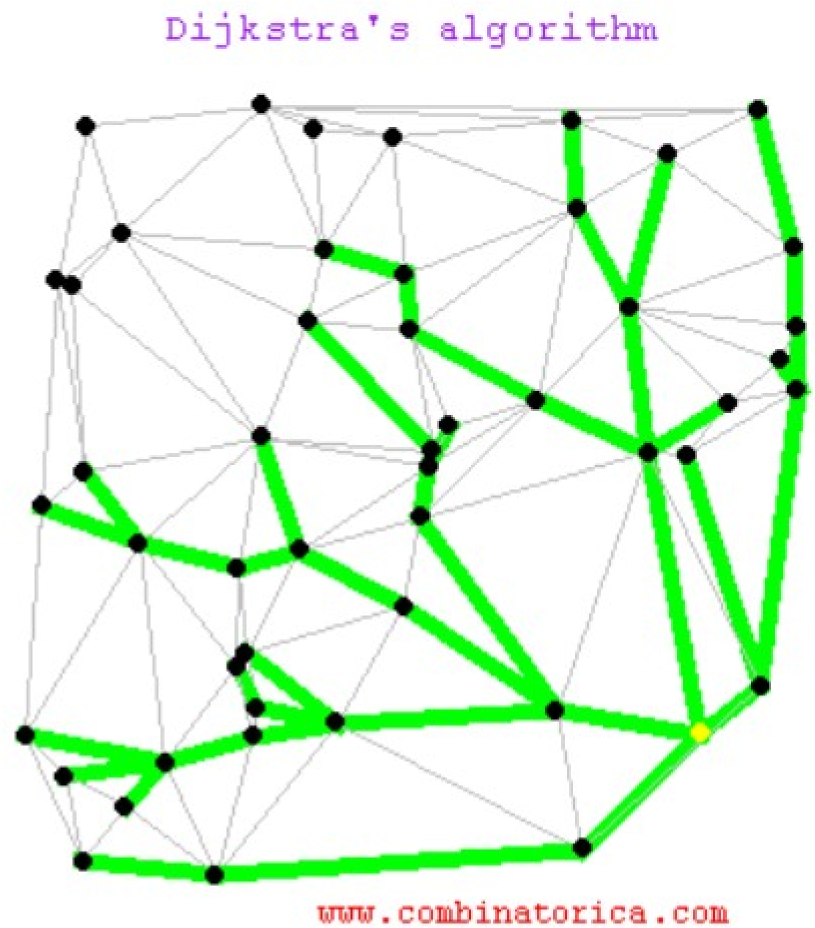
- Dijkstra, E. W. (1959). "A note on two problems in connexion with graphs". Numerische Mathematik 1: 269–271.

- ¿Cómo convertir un grafo en un árbol?
  - Árbol de recubrimiento de “costos mínimos” (*minimal spanning tree*).

- Encontrar TODOS los caminos menos costosos entre un vértice y cualquier otro.

Algoritmo de Dijkstra

- Respuesta al problema de encontrar la ruta más corta a partir de un nodo en el grafo.
- Trabaja sobre un grafo con pesos G = (E,V).
- Desde un vértice s ∈ V hacia todos los vértices v ∈ V.



Algoritmo de Dijkstra

- Mantiene un conjunto S de vértices cuyos pesos de la ruta más corta desde el vértice origen han sido ya determinados.
- El algoritmo iterativamente selecciona un vértice $u \in$ V-S con el mínimo estimado de ruta más corta, lo añade a S, y relaja todas las aristas salientes de u.
- Relajar una arista (u,v) implica verificar si se puede mejorar el estimado de costo de la ruta más corta a v a través de u.

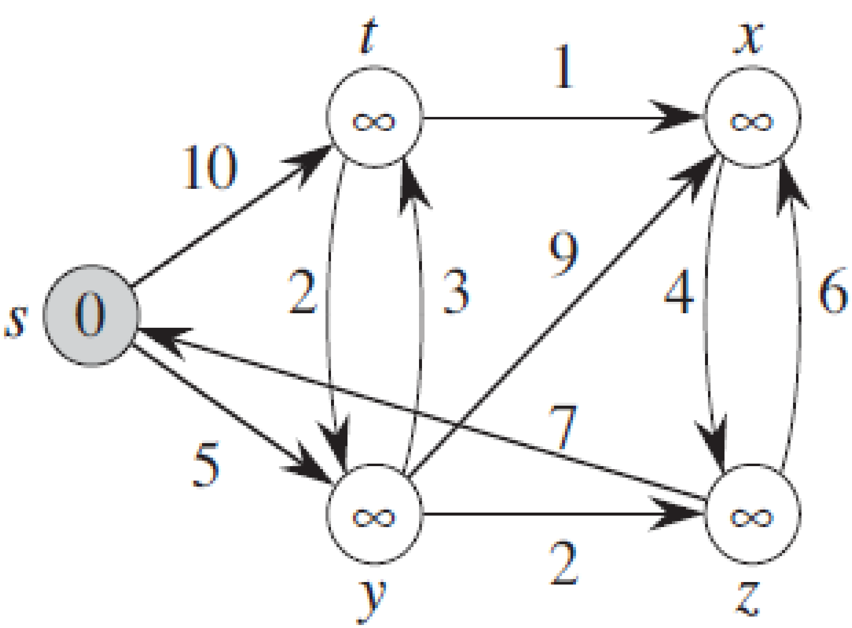
Algoritmo de Dijkstra

Pseudocode

dist[s] ←0	(distance to source vertex is zero)
for all v ∈ V–{s}	
do dist[v] ←∞	(set all other distances to infinity)
S←∅	(S, the set of visited vertices is initially empty)
Q←V	(Q, the queue initially contains all vertices)
while Q ≠∅	(while the queue is not empty)
do u ← mindistance(Q,dist)	(select the element of Q with the min. distance)
S←S∪{u}	(add u to list of visited vertices)
for all v ∈ neighbors[u]	
do if dist[v] > dist[u] + w(u, v)	(if new shortest path found)
then d[v] ←d[u] + w(u, v)	(set new value of shortest path)
	(if desired, add traceback code)
return dist	

