

Capítulo 7

Métodos iterativos

Resumen

En este capítulo se introducen dos amplios temas de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Se comienza con los sistemas de ecuaciones no lineales. Nos limitamos a la aplicación del método de Newton. Este a su vez requiere del conocimiento de la diferencial de Fréchet y sus propiedades, de las aplicaciones contractivas y por supuesto del teorema de Banach del punto fijo. A continuación volvemos a tratar los sistemas de ecuaciones lineales, pero esta vez con la mira de los métodos iterativos más conocidos como son el método de Jacobi, de Gauss-Seidel y SOR.

7.1. Diferencial de Fréchet. Propiedades

En esta sección definiremos la diferencial de Fréchet, sus propiedades más importantes y daremos algunas aplicaciones.

Definición 1 Sean V, W dos espacios normados con normas $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$, Ω un abierto no vacío de V , F una función de Ω en W .

i. Se dice que F es diferenciable en $a \in \Omega$ si y solo si existe $T_a \in L(V, W)$ tal que

$$F(a+h) - F(a) = T_a(h) + R(a, h), \quad \text{con} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(a, h)\|_W}{\|h\|_V} = 0.$$

En tal caso se dice que T_a es la diferencial de F en a que se le denota $Df(a)$.

ii. Se dice que F es diferenciable en Ω si F es diferenciable en cada punto de Ω .

La aplicación $T_a \in L(V, W)$ se le denomina aplicación diferencial de F en a , o diferencial de Fréchet de F en a . Note que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in V$ se tiene $T_a(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha T_a(h_1) + \beta T_a(h_2)$, es decir la linealidad de T_a . Por otro lado, T_a es continua, esto es, existe $M_a > 0$ tal que $\|T_a(x)\|_W \leq M_a \|x\|_V \quad \forall x \in V$, donde

$$M_a = \|T_a\|_{L(V, W)} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|T_a(x)\|_W = \|Df(a)\|_{L(V, W)}.$$

Si los espacios vectoriales V, W son de dimensiones finitas m y n respectivamente, $\beta_V = \{v_1, \dots, v_m\}$, $\beta_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ son las bases canónicas de V y W , la matriz asociada a la aplicación lineal T_a relativa a las bases β_V y β_W se le nota $[T_a]_{\beta_W}^{\beta_V}$. Esta matriz, por abuso de lenguaje, se le nota $DF(a)$ de modo que $T_a(x) = DF(a)x \quad \forall x \in V$.

Particularmente, si $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$, las bases canónicas de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n las designamos con $\beta_m = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$, $\beta_n = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ y las normas son la euclídea en cada espacio, el espacio $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es isomorfo al espacio de matrices $M_{n \times m}[\mathbb{R}]$, es decir que cada elemento de $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ se identifica con una matriz apropiada de $M_{n \times m}[\mathbb{R}]$.

Ejemplos

1. Sea Ω un intervalo abierto de \mathbb{R} , F una función de Ω en \mathbb{R}^n . Supongamos $F = (f_1, \dots, f_n)$ donde las funciones f_i $i = 1, \dots, n$ son funciones reales definidas en Ω y derivables en $a \in \Omega$. Se supone que \mathbb{R} está provisto de la norma $|\cdot|$ y \mathbb{R}^n de la norma euclídea $\|\cdot\|$. La existencia de $f'_i(a)$ $i = 1, \dots, n$ implica

$$f_i(a+h) - f_i(a) = f'_i(a)h + R_i(a, h)$$

con $R_i(a, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ $i = 1, \dots, n$, lo que conduce a definir $T_a \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ como $T_a(h) = (f'_1(a)h, \dots, f'_n(a)h)$ $\forall h \in \mathbb{R}$. Claramente T_a es lineal continua. Además,

$$F(a+h) - F(a) = T_a(h) + R(a, h)$$

donde $R(a, h) = (R_1(a, h), \dots, R_n(a, h))$, y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(a, h)\|}{|h|} = 0$. Resulta que la representación matricial de T_a es $DF(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$. Note que

$$F(a+h) - F(a) = T_a(h) + R(a, h) \iff f_i(a+h) - f_i(a) = f'_i(a)h + R_i(a, h) \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^n , F una función de Ω en \mathbb{R} , esto es, F un campo escalar definido en Ω . Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}$. Recordemos que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{a})$ está definido como sigue

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\vec{a} + h\vec{e}_i) - F(\vec{a})}{h},$$

siempre que el límite exista. Además, el gradiente de F en a se define como

$$\nabla F(\vec{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a}) \right).$$

Se define $T_{\vec{a}} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ como sigue: $T_{\vec{a}}(\vec{h}) = \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{h} \rangle$ $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^n . La linealidad y la continuidad de $T_{\vec{a}}$ se verifican inmediatamente. Se tiene

$$|T_{\vec{a}}(\vec{h})| \leq \|\nabla F(\vec{a})\| \|\vec{h}\| \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n.$$

La representación matricial de $T_{\vec{a}}$ respecto de la base canónica de \mathbb{R}^n es $\nabla F(\vec{a})$. Resulta

$$F(\vec{a} + \vec{h}) - F(\vec{a}) = \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{h} \rangle + R(\vec{a}, \vec{h})$$

con $R(\vec{a}, \vec{h}) \xrightarrow{\vec{h} \rightarrow 0} 0$. Luego, la diferencial de Fréchet está definida como

$$T_{\vec{a}}(\vec{h}) = \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{h} \rangle \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^m , F una función de Ω en \mathbb{R}^n , es decir, F es un campo vectorial. Ponemos $F^T = (f_1, \dots, f_n)$ al vector transpuesto de F donde f_i $i = 1, \dots, n$ es un campo escalar que suponemos diferenciable en $\vec{a} \in \Omega$, esto es,

$$f_i(\vec{a} + \vec{h}) - f_i(\vec{a}) = \langle \nabla f_i(\vec{a}), \vec{h} \rangle + R_i(\vec{a}, \vec{h})$$

con $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{|R_i(\vec{a}, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|_m} = 0$. Se define $T_{\vec{a}}(\vec{h}) = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\vec{a}), \vec{h} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_n(\vec{a}), \vec{h} \rangle \end{bmatrix}$ $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$T_{\vec{a}} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ pues es lineal continua. La matriz de $T_{\vec{a}}$ asociada a las bases canónicas de \mathbb{R}^m y

\mathbb{R}^n es la matriz jacobiana

$$DF(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{a}) \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\vec{a}) \end{bmatrix} \in M_{n \times m}[\mathbb{R}].$$

Resulta

$$F(\vec{a}, \vec{h}) - F(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\vec{a}), \vec{h} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_n(\vec{a}), \vec{h} \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1(\vec{a}, \vec{h}) \\ \vdots \\ R_n(\vec{a}, \vec{h}) \end{bmatrix} = DF(\vec{a}) \vec{h} + R(\vec{a}, \vec{h})$$

donde $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\|R(\vec{a}, \vec{h})\|_n}{\|\vec{h}\|_m} = 0$, que muestra que la diferencial de Fréchet es el operador $T_{\vec{a}}$ definido como

$$T_{\vec{a}}(\vec{h}) = DF(\vec{a}) \vec{h} \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n.$$

4. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2$ provisto de la norma euclídea $\|\cdot\|$, f la función real definida en \mathbb{R}^2 como sigue:
- $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probemos que f no es diferenciable en $\vec{0} = (0, 0)$. Para el efecto, supongamos lo contrario, es decir que existe una aplicación lineal $T_{\vec{0}} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que

$$f(\vec{0} + \vec{h}) - f(\vec{0}) = T_{\vec{0}}(\vec{h}) + R(\vec{0}, \vec{h}) \quad \text{con} \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|R(\vec{0}, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Ponemos $\vec{h} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ con $\vec{h} \neq \vec{0}$. De la definición de f , resulta

$$f(\vec{0} + \vec{h}) - f(\vec{0}) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = T_{\vec{0}}(\vec{h}) + R(\vec{0}, \vec{h}).$$

La representación matricial de $T_{\vec{0}}$ respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 lo notamos $A = (\alpha, \beta)$, es decir que

$$T_{\vec{0}}(\vec{h}) = (\alpha, \beta) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \alpha a + \beta b,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} &= \alpha a + \beta b + R(\vec{0}, \vec{h}) \implies R(\vec{0}, \vec{h}) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \alpha a - \beta b \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{R(\vec{0}, \vec{h})}{\|\vec{h}\|} &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \alpha a - \beta b \right) \\ &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \alpha \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \beta \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

Pero $\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \left(\alpha \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \beta \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = 0$, mientras que $\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$ no existe, luego

$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|R(\vec{0}, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|}$ no existe, en contradicción con lo supuesto.

Propiedades de la diferencial.

Sean V, W espacios normados con normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$, Ω un abierto de V y F una función de Ω en W .

Teorema 1 Si F es diferenciable en $a \in \Omega$, entonces F es continua en a .

