Grafos
Algoritmo de Prim

Estructuras de Datos

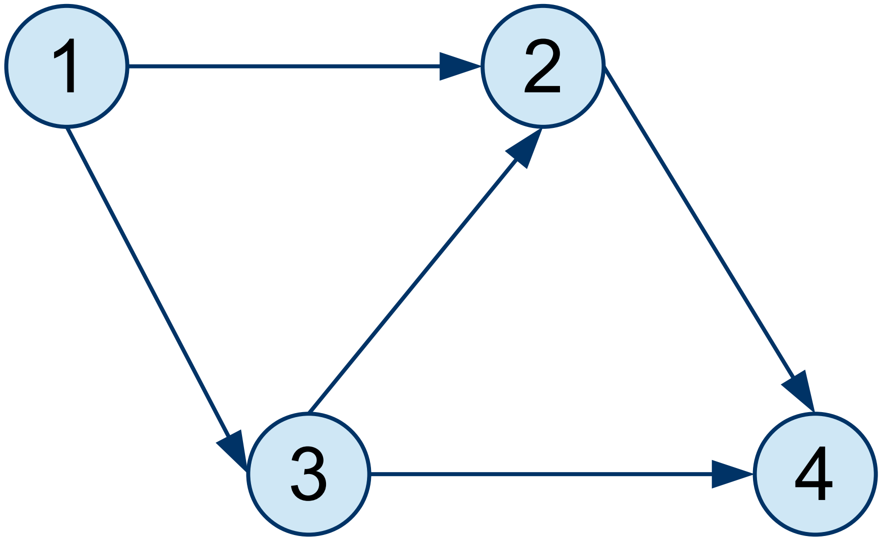
Andrea Rueda

Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Ingeniería de Sistemas

Matriz de Caminos

Ejercicio

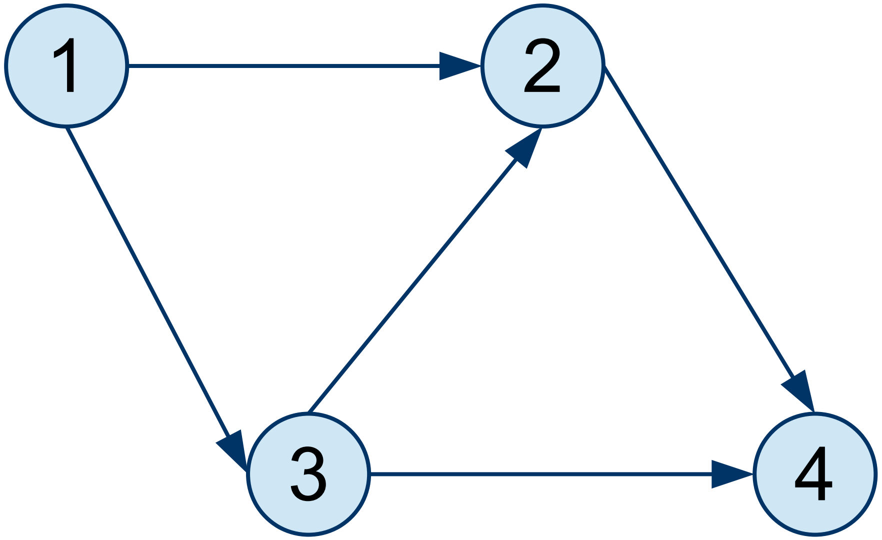
- Para el siguiente grafo:



Escribir la matriz de adyacencia A.

Ejercicio

- Matriz de adyacencia:



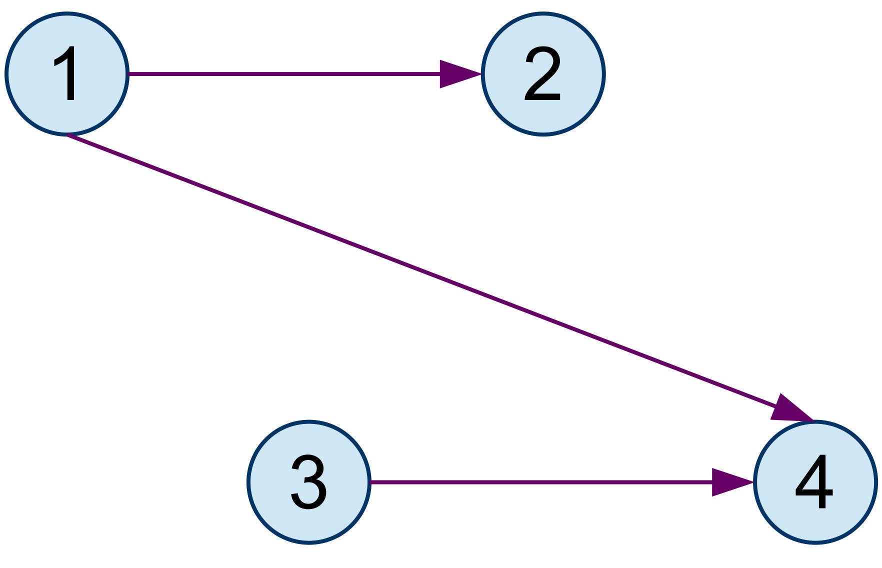
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

- Calcular $A^2=A*A$.
- Dibujar el grafo representado por A^2.

Ejercicio

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

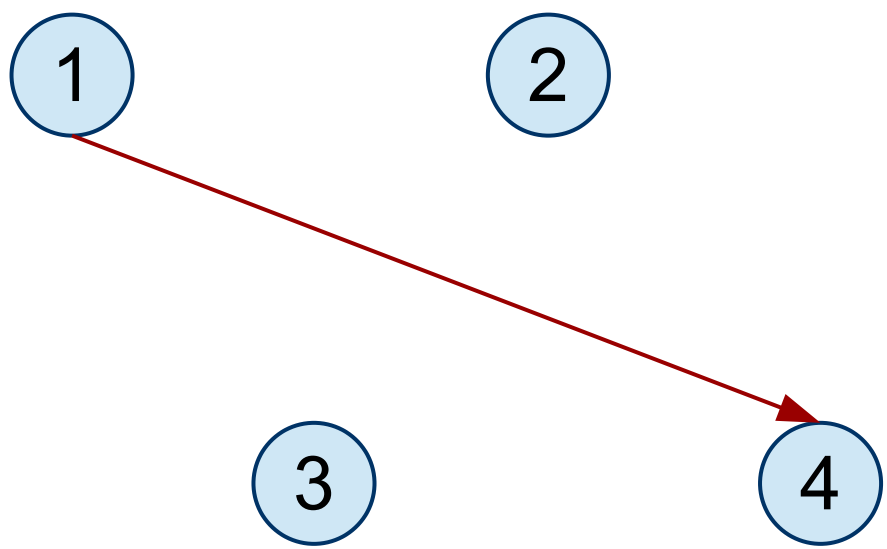


Ejercicio

- Calcular $A^3=A*A*A$.
- Dibujar el grafo representado por A^3.
- ¿Qué puede concluir?

Ejercicio

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Caminos en Grafos

- A^k corresponde a la matriz de adyacencia obtenida de multiplicar A por sí misma k veces.
- Las entradas o elementos de A^k representan la cantidad de caminos de longitud k entre los nodos.

Caminos en Grafos

- Grafo (fuertemente) conectado:

  En términos de matrices, si existe un entero positivo k de forma que la matriz $B = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$ es positiva (todos sus elementos diferentes de cero), entonces el grafo es (fuertemente) conectado.

  Si en la matriz B se reemplazan todos los valores mayores a cero por 1, se obtiene la matriz de caminos del grafo.

Caminos en Grafos

- En el ejemplo:

  A^4 y sucesivas corresponden a matrices con sólo ceros, entonces $B = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$ es:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz B no es positiva, por lo que el grafo dirigido no está fuertemente conectado.

Caminos en Grafos

- En el ejemplo:

  La matriz de caminos se obtiene al reemplazar todos los valores diferentes de cero por 1:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

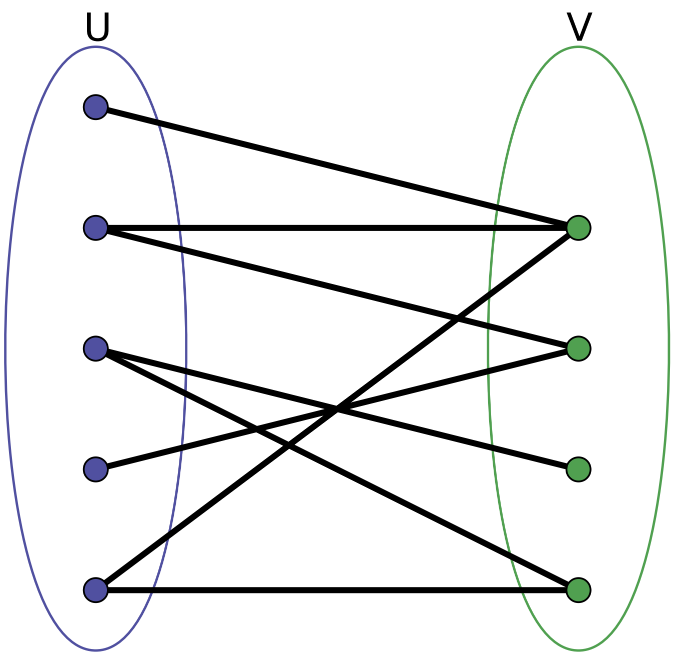
  Nos indica si es posible llegar a cierto vértice desde otro. ¿Cómo será la matriz de caminos de un grafo (fuertemente) conectado?