http://math.mit.edu/~rothvoss/18.304.3PM/Presentations/1-Melissa.pdf

Algoritmo de Dijkstra

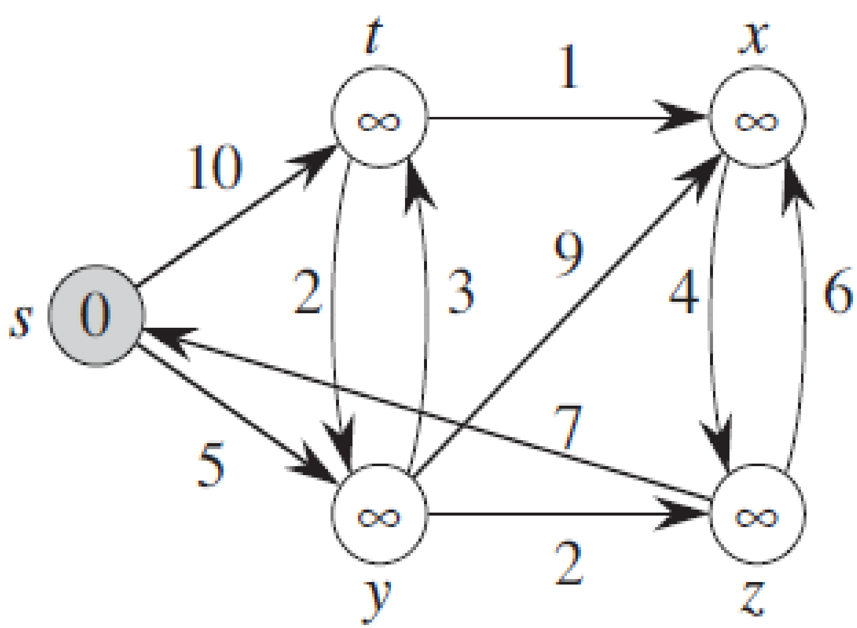


	s	t	x	y	z
dist	0	∞	∞	∞	∞
pred	s				

S					
Q	s	t	x	y	z

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra



	s	t	x	y	z
dist	0	∞	∞	∞	∞
pred	s				

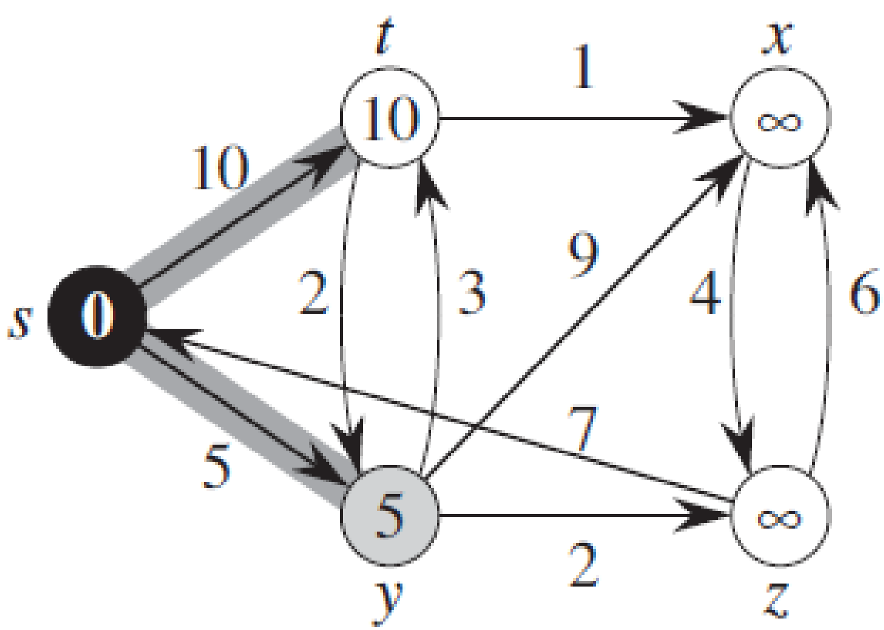
S	s				
Q	t	x	y	z	

(s,t) → ∞ > 0 + 10 ✓

(s,y) → ∞ > 0 + 5 ✓

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra

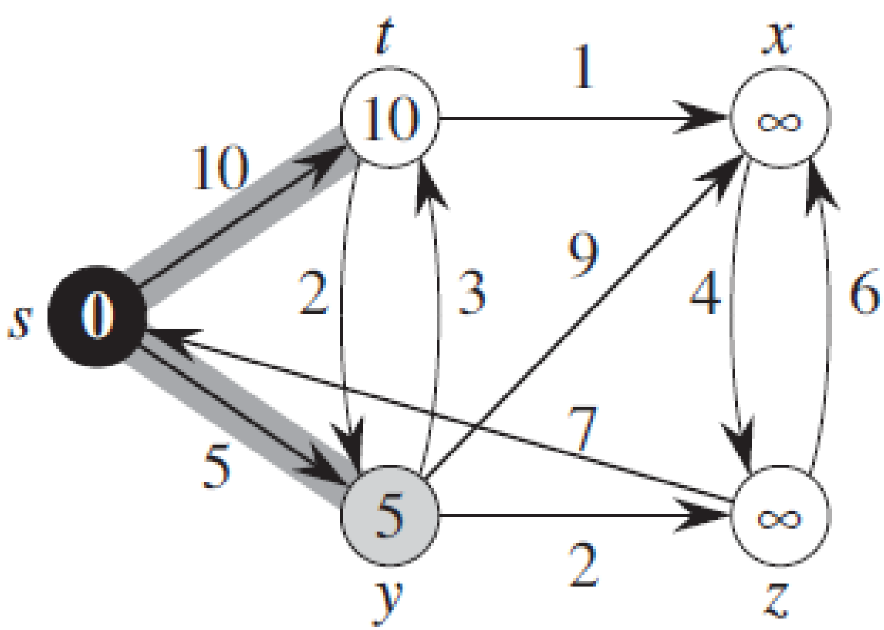


	s	t	x	y	z
dist	0	10	∞	5	∞
pred	s	s		s	

S	s				
Q	t	x	y	z	

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra



	s	t	x	y	z
dist	0	10	∞	5	∞
pred	s	s		s	

S	s	y			
Q	t	x	z		

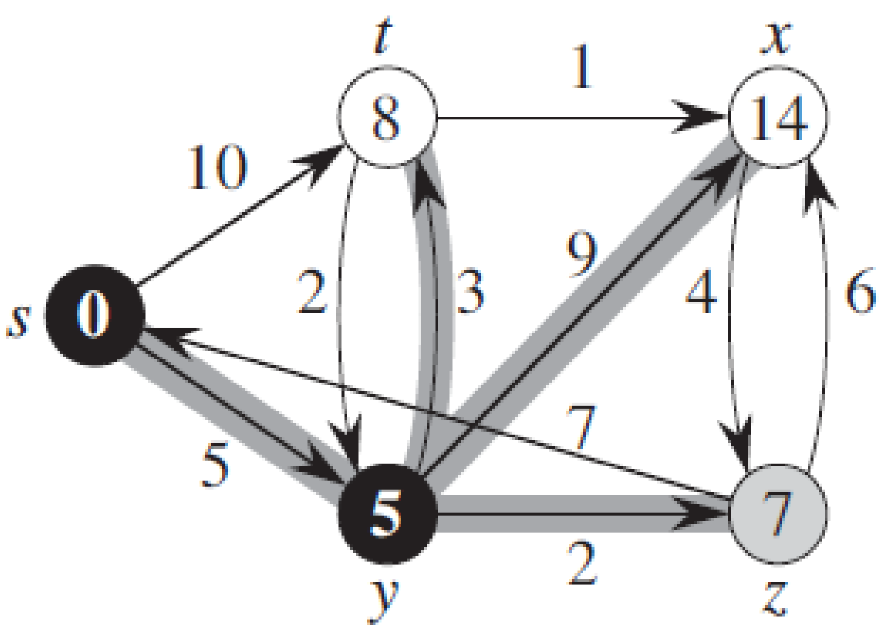
(y,t) → 10 > 5 + 3 ✓

(y,x) → ∞ > 5 + 9 ✓

(y,z) → ∞ > 5 + 2 ✓

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra

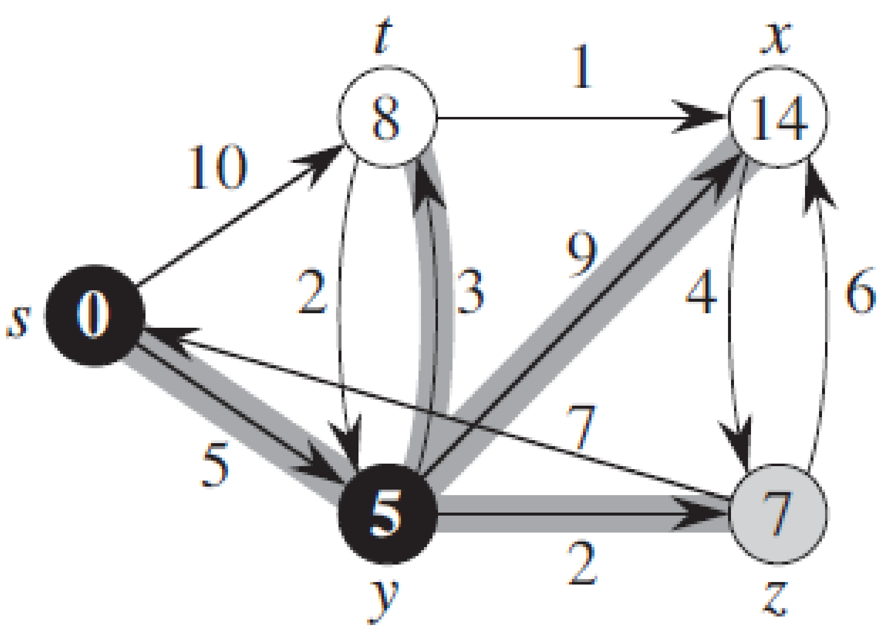


	s	t	x	y	z
dist	0	8	14	5	7
pred	s	y	y	s	y

S	s	y			
Q	t	x	z		

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra



	s	t	x	y	z
dist	0	8	14	5	7
pred	s	y	y	s	y

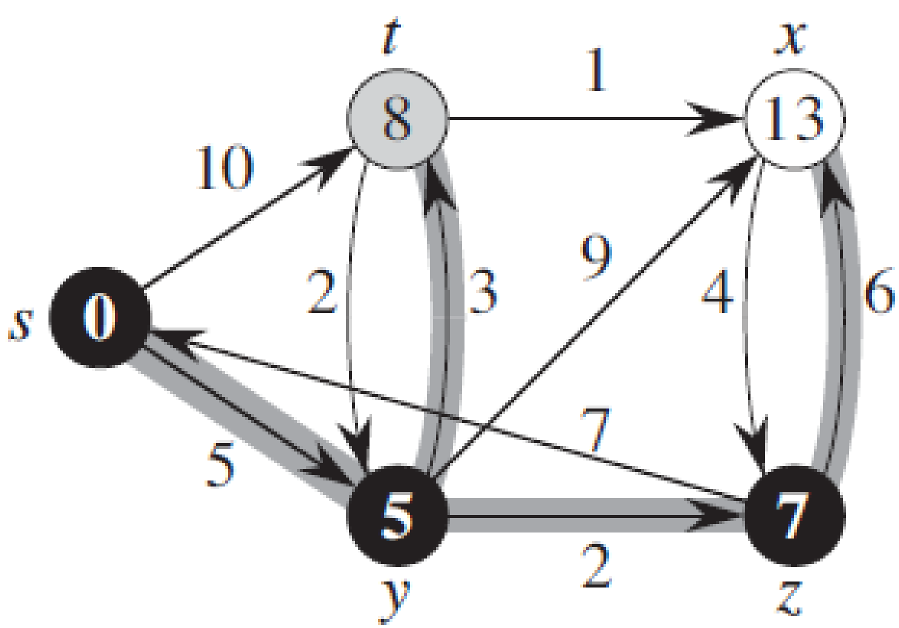
S	s	y	z		
Q	t	x			

(z,s) → 0 > 7 + 7 ✗

(z,x) → 14 > 7 + 6 ✓

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra

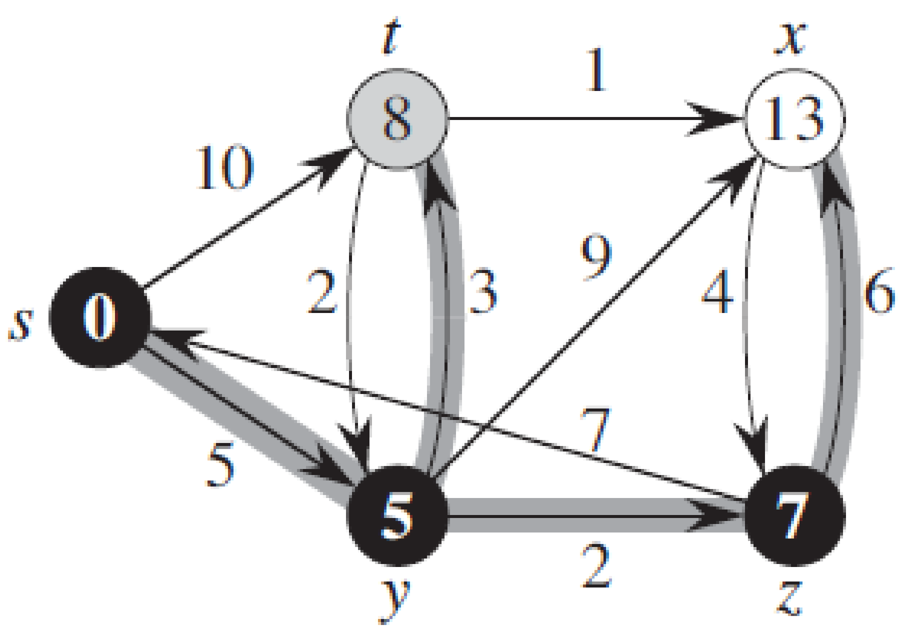