Demostración. Debemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$. Por hipótesis F es Fréchet diferenciable en $a \in \Omega$, entonces existe $T_a \in L(V, W)$ tal que $F(a+h) - F(a) = T_a(h) + R(a, h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(a, h)\|_W}{\|h\|_V} = 0$ y de la existencia del límite, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|h\|_V < \delta \implies \|R(a, h)\|_W < \varepsilon \|h\|_V$ luego

$$\begin{aligned} \|F(a+h) - F(a)\| &\leq \|T_a(h)\| + \|R(a, h)\|_W \leq \|T_a\|_{L(V, W)} \|h\|_V + \|R(a, h)\|_W \\ &\leq (\|T_a\|_{L(V, W)} + \varepsilon) \|h\|_V \quad \text{si } \|h\|_V < \delta. \end{aligned}$$

Como $(\|T_a\|_{L(V, W)} + \varepsilon) \|h\|_V \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, se sigue que $\lim_{h \rightarrow 0} (F(a+h) - F(a)) = 0$ de donde $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a)$. ■

Teorema 2 Sean F, G funciones diferenciables en $a \in \Omega$. Entonces

- i) $F + G$ es diferenciable en a y $D(F + G)(a) = DF(a) + DG(a)$.
- ii) λF es diferenciable en a y $D(\lambda F)(a) = \lambda DF(a) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Se propone como ejercicio. ■

En el siguiente teorema se propone la conocida regla de la cadena.

Teorema 3 Sean U, V, W espacios normados con normas $\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$, Ω un abierto de U , F una función de Ω en V diferenciable en $a \in \Omega$, G una función de V en W diferenciable en $F(a)$. Entonces $G \circ F$ es diferenciable en a y $D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) DF(a)$.

Demostración. Por la diferenciabilidad de F en $a \in \Omega$, existe $S_a \in L(U, V)$ tal que $F(a+h) - F(a) = S_a(h) + R_F(a, h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_F(a, h)\|_V}{\|h\|_U} = 0$, de donde $\|R_F(a, h)\|_V \xrightarrow{\|h\|_U \rightarrow 0} 0$.

Sea $y = F(a)$. Por la diferenciabilidad de G en y , existe $T_y \in L(V, W)$ tal que

$$G(y+k) - G(y) = T_y(k) + R_G(y, k)$$

con $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|R_G(y, k)\|_W}{\|k\|_V} = 0$ o bien $\|R_G(y, k)\|_W \xrightarrow{\|k\|_V \rightarrow 0} 0$.

Por lo tanto, de la definición de composición de funciones, se tiene

$$(G \circ F)(a+h) - (G \circ F)(a) = G(F(a+h)) - G(F(a))$$

y como $F(a+h) = F(a) + S_a(h) + R_F(a, h)$, se tiene $G(F(a+h)) = G(F(a) + S_a(h) + R_F(a, h))$.

Ponemos $k = S_a h + R_F(a, h)$. Entonces

$$\|k\|_V = \|S_a(h) + R_F(a, h)\|_V \leq \|S_a\|_{L(U, V)} \|h\|_U + \|R_F(a, h)\|_V \xrightarrow{\|h\|_U \rightarrow 0} 0.$$

Resulta

$$\begin{aligned} G(F(a+h)) &= G(y+k) = G(y) + T_y(k) + R_G(y, k) \\ &= G(F(a)) + T_y(S_a(h) + R_F(a, h)) + R_G(y, k). \end{aligned}$$

Por la linealidad de T_y , se tiene

$$T_y(S_a(h) + R_F(a, h)) = T_y(S_a(h)) + T_y(R_F(a, h))$$

y de esta igualdad, se obtiene

$$(G \circ F)(a + h) = F(F(a)) + T_y(S_a(h)) + T_y(R_F(a, h)) + R_G(y, k)$$

de donde

$$(G \circ F)(a + h) - (G \circ F)(a) = (T_y \circ T_a)(h) + T_y(R_F(a, h)) + R_G(y, k).$$

Es claro que $T_y \circ T_a \in L(U, W)$. Probemos que $\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\|T_y(R_F(a, h)) + R_G(y, k)\|_W}{\|h\|_V} = 0$.

Por la desigualdad triangular, se tiene

$$\begin{aligned} \|T_y(R_F(a, h)) + R_G(y, k)\|_W &\leq \|T_y(R_F(a, h))\|_W + \|R_G(y, k)\|_W \\ &\leq \|T_y\|_{L(V, W)} \|R_F(a, h)\|_V + \|R_G(y, k)\|_W \end{aligned}$$

y como

$$\|R_G(y, k)\|_W = \frac{\|R_G(y, k)\|_W}{\|k\|_V} \|k\|_V \leq \frac{\|R_G(y, k)\|_W}{\|k\|_V} (\|S_a\|_{L(U, V)} \|h\|_V + \|R_F(a, h)\|_V) \xrightarrow{\|h\|_V \rightarrow 0} 0.$$

Note que $\frac{\|R_G(y, k)\|_W}{\|k\|_V} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$, consecuentemente

$$\|T_y(R_F(a, h)) + R_G(y, k)\|_W \leq \|T_y\|_{L(V, W)} \|R_F(a, h)\|_V + \|R_G(y, k)\|_W \xrightarrow{\|h\|_V \rightarrow 0} 0$$

y de la existencia de este límite resulta que $G \circ F$ es diferenciable en a . Además la diferencial de Fréchet de $G \circ F$ en a está definido como $DG(F(a))DF(a)$. ■

Una aplicación de la regla de la cadena se la da para probar la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange que se propone a continuación.

Definición 2 Sea $\Omega \subset V$. Se dice que Ω es convexo si $\forall \alpha \in [0, 1], \forall x, y \in \Omega$, se tiene $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega$.

Teorema 4 Sean V, W espacios normados provistos de las normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$, Ω un abierto convexo de V , y F una función diferenciable en todo punto $a \in \Omega$. Entonces

$$F(x) - F(a) = \int_0^1 D(F(a + \theta(x - a)))d\theta(x - a) \quad \forall x \in \Omega.$$

Demostración. Sean $a \in \Omega$ y $G(\theta) = a + \theta(x - a) \quad \forall \theta \in [0, 1]$. Se tiene $G(0) = a, G(1) = x$ y $G'(\theta) = x - a$.

Sea H la función de $[0, 1]$ en W definida como $H(\theta) = (F \circ G)(\theta) = F(G(\theta)) \quad \forall \theta \in [0, 1]$. Resulta ■

Teorema 5 Demostración. $H(0) = F(a), H(1) = F(x)$, y por hipótesis F es Fréchet diferenciable en todo punto $a \in \Omega$, por la regla de la cadena, se tiene

$$H'(\theta) = DF(G(\theta))G'(\theta) = DF(G(\theta))(x - a)$$

de donde

$$F(x) - F(a) = \int_0^1 H'(\theta)d\theta = \int_0^1 DF(a + \theta(x - a))d\theta(x - a).$$

■

7.2. Aplicaciones contractivas y lipschisianas.

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita provisto de la norma $\|\cdot\|$, E un subconjunto cerrado de V . El conjunto E con la métrica definida como $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$, es un espacio métrico completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en E es convergente en el espacio normado V . Como $E \subset V$, $E \neq \emptyset$, el par (E, d) es un espacio métrico y siendo E cerrado, se prueba que toda sucesión de Cauchy en E es convergente en E , con lo cual (E, d) es un espacio métrico completo.

El conjunto $E =]0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es cerrado. La sucesión $(x_n) \subset E$ con $x_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots$, es una sucesión de Cauchy en E que no es convergente en E , pues $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin E$. Luego (E, d) es un espacio métrico que no es completo.

En esta sección tratamos una clase de funciones denominadas contractivas y lipschisianas definidas de E en E .

Definición 3 Sean $E \subset V$, $E \neq \emptyset$ y T de E en E una función. Se dice que T es una aplicación contractiva en E si y solo si satisface la siguiente propiedad:

$$\exists k, 0 \leq k < 1 \text{ tal que } \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

La constante k de la definición precedente es independiente de x e y .

Definición 4 Sean $E \subset V$, $E \neq \emptyset$ y T de E en V una función. Se dice que T es una aplicación lipschisiana en E si y solo si satisface la siguiente propiedad:

$$\exists k > 0 \text{ tal que } \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

La constante k de la definición precedente es independiente de x e y .

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene que toda aplicación contractiva es uniformemente continua. El recíproco, en general, no es cierto.

Sea T una aplicación contractiva y $\varepsilon > 0$. De la definición se sigue que existe k , $0 \leq k < 1$ tal que $\forall x, y \in E$,

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| < \varepsilon.$$

Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ ($k \neq 0$). Entonces $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$. Observe que $\delta > 0$ es independiente de x e y . Además, si $k = 0$ se deduce que T es constante en E .

Por otro lado, si T es contractiva se tiene $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$, ya que $0 \leq k < 1$, pero puede suceder esto último sin ser contractiva se verá en un ejemplo propuesto más adelante.