Grafos Bipartitos

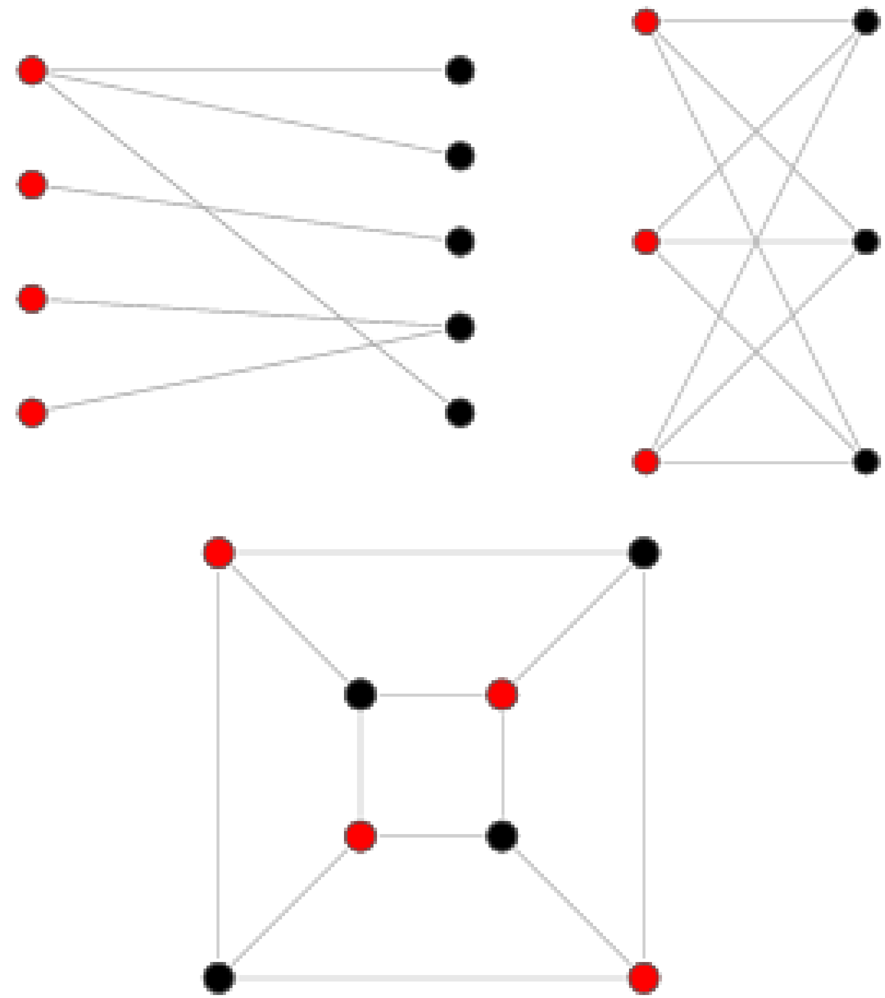
Grafos bipartitos

- Un grafo bipartito es un tipo especial de grafo que consiste en dos conjuntos de vértices.
- Cada conjunto de vértices es independiente (disyunto).
- Todas las aristas del grafo necesariamente tienen origen en uno de los conjuntos y destino en el otro conjunto de vértices.
- No hay ninguna arista que conecte vértices del mismo conjunto

Grafos bipartitos



By MistWiz - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1814874

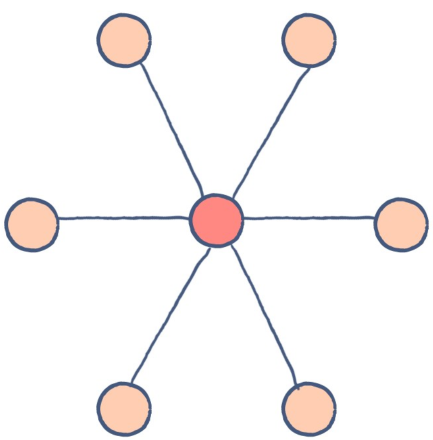


https://mathworld.wolfram.com/BipartiteGraph.html

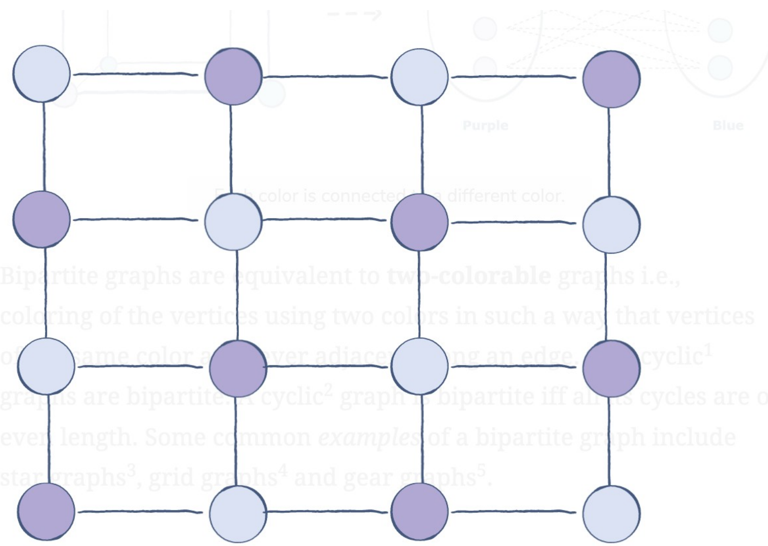
Grafos bipartitos

- Notación: $G = (U, V, E)$, con U y V los conjuntos de vértices disyuntos (partes) y E las aristas.
- Si $|U| = |V|$, entonces G es un grafo bipartito balanceado.
- Si todos los vértices en una parte tienen el mismo grado, entonces G es un grafo biregular.
- Todos los árboles son bipartitos.

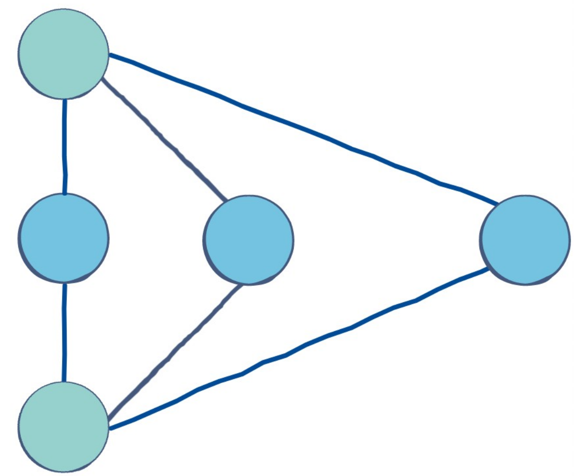
Grafos bipartitos



Star Graph



Grid Graph

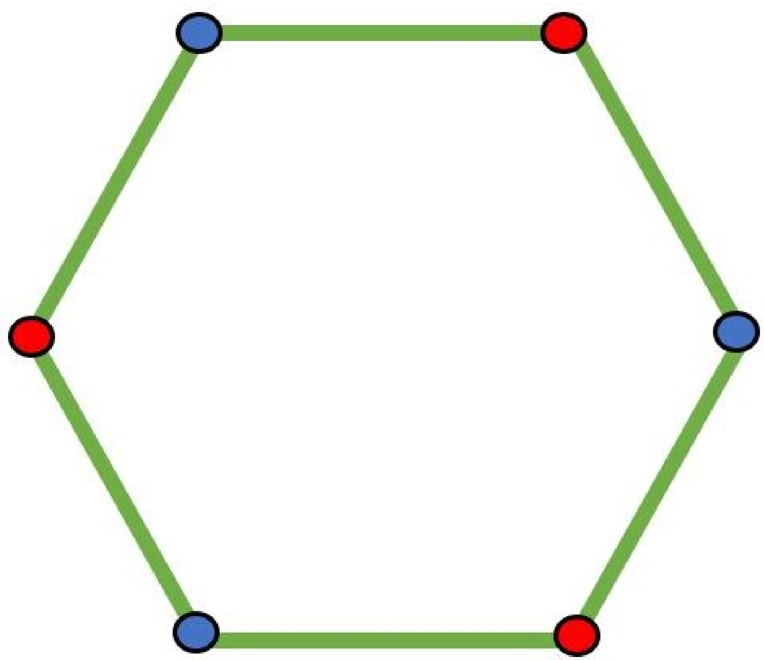


Gear Graph

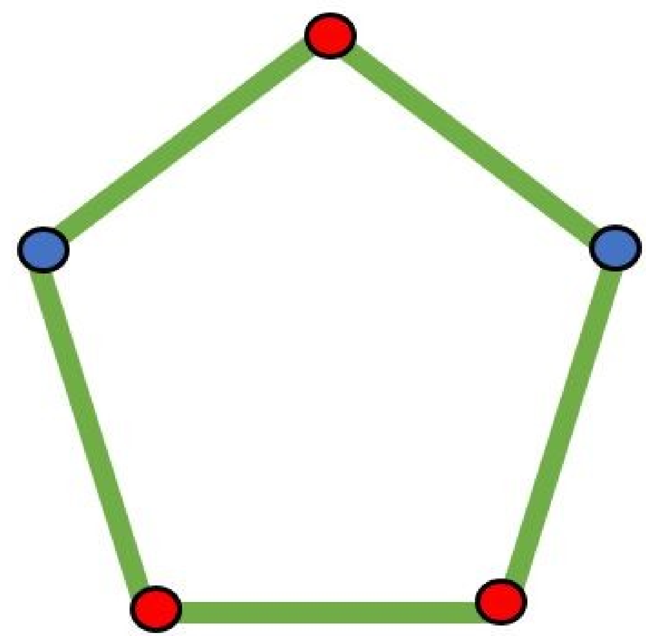
https://www.educative.io/edpresso/what-is-a-bipartite-graph

Grafos bipartitos

- Grafos acíclicos son bipartitos. Un grafo bipartito no contiene ciclos de longitud impar:



Cycle graph of length 6

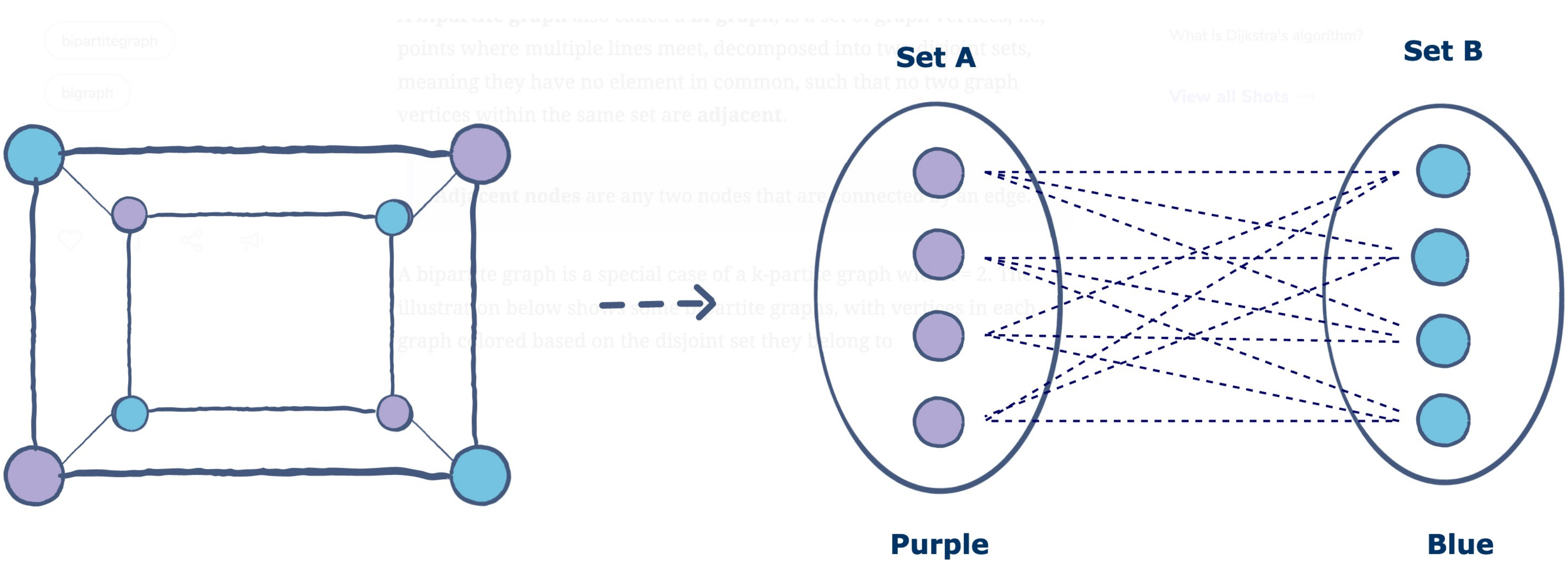


Cycle graph of length 5

https://www.geeksforgeeks.org/bipartite-graph/

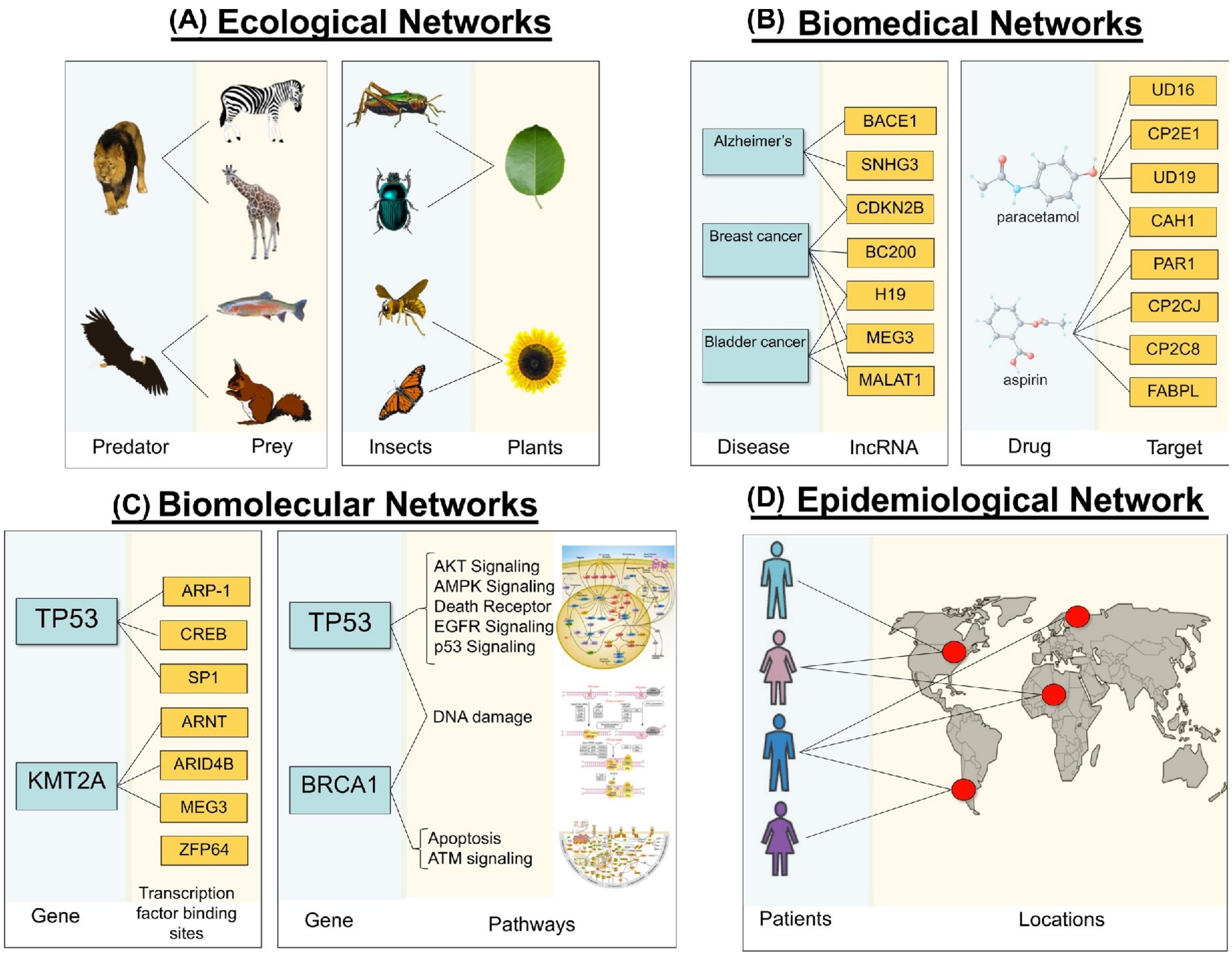
Grafos bipartitos

- Un grafo bipartito es equivalente a un grafo dos-coloreable: los vértices se pueden colorear de dos colores de forma que vértices del mismo color no sean adyacentes.



https://www.educative.io/edpresso/what-is-a-bipartite-graph

Grafos bipartitos



https://academic.oup.com/gigascience/article/7/4/giy014/4875933

Grafos bipartitos

- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?

  Grafo G = {V, E} y vértice de inicio S:

  - Asignar color rojo al vértice S.

  - A los vecinos de S asignar color azul.

  - A los vecinos de los vecinos de S asignar color rojo.

  - Continuar hasta que todos los vértices tengan color asignado.

  - Si un vecino llega a tener el mismo color del vértice actual, el grafo no es bipartito.

Grafos bipartitos

- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?

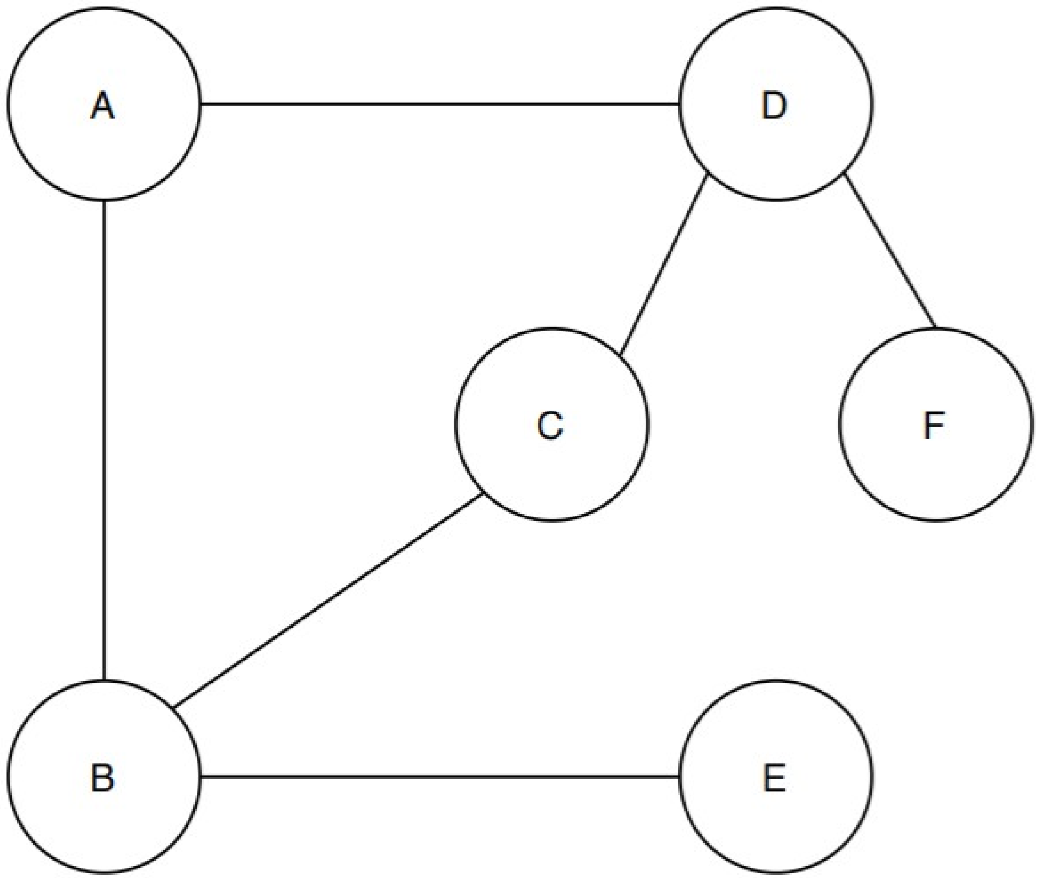
Algorithm 1: Algorithm to check the Bipartiteness of a Graph

```
Data: G(V, E), S
Result: Bipartite or Not Bipartite
r= NULL;
S = RED;
r.enqueue(S);
while r is not empty do
    n1 = r.dequeue();
    for each n2 in n1.Adj() do
        if color.n2 == NIL then
            if color.n1 == RED then
                color.n2 = BLUE;
            else
                color.n2 = RED;
                r.enqueue(n2) ;
            end
            if color.n2 == color.n1 then
                print("Graph is not Bipartite");
            else
                print("Graph is Bipartite")
            end
        end
    end
end
```