	s	t	x	y	z
dist	0	8	13	5	7
pred	s	y	z	s	y

S	s	y	z		
Q	t	x			

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra



	s	t	x	y	z
dist	0	8	13	5	7
pred	s	y	z	s	y

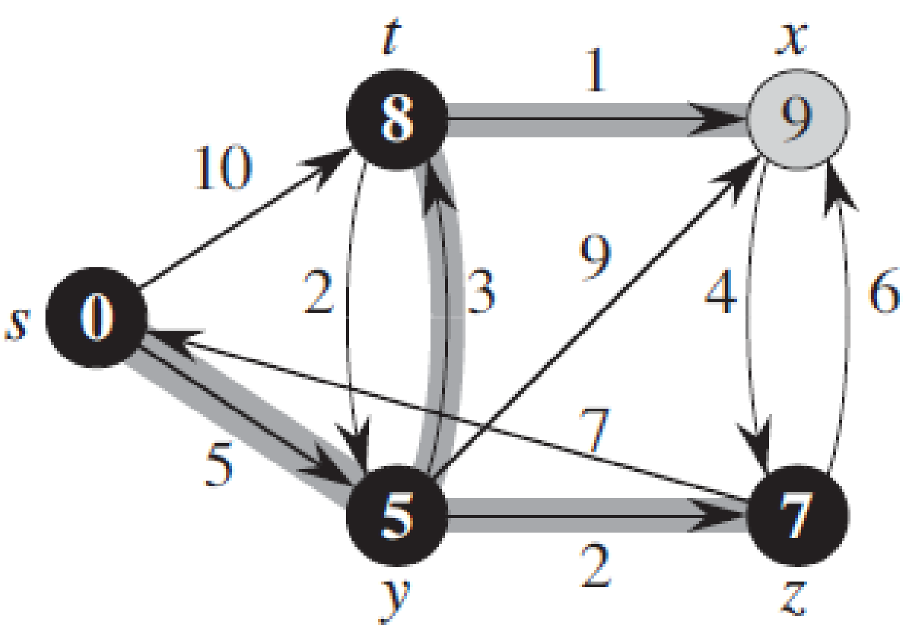
S	s	y	z	t	
Q	x				

(t,x) $\rightarrow$ 13 > 8 + 1 ✓

(t,y) $\rightarrow$ 5 > 8 + 2 ✗

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra

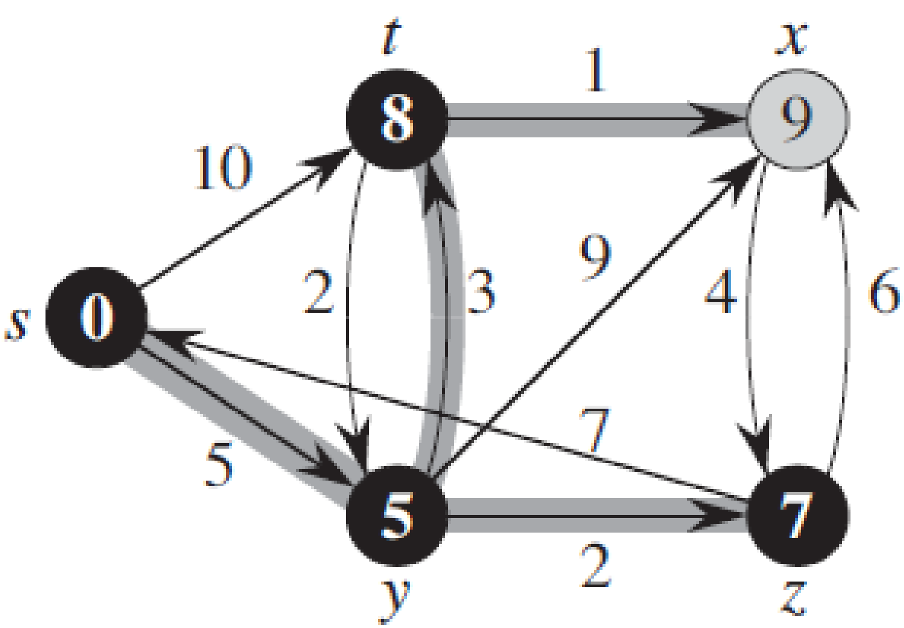


	s	t	x	y	z
dist	0	8	9	5	7
pred	s	y	t	s	y

S	s	y	z	t	
Q	x				

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra



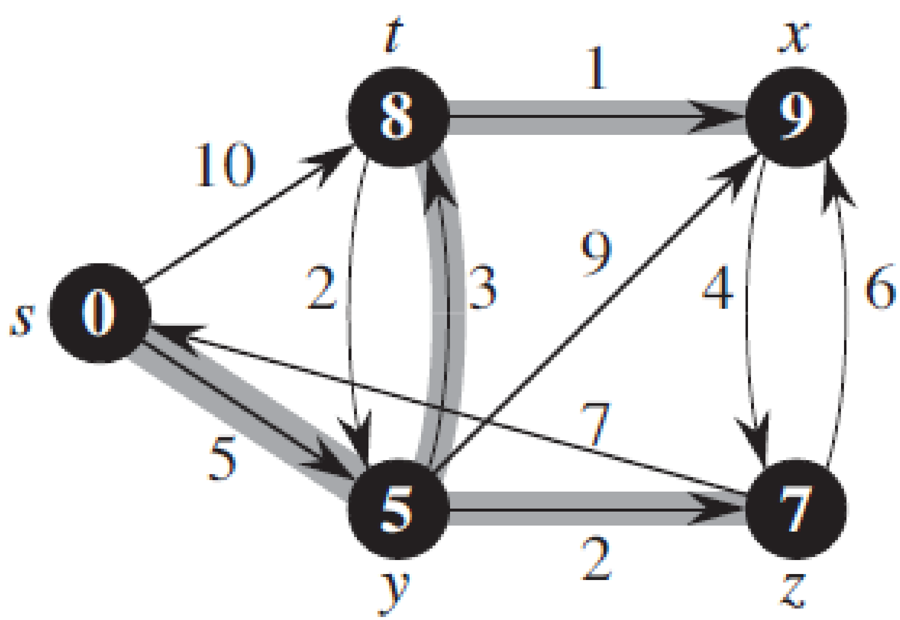
	s	t	x	y	z
dist	0	8	9	5	7
pred	s	y	t	s	y