Teorema 6 Sea T de E en E una función Fréchet diferenciable y lipschisiana. Entonces $\|DT(x)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|T_x(h)\| \leq k < 1 \quad \forall x \in E$.
Si el conjunto E es convexo y $\|DT(x)\| \leq k < 1 \quad \forall x \in E$. Entonces T es lipschisiana.

Demostración. Por hipótesis T es Fréchet diferenciable en $a \in E$, en consecuencia existe $DT(a) \in L(V)$ tal que $T(a + h) - T(a) - DT(a)(h) = R(a, h)$ con $\|R(a, h)\| \leq \varepsilon \|h\| \rightarrow 0$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por otro lado, T es lipschisiana, luego existe $k \in [0, 1[$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|DT(a)\|_{L(V)} &= \sup_{\|h\| \leq 1} \|T(a+h) - T(a) - R(a, h)\| \\ &\leq \sup_{\|h\| \leq 1} (\|T(a+h) - T(a)\| + \|R(a, h)\|) \\ &\leq \sup_{\|h\| \leq 1} (k\|h\| + \varepsilon\|h\|) = k + \varepsilon \end{aligned}$$

De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se sigue que $\|DT(a)\|_{L(V)} = \sup_{\|h\| \leq 1} \|T_x(h)\| \leq k < 1 \quad a \in E$.

Por la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, se tiene

$$F(x) - F(y) = \int_0^1 D(F(y + \theta(x-y)))d\theta(x-y) \quad \forall x, y \in \Omega,$$

luego

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_V &\leq \left\| \int_0^1 D(F(y + \theta(x-y)))d\theta(x-y) \right\|_V \\ &\leq \int_0^1 \|D(F(y + \theta(x-y)))\|_{L(V)} \|x-y\|_V d\theta \\ &\leq \int_0^1 \|D(F(y + \theta(x-y)))\|_{L(V)} d\theta \|x-y\|_V \\ &\leq \int_0^1 k d\theta \|x-y\|_V = k \|x-y\|_V \quad \forall x, y \in V, \end{aligned}$$

que muestra que F es lipschisiana. Note que se requiere de la convexidad de Ω . ■

Definición 5 Sean $E \subset V$, $E \neq \emptyset$ y T de E en E una función. Un punto $\hat{x} \in E$ se dice un punto fijo de T si verifica la condición $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Teorema de Banach del punto fijo.

El teorema de Banach del punto fijo es uno de los resultados importantes del análisis no lineal, que se aplica en la resolución de sistemas ecuaciones lineales, ecuaciones en derivadas parciales del tipo no lineal, etc. En esta sección extendemos los resultados obtenidos en el capítulo 5.

Teorema 7 (De Banach del punto fijo)

Sean $E \subset V$ con $E \neq \emptyset$ y E cerrado, T de E en E una aplicación contractiva en E . Entonces, existe un único $\hat{x} \in E$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración. La demostración de este teorema la dividimos en dos partes. La primera que corresponde a la existencia del punto fijo \hat{x} de T y la segunda a la unicidad.

Existencia. Por hipótesis T es contractiva, entonces existe k , $0 \leq k < 1$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

Sea $x_0 \in E$. Definimos la sucesión $(x_n) \subset E$ como sigue

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1), \dots, x_{n+1} = T(x_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

Mostremos que la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy en E . Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m > n$ y sea $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = n + p$. Entonces, por la desigualdad triangular, se tiene

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_{n+p}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{n+p-1} - x_{n+p}\|.$$

Por la definición de (x_n) se tiene

$$\begin{aligned} & \|x_n - x_{n+1}\| = \|T(x_{n-1}) - T(x_n)\| \leq k \|x_{n-1} - x_n\| \\ & = k \|T(x_{n-2}) - T(x_{n-1})\| \leq k^2 \|x_{n-2} - x_{n-1}\| \\ & \vdots \\ & \leq k^n \|x_0 - x_1\|. \end{aligned}$$

Luego, $\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n \|x_0 - x_1\| \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Aplicando el resultado que acabamos de obtener, se obtiene

$$\begin{aligned} & \|x_n - x_m\| \leq k^n \|x_0 - x_1\| + k^{n+1} \|x_0 - x_1\| + \cdots + k^{n+p} \|x_0 - x_1\| \\ & = k^n \|x_0 - x_1\| (1 + k + \cdots + k^p) \\ & \vdots \\ & \leq k^n \|x_0 - x_1\| (1 + k + \cdots + k^p + k^{p+1} + \cdots). \end{aligned}$$

Sea $S_p(k) = 1 + k + \cdots + k^p$. Entonces

$$(1 - k) S_p(k) = S_p(k) - k S_p(k) = 1 + k + \cdots + k^p - (k + k^2 + \cdots + k^{p+1}) = 1 - k^{p+1}.$$

de donde

$$S_p(k) = \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} = \frac{1}{1 - k} - \frac{k^{p+1}}{1 - k}.$$

Como $0 \leq k < 1$, $\lim_{p \rightarrow \infty} k^{p+1} = 0$. Luego

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p(k) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - k} - \frac{k^{p+1}}{1 - k} \right) = \frac{1}{1 - k} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{k^{p+1}}{1 - k} = \frac{1}{1 - k},$$

con lo cual $\sum_{p=0}^{\infty} k^p = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p(k) = \frac{1}{1 - k}$.

Por lo tanto $\|x_n - x_m\| \leq k^n \|x_0 - x_1\| \sum_{p=0}^{\infty} k^p = \frac{k^n}{1 - k} \|x_0 - x_1\|$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ se sigue que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n \geq n_0$, $k^n < \frac{1 - k}{\|x_0 - x_1\|} \varepsilon$. Luego

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_0 - x_1\| < \varepsilon \quad \text{si } m, n \geq n_0,$$

es decir que (x_n) es una sucesión de Cauchy en E y por hipótesis E es cerrado, entonces la sucesión (x_n) tiene límite en E ; esto es, existe $\hat{x} \in E$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$.

Puesto que T es contractiva, T es uniformemente continua y por lo tanto continua. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = T(\hat{x}).$$

Además, $x_{n+1} = T(x_n)$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x}$, resulta que $T(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x}$. Así, $T(\hat{x}) = \hat{x}$ o sea $\hat{x} \in E$ es un punto fijo de T .

Unicidad. Probemos que $\hat{x} \in E$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$ es único. Para el efecto, supongamos que existe $y \in E$ tal que $T(y) = y$. Mostremos que $y = \hat{x}$. Como T es contractiva, se tiene

$$\|\hat{x} - y\| = \|T(\hat{x}) - T(y)\| \leq k \|\hat{x} - y\|,$$

de donde $\|\hat{x} - y\| (1 - k) \leq 0$, y siendo $0 \leq k < 1$, entonces $1 - k > 0$ y en consecuencia $\|\hat{x} - y\| \leq 0$. Como el valor absoluto es no negativo, la única posibilidad es $\|\hat{x} - y\| = 0 \Leftrightarrow y = \hat{x}$. ■

Observaciones

1. El teorema de Banach del punto fijo asegura la existencia de un único punto fijo $\hat{x} \in E$ de la aplicación contractiva T definida en el conjunto cerrado E de V .

2. En los textos de Análisis, el teorema de Banach del punto fijo se enuncia como sigue: Sea (E, d) un espacio métrico completo y T de E en E una aplicación contractiva. Entonces, existe un único $\hat{x} \in E$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

La demostración del teorema de Banach del punto fijo para espacios métricos completos muy generales (E, d) es muy similar a la aquí propuesta con la salvedad que la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ $x, y \in V$ se remplazan simplemente por $d(x, y)$ con d la métrica en el conjunto E .

3. En la demostración del teorema de Banach del punto fijo se muestra una manera de calcular el punto fijo $\hat{x} \in E$. Pues se parte de un punto arbitrario $x_0 \in E$ y se construye la sucesión $(x_n) \subset E$ tal que $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. Entonces $\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ es el punto fijo de T . De este hecho se desprende que podemos aproximar el punto fijo \hat{x} con una precisión $\varepsilon > 0$.

7.3. Resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales

Sean $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\Omega \neq \emptyset$ y $\vec{\mathbf{F}}$ una función de Ω en \mathbb{R}^n . Pongamos $\vec{\mathbf{F}} = (f_1, \dots, f_n)^T$ donde cada f_i , $i = 1, \dots, n$, es una función de Ω en \mathbb{R} . Consideramos el problema **(P)** siguiente:

$$\text{hallar } \hat{x} \in \Omega, \text{ si existe, tal que } \vec{\mathbf{F}}(\hat{x}) = 0. \quad (\mathbf{P})$$

Note que la ecuación $\mathbf{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

El teorema de Bolzano no tiene validez para funciones de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n . Asumimos que el problema **(P)** tiene solución, esto es, asumimos la existencia de al menos una solución $\hat{x} \in \Omega$ tal que $\vec{\mathbf{F}}(\hat{x}) = 0$.

