Grafos
Componentes Conectados
Caminos de Euler y Hamilton

Estructuras de Datos

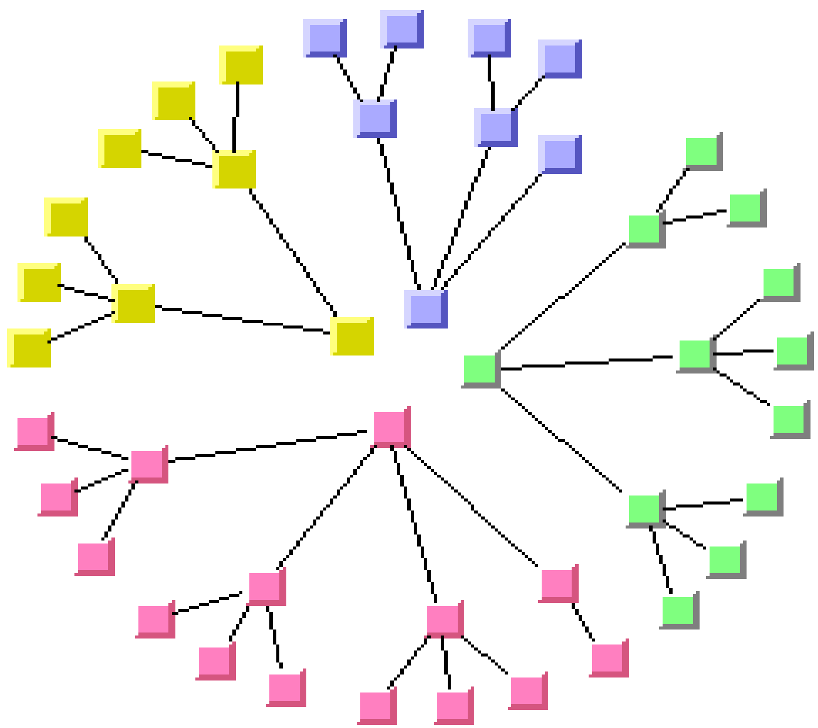
Andrea Rueda

Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Ingeniería de Sistemas

Componentes Conectados

Componentes Conectados

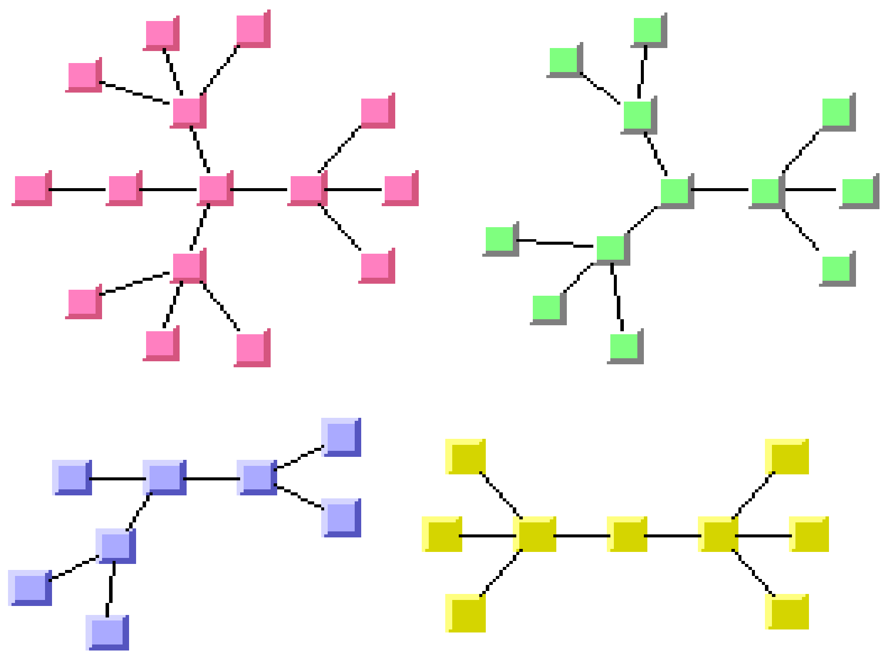
- Si el grafo no está conectado, los subconjuntos de vértices que están mutuamente conectados se conocen como los componentes conectados (o conexos) del grafo.



http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/jviewtgo/v8r8/index.jsp

Componentes Conectados

- Si el grafo no está conectado, los subconjuntos de vértices que están mutuamente conectados se conocen como los componentes conectados (o conexos) del grafo.



http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/jviewtgo/v8r8/index.jsp

Componentes Conectados

- Pasos a seguir:

  - Recorrer el grafo a partir de un vértice.

  - Si se visitan todos los vértices, es conexo.

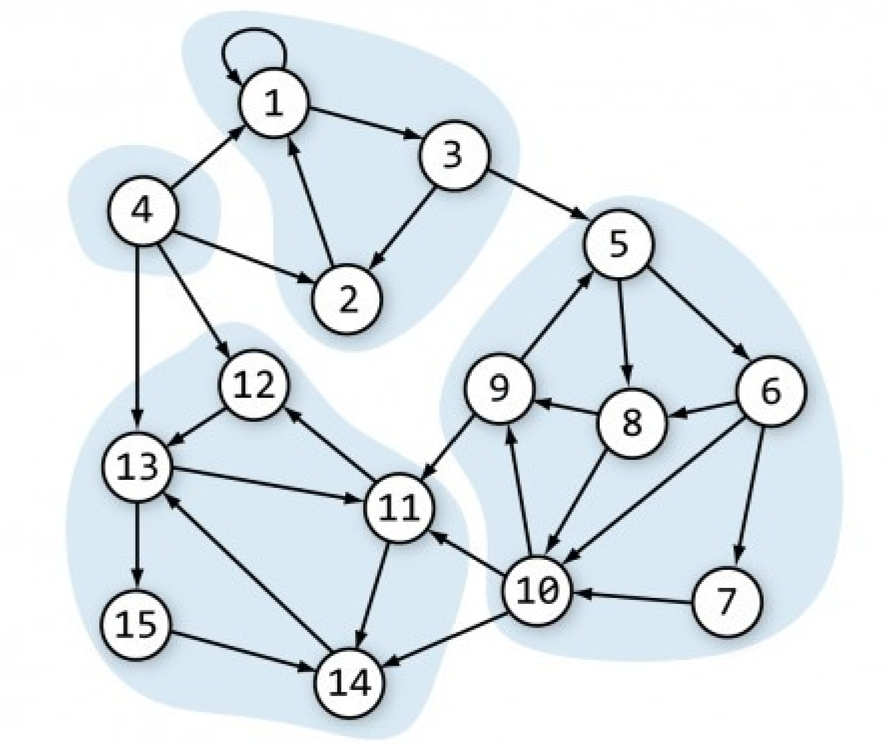
  - Si no, los visitados hasta ahora forman un componente conectado.

  - Tomar un vértice no visitado y recorrer el grafo a partir de éste. Los vértices visitados forman otro componente conectado.

  - Repetir el paso anterior hasta visitar todos los vértices del grafo.

Componentes Conectados

- En un grafo dirigido, cuando es débilmente conectado, se pueden identificar también componentes fuertemente conectados.



http://www.scribegriff.com/studios/index.php?post/2013/03/26/Strongly-Connected-Components-and-the-2-SAT-Problem-in-Dart

Componentes Conectados

- Pasos a seguir:

  - Obtener el conjunto de vértices descendientes D(v), incluído v (vértice de partida).

  - Obtener el conjunto de vértices ascendientes A(v), incluído v (vértice de partida).

  - Vértices comunes entre D y A forman el componente fuertemente conectado al que pertenece v, si es igual al conjunto de vértices del grafo es fuertemente conectado.

  - Si no, escoger un vértice que no esté en la intersección y repetir hasta visitarlos todos.

Componentes Conectados

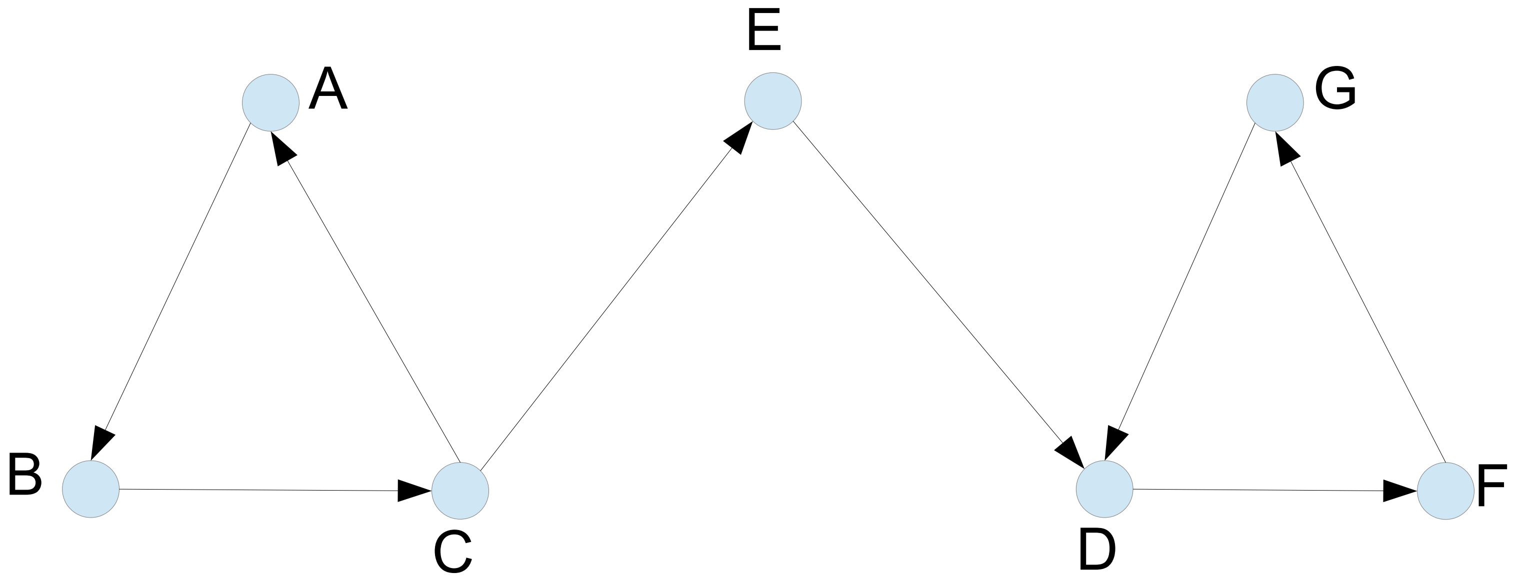
- Descendientes de un vértice:
  A los que se puede llegar desde ese vértice.