https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite

Grafos bipartitos

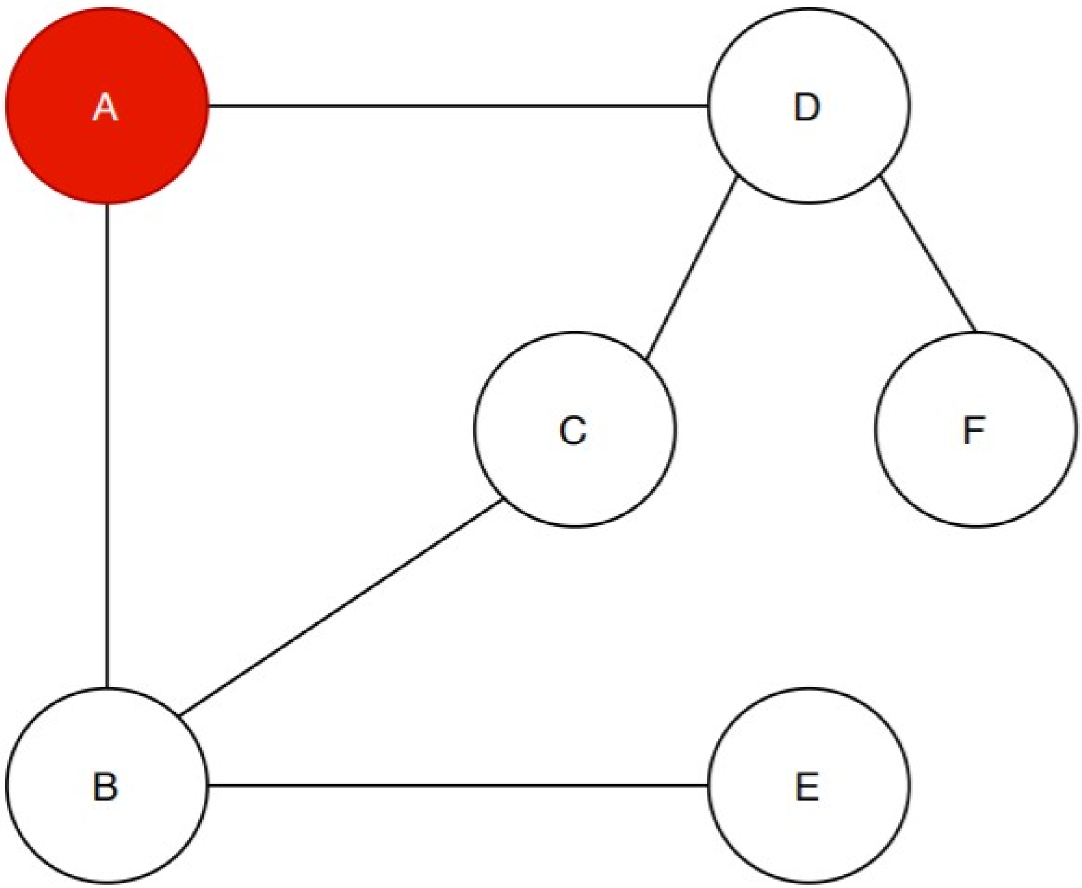
- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?



https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite

Grafos bipartitos

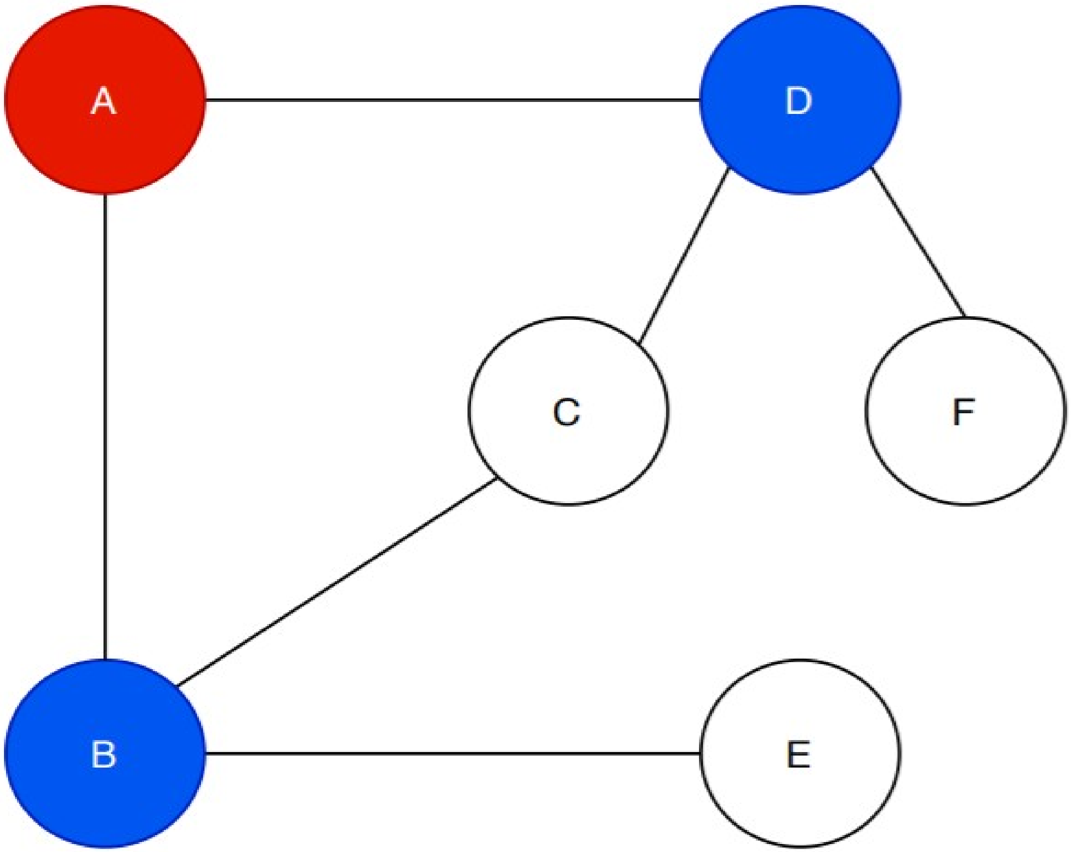
- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?



https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite

Grafos bipartitos

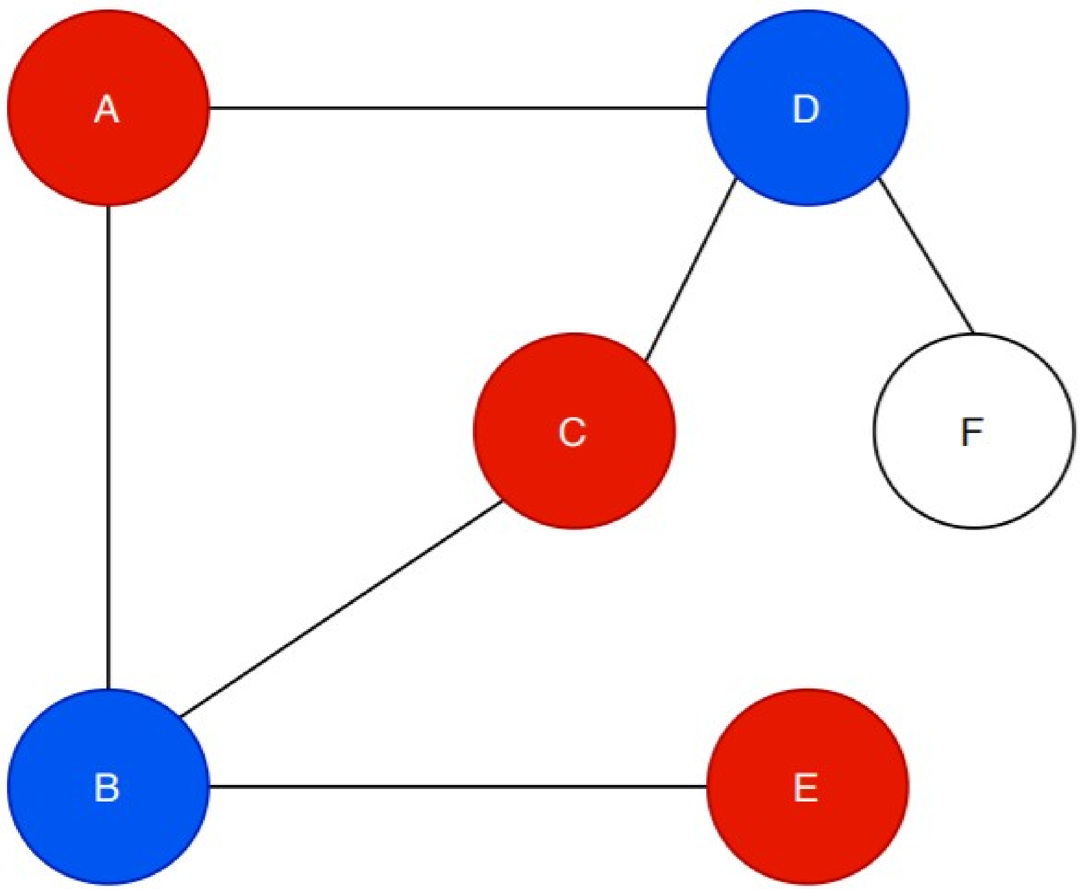
- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?