1. Método de punto fijo

Supongamos que Ω es cerrado y que la función $\vec{\mathbf{F}}$ se expresa en la forma

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{\mathbf{G}}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega,$$

con $\vec{\mathbf{G}}$ una aplicación contractiva en Ω . Entonces,

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{G}}(\vec{x}) = \vec{x},$$

es decir que $\hat{x} \in \Omega$ es un punto fijo de $\vec{\mathbf{G}}$.

La sucesión (\vec{x}_m) definida por

$$\begin{cases} \vec{x}_0 \in \Omega, \\ \vec{x}_{m+1} = \vec{\mathbf{G}}(\vec{x}_m) \quad m = 0, 1, \dots \end{cases}$$

converge a \hat{x} (teorema de Banach del punto fijo).

Sea $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$) la precisión con la que se desea aproximar \hat{x} y $N_{\text{máx}}$ el número máximo de iteraciones. Se tiene el siguiente algoritmo de punto fijo para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales.

Algoritmo

Datos de entrada: ε precisión, $N_{\text{máx}}$ número máximo de iteraciones, funciones g_1, \dots, g_n .

Datos de salida: n número de iteraciones, \vec{y} solución aproximada, $\vec{\mathbf{F}}(\vec{y})$.

1. $\vec{x} = \vec{x}_0$

2. Par $k = 0, 1, \dots, N_{\text{máx}}$
3. $\vec{y} = \vec{G}(\vec{x})$
4. Si $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon$ continuar en 6).
5. $\vec{x} = \vec{y}$
6. Si $k < N_{\text{máx}}$, imprimir $k, \vec{y}, \vec{F}(\vec{y})$. Continuar en 8).
7. Si $k = N_{\text{máx}}$, imprimir $\vec{y}, \vec{F}(\vec{y})$.
8. Fin.

Nota: La norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n que se considera aquí es la norma euclídea definida como sigue:

$$\|\vec{a}\| = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{con } \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. Método de Newton

Supongamos que $\vec{F} \in C^1(\Omega)$ y $\hat{x} \in \Omega$ tal que $\vec{F}(\hat{x}) = 0$.

Por el desarrollo de Taylor en un entorno de \hat{x} , se tiene

$$0 = \vec{F}(\hat{x}) = \vec{F}(\vec{x}) + D\vec{F}(\vec{x})(\hat{x} - \vec{x}) + 0\left(\|\hat{x} - \vec{x}\|^2\right),$$

de donde $D\vec{F}(\vec{x})$ es la matriz jacobiana definida por:

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f(n)}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f(n)}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad \vec{x} \in \Omega.$$

Suponemos que la matriz $D\vec{F}(\vec{x})$ no es singular en todo punto $\vec{x} \in \Omega$.

Si se desprecia el término $0\left(\|\hat{x} - \vec{x}\|^2\right)$ en el desarrollo de Taylor precedente, se tiene

$$\vec{F}(\vec{x}) + D\vec{F}(\vec{x})(\hat{x} - \vec{x}) = 0,$$

y siendo $D\vec{F}(\vec{x})$ no singular, se sigue que

$$\begin{aligned} D\vec{F}(\vec{x})(\hat{x} - \vec{x}) &= -\vec{F}(\vec{x}) \\ \hat{x} - \vec{x} &= -\left(D\vec{F}(\vec{x})\right)^{-1}\vec{F}(\vec{x}) \end{aligned}$$

de donde

$$\hat{x} = \vec{x} - \left(D\vec{F}(\vec{x})\right)^{-1}\vec{F}(\vec{x})$$

lo que nos permite definir la función de iteración φ :

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \left(D\vec{F}(\vec{x})\right)^{-1}\vec{F}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega,$$

con $D\vec{F}(\vec{x})$ matriz no singular.

El método de Newton para aproximar la raíz $\hat{x} \in \Omega$ de $\vec{F}(\hat{x}) = 0$ es el siguiente:

$$\begin{cases} \vec{x}_0 \in \Omega \text{ una aproximación inicial de } \hat{x}, \\ \vec{x}_{m+1} = \varphi(\vec{x}_m) \quad m = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Si φ es una aplicación contractiva en Ω , por el teorema de Banach del punto fijo, la sucesión (\vec{x}_m) generada por el método de Newton converge a \hat{x} .

Puesto que

$$\begin{aligned}\vec{x}_{m+1} &= \varphi(\vec{x}_m) = \vec{x}_m - \left(D\vec{F}(\vec{x}_m)\right)^{-1} \vec{F}(\vec{x}_m), \\ \left(D\vec{F}(\vec{x}_m)\right)^{-1} \vec{F}(\vec{x}_m) &= \vec{x}_m - \vec{x}_{m+1}, \\ D\vec{F}(\vec{x}_m)(\vec{x}_m - \vec{x}_{m+1}) &= \vec{F}(\vec{x}_m).\end{aligned}$$

Ponemos $\vec{y} = \vec{x}_m - \vec{x}_{m+1} \Rightarrow \vec{x}_{m+1} = \vec{x}_m - \vec{y}$. Se tiene

$$D\vec{F}(\vec{x}_m) \vec{y} = \vec{F}(\vec{x}_m),$$

que es un sistema de ecuaciones lineales con \vec{y} el vector incógnita. Este sistema de ecuaciones lineales puede ser resuelto utilizando los métodos de eliminación gaussiana con pivoting, factorización LU, Choleski, dependiendo de las propiedades de la matriz jacobiana $D\vec{F}(\vec{x})$.

Debe advertirse que el cálculo directo de $\left(D\vec{F}(\vec{x}_m)\right)^{-1}$ no se realiza.

Dado \vec{x}_m , para calcular la nueva aproximación \vec{x}_{m+1} de \hat{x} , resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$D\vec{F}(\vec{x}_m) \vec{y} = \vec{F}(\vec{x}_m),$$

y una vez calculado \vec{y} , se tiene $\vec{x}_{m+1} = \vec{x}_m - \vec{y}$; y, se repite el procedimiento hasta considerar \vec{x}_m tal que $\vec{F}(\vec{x}_m) \simeq 0$ sea satisfactorio.

Sea $\varepsilon > 0$ la precisión con la que se aproxima \hat{x} y $N_{\text{máx}}$ el número máximo de iteraciones. El esquema numérico generado por el método de Newton se presenta a continuación.

Algoritmo

Datos de Entrada: $\varepsilon, N_{\text{máx}}$, funciones f_1, \dots, f_n , $\frac{\partial f_i}{\partial f_j} \quad i, j = 1, \dots, n$

Datos de Salida: n número de iteraciones, \vec{x} , $\tilde{\mathbf{F}}(\vec{x})$.

1. $\vec{x} = \vec{x}_0$
2. Para $k = 1, \dots, N_{\text{máx}}$
3. Resolver el sistema de ecuaciones $D\tilde{\mathbf{F}}(\vec{x}) \vec{y} = \tilde{\mathbf{F}}(\vec{x})$.
4. Si $\|\vec{y}\| < \varepsilon$. Continuar en 6).
5. $\vec{x} = \vec{x} - \vec{y}$
6. Si $k < N_{\text{máx}}$, imprimir: $n, \vec{x}, \tilde{\mathbf{F}}(\vec{x})$. Continuar en 8).
7. Si $k = N_{\text{máx}}$, imprimir: $N_{\text{máx}}, \vec{x}, \tilde{\mathbf{F}}(\vec{x})$.
8. Fin

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ (x+3)^2 + 4(y-3)^2 = 4. \end{cases}$

Asociemos a este sistema de ecuaciones no lineales la función siguiente:

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \left(x^2 - y^2 - 1, (x+3)^2 + 4(y-3)^2 - 4\right) \quad (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ (x+3)^2 + 4(y-3)^2 = 4. \end{cases}$$

El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$ representa una hipérbola y la ecuación el conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x+3)^2 + 4(y-3)^2 = 4\}$ representa una elipse.

En la figura siguiente se muestran los graficos de la hipérbola y de la elipse.

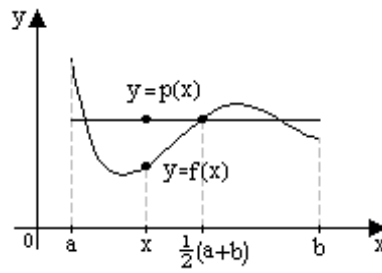


Figura 72

Las gráficas de la hipérbola y de la elipse se cortan en dos puntos. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = (0, 0)$ tiene dos soluciones $\hat{X}_1 = (\hat{x}_1, \hat{y}_1)$, $\hat{X}_2 = (\hat{x}_2, \hat{y}_2)$.

La matriz jacobiana de $\tilde{\mathbf{F}}$ está definida como

$$D\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2(x+3) & 8(y-3) \end{bmatrix} \quad (x, y) \in \mathbb{R}.$$

i. Apliquemos el método de Newton para calcular una aproximación de $\hat{X}_1 = (\hat{x}_1, \hat{y}_1)$.