  Recorrido en profundidad del grafo a partir de ese vértice.
- Ascendientes de un vértice:
  Desde los que se puede llegar a ese vértice.

  Invertir la dirección de las aristas del grafo, y recorrer en profundidad desde ese vértice.

Componentes Conectados

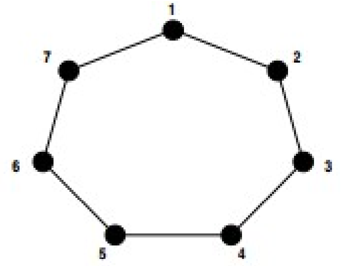
- Dado el siguiente grafo

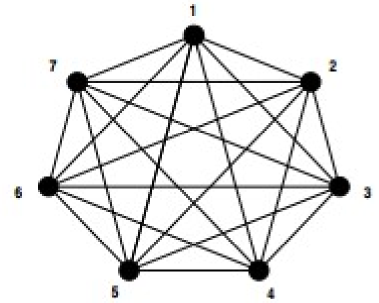


Identificar sus componentes fuertemente conectados.

Recorridos en Grafos

- Plano.
- Preorden.
- Niveles / Vecindario.
- Euler:
  - Todas las aristas una vez.
- Hamilton:
  - Todos los vértices una vez.



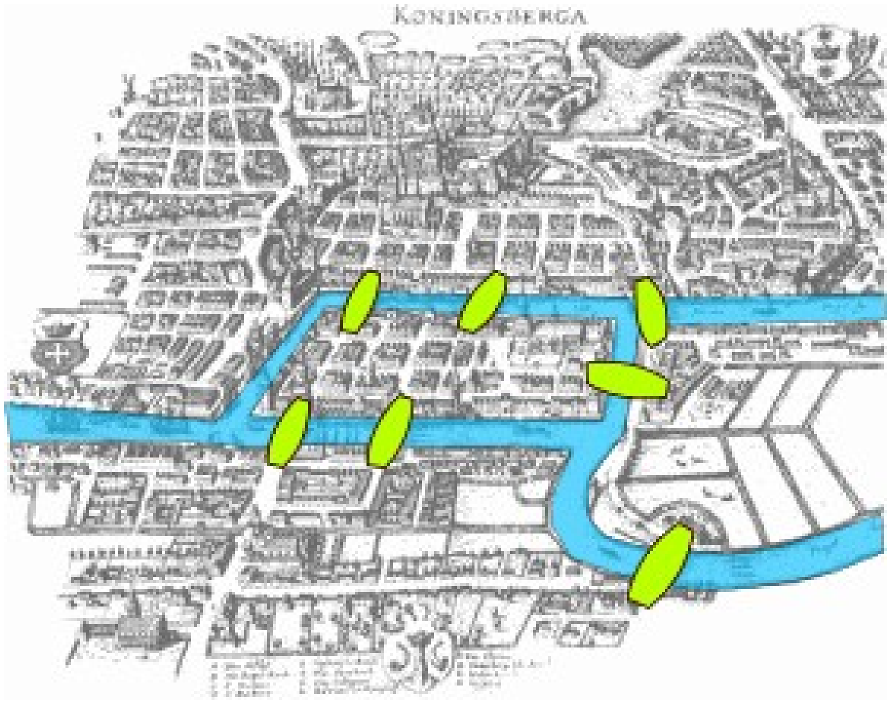


Caminos o Trayectorias de Euler

Caminos de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.

  Problema: encontrar una ruta para recorrer la ciudad que cruce cada puente una y sólo una vez.



http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

Caminos de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.
  Modelar el problema con un grafo:
  - Cada pedazo de tierra representado con un vértice.
  - Cada puente representado con una arista.

http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

Caminos de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.

  Si cada puente debe atravesarse una vez, cada vértice debería tener un número par de conexiones (mitad de ida y mitad de vuelta).

Caminos de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.

  Si cada puente debe atravesarse una vez, cada vértice debería tener un número par de conexiones (mitad de ida y mitad de vuelta).

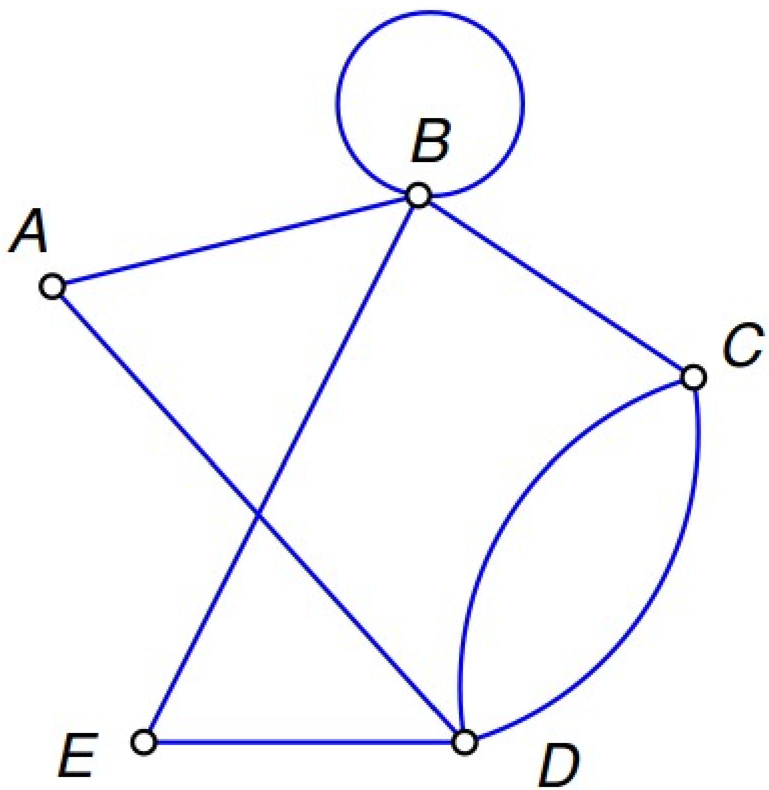
  Sin embargo, cada porción de tierra está conectada por un número impar de puentes, lo que lleva a una contradicción.

  Por lo cual, Euler identificó que este problema no se puede resolver.

Caminos de Euler

- Caminos, rutas o trayectorias en un grafo G, que sólo incluyen o visitan cada arista una sola vez, se conocen como caminos, rutas o trayectorias de Euler.
- Si adicionalmente los caminos empiezan y terminan en el mismo vértice, se conocen como circuitos o ciclos de Euler .

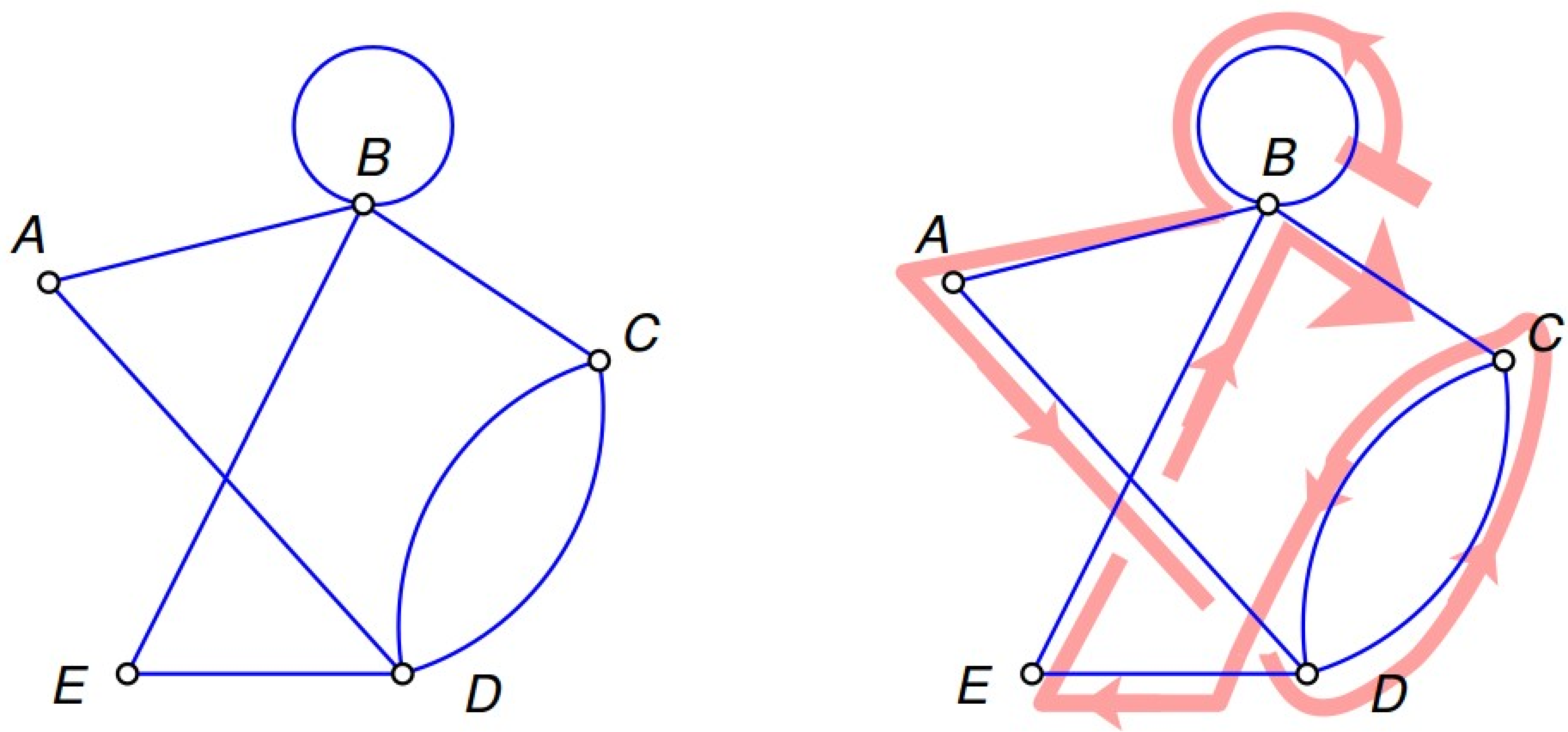
Caminos de Euler



An Euler path:

http://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf

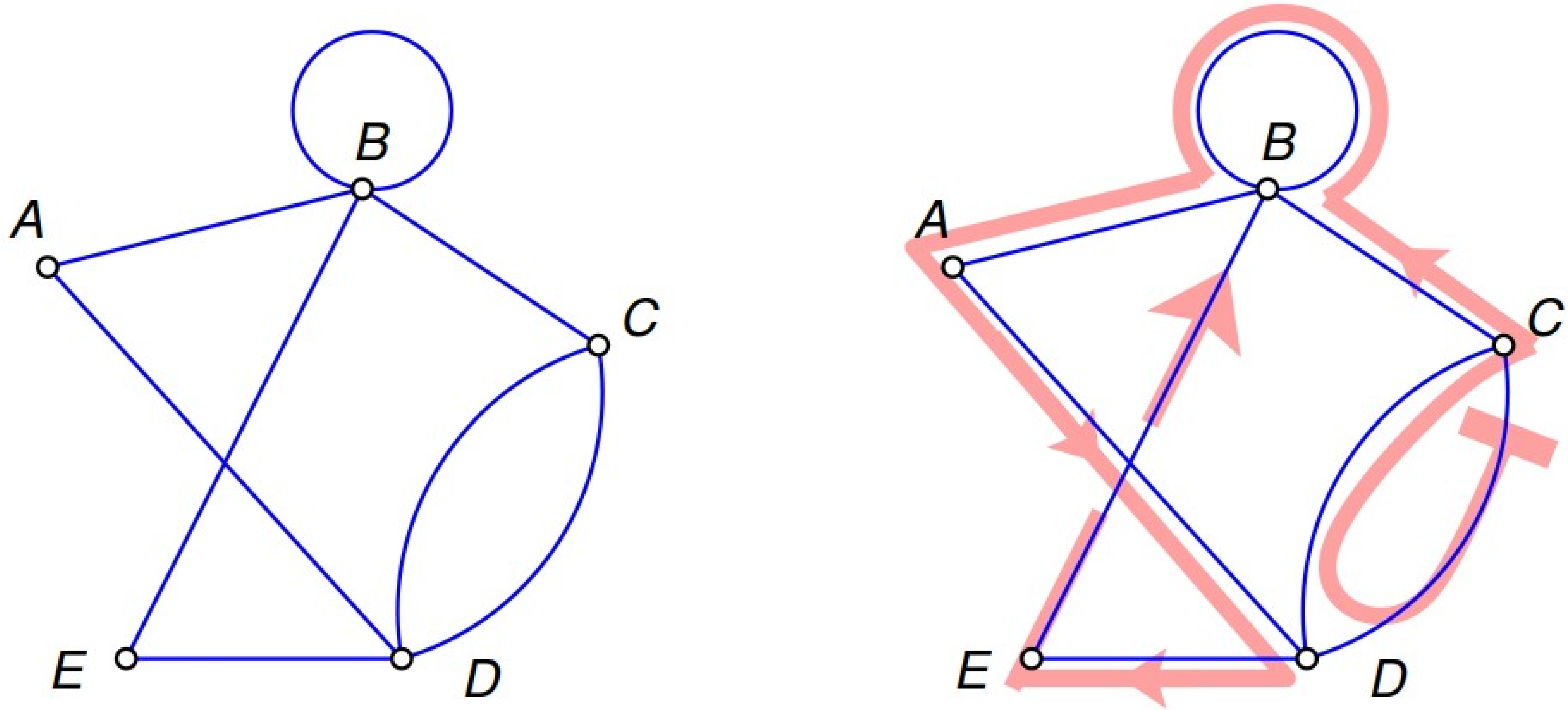
Caminos de Euler



An Euler path: BBADCDEBC

http://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf

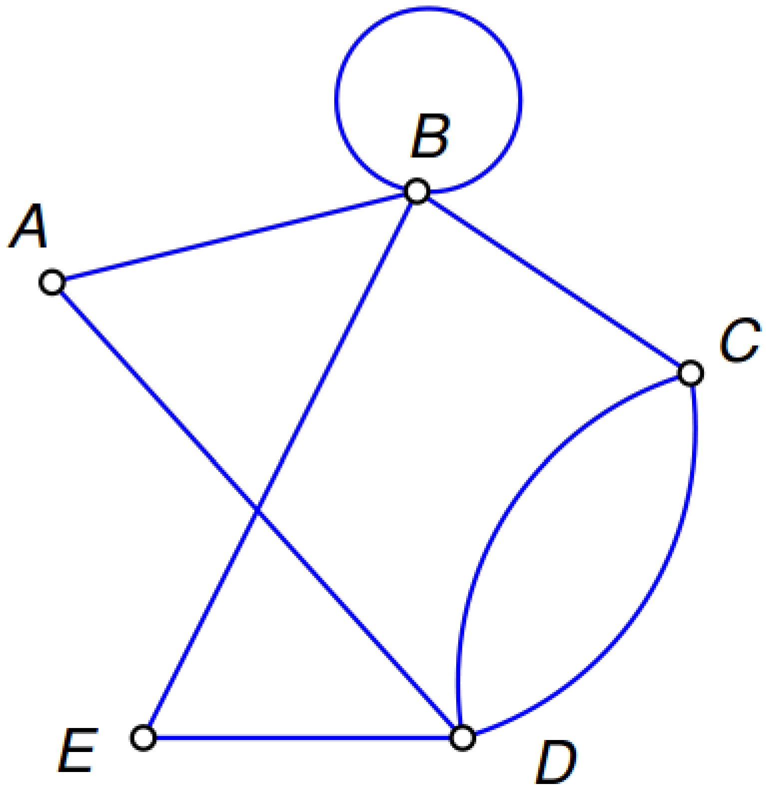
Caminos de Euler



Another Euler path: CDCBBADEB

http://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf

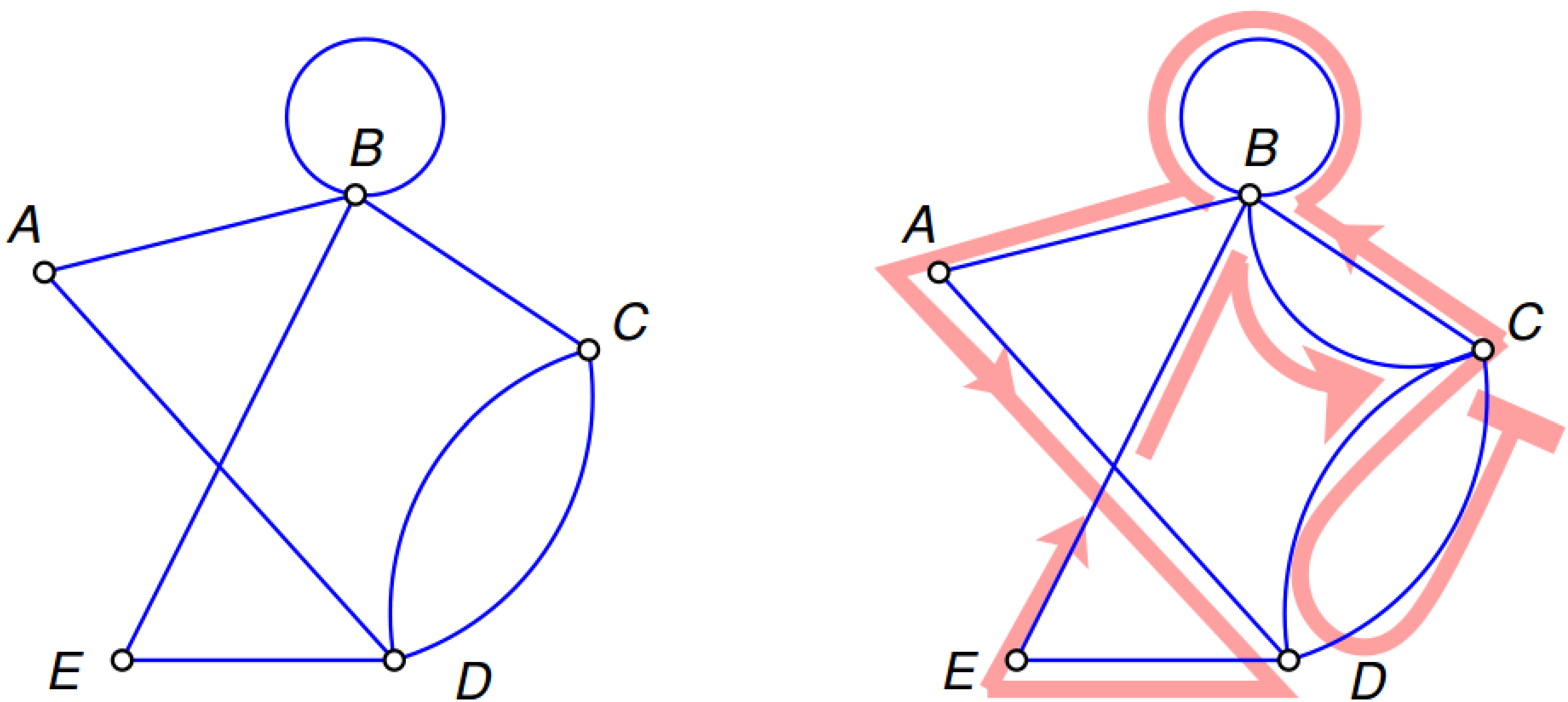
Caminos de Euler



An Euler circuit:

http://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf

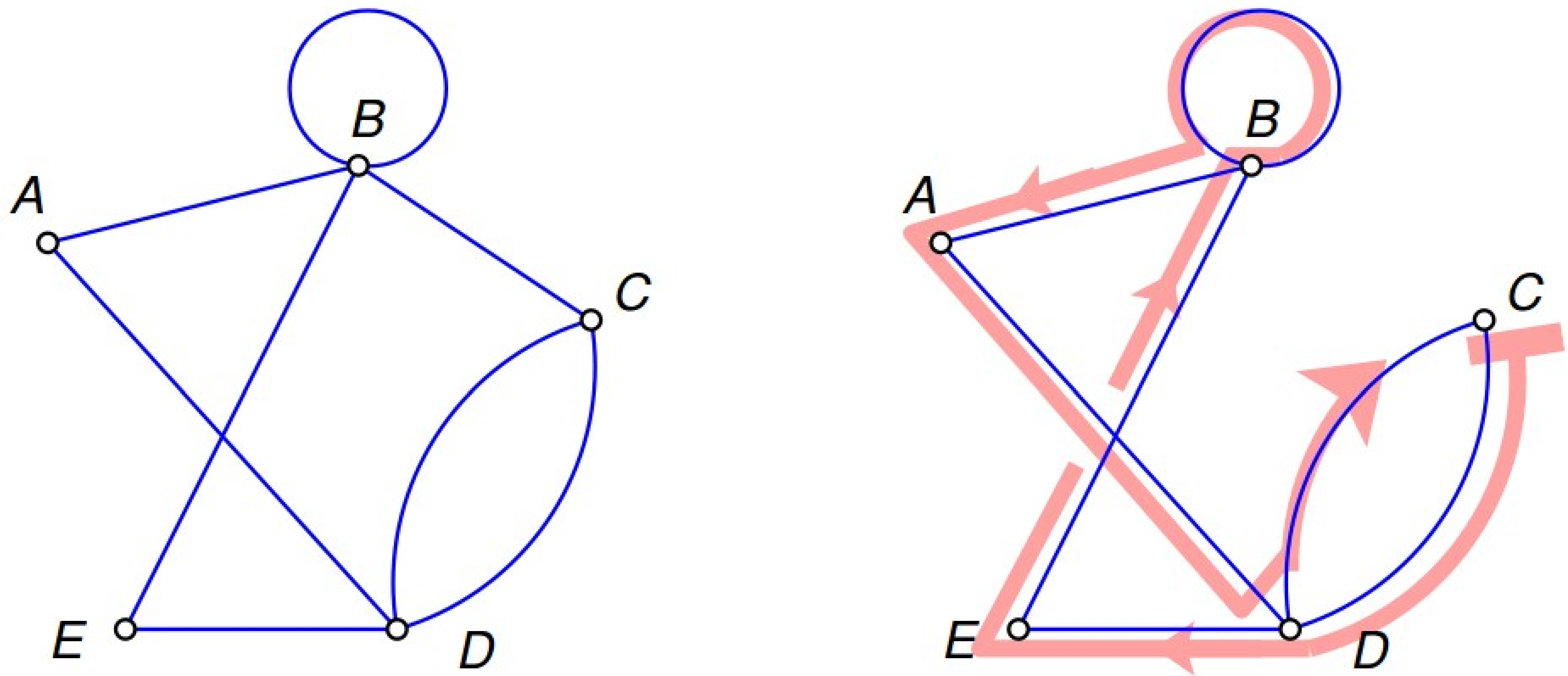
Caminos de Euler



An Euler circuit: CDCBBADEBC

http://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf

Caminos de Euler



Another Euler circuit: CDEBBADC

http://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf

Caminos de Euler

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Euler:

- Todos los vértices del grafo deben tener grado par → si existe al menos un vértice de grado impar, no puede existir un circuito de Euler.

- Grafo “Euleriano”:

  - Un grafo con un circuito de Euler.

  - Un grafo con todos sus vértices de grado par.

Caminos de Euler

Definiciones formales:

- Un grafo **no dirigido** tiene un circuito de Euler si y sólo si cada vértice tiene grado par, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente conectado.
- Un grafo **no dirigido** tiene un camino de Euler si y sólo si por mucho dos vértices tienen grado impar, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente conectado.

Caminos de Euler

Definiciones formales:

- Un grafo **dirigido** tiene un circuito de Euler si y sólo si cada vértice tiene el mismo grado de salida como de entrada, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente fuertemente conectado.

Caminos de Euler

Definiciones formales:

- Un grafo **dirigido** tiene un camino de Euler si y sólo si por mucho un vértice tiene una diferencia de 1 entre el grado de salida y de entrada, si por mucho otro vértice tiene una diferencia de 1 entre el grado de entrada y el de salida, el resto de vértices tienen igual grado de salida y de entrada, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente conectado.

Caminos de Euler

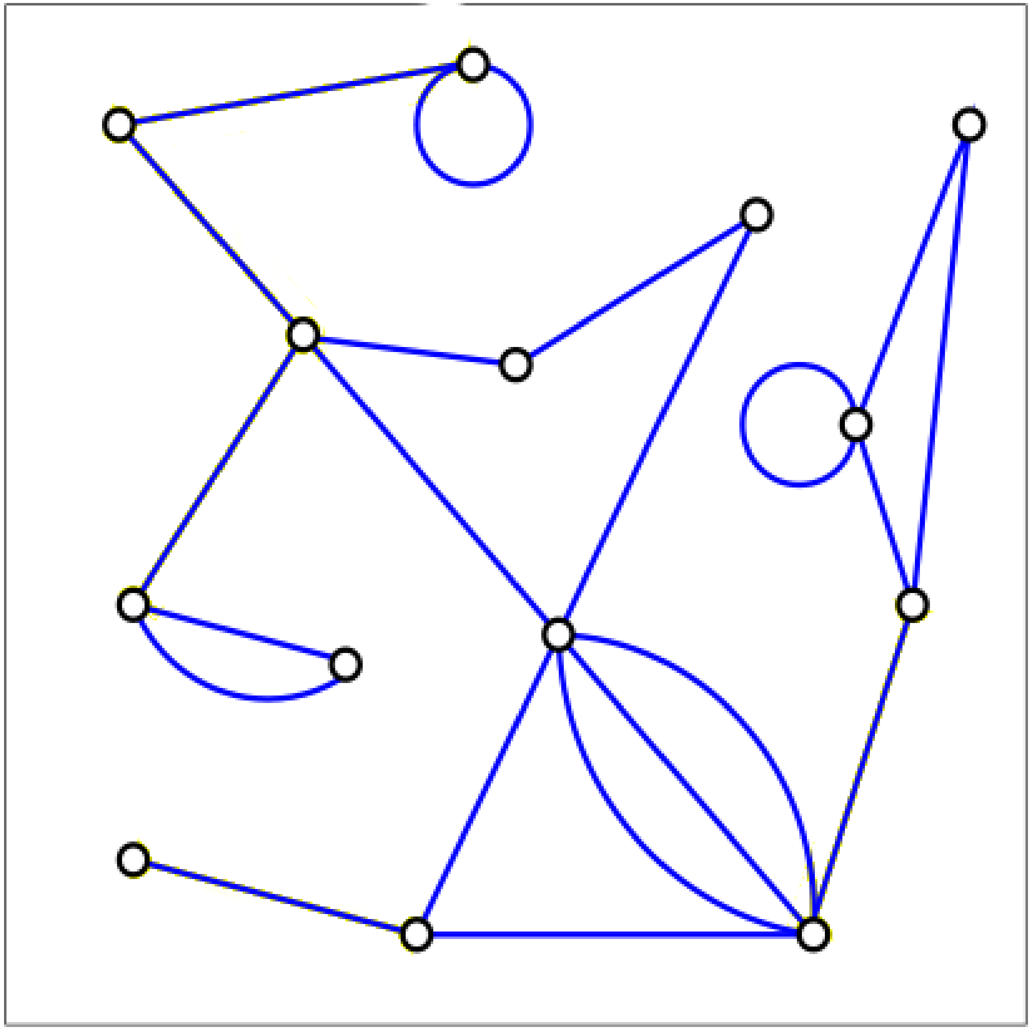
- Sabiendo que el el grafo pueden existir caminos y/o circuitos de Euler, ¿cómo encontrarlos?

- Noción de arista “puente”:

  Una arista en un grafo conectado se asume como “puente” si el remover solamente esa arista hace que partes del grafo se desconecten.

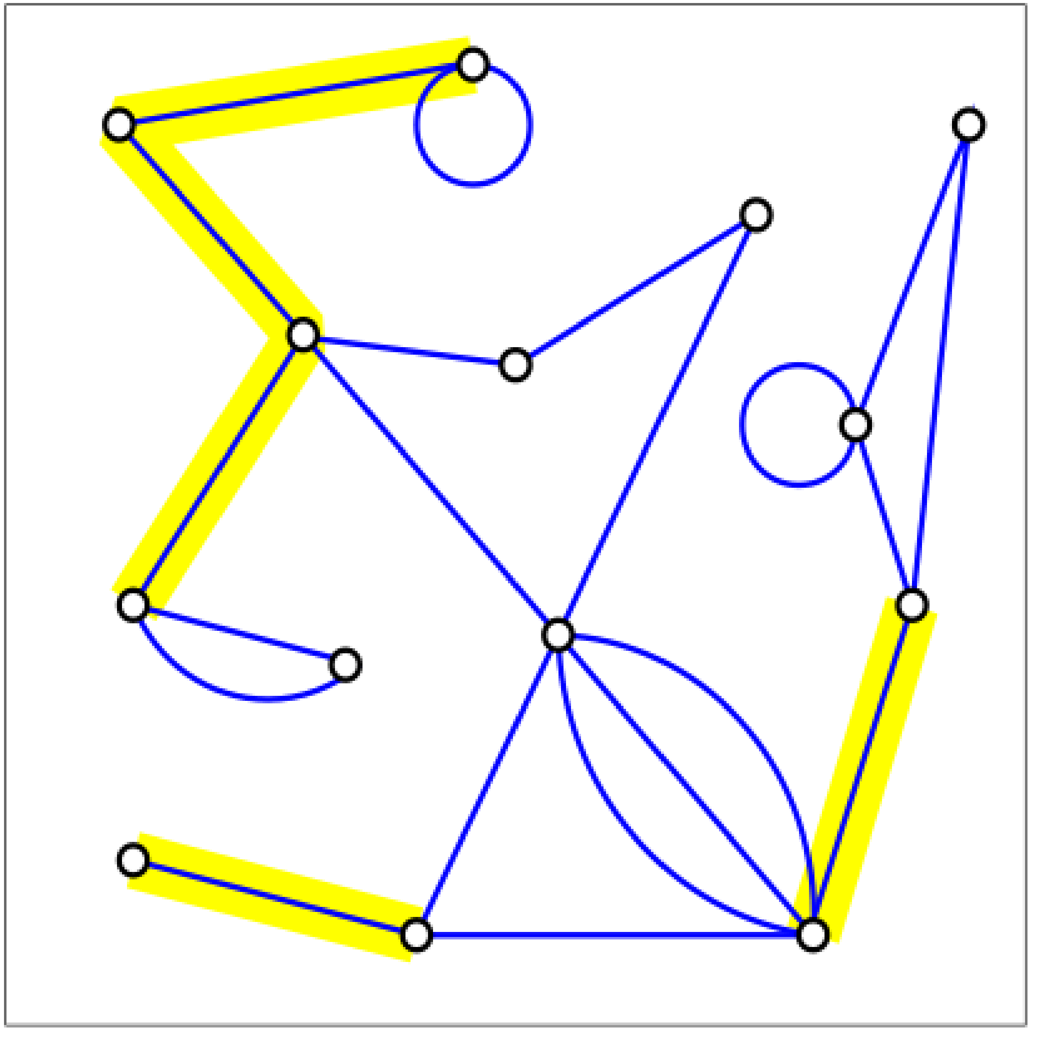
Caminos de Euler

- Noción de arista "puente":