S	s	y	z	t	x
Q					

$(x,z) \rightarrow 7 > 9 + 4$ ✗

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra

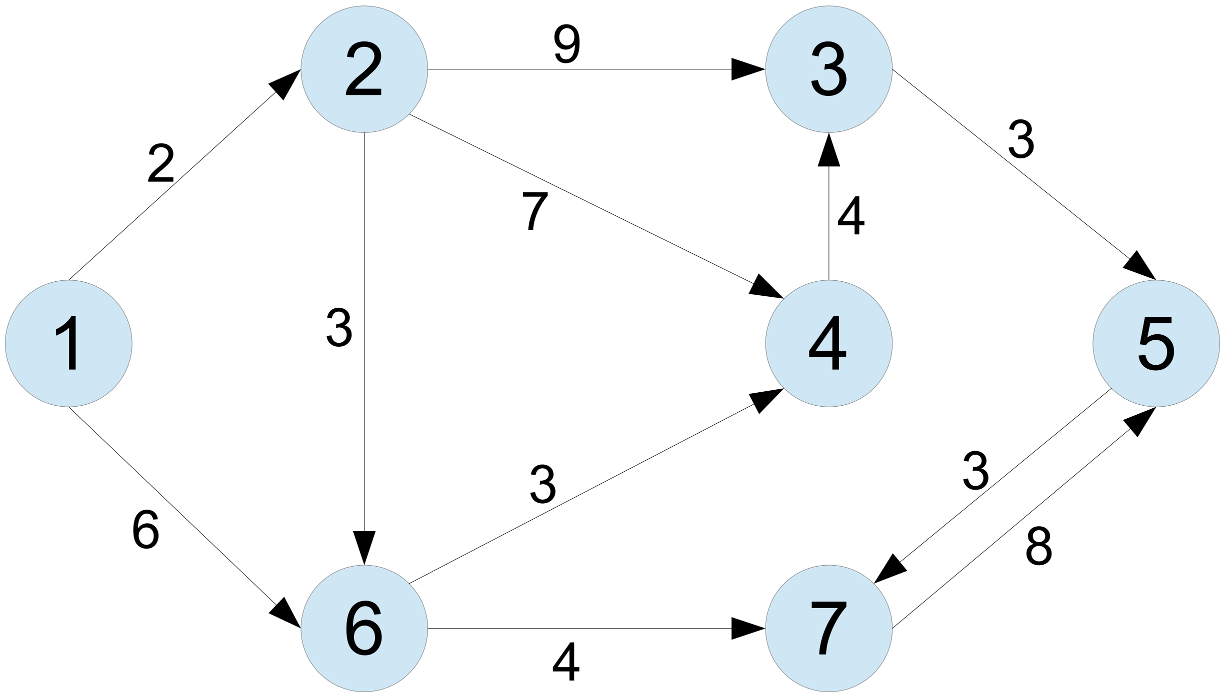


	s	t	x	y	z
dist	0	8	9	5	7
pred	s	y	t	s	y

S	s	y	z	t	x
Q					

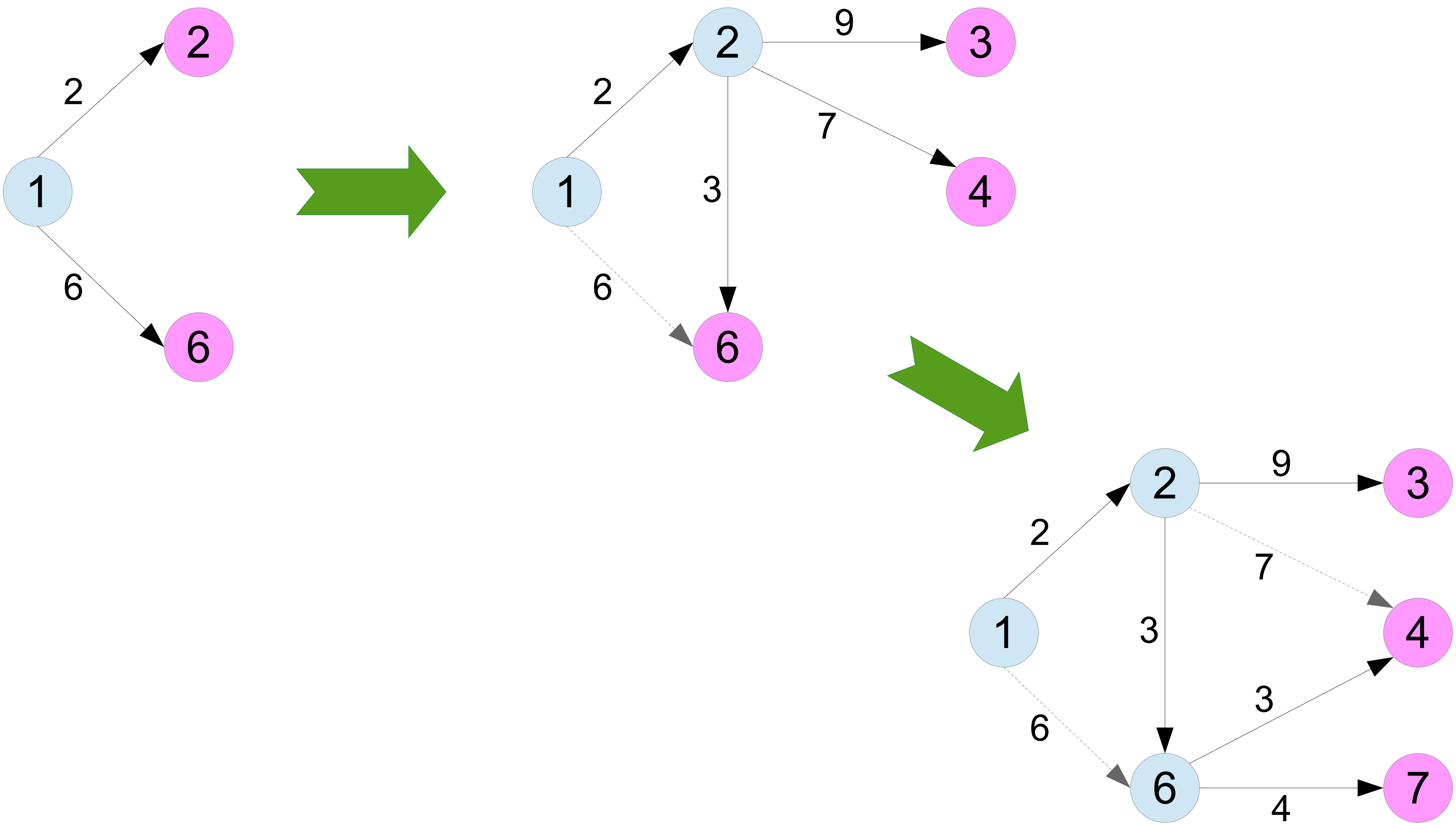
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Dijkstra



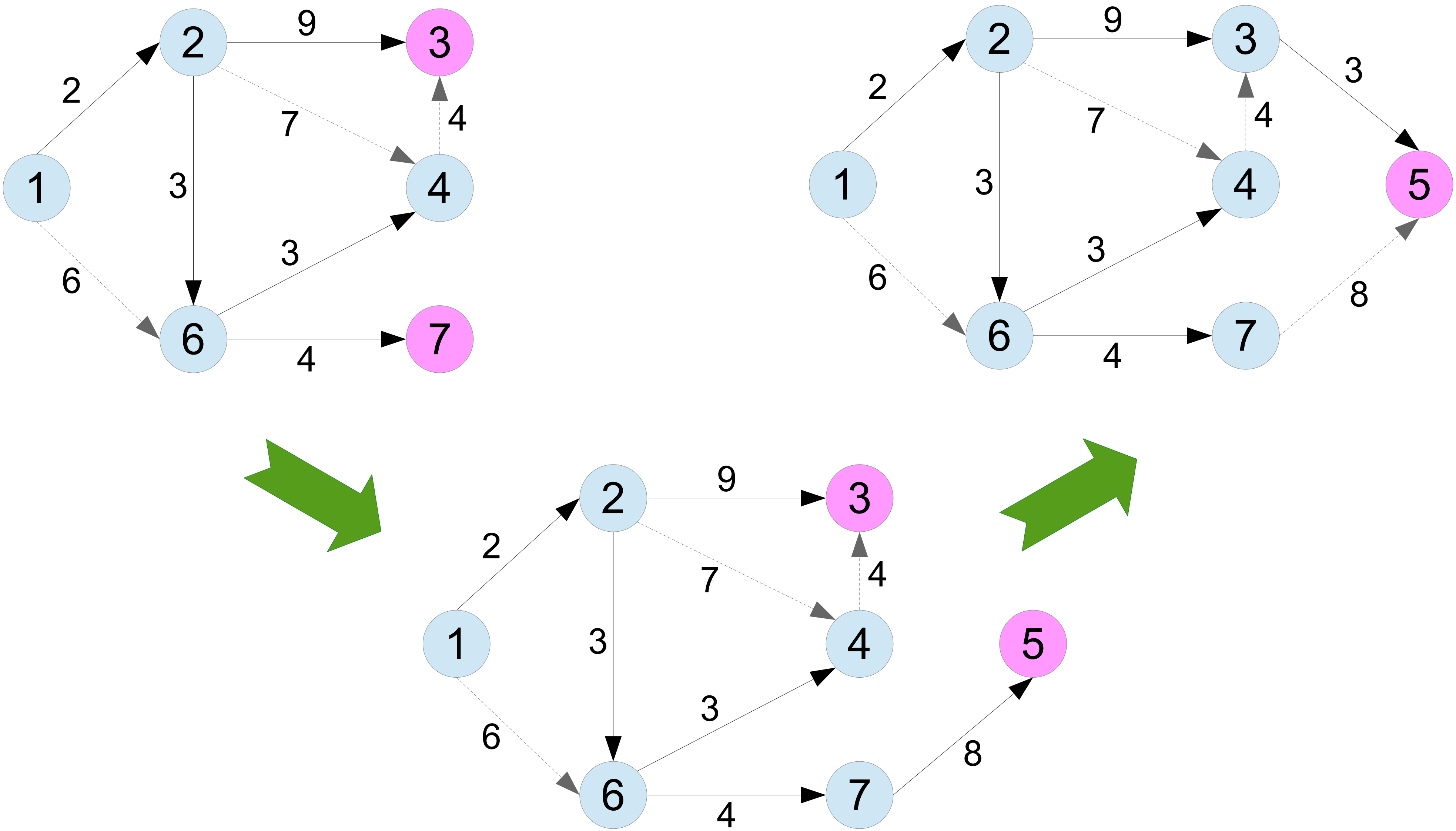
http://www.cosc.canterbury.ac.nz/tad.takaoka/alg/graphalg/graphalg.html