https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite

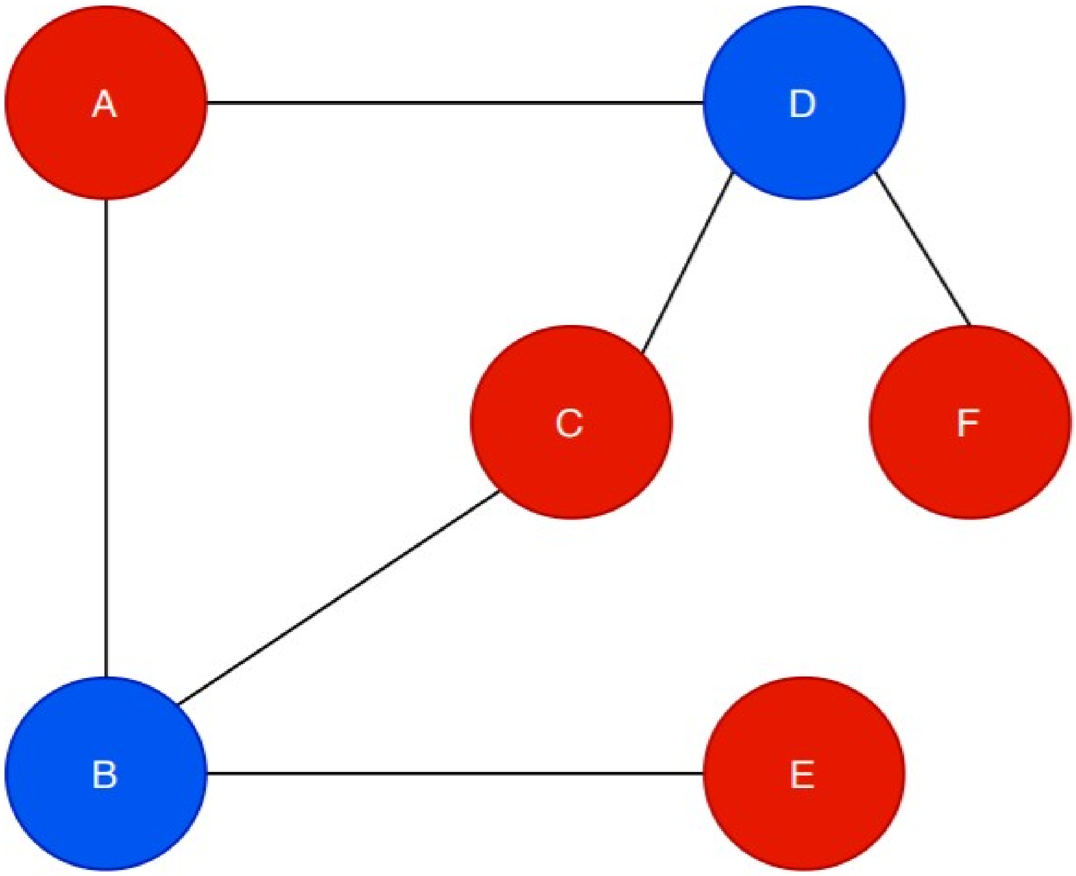
Grafos bipartitos

- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?



Grafos bipartitos

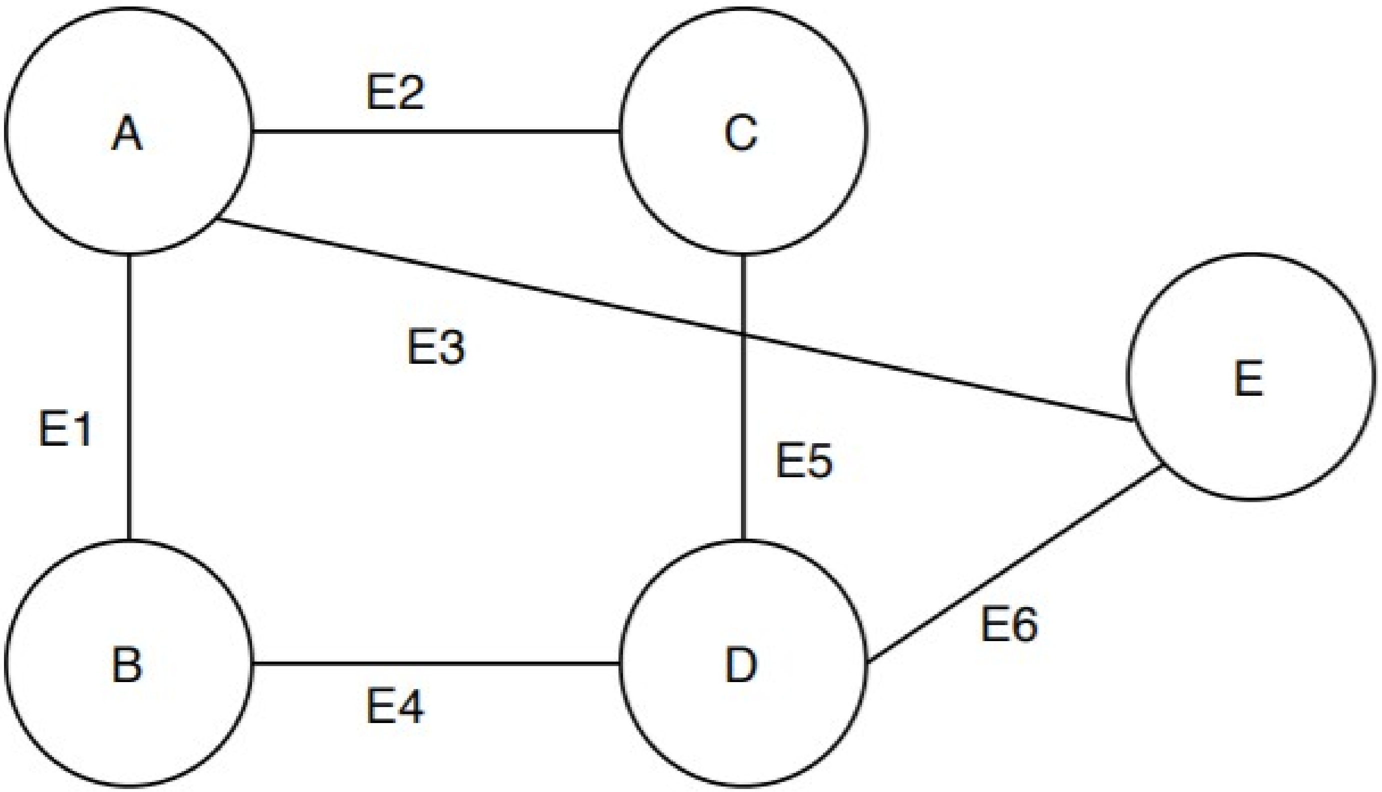
- ¿Cómo identificar un grafo bipartito?



https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite

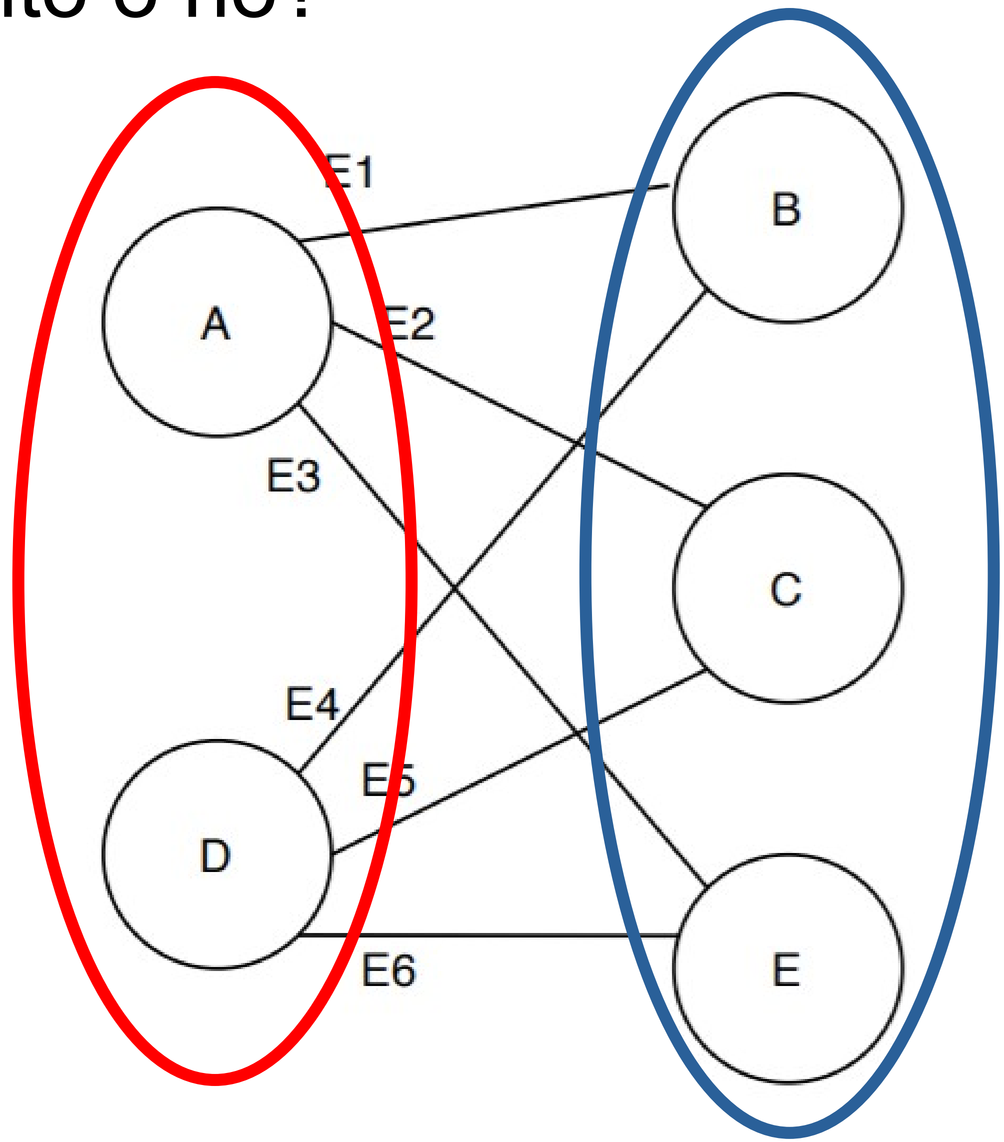
Grafos bipartitos

- ¿Es bipartito o no?