Caminos de Euler

- Noción de arista “puente”:

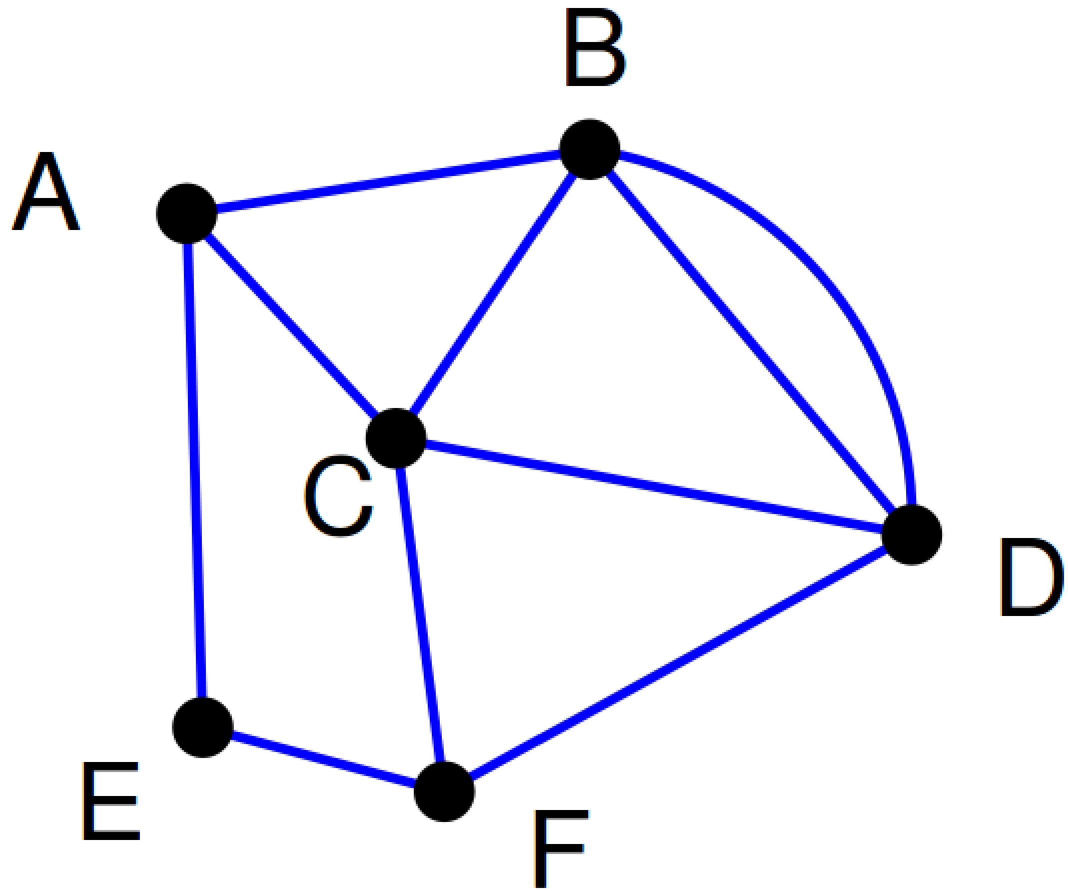


Caminos de Euler

- Encontrar un camino o circuito de Euler en un grafo → Algoritmo de Fleury's.
  1. Verificar si el grafo tiene 0 o 2 vértices de grado impar.
  2. Con 0 vértices, empezar en cualquier vértice. Con 2 vértices, empezar en uno de ellos.
  3. Seguir las aristas una por vez (marcadas como usadas). Si se requiere escoger entre una arista “puente” y otra(s), siempre escoger alguna de las otras.
  4. Parar cuando se acaben las aristas sin usar.