Algoritmo de Dijkstra



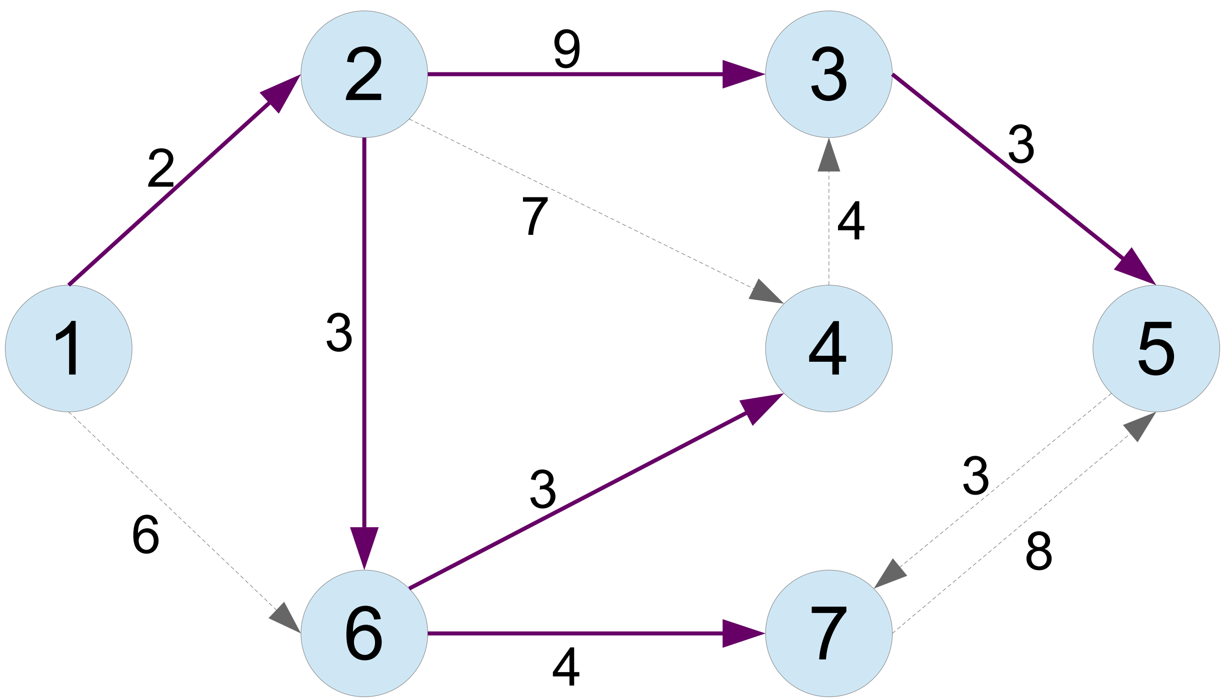
http://www.cosc.canterbury.ac.nz/tad.takaoka/alg/graphalg/graphalg.html

Algoritmo de Dijkstra



http://www.cosc.canterbury.ac.nz/tad.takaoka/alg/graphalg/graphalg.html

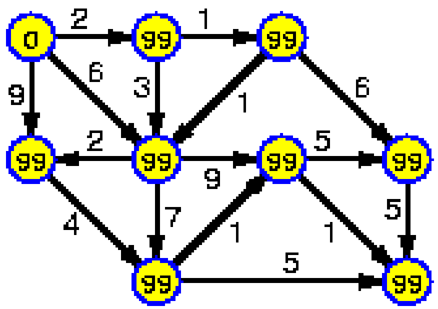
Algoritmo de Dijkstra



http://www.cosc.canterbury.ac.nz/tad.takaoka/alg/graphalg/graphalg.html

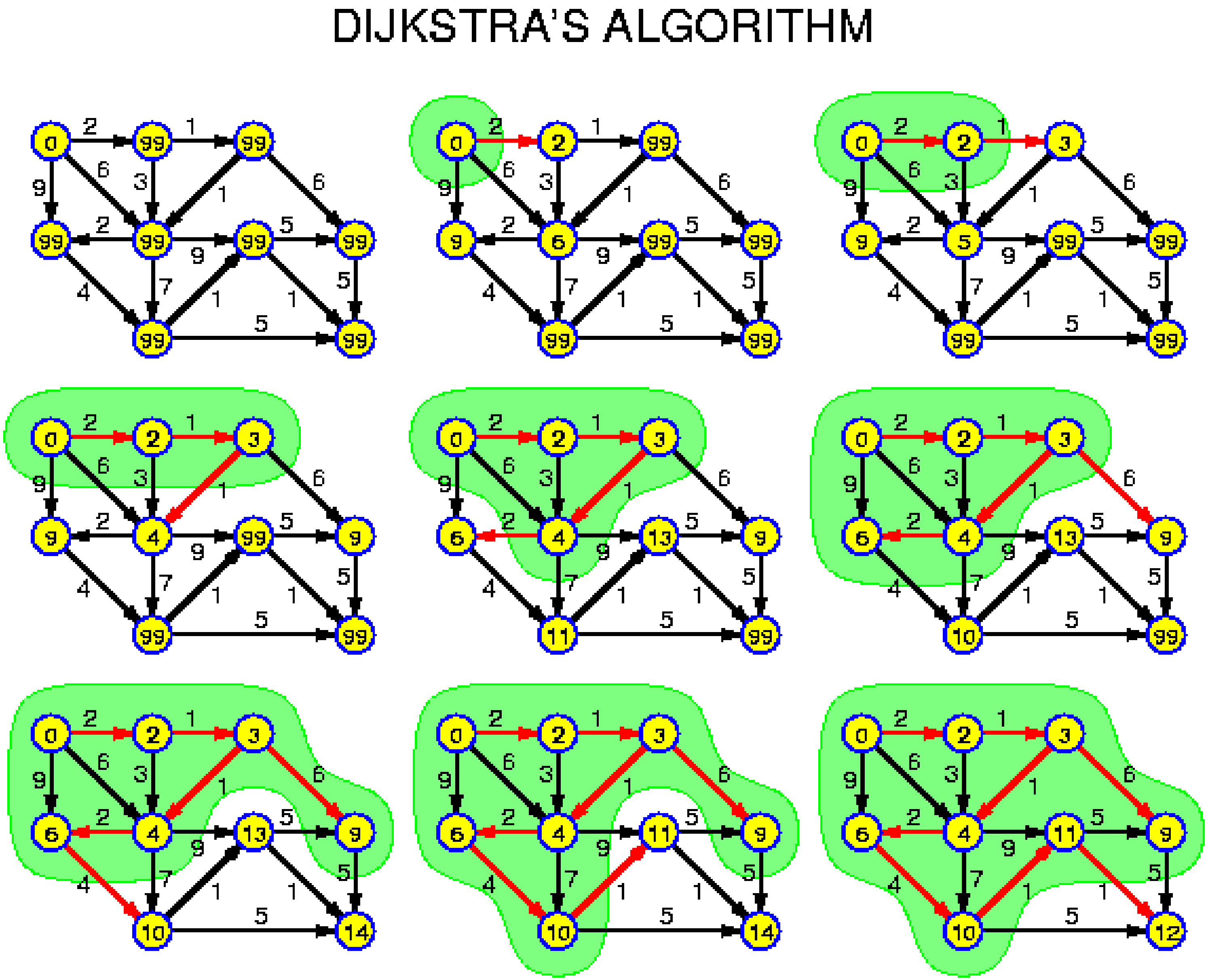
Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA'S ALGORITHM