Sea $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} -2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$. Entonces $D\tilde{\mathbf{F}}(\vec{x}_0)\vec{y} = \tilde{\mathbf{F}}(\vec{x}_0)$, resolviendo este sistema de ecuaciones y tomando

en cuenta que $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \vec{y}$, se obtiene $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2,11 \\ 1,91 \end{bmatrix}$. Continuando con la ejecución del método de Newton, se obtienen los siguientes resultados:

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -2,28453 \\ 2,051495 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -2,29376 \\ 2,064322 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} -2,29385 \\ 2,06440 \end{bmatrix}.$$

Con una precisión $\varepsilon = 10^{-5}$, una aproximación de la solución es $\hat{X}_1 = \begin{bmatrix} -2,29385 \\ 2,06440 \end{bmatrix}$.

ii. Apliquemos el método de Newton para calcular una aproximación de $\hat{X}_2 = (\hat{x}_2, \hat{y}_2)$.

Sea $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} -4,2 \\ 3,8 \end{bmatrix}$. Los resultados de la aplicación del algoritmo generado por el método de Newton se muestra a continuación.

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -4,00444 \\ 3,87333 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -3,99476 \\ 3,86757 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -3,99473 \\ 3,86754 \end{bmatrix},$$

$$\hat{X}_1 = \begin{bmatrix} -3,99473 \\ 3,86754 \end{bmatrix}.$$

Observación

De la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se deduce $x = \pm\sqrt{1+y^2}$. Pongamos $x = -\sqrt{1+y^2}$ en la ecuación $(x+3)^2 + 4(y-3)^2 = 4$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \left(-\sqrt{1+y^2}+3\right)^2+4(y-3)^2 &= 4, \\ 5y^2-24y+42 &= 6\sqrt{1+y^2}, \end{aligned}$$

de donde

$$y^4-9,6y^3+38,4y^2-80,64y+69,12=0.$$

Sea

$$\begin{aligned} P(y) &= 69,12 - 80,64y + 38,4y^2 - 9,6y^3 + y^4 \\ &= 69,12 + y(-80,64 + y(38,4 + y(-9,6 + y))). \end{aligned}$$

Determinemos las fronteras inferior y superior donde están localizadas las raíces positivas de la ecuación $P(y) = 0$.

Se tiene

$$\begin{aligned} R &= 1 + (80,64)^{\frac{1}{3}} \simeq 5,3203 < 5,5 \\ r &= \frac{1}{1 + \frac{\max_{k=1,\dots,n} |a_k|}{|a_0|}} = \frac{1}{1 + \frac{80,64}{60,92}} = 0,46 < 0,5. \end{aligned}$$

Buscamos las raíces de $P(y) = 0$ en el intervalo $[0,5, 5,5]$.

Con un paso $h = 0,5$, la aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo muestra que existen dos raíces localizadas en los intervalos $[2, 2,5]$ y $[3,5, 4]$. Además, $P(2) = 0,64$, $P(2,5) = -3,42$, $P(3,5) = -4,26$, $P(4) = 2,56$.

i. Cálculo de $\hat{y}_1 \in [2, 2,5]$. La función de iteración del método de Newton está dada por

$$\varphi(y) = y - \frac{P(y)}{P'(y)}$$

Sea $y_0 = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(2) = 2,0625, \\ y_2 &= \varphi(y_1) = \varphi(2,0625) = 2,064402, \\ y_3 &= \varphi(y_2) = \varphi(2,064402) = 2,064404, \end{aligned}$$

ii. Cálculo de $\hat{y}_2 \in [3,5, 4]$.

Sea $y_0 = 4$,

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(y_0) = \varphi(4) = 3,882353, \\ y_2 &= \varphi(y_1) = \varphi(3,882353) = 3,867753, \\ y_3 &= \varphi(y_2) = \varphi(3,867753) = 3,867541. \end{aligned}$$

Con una precisión $\varepsilon = 10^{-6}$, $\hat{y}_1 = 2,064404$, $\hat{y}_2 = 3,867541$. Resulta

$$\begin{aligned} P(y) &= (y - \hat{y}_1)(y - \hat{y}_2)(y^2 + by + c) \\ &= (y - 2,064404)(y - 3,867541)(y^2 + by + c) \\ &= y^4 + (b - 5,93194)y^3 + (c - 5,93194b + 7,98415)y^2 + \\ &\quad (7,98415b - 5,93194c)y + 7,98415c. \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{cases} b - 5,93194 = -9,6 \\ c - 5,93194b + 7,98415 = 38,4 \\ 7,98415b - 5,93194c = -80,64 \\ 7,98415c = 69,12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3,66806, \\ c = 8,65714. \end{cases}$$

Luego

$$y^2 + by + c = 0 \iff y^2 - 3,66806y + 8,65714 = 0.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}y_3 &= 1,83403 - 2,30076i, \\y_4 &= \overline{y_3} = 1,83403 + 2,30076i.\end{aligned}$$

¿Raíces Múltiples? Acabamos de calcular todas las raíces reales o complejas de la ecuación $P(y) = 0$.

Si únicamente hubiesemos calculado las raíces reales $\widehat{y}_1, \widehat{y}_2$, las dos raíces restantes podían ser complejas o una real de multiplicidad 2. Despejamos esta duda aplicando los métodos descritos en la aproximación de raíces de multiplicidad.

Definimos

$$u(y) = \frac{P(y)}{P'(y)} \quad P'(y) \neq 0.$$

La aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo aplicado a la función u muestra la existencia de dos raíces $\widehat{y}_1 \in [2, 2,5]$, $\widehat{y}_2 \in [3,5, 4]$. ¿Qué ocurre? Explique.

Puesto $x = -\sqrt{1+y^2}$ se deducen $\widehat{x}_1 = -\sqrt{1+\widehat{y}_1^2}$ y $\widehat{x}_2 = -\sqrt{1+\widehat{y}_2^2}$.

7.4. Métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para terminar este capítulo, en contraposición con los métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales presentamos dos métodos iterativos, el de Jacobi y el de SOR.

7.4.1. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$, $\vec{b}^T = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ que en forma explícita se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.\end{aligned}$$

El método que vamos a describir requiere, en principio, que los coeficientes $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ que conforman la diagonal de la matriz A sean distintos de cero. Veremos más adelante que se puede hacer en caso de que esto no suceda.

El método de Jacobi consiste en despejar x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda ecuación, etc.:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}, \\x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}},\end{aligned}$$

en general

$$x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sea el vector $\vec{X}^{(0)}$, un vector cualquiera: $\vec{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, en base a las ecuaciones precedente se obtiene

el vector: $\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$, donde

$$x_i^{(1)} = - \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(0)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Con los valores obtenidos para $x_i^{(1)}$ y las ecuaciones en (1) se obtiene $\vec{X}^{(2)}$ y, así sucesivamente, se obtienen $\vec{X}^{(3)}$, $\vec{X}^{(4)}$, ..., mediante la fórmula recurrente:

$$x_j^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

El procedimiento anterior se expresa en forma matricial como sigue: la matriz A del sistema se descompone en la forma

$$A = D - L - U,$$

donde D es una matriz diagonal, L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} (D - L - U) \vec{x} &= \vec{b} \\ D\vec{x} - (L + U) \vec{x} &= \vec{b} \\ D\vec{x} &= (L + U) \vec{x} + \vec{b} \\ \vec{x} &= D^{-1}(L + U) \vec{x} + D^{-1}\vec{b}. \end{aligned}$$

así,

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = D^{-1}(L + U) \vec{x} + D^{-1}\vec{b}.$$

1. Claramente, la matriz D es no singular. Si notamos $T = D^{-1}(L + U)$ y $C = D^{-1}\vec{b}$, la ecuación $\vec{x} = D^{-1}(L + U) \vec{x} + D^{-1}\vec{b}$ toma la forma: $\vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$, y la fórmula recurrente del método De Jacobi arriba formulada se expresa como:

$$\vec{X}^{(k+1)} = T\vec{X}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La validez de $\vec{X}^{(k)}$ como solución aproximada del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ está garantizada por los siguientes resultados.

Recordemos que si A es una matriz cuadrada, su radio espectral $\rho(A)$ es el máximo de los valores absolutos de sus valores propios.

Sea A una matriz no singular. Para cualquier vector $\vec{X}^{(0)}$ en \mathbb{R}^n , la sucesión de vectores $(\vec{X}^{(k)})_k$ definida por

$$\vec{X}^{(k+1)} = T\vec{X}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

converge a la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, si y solo si $\rho(A) < 1$.

Sea A una matriz cuadrada y \vec{x} un vector (columna) de \mathbb{R}^n , se tiene $A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y tiene sentido hablar de la norma (en \mathbb{R}^n) $\|A\vec{x}\|_\infty$. El máximo de estas normas cuando \vec{x} recorre todos los vectores de norma 1 se llama la norma $\|\cdot\|_\infty$ de la matriz A , y está definida como

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty \leq 1} \|A\vec{x}\|_\infty.$$

Se tiene que

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty.$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $\rho(A) \leq \|A\|_\infty = 7$.