Grafos bipartitos

- ¿Es bipartito o no?



https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite

Algoritmo de Prim

Algoritmo de Prim

- 1930: Vojtěch Jarník (~30 años antes que Dijkstra).
- 1957: Robert C. Prim.
- 1959: Edsger W. Dijkstra.
- Sirve para encontrar un árbol de recubrimiento mínimo (*minimum spanning tree*).
- Soporta costos negativos.

Algoritmo de Prim

- Sigue la metodología clásica de un algoritmo voraz → hacer en cada paso lo mejor que se pueda hacer.
- Partiendo desde un vértice, va agregando en cada paso la arista con el menor peso que conecte un vértice ya visitado con otro no visitado todavía.
- Su complejidad depende de la estructura utilizada para ordenar las aristas por peso.

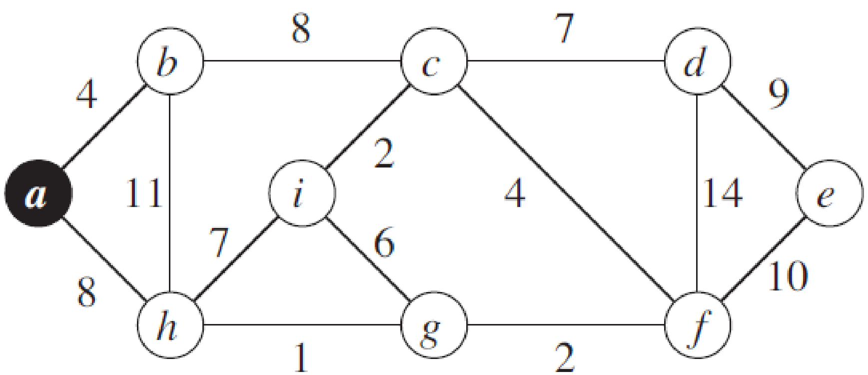
Algoritmo de Prim

- Seudo-algoritmo:

```
Prim (G = {V, E}, x)

   Vnew = {x}
   Enew = { }

   mientras (Vnew ≠ V)

      escoger arista {u,v} con peso
      mínimo, u debe estar en Vnew y v no

      añadir v a Vnew y {u,v} a Enew

   fin_mientras
```

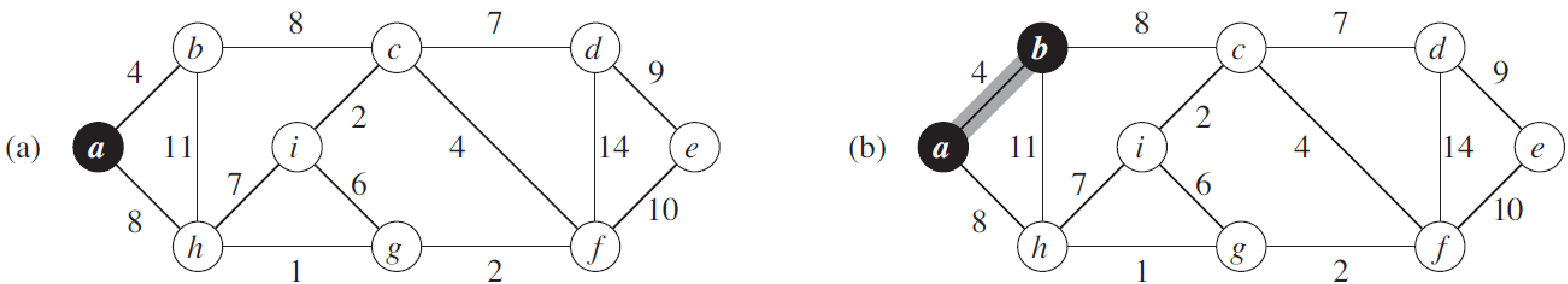
Algoritmo de Prim

(a)



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

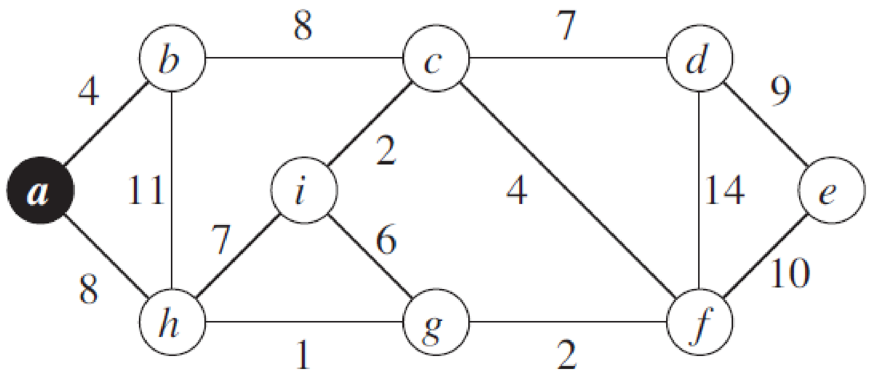
Algoritmo de Prim



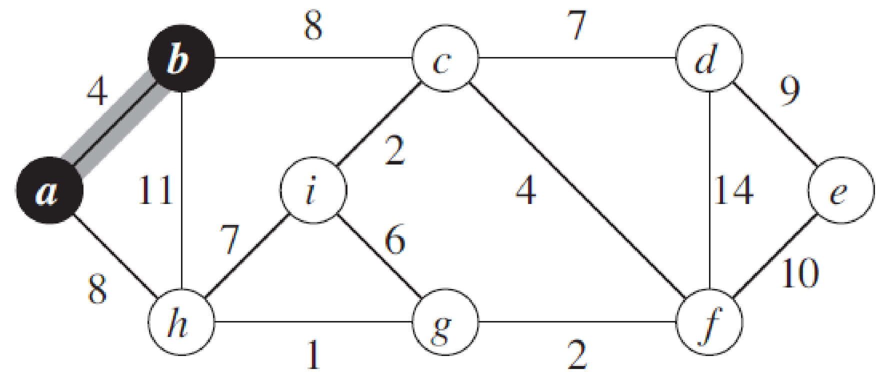
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Prim

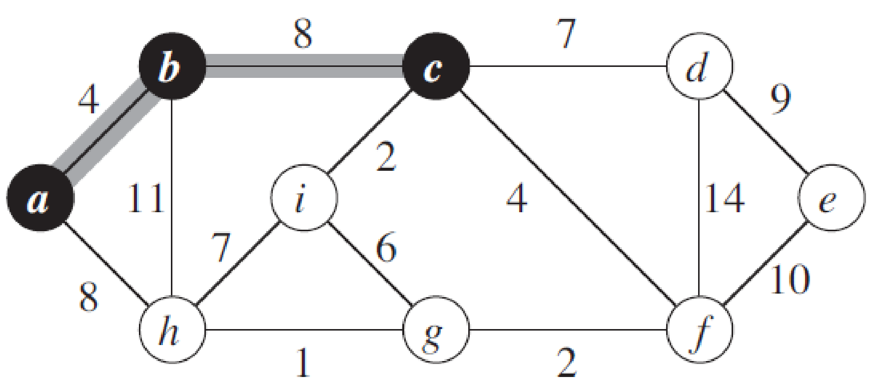
(a)



(b)

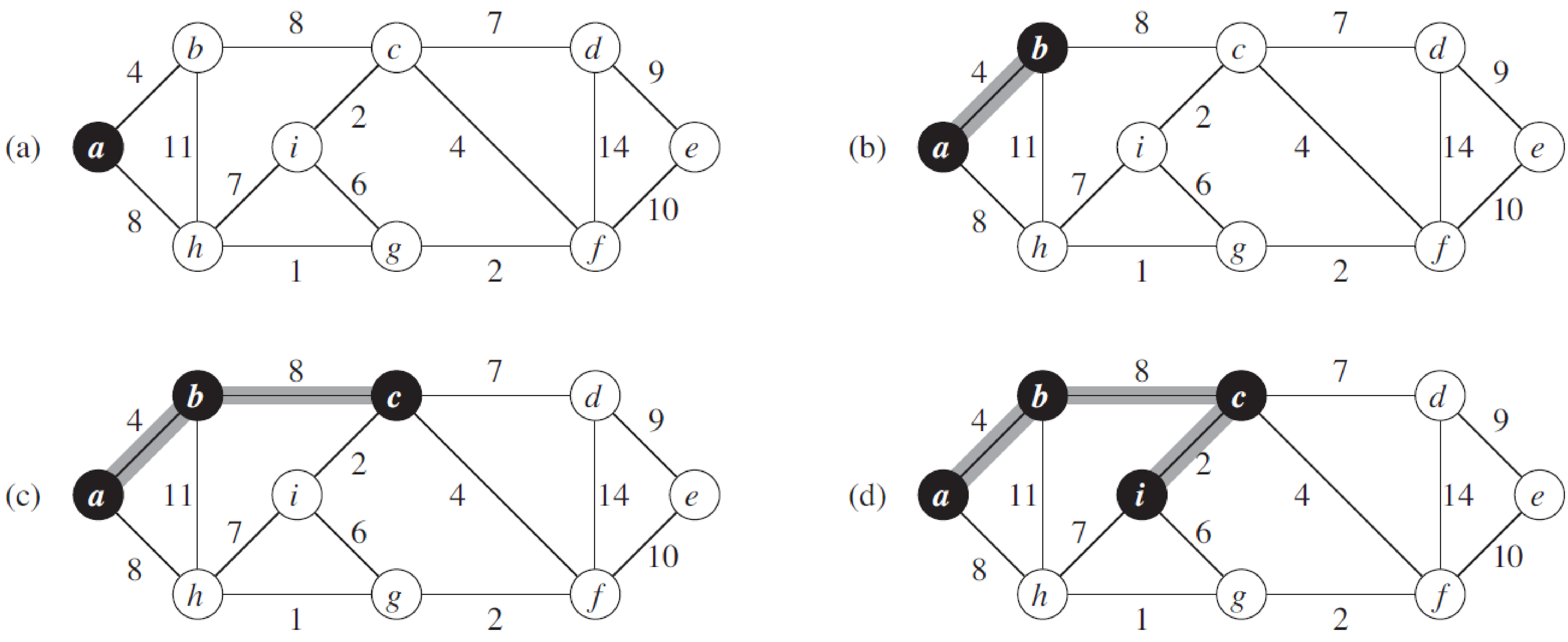


(c)