http://www.iekucukcay.com/?p=65

Algoritmo de Dijkstra



http://www.iekucukcay.com/?p=65

Algoritmo de Dijkstra

- Applet de demostración:

  https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Dijkstra.html

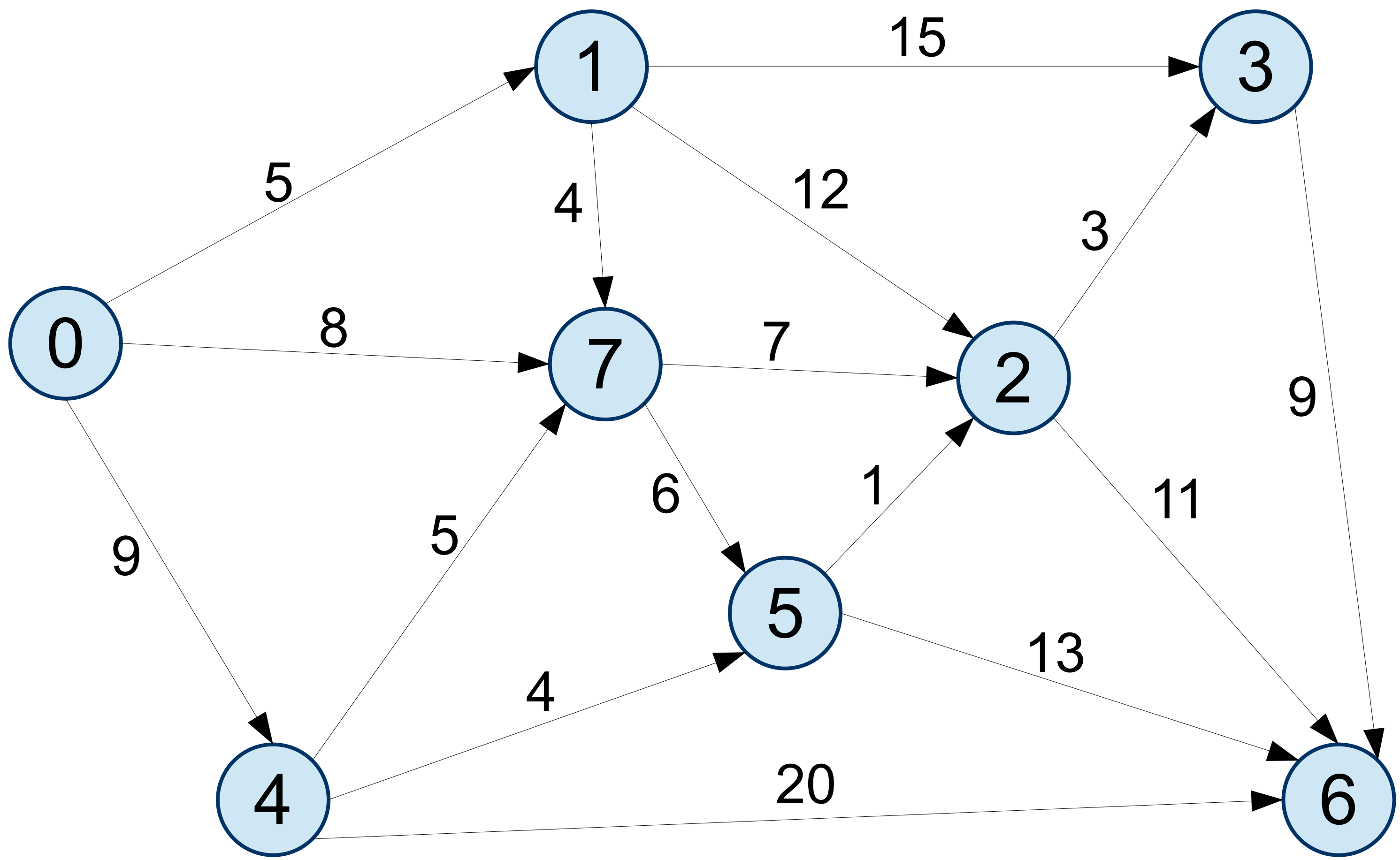
Algoritmo de Dijkstra

Implementación:

- Uso de nodos auxiliares:
  - Vértice.
  - Padre.
  - Costo (***<u>SÓLO POSITIVOS).</u>***
- Cola de prioridades:
  - La prioridad más alta la da el costo más bajo.
  - Árboles RN, AVL, montículos (*heap*).
- Árbol “hacia el padre” → arreglo de predecesores.