Sea A una matriz no singular. Si $\|T\| < 1$, la sucesión de vectores $(\vec{X}^{(k)})_k$ converge a la solución \vec{X} del sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ para cualquier $\vec{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Además se satisface:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{X}^{(k)}\| &\leq \|T\|^k \|\vec{X}^{(0)} - \vec{x}\| \quad k = 1, 2, \dots, \\ \|\vec{x} - \vec{X}^{(k)}\| &\leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\vec{X}^{(1)} - \vec{X}^{(0)}\| \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La última desigualdad nos proporciona una cota para el error de aproximación de $\vec{X}^{(k)}$ a la solución \vec{x} .

Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

Aplicamos el método de Jacobi. Partiendo de: $\vec{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se obtiene en la iteración $k = 10$ el

vector $\vec{X}^{(10)} = \begin{pmatrix} 1,0001 \\ 1,9998 \\ -0,9998 \\ 0,9998 \end{pmatrix}$. Por otra parte, la solución exacta es $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un método que,

generalmente, produce una convergencia más rápida de la sucesión $(\vec{X}^{(k)})$ consiste en utilizar los valores de $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{j-1}^{(k)}$ para calcular $x_i^{(k)}$, en lugar de $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{j-1}^{(k-1)}$. Así:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}}, \\ x_3^{(k)} &= -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k)} - \dots - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_4^{(k-1)} - \dots - \frac{a_{3n}}{a_{33}}x_n^{(k-1)} + \frac{b_3}{a_{33}}, \end{aligned}$$

en general

$$x_i^{(k)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

En forma matricial este método tiene la forma

$$(D - L) \vec{X}^{(k)} = U \vec{X}^{(k-1)} + \vec{b},$$

y considerando que la matriz $D - L$ es no singular, la ecuación precedente es equivalente a

$$\vec{X}^{(k)} = (D - L)^{-1} U \vec{X}^{(k-1)} + (D - L)^{-1} \vec{b} \quad k = 1, 2, \dots,$$

o también

$$\vec{X}^{(k)} = T \vec{X}^{(k-1)} + \vec{c},$$

con $T = (D - L)^{-1} U$ y $\vec{c} = (D - L)^{-1} \vec{b}$. Este método se conoce como el método de Gauss-Seidel.

En el ejemplo anterior, con el método de Gauss-Seidel se obtiene para la iteración $k = 5$ prácticamente la solución exacta:

$$\vec{X}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1,0001 \\ 2,0000 \\ -1,0000 \\ 1,000 \end{pmatrix}.$$

Tanto en el método de Jacobi como en el de Gauss-Seidel se requiere que los términos de la diagonal de la matriz A sean no nulos: $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$.

En caso de que esto no suceda, se reordenan las ecuaciones para conseguir este objetivo:

El sistema:

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Si una reordenación no es posible de tal manera que el coeficiente de cada x_i en la i -ésima ecuación sea distinto de cero la matriz A tiene determinante nulo, lo que implica que el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

7.4.2. Método SOR (Successive Over-Relaxation)

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es una matriz cuadrada no singular. Si \tilde{X} es una aproximación de la solución del sistema,

$$\vec{r} = \vec{b} - A\tilde{X}$$

se llama el vector residual de \tilde{X} . El objetivo es hallar una sucesión de soluciones aproximadas de tal manera que la sucesión de los vectores residuales converja a 0.

Con relación al método de Gauss-Seidel consideremos la solución aproximada de $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$$

y notemos por $R_i^{(k)} = (r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \dots, r_{ni}^{(k)})$ a su vector residual. Se tiene que

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}.$$

Como en el método de Gauss-Seidel

$$X_i^{(k)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \frac{b_j}{a_{ii}},$$

se tiene para $i = 1, \dots, n$

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii}x_i^{(k)}$$

o

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}.$$

Modificando la última ecuación a:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$$

se puede demostrar que para ciertas elecciones de ω positivo la convergencia del vector $\vec{X}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$

al vector solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es significativamente más rápida. Para fines de cálculo es conveniente expresar la relación:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}$$

en forma equivalente a la siguiente:

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega) x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right]$$

o lo que es lo mismo

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1 - \omega) a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i,$$

que en forma matricial corresponde a

$$(D - \omega L) \vec{X}^{(k)} = [(1 - \omega) D + \omega U] \vec{X}^{(k-1)} + \omega \vec{b},$$

de donde

$$\vec{X}^{(k)} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega) D + \omega U] \vec{X}^{(k-1)} + \omega (D - \omega L)^{-1} \vec{b}.$$

Así llegamos a la forma familiar

$$\vec{X}^{(k)} = T \vec{X}^{(k-1)} + \vec{c}.$$

Ejemplos

El sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24, \end{cases}$ tiene la solución exacta $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Por el

método de Gauss-Seidel se obtiene en la iteración 7 la solución aproximada $\vec{X}^{(7)} = \begin{pmatrix} 3,0134110 \\ 3,9888241 \\ -5,0027940 \end{pmatrix}$,

mientras que con el método SOR se obtiene para $\omega = 1,25$, $\vec{X}^{(7)} = \begin{pmatrix} 3,000094 \\ 4,0002586 \\ -5,0003486 \end{pmatrix}$. Terminamos esta

sección con algunos resultados que justifican las afirmaciones anteriores sobre el método SOR.

Iniciamos con algunas definiciones y notaciones previas. Recordemos que una matriz cuadrada A es definida positiva si $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$ para todo vector columna $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Los métodos de aproximación anteriores se resumen en una expresión de la forma

$$\vec{X}^{(k)} = T \vec{X}^{(k-1)} + \vec{c}.$$

Usaremos las notaciones T_J , T_G y T_W para indicar que la matriz T se refiere al método de Jacobi, Gauss-Seidel o SOR respectivamente.

Consideremos una matriz tridiagonal siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se tienen los siguientes resultados.

1. Si A es una matriz definida positiva y $0 < \omega < 2$, la sucesión $(\vec{X}^{(k)})$ del método SOR converge para cualquier elección de $\vec{X}^{(0)}$.

Si, además, A es tridiagonal, entonces $\rho(T_G) = [\rho(T_J)]^2 < 1$ y la elección óptima para w es

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_J)]^2}}.$$

Con este valor de w , $\rho(T_W) = w - 1$.

Ejercicio resuelto

a) Sea A una matriz tridagonal de $n \times n$ estrictamente diagonalmente dominante, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ y $1 < \omega < 2$. Elaborar un algoritmo para calcular la solución aproximada usando el método S.O.R.

b) Aplique su algoritmo para hallar la solución del sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

1. $Tol = 10^{-2}$, $\omega = 1,5$ y $\vec{x}_0^T = (0, 0, 0, 0)$.

Solución

a) Puesto que el método S.O.R. viene dado por

$$(D - \omega L) \vec{x}^{(k+1)} = [(1 - w) D + \omega U] \vec{x}^{(k)} + \omega \vec{b},$$

donde $A = -L + D - U$ es la descomposición habitual antes indicada. Como A es tridiagonal, tenemos

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D - \omega L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega a_{21} & a_{22} & & \dots & 0 \\ 0 & \omega a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \omega a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$(D - \omega L) \vec{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(k+1)} \\ \omega a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} \\ \omega a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ \omega a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

$$(1 - \omega) D + \omega U = \begin{bmatrix} (1 - \omega) a_{11} & -\omega a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - \omega) a_{22} & -\omega a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \omega) a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & (1 - \omega) a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[(1 - \omega) D + \omega U] \vec{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} (1 - \omega) a_{11}x_1^{(k)} - \omega a_{12}x_2^{(k)} \\ (1 - \omega) a_{22}x_2^{(k)} - \omega a_{23}x_3^{(k)} \\ (1 - \omega) a_{33}x_3^{(k)} - \omega a_{34}x_4^{(k)} \\ \vdots \\ (1 - \omega) a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - \omega a_{n-1,n}x_n^{(k)} \\ (1 - \omega) a_{nn}x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(k+1)} \\ \omega a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} \\ \omega a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ \omega a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega) a_{11}x_1^{(k)} - \omega a_{12}x_2^{(k)} \\ (1 - \omega) a_{22}x_2^{(k)} - \omega a_{23}x_3^{(k)} \\ (1 - \omega) a_{33}x_3^{(k)} - \omega a_{34}x_4^{(k)} \\ \vdots \\ (1 - \omega) a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - \omega a_{n-1,n}x_n^{(k)} \\ (1 - \omega) a_{nn}x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega b_1 \\ \omega b_2 \\ \omega b_3 \\ \vdots \\ \omega b_n \end{bmatrix},$$

de donde obtenemos el siguiente esquema numérico

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{(1 - w) a_{11}x_1^{(k)} - \omega a_{12}x_2^{(k)} + \omega b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{-\omega a_{21}x_1^{(k+1)} + (1 - w) a_{22}x_2^{(k)} - \omega a_{23}x_3^{(k)} + \omega b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{-\omega a_{32}x_2^{(k+1)} + (1 - w) a_{33}x_3^{(k)} - \omega a_{34}x_4^{(k)} + \omega b_3}{a_{33}} \\ &\vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} &= \frac{-\omega a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k+1)} + (1 - w) a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - \omega a_{n-1,n}x_n^{(k)} + \omega b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{-\omega a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + (1 - w) a_{nn}x_n^{(k)} + \omega b_n}{a_{nn}} \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

La solución "exacta" es: $\vec{x}^T = (0,446154, -0,6692307, 0,615384, -0,369223)$.