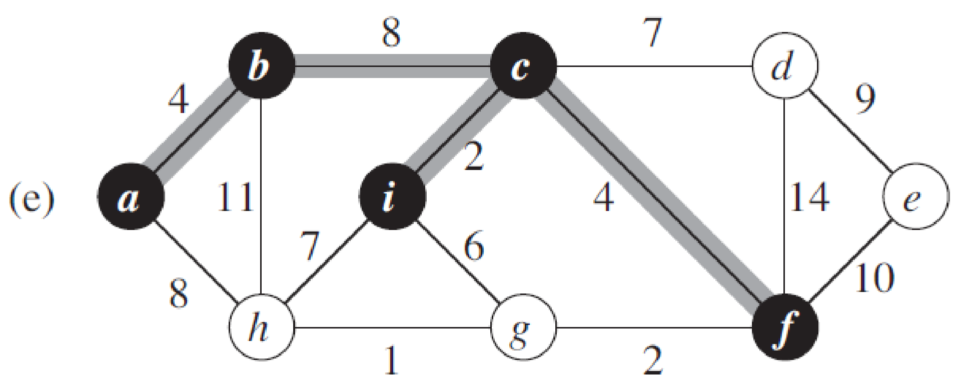
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Prim



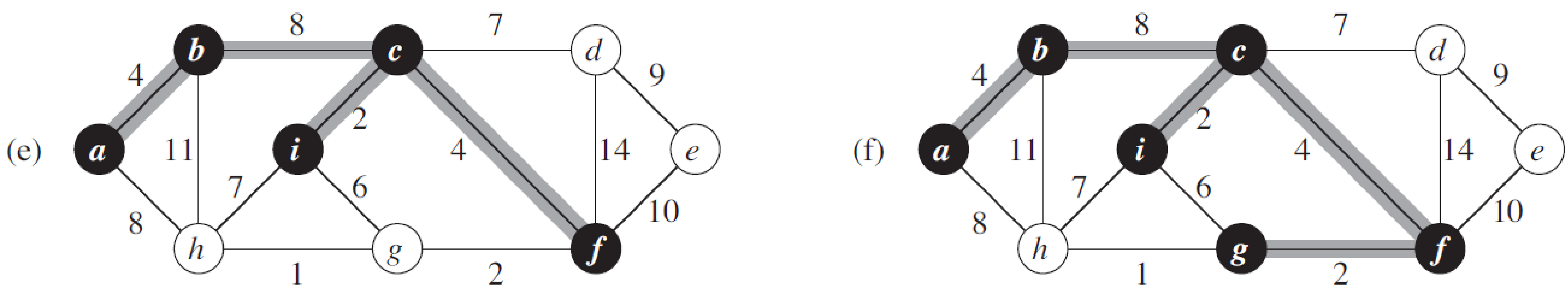
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Prim



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

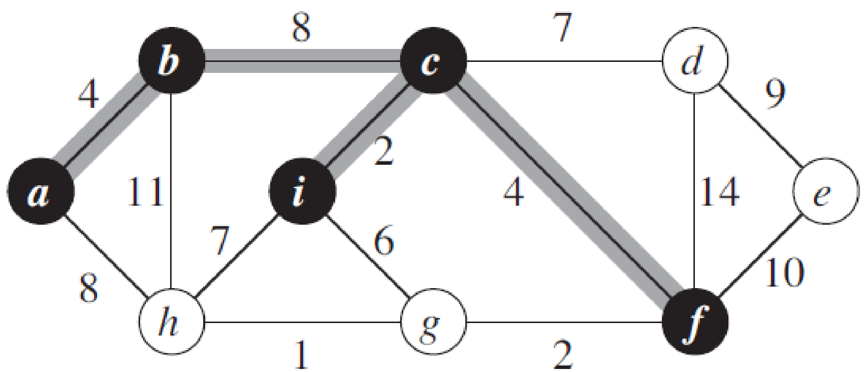
Algoritmo de Prim



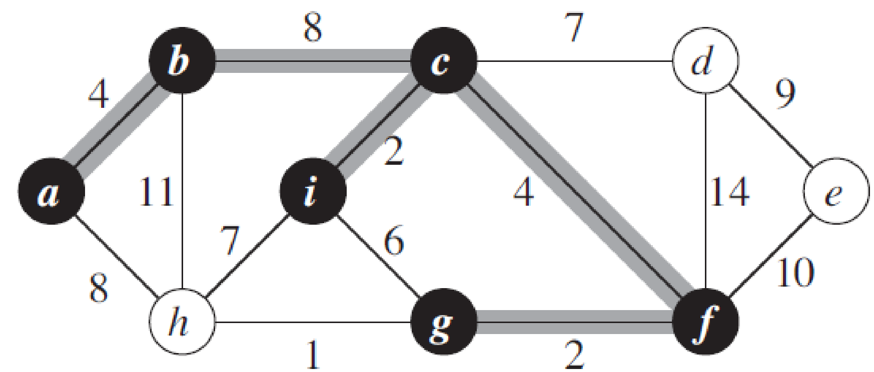
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Prim

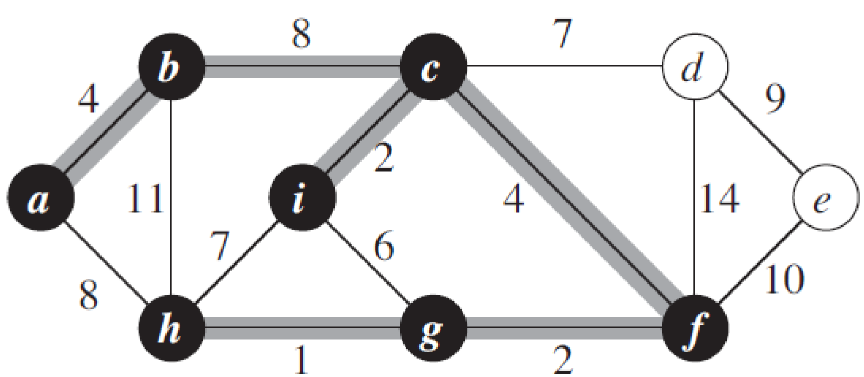
(e)



(f)

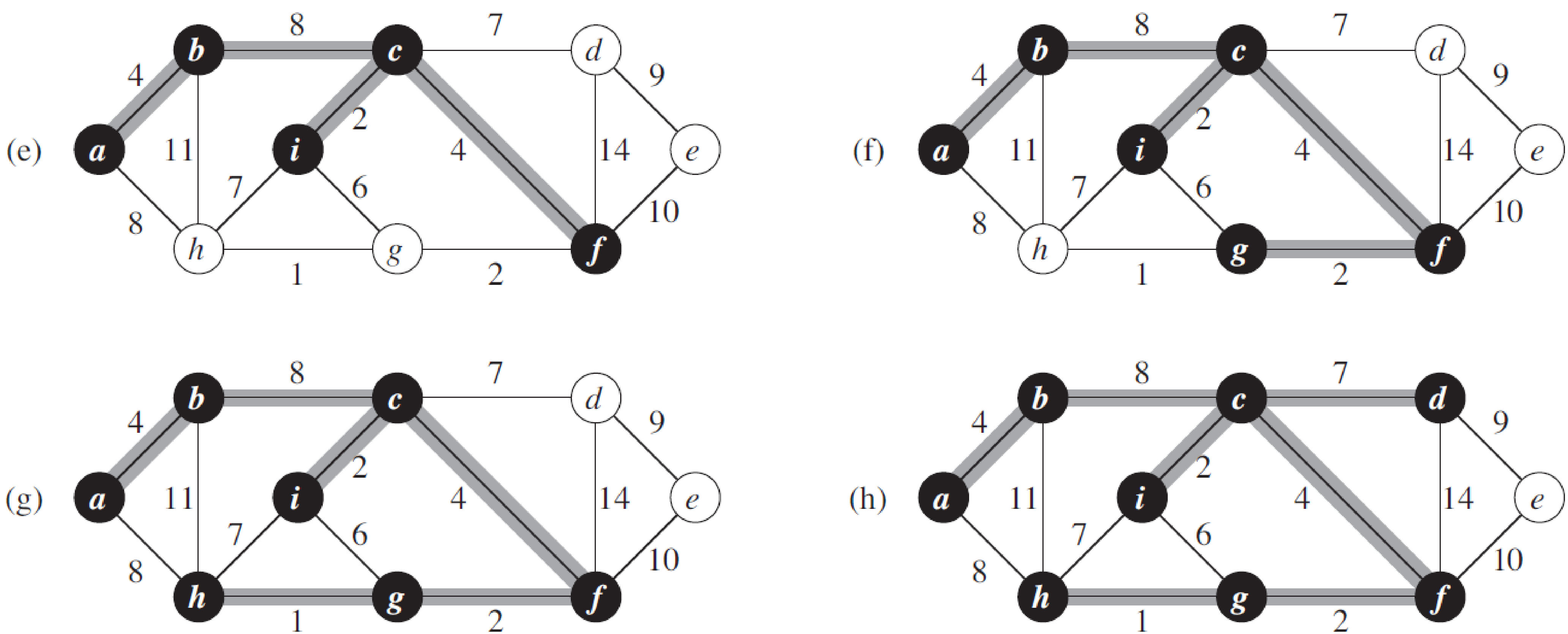


(g)