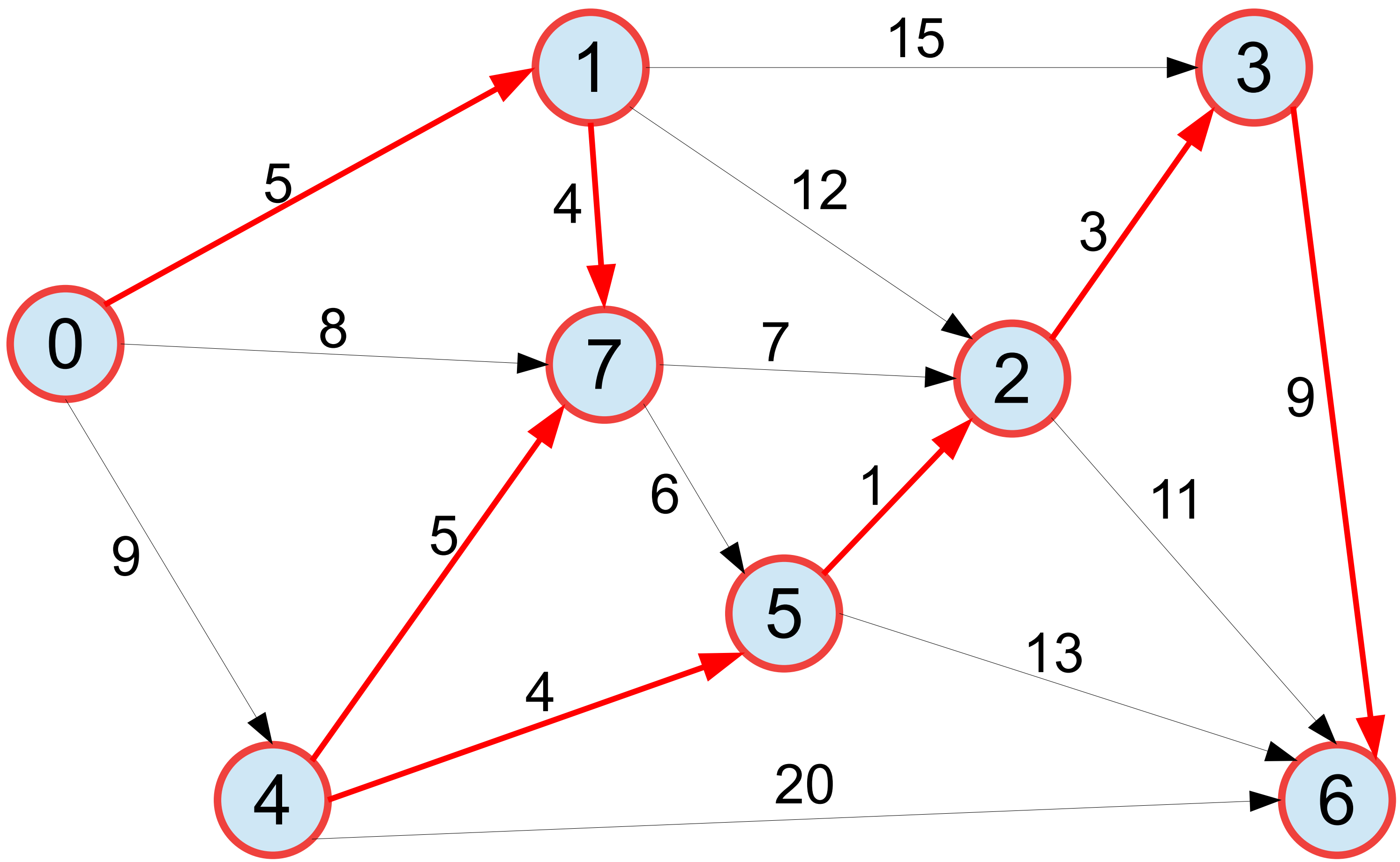
Ejercicio

- Sobre el siguiente grafo, aplique los algoritmos de Kruskal y Dijkstra desde el nodo 0:



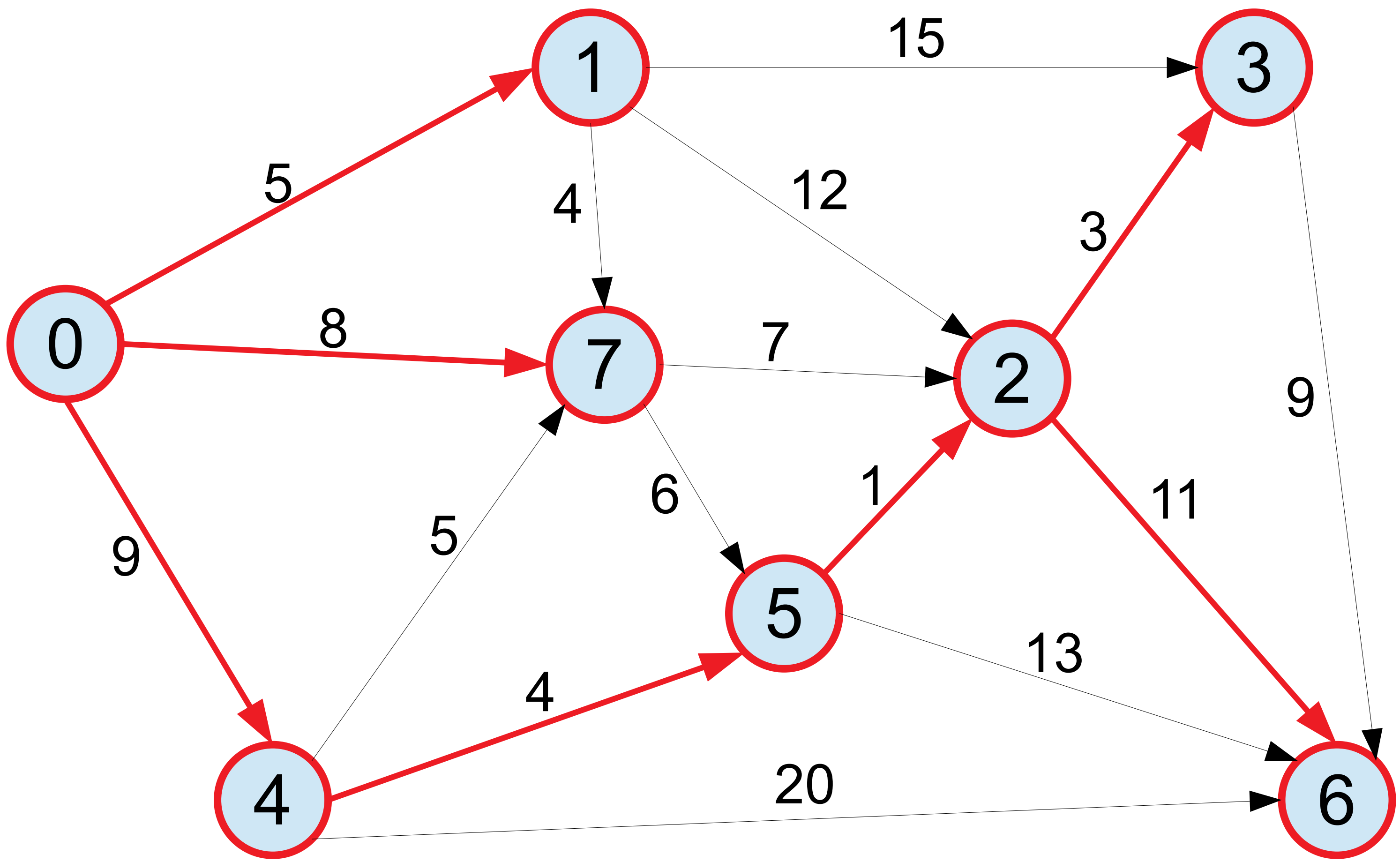
Ejercicio

- Algoritmo de Kruskal:



Ejercicio

- Algoritmo de Dijkstra desde el nodo 0:



Referencias

- Joyanes, L., Zahonero, I. Algoritmos y estructuras de datos. Una perspectiva en C. McGraw-Hill.
- Kolman, B., Busby, R.C., Ross, S. Estructuras de matemáticas discretas para la computación. Prentice-Hall, Pearson Educación.
- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).
- www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture2/lecture2.html

Referencias

- en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm
- www-m3.ma.tum.de/foswiki/pub/MN0506/WebHome/dijkstra.pdf
- math.mit.edu/~rothvoss/18.304.3PM/Presentations/1-Melissa.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal’s_algorithm