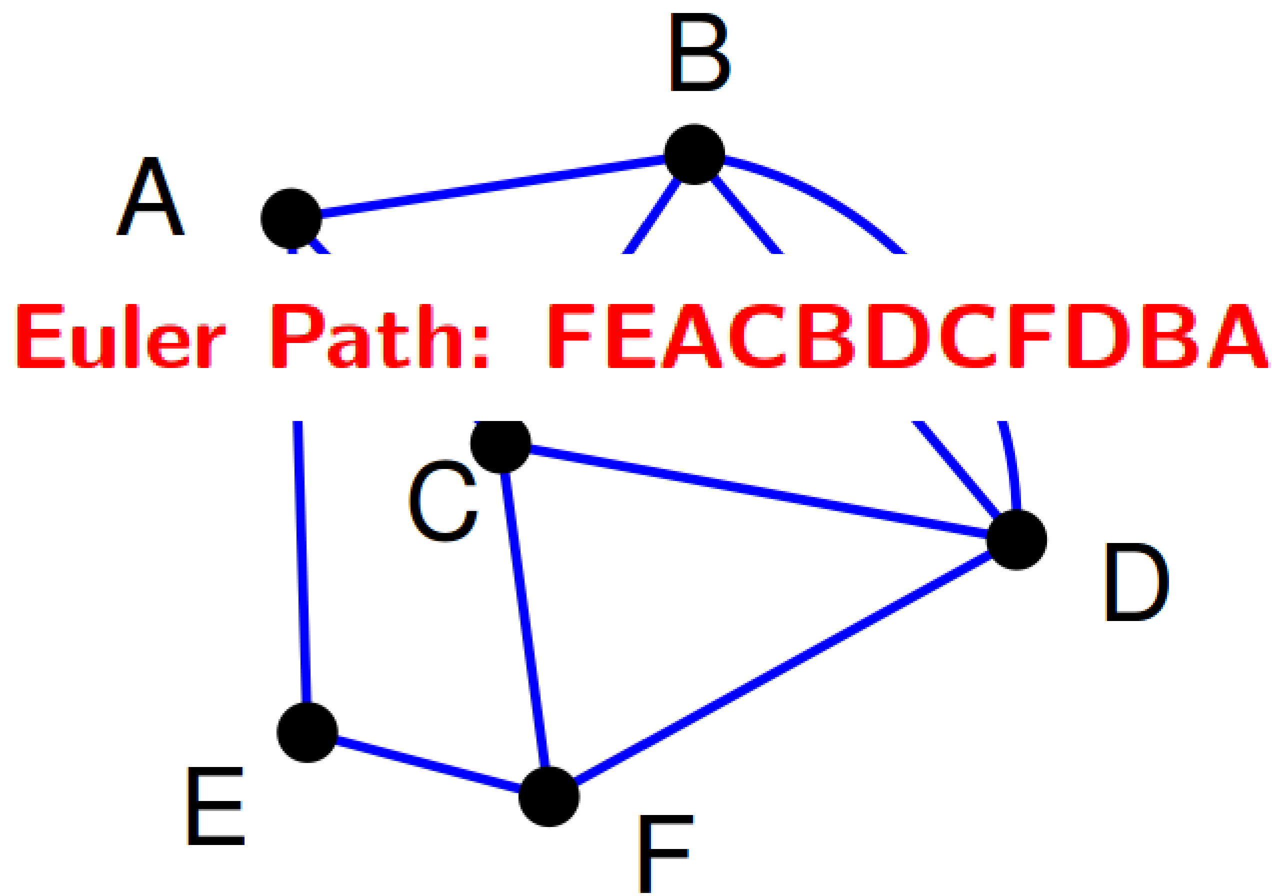
Caminos de Euler

- Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



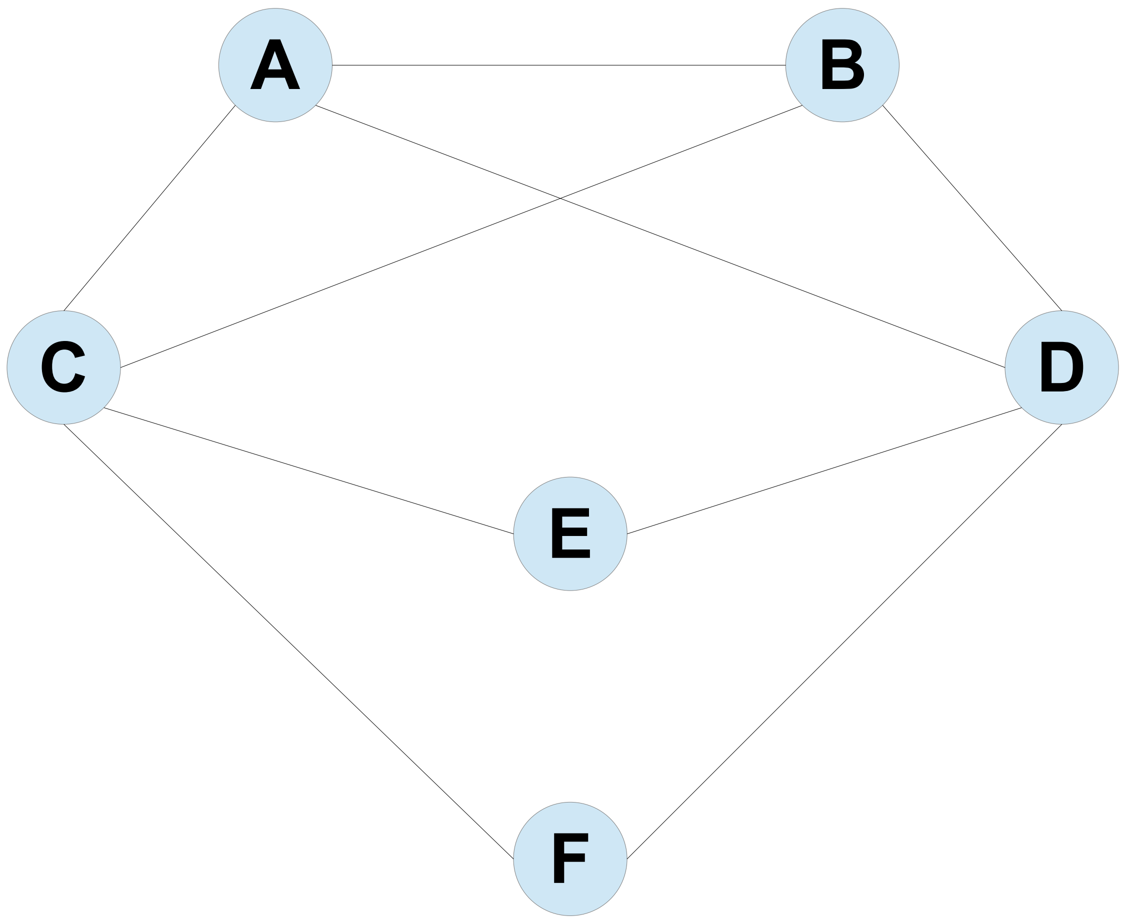
Caminos de Euler

- Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



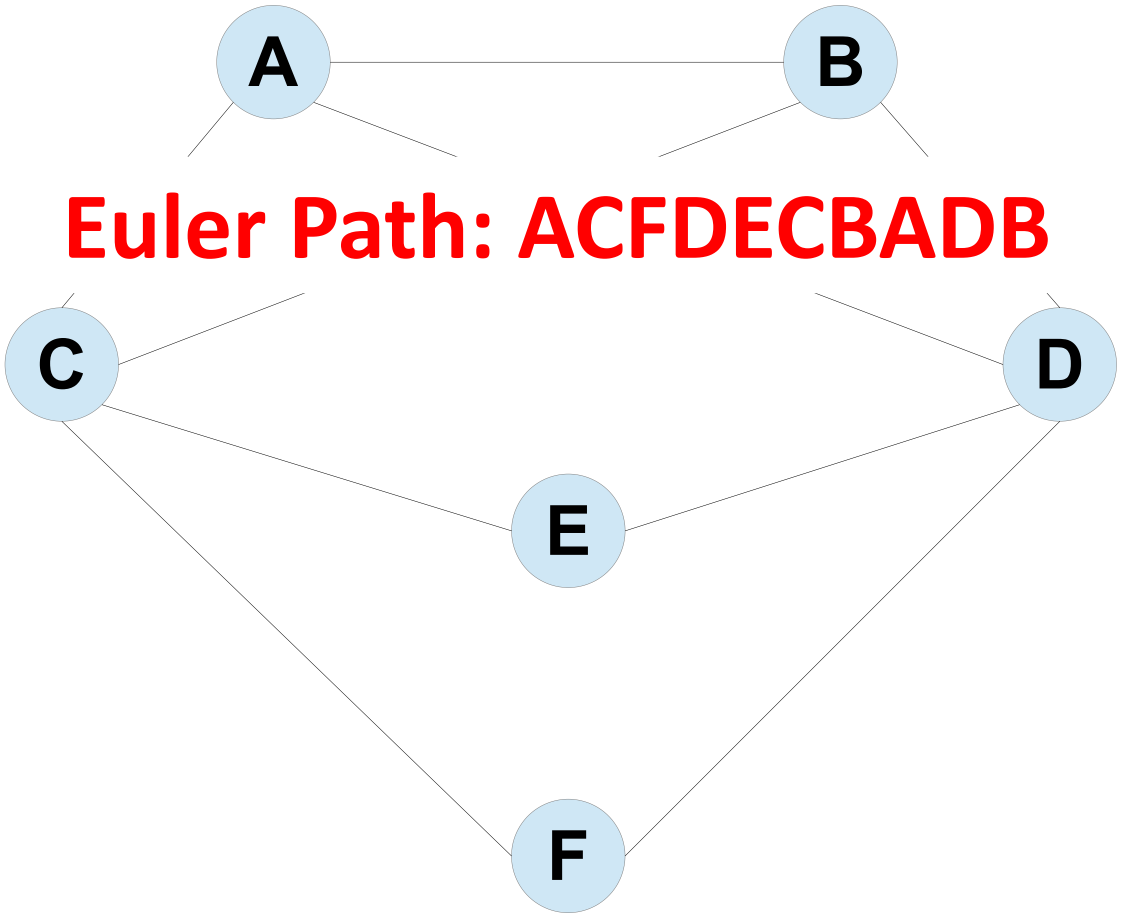
Caminos de Euler

- Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



Caminos de Euler

- Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



Caminos de Euler

- Algoritmo de Fleury's:

  Applet interactivo:

  http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/FleuryAlgorithm.shtml

Caminos o Trayectorias de Hamilton

Caminos de Hamilton

- Motivación: Juego “Icosian” (Icosian game).

  Juego desarrollado por Sir William Hamilton

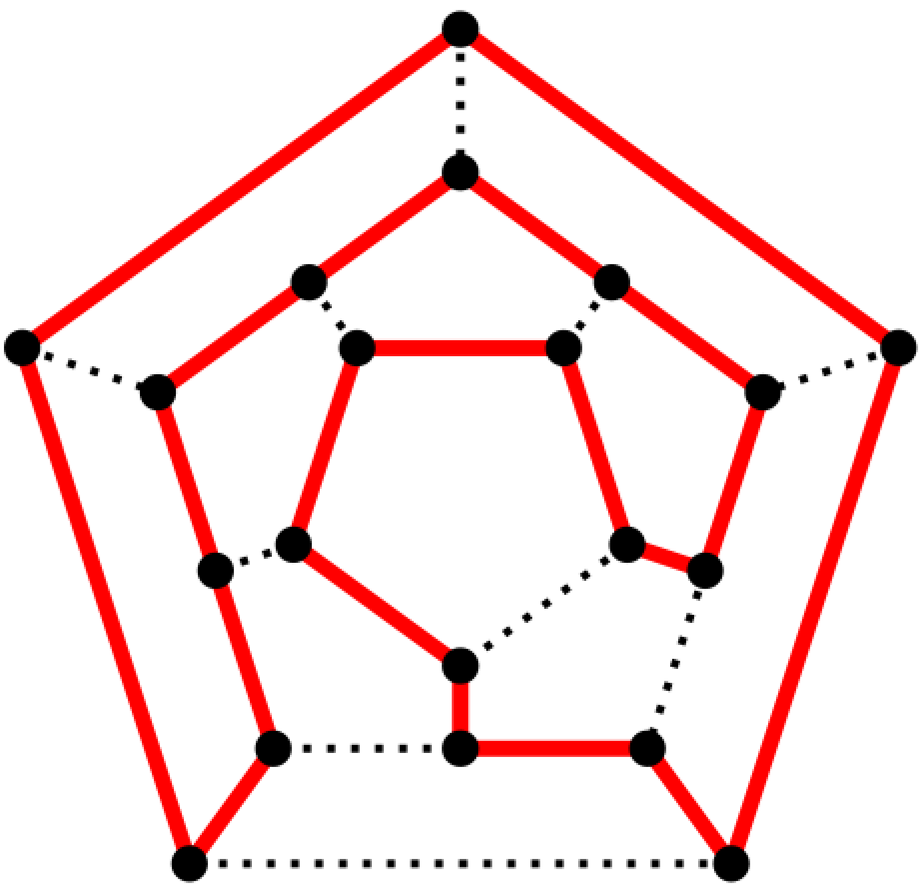
  Gráfica de madera en forma de dodecaedro regular → objetivo del juego: encontrar un circuito hamiltoniano.

  Circuito hamiltoniano: visitar cada vértice una sola vez, con excepción del vértice inicial (que es también el último).

Caminos de Hamilton

- Motivación: Juego "Icosian" (Icosian game).

La solución es un ciclo que contiene veinte (en griego icosa) aristas.



http://en.wikipedia.org/wiki/Icosian_game

Caminos de Hamilton

- Motivación: problema del vendedor viajero.

  Dadas N ciudades, y conocidas las distancias entre cada par de ellas, el objetivo es encontrar una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades y además minimice la distancia recorrida por el viajero.

Caminos de Hamilton

- Motivación: problema del vendedor viajero.

  Dadas N ciudades, y conocidas las distancias entre cada par de ellas, el objetivo es encontrar una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades y además minimice la distancia recorrida por el viajero.

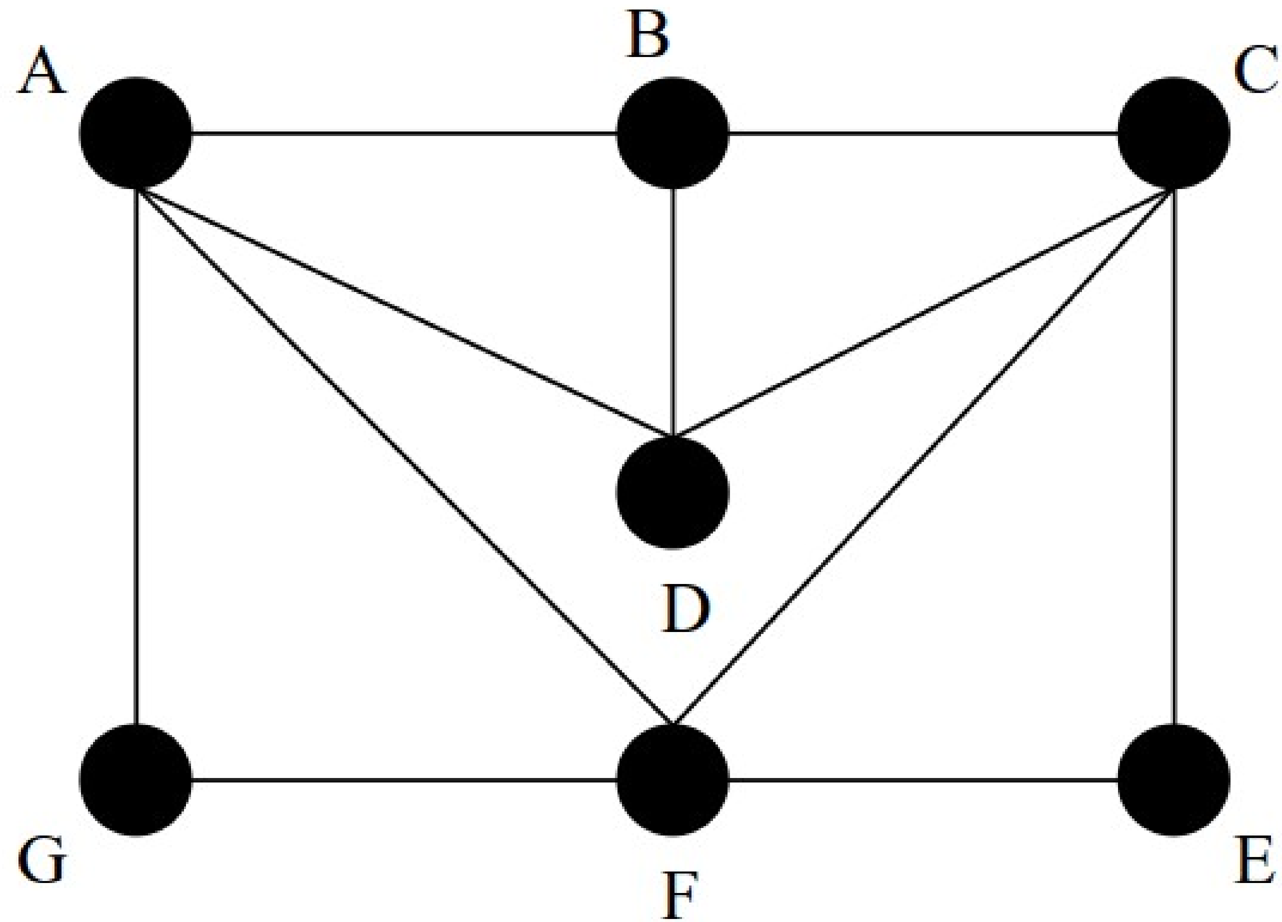
  Respuesta: encontrar un circuito hamiltoniano en el grafo donde las ciudades son vértices y las aristas las rutas entre ciudades.