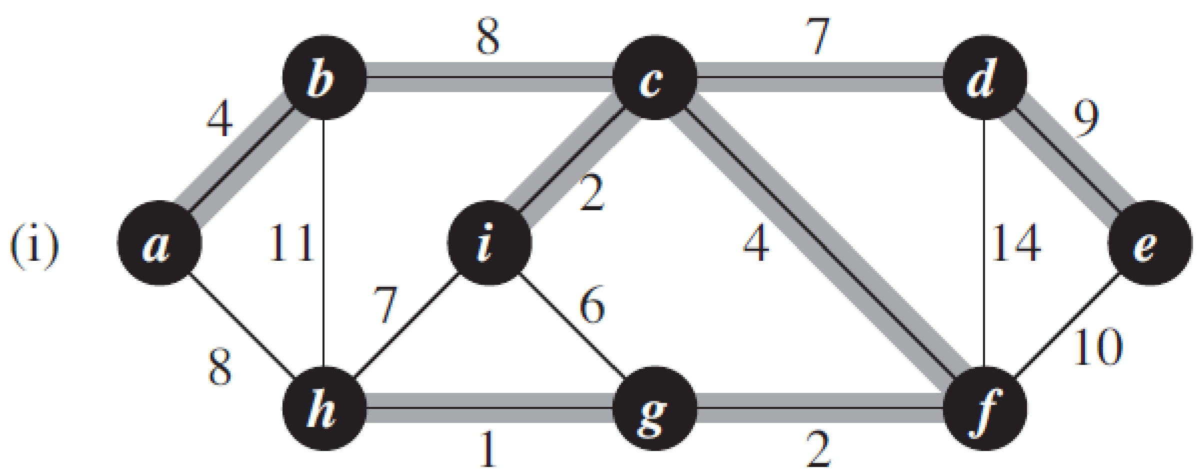
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Prim



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

Algoritmo de Prim



Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).

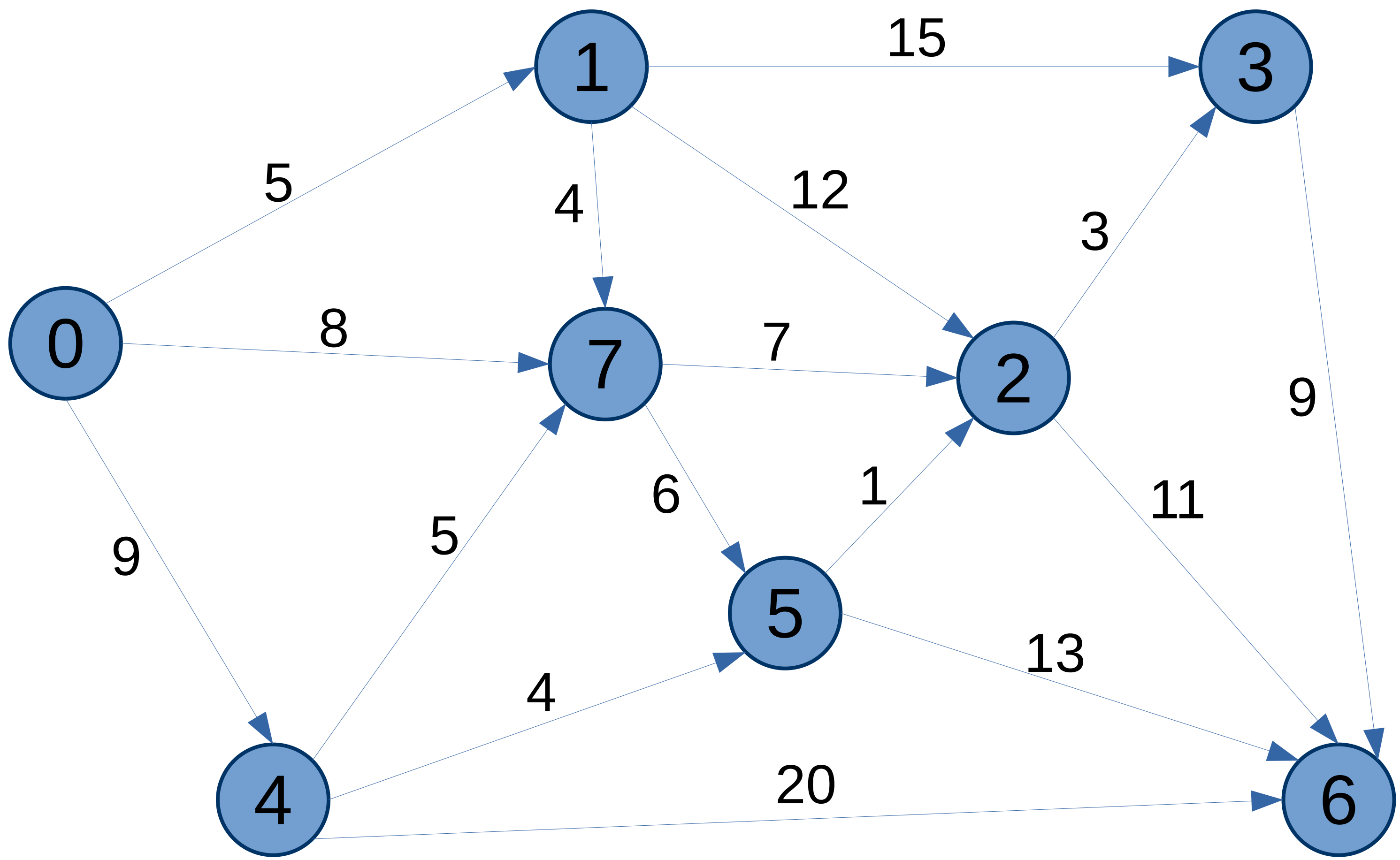
Algoritmo de Prim

- Applet de demostración:

  https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Prim.html

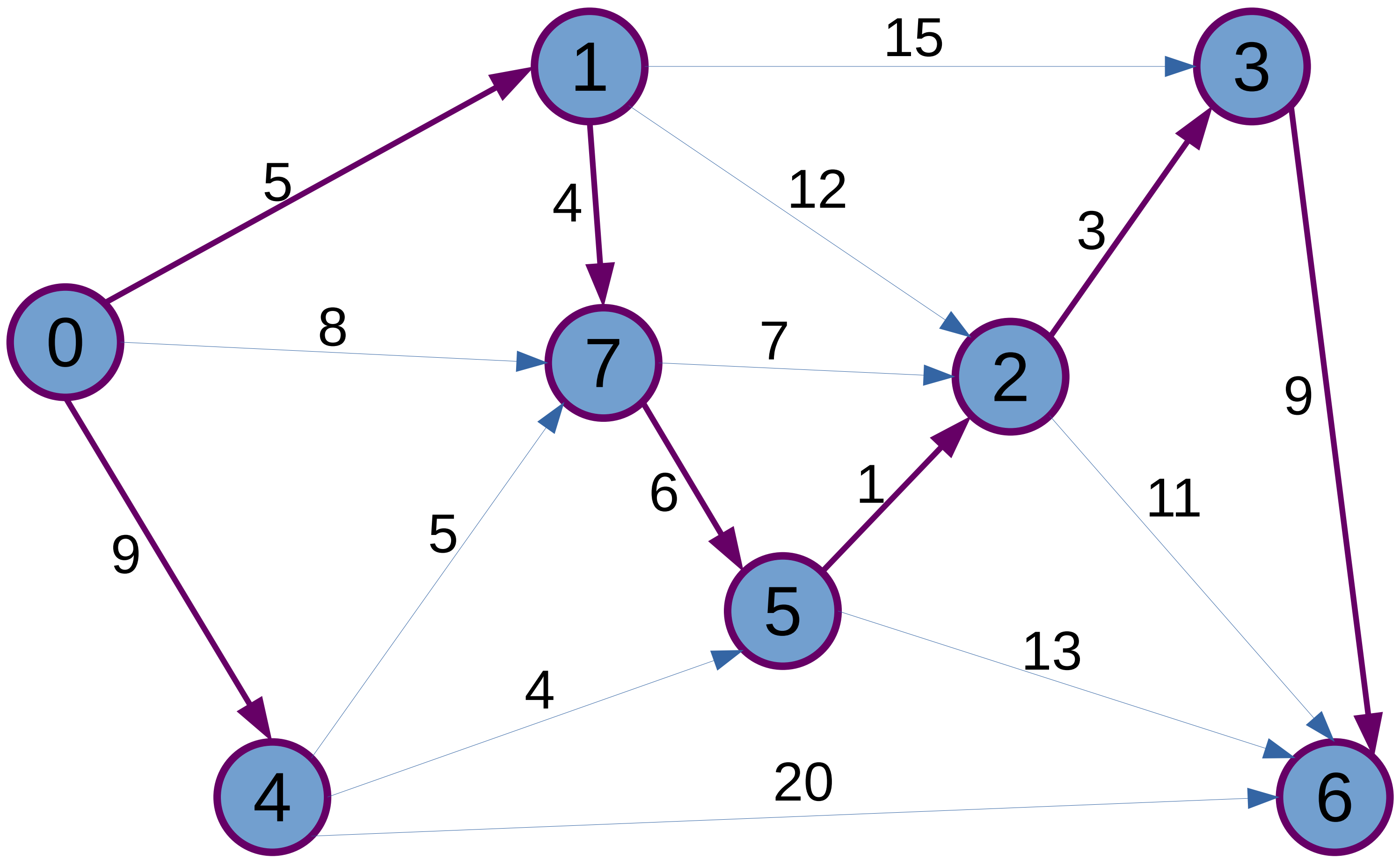
Algoritmo de Prim

- Sobre el siguiente grafo, aplique el algoritmo de Prim desde el nodo 0:



Algoritmo de Prim

- Algoritmo de Prim desde el nodo 0:



Referencias

- Joyanes, L., Zahonero, I. Algoritmos y estructuras de datos. Una perspectiva en C. McGraw-Hill.
- Kolman, B., Busby, R.C., Ross, S. Estructuras de matemáticas discretas para la computación. Prentice-Hall, Pearson Educación.
- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).
- www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture2/lecture2.html

Referencias

- https://mathworld.wolfram.com/BipartiteGraph.html
- https://www.baeldung.com/cs/graphs-bipartite