Ponemos $\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Primera iteración, aplicando el esquema numérico, obtenemos

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,375 \\ 0,525 \\ -0,4725 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_{\infty} > Tol,$$

continuamos con la segunda iteración, volvemos a plicar el esquema numérico, tenemos

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,375 \\ -0,721875 \\ 0,754125 \\ -0,4424625 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|_{\infty} > Tol,$$

a continuación realizamos la tercera iteración. obtenemos

$$\vec{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,534375 \\ -0,780046875 \\ 0,656413125 \\ -0,3695675625 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{x}^{(3)} - \vec{x}^{(2)}\|_{\infty} > Tol,$$

luego

$$\vec{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,512859375 \\ -0,669631172 \\ 0,595312678 \\ -0,350997629 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{x}^{(4)} - \vec{x}^{(3)}\|_{\infty} > Tol,$$

$$\vec{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,41320148 \\ -0,64161947 \\ -0,597913926 \\ -0,362623719 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{x}^{(5)} - \vec{x}^{(4)}\|_{\infty} > Tol.$$

Continuado con la ejecución del esquema numérico, en la iteración 7 se verifica que $\|\vec{x}^{(7)} - \vec{x}^{(6)}\|_{\infty} < Tol$, y concluimos con el procedimiento de cálculo.

7.5. Ejercicios

1. Sea Ω un intervalo de \mathbb{R} , f una función de Ω en $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ definida como $f(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 1-x \\ x & 2x^2+3 \end{bmatrix}$ $x \in \Omega$. Pruebe que f es Fréchet diferenciable en $a \in \Omega$ y la diferencial de Fréchet T_a está definida como $T_a(h) = \begin{bmatrix} 2ah & -h \\ h & 4ah \end{bmatrix} \quad \forall h \in \mathbb{R}$.
2. Sea Ω un intervalo de \mathbb{R} , f una función de Ω en $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ con $f(x) = (a_{ij}(x))$ $x \in \Omega$ y a_{ij} funciones reales derivables en todo punto $a \in \Omega$. Demuestre que f es Fréchet diferenciable y que la diferencial T_a está definida como $T_a(h) = (a_{ij}(a)h) \quad \forall h \in \mathbb{R}$.
3. Considere la función real definida en todo \mathbb{R}^2 como $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$ demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.
4. Considere la función real definida en todo \mathbb{R}^2 como $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

5. Demuestre que la función v de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 definida como $v(t) = (|t-1|, t, 2t^2)$ $t \in \mathbb{R}$ no es diferenciable en $t = 1$.
6. Sean $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ una matriz simétrica, definida positiva, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Se define el funcional J sobre \mathbb{R}^n como sigue: $j(x) = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que J es Fréchet diferenciable y la diferencial de Fréchet está definida como $\langle DJ(\vec{x}), \vec{v} \rangle = \langle A \vec{x} + \vec{b}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
7. El espacio de matrices $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ está provisto de la norma submultiplicativa $\|\cdot\|$. En cada ítem se define una función F de $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ en si mismo. Pruebe que F es Fréchet diferenciable y determine la diferencial de Fréchet $T_A \in L(M_{2 \times 2}[\mathbb{R}], M_{2 \times 2}[\mathbb{R}])$, con $A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$.
 - a) $F(X) = \frac{1}{2}(X + X^T) \quad X \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$.
 - b) $F(X) = \frac{1}{2}(X - X^T) \quad X \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$.
 - c) $F(X) = B^{-1}XB \quad X, B \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ con B invertible fija.
 - d) $F(X) = X^T B X \quad X, B \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ con B fija.
 - e) $F(X) = X^T X + B X \quad X, B \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ con B fija.
8. Sean Ω abierto del espacio normado V y F una función de Ω en el espacio normado W . Pruebe que si F es Fréchet diferenciable, la diferencial $T_a \in L(V, W)$ de F es única.
9. Sean Ω abierto del espacio normado V , F y G funciones de Ω en W diferenciables en $a \in \Omega$. Demostrar $F + G$ diferenciable en a y $D(F + G)(a) = DF(a) + DG(a)$.
10. Sea V un espacio provisto del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma asociada $\|\cdot\|$. Sea F el funcional definido como $F(x) = \|x\|^2 \quad \forall x \in V$. Demuestre que F es Fréchet diferenciable.
11. Sean $\Omega \subset V$ abierto, con V un espacio provisto del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma asociada $\|\cdot\|$. En cada ítem se define un funcional. Pruebe que es diferenciable en Ω .
 - a) $F(x) = \langle x, y \rangle \quad x, y \in V$ con y fijo.
 - b) $F(x) = \langle G(x), y \rangle \quad x, y \in V$ con y fijo, G función de Ω en V , diferenciable en Ω .
 - c) $F(x) = \|G(x)\|^2 \quad x \in \Omega$, G función de Ω en V , diferenciable en Ω .
12. Sea V un espacio normado de dimensión finita con $\|\cdot\|$ su norma y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\|T\| < 1$. Sea $g: V \rightarrow V$ una aplicación definida por $g(x) = T(x) + c$ con $c \in V$ fijo. Demostrar que la sucesión (x_n) definida por

$$\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

converge a un punto fijo \hat{x} de g . [Sugerencia: Pruebe que g es lipschisiana].

13. Sea (E, d) un espacio métrico, $g: E \rightarrow E$ una aplicación continua que posee un punto fijo u . Sean $r > 0$ y $0 < k < 1$ tales que $d(g(x), g(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in B(u, r)$. Demostrar que para todo $x_0 \in B(u, r)$, la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, \dots$ es tal que $(x_n) \subset B(u, r)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$.
[Sugerencia: pruebe por inducción que $x_n \in B(u, r)$].
14. Sea $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con continuidad en todo punto de \mathbb{R}^n tal que

$$\sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \|D\Phi(\vec{x})\| \leq k < 1.$$

Demuestre que Φ es contractiva y que para todo $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, la sucesión (\vec{x}_m) generada por $\vec{x}_{m+1} = \Phi(\vec{x}_m) \quad m = 0, 1, \dots$ converge a \hat{x} punto fijo de Φ .

Pruebe que $\|\vec{x}_{m+1} - \hat{x}\| \leq k \|\vec{x}_m - \hat{x}\| \leq k^{m+1} \|\vec{x}_0 - \hat{x}\|, \quad m = 1, 2, \dots$

15. En los ejercicios siguientes, calcular, si existen, las soluciones de los sistemas de ecuaciones no lineales que se indican utilizando el método de Newton. [Sugerencia: cada sistema está formado por ecuaciones de hipérbolas, parábolas, elipses, circunferencias, identifíquelas].

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1. \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y^2 = 3 \\ 4x^2 + \frac{y^2}{9} = 1. \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y = 2. \end{array} \right. \\ \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1. \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + (y-2)^2 = 16 \\ \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1. \end{array} \right. \end{array}$$

16. En los ejercicios siguientes, calcular, si existen, las soluciones de los sistemas de ecuaciones no lineales que se indican utilizando el método de Newton. Para el efecto defina una función vectorial asociada al sistema de ecuaciones no lineales, calcule la matriz Jacobiana, y seleccione un vector \vec{x}_0 y mediante la aplicación del método de Newton, calcule una aproximación \vec{x}_1 , continúe con el procedimiento. Calcule $\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|$ $k = 0, 1, 2, 3$, y analice los resultados.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - y + z^2 = 1 \\ 3x + 2y - 5z = -1 \\ x - y^2 + 2z^2 = 2. \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y^2 + 2z = 3 \\ 2x - y - z^2 = -3 \\ 4x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 5. \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 - y^2 - z^2 = 9 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16. \end{array} \right. \\ \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y + z = 10 \\ 2x - y^2 - z = -3 \\ x^2 - y^2 + 3z^2 = 5. \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5y + 2z = 10 \\ 2x^2 - y - z^2 = -3 \\ x^2 - \frac{y^2}{9} + 3z^2 = 5. \end{array} \right. \end{array}$$

17. Considerar el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \\ x_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{P})$$

a) Aplique el método de Newton con una aproximación inicial $\vec{X}_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ y el método de factorización LU para aproximar la solución $\hat{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ de dicho sistema con una precisión de 10^{-2} .

b) Generalice el problema (P) para $n \geq 3$ y elabore un algoritmo numérico para aproximar la solución de dicho problema.

18. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Pruebe que A es una matriz definida positiva.

b) Calcule $\rho(T_J)$ para el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$.

c) Encuentre el valor óptimo de ω cuando se utiliza el método SOR para encontrar soluciones aproximadas del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

19. En cada ítem se da un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$. Aplicar el método de Gauss-Seidel para calcular soluciones aproximadas. Verifique que \vec{x} es solución del sistema de ecuaciones propuesto. Contabilice el número de operaciones elementales que realiza.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 8 \\ 2x + y - z = 15 \\ 3x - y - 10z = 27, \end{array} \right. \quad \vec{x}^T = (4, 5, -2). \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - 2z = 10 \\ 3x + 4y - 7z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 60, \end{array} \right. \quad \vec{x}^T = (3, 7, 5).$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \begin{cases} 3x - 3y + 6z = -18 \\ x + y + 8z = -2 \\ -x - 4z = 3, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (1, 5, -1). \\
\text{d)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 34 \\ x + 4y + 7z + 10w = 62 \\ x + 4y + 10z + 16w = 74 \\ x + 4y + 10z + 20w = 74, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (10, 6, 4, 0). \\
\text{d)} \quad & \begin{cases} 4x + \quad \quad + 20w = 48 \\ \quad y - z + 3w = 5 \\ -2y + 5z - 12w = -22 \\ 3x + 3y - 2z + 21w = 44, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (-3, -2, 2, 3). \\
\text{f)} \quad & \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 \\ 3x_2 + 16x_3 + 28x_4 = 16 \\ 5x_2 + 26x_3 + 44x_4 = 26 \\ 2x_1 - 2x_2 + 32x_3 + 45x_4 + 2x_5 = 33, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (-1, 0, 1, 0, -1). \\
\text{g)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 26 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 8x_4 + 15x_5 = 24 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 + 20x_5 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 11x_4 + 20x_5 = 32 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 24x_5 = 48, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (2, 1, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

20. Aplicar el método SOR para aproximar la solución del sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$. Compare con el vector \vec{x} que se propone. Contabilice el número de operaciones elementales que realiza.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 5y + 5z = 19 \\ 3x + 5y + 11z = 33, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (2, 1, 2). \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 4x + 6y + 8z = -8 \\ 6x + 10y + 12z = -10 \\ 8x + 12y + 80z = -336, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (5, 2, -5) \\
\text{c)} \quad & \begin{cases} x + y + z + w = 5 \\ x + 5y + 5z + 5w = 9 \\ x + 5y + 14z + 14w = 9 \\ x + 5y + 14z + 30w = 25, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (4, 1, -1, 1). \\
\text{d)} \quad & \begin{cases} 16x_1 + \quad \quad + 12x_4 = -100 \\ \quad x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 15 \\ -2x_2 + 13x_3 - 3x_4 = -15 \\ 12x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 20x_4 = -20, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (-10, 0, 0, 5). \\
\text{e)} \quad & \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \quad \quad - 4x_5 = 52 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 52 \\ 3x_2 + 25x_3 + 39x_4 + 53x_5 = 135 \\ 5x_2 + 39x_3 + 65x_4 + 85x_5 = 217 \\ -4x_1 + 5x_2 + 53x_3 + 85x_4 + 122x_5 = 231, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (12, 7, 3, 1, 0). \\
\text{f)} \quad & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_4 + 5x_5 + 3x_6 = -3 \\ x_1 + 14x_3 - 4x_4 - x_6 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 22x_4 + 11x_5 + 5x_6 = -14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_4 + 13x_5 + 5x_6 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 28x_6 = -1, \end{cases} \quad \vec{x}^T = (1, -1, 0, -1, 1, 0).
\end{aligned}$$

21. En cada ítem se propone un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$. Estudie a la matriz A del sistema para determinar si es estrictamente diagonalmente dominante, simétrica, definida positiva, monótona, etc. Aplique los métodos de Gauss-Seidel y SOR, y, con cada uno de ellos halle la solución aproximada del sistema de ecuaciones. Contabilice el número de operaciones elementales que realiza.

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T = (5, 8, 8, 5).$$

$$\text{b)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T = (2, 3, 4, 2).$$

$$\text{c)} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 14 \\ 22 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T = (2, 3, 3, 2, 1)$$

$$\text{d)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T = (5, 4, 3, 4, 5).$$

$$\text{e)} \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -9 \\ 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T = (-2, -1, 0, 1, 2).$$

$$\text{f)} \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 6 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 7 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 21 \\ 13 \\ 19 \\ 45 \\ 79 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T = (10, 8, 6, 6, 8, 10).$$

22. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ que satisface las dos condiciones siguientes: $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 2$ para $i, j = 1, \dots, n$ y que $a_{ii} > |a_{i, i-2}| + |a_{i, i-1}| + |a_{i, i+1}| + |a_{i, i+2}|$, $i = 1, \dots, n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

a) Demuestre que el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una única solución.

b) Aplique los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR y exprese la sucesión (\vec{x}_k) en forma explícita para cada método y elabore un algoritmo que permita calcular la solución aproximada del sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$.

c) Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 25 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Verifique las hipótesis de la matriz A . Aplique sus algoritmos para hallar la solución de dicho sistema y compare con $\vec{x}^T = (2, 5, 8, 5, 3)$.

23. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 18 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 21 \\ 96 \\ 66 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

- a) Demuestre que la matriz A de este sistema es simétrica, definida positiva y estrictamente diagonalmente dominante.
- b) Aplique los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR para hallar la solución aproximada de tal sistema. Contabilice con cada método el número de operaciones elementales. Compare la solución con $\vec{x}^T = (0, 2, 5, 3, 1)$.

7.6. Lecturas complementarias y bibliografía

1. Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.
2. Tom M. Apostol, *Calculus*, Volumen 2, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.
3. Owe Axelsson, *Iterative Solution Methods*, Editorial Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
4. N. Bakhvalov, *Métodos Numéricos*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
5. E. K. Blum, *Numerical Analysis and Computation. Theory and Practice*, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1972.
6. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México, 2002.
7. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.
8. P. G. Ciarlet, *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*, Editorial Masson, París, 1990.
9. S. D. Conte, Carl de Boor, *Análisis Numérico*, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México, 1981.
10. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. *Cálculo Numérico Fundamental*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.
11. James W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.
12. J. E. Dennis, Jr., Robert B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1996.
13. V. N. Faddeva, *Métodos de Cálculo de Algebra Lineal*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1967.
14. Ferruccio Fontanella, Aldo Pasquali, *Calcolo Numerico. Metodi e Algoritmi*, Volumi I, II Pitagora Editrice Bologna, 1983.
15. A. Kurosh, *Cours D'Algèbre Supérieure*, Editions Mir, Moscou, 1973.
16. Noel Gastinel, *Análisis Numérico Lineal*, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1975.
17. Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Second Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
18. Anne Greenbaum, *Iterative Methods for Solving Linear Systems*, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.
19. Wolfgang Hackbusch, *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations*, Editorial Springer-Verlag, New York, 1994.
20. Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, *Numerical Mathematics*, Editorial Springer-Verlag, New York, 1991.

21. Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
22. Franz E. Hohn, Algebra de Matrices, Editorial Trillas, México, 1979.
23. Roger A. Horn, Charles R. Johnson, Matrix Analysis, Editorial Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
24. David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.
25. P. Lascaux, R. Théodor, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à L' Art de L' Ingénieur, Tome 1, Editorial Masson, París, 1986.
26. P. Lascaux, R. Théodor, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à L' Art de L' Ingénieur, Tome 2, Editorial Masson, París, 1987.
27. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.
28. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.
29. Antonio Nieves, Federico C. Dominguez, Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, Tercera Reimpresión, Compañía Editorial Continental, S. A. De C. V., México, 1998.
30. Ben Noble, James W. Daniel, Algebra Lineal Aplicada, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1989.
31. J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2000.
32. Anthony Ralston, Introducción al Análisis Numérico, Editorial Limusa, México, 1978.
33. Werner C. Rheinboldt, Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, Second Edition, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1998.
34. M. Sibony, J. Cl. Mardon, Analyse Numérique I, Systèmes Linéaires et non Linéaires, Editorial Hermann, París, 1984.
35. G. W. Stewart, Matrix Algorithms, Volume II: Eigensystems, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1998.
36. J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Editorial Springer-Verlag, 1980.
37. Gilbert Strang, Algebra Lineal y sus Aplicaciones, editorial Fondo Educativo Interamericano, México, 1982.
38. V. Vořevodine, Principes Numériques D' Algèbre Linéaire, Editions Mir, Moscú, 1976.
39. David S. Watkins, Fundamentals of Matrix Computations, Editorial John Wiley&Sons, New York, 1991.