Caminos de Hamilton

- Caminos, rutas o trayectorias en un grafo G, que sólo incluyen o visitan cada vértice una sola vez, se conocen como caminos, rutas o trayectorias de Hamilton (o caminos, rutas o trayectorias hamiltonianas).
- Si adicionalmente los caminos empiezan y terminan en el mismo vértice, se conocen como circuitos o ciclos de Hamilton (o circuitos o ciclos hamiltonianos).

Caminos de Hamilton

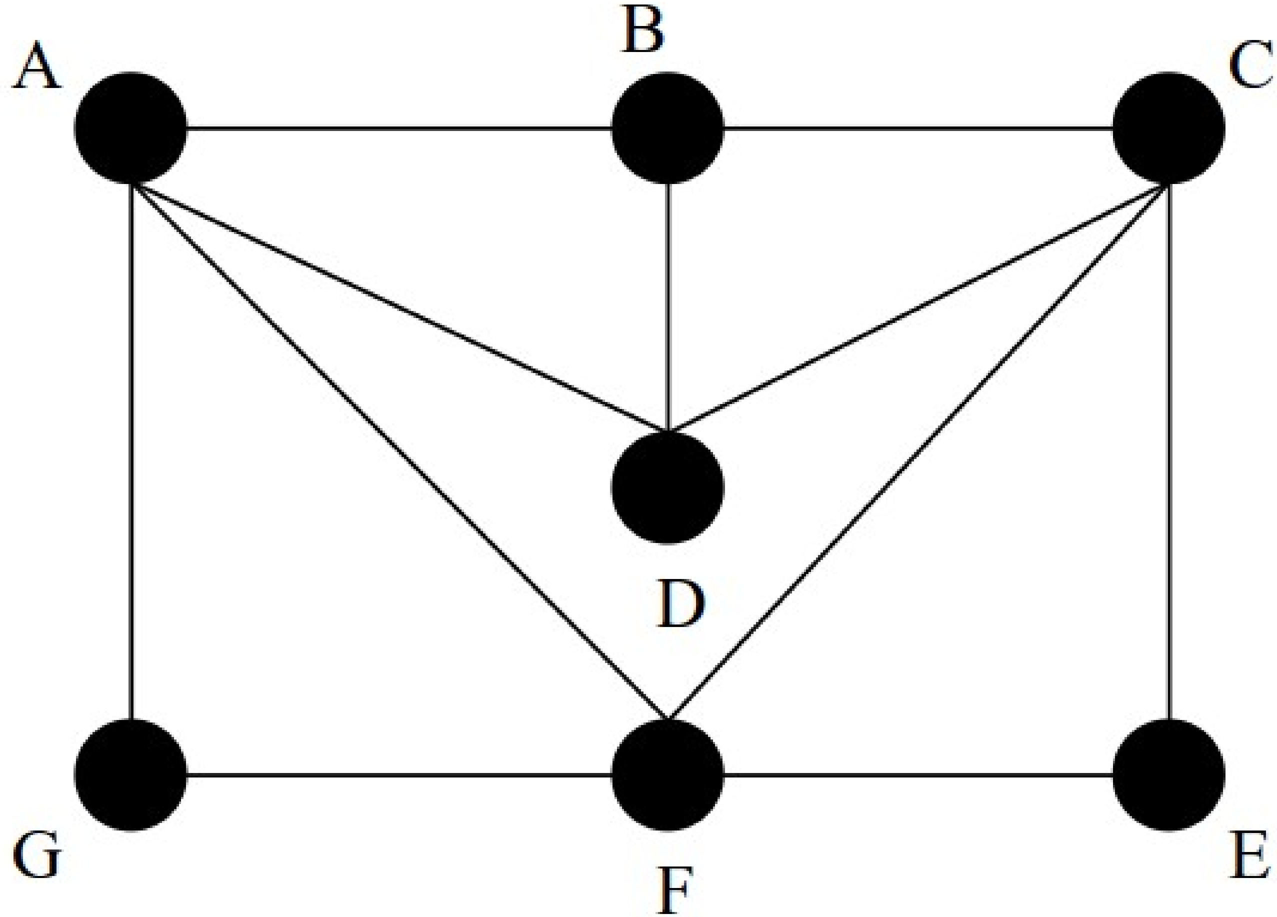
Hamiltonian cycle:



http://www.csd.uoc.gr/~hy583/papers/ch14.pdf

Caminos de Hamilton

Hamiltonian cycle:the path **AGFECDBA**.



http://www.csd.uoc.gr/~hy583/papers/ch14.pdf

Caminos de Hamilton

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Hamilton (asumiendo un grafo G = (V, E) con más de 2 vértices):

- No deben existir vértices de grado 1.
- Si un vértice tiene grado 2, entonces ambas aristas incidentes deben pertenecer al circuito.
- No deben existir circuitos más pequeños (internos) dentro de cualquier circuito de Hamilton.

Caminos de Hamilton

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Hamilton (asumiendo un grafo G = (V, E) con más de 2 vértices):

- Debe existir un subgrafo H de G con las siguientes propiedades:
  - H contiene cada vértice de G.
  - H está conectado.
  - H tiene el mismo número de aristas que de vértices.
  - H tiene cada vértice con grado 2.

Este subgrafo es el circuito de Hamilton de G.

Caminos de Hamilton

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Hamilton (asumiendo un grafo G = (V, E) con más de 2 vértices):

Problema: las 3 primeras condiciones pueden verificarse fácilmente, pero la cuarta...

… no puede verificarse en tiempo polinomial, por lo que se conoce como un problema NP-completo.

Caminos de Hamilton

- ¿Cómo encontrar un camino o circuito de Hamilton en un grafo?

  No existe algoritmo conocido que sea óptimo... es un problema NP-completo!

- Opción 1: fuerza bruta, probar todas las posibles combinaciones de conexiones entre grafos.

Caminos de Hamilton

- ¿Cómo encontrar un camino o circuito de Hamilton en un grafo?

- Opción 2: a partir de un vértice, seleccionar conexiones, hasta que no se pueda avanzar. Si algunos vértices quedaron sin visitar, revertir la última conexión, pivotar sobre el vértice, y probar de nuevo.

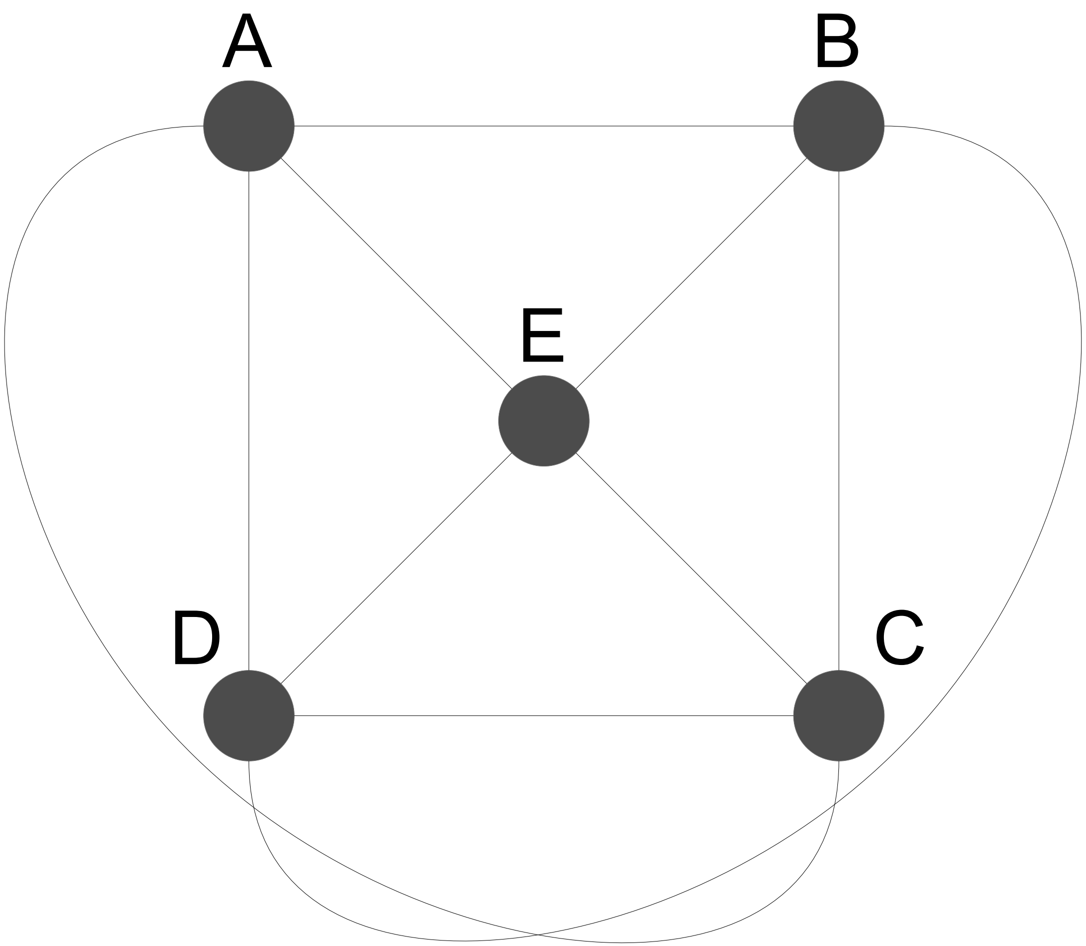
Caminos de Hamilton

- ¿Cómo encontrar un camino o circuito de Hamilton en un grafo?

- Opción 3: utilizar algoritmos (basados en el problema del vendedor viajero) que entregan soluciones aproximadas (cercanas al resultado óptimo):
  - Cheapest Link Algorithm (CLA).
  - Nearest Neighbor Algorithm (NNA).
  - Repetitive Nearest Neighbor Algorithm (NNA).
  - ...

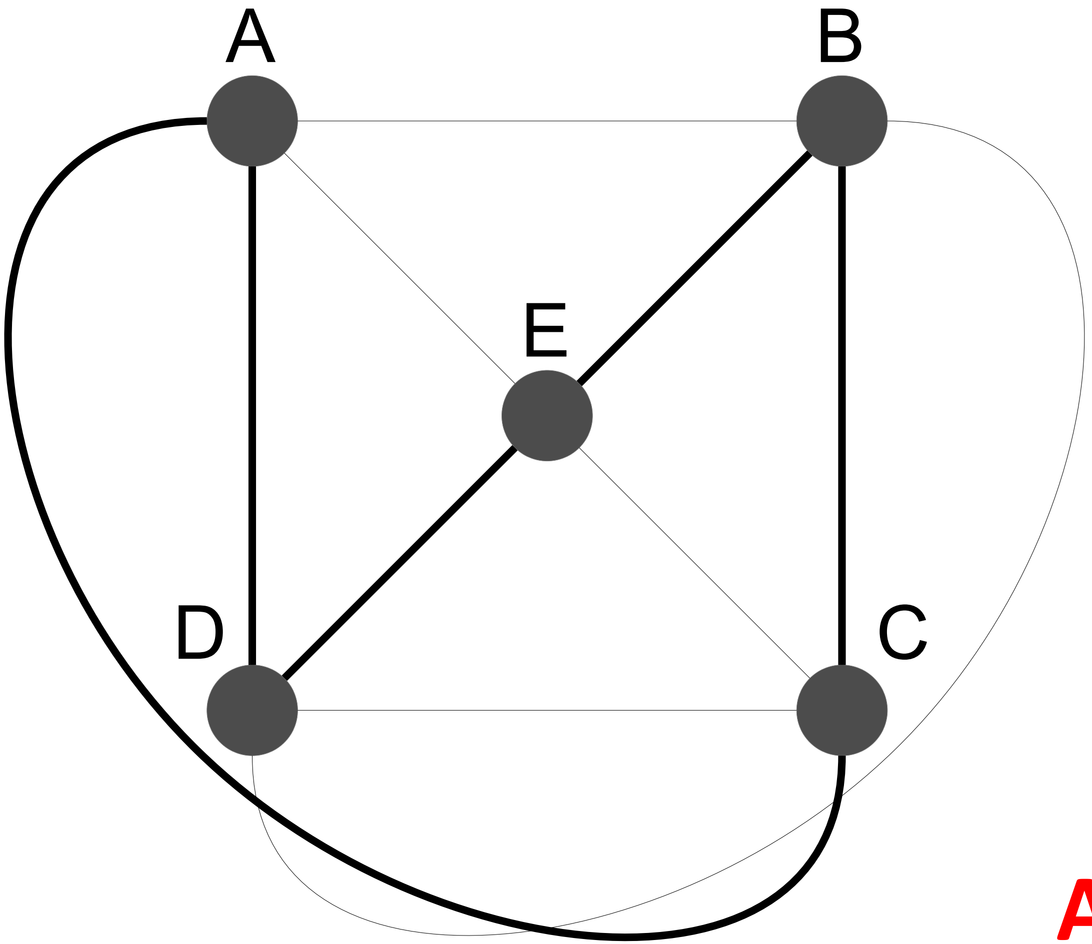
Caminos de Hamilton

- Encontrar un camino o circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



Caminos de Hamilton

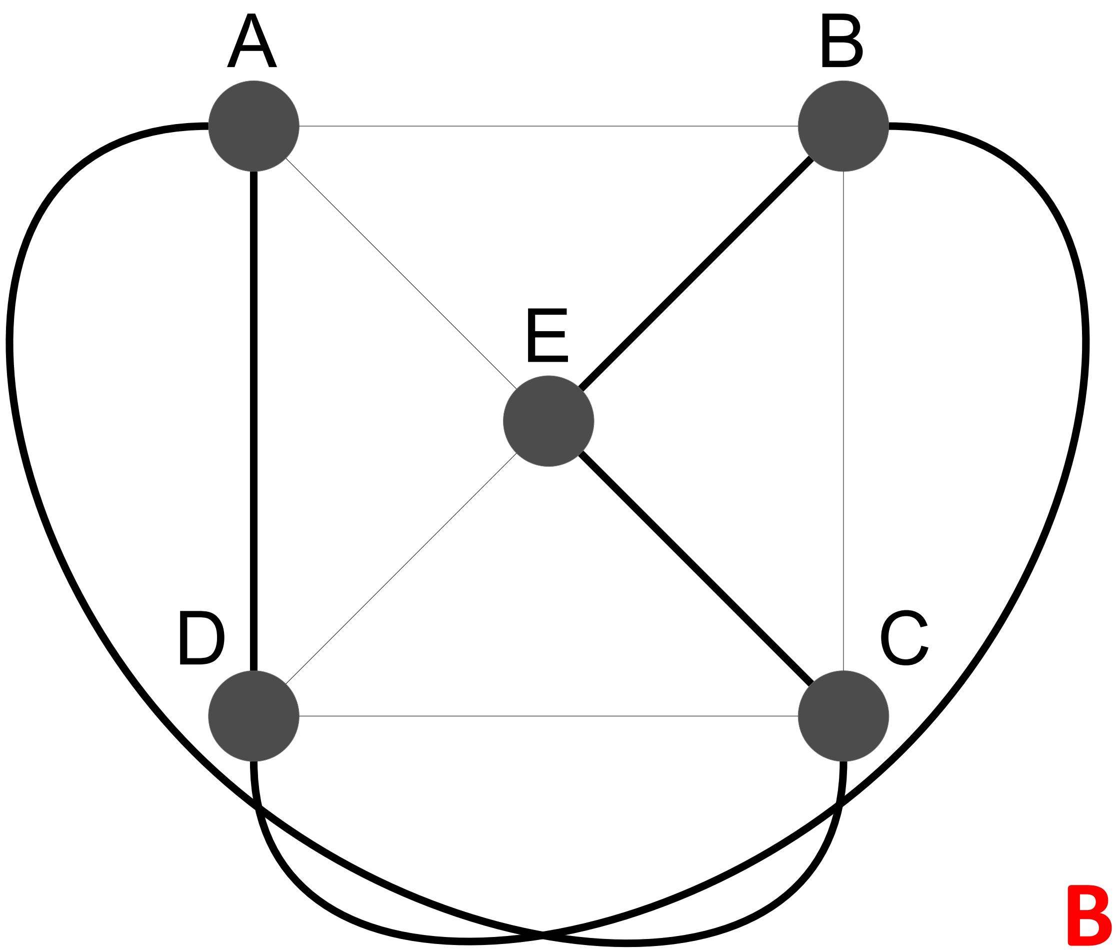
- Encontrar un camino o circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



ADEBCA

Caminos de Hamilton

- Encontrar un camino o circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



BDACEB

Caminos de Hamilton

- Encontrando caminos de Hamilton:

  Applet interactivo:

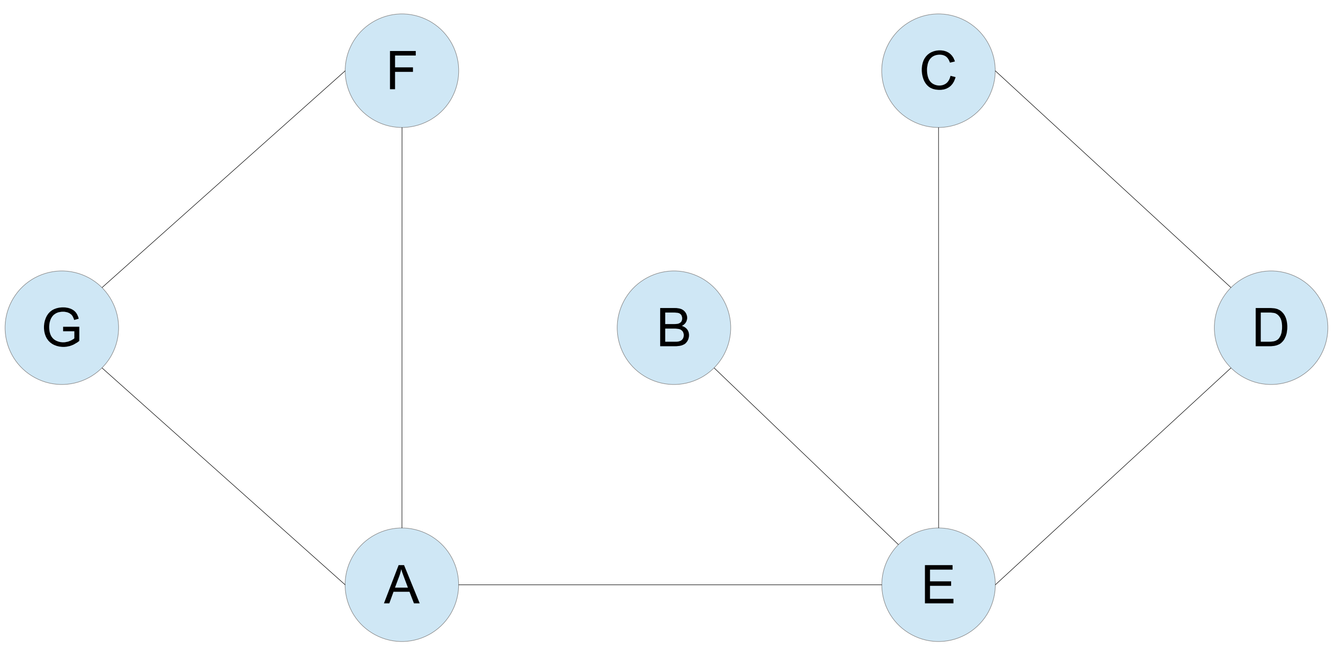
  http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/HamiltonPath.shtml

  http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/GraphPractice.shtml

¡ Quiz !

¡ Quiz !

- Para el siguiente grafo, indique si existe (y cuál es): camino de Euler, circuito de Euler, camino de Hamilton, circuito de Hamilton.



Referencias

- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).
- www.csd.uoc.gr/~hy583/papers/ch14.pdf
- www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf
- mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html
- en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

Referencias

- en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path
- en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg
- en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path
- en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path_problem