Capítulo 4

Aproximación de algunas funciones de distribución de probabilidad.

Resumen

La pregunta simple que nos hacemos cuando estudiamos estadística y probabilidades es ¿cómo se elaboran las tablas de datos de algunas de las funciones de distribución estadística? Este capítulo da respuesta a esta interrogante. Se abordan las principales funciones de distribución discretas: la binomial, de Poisson y se establecen criterios basados en el condicionamiento y la estabilidad para elaborar algoritmos de cálculo de estas funciones y de otras discretas. Las principales funciones de distribución continuas como son: las del tipo gama, del tipo beta, la normal, $\chi i-$cuadrada, t de Student, distribución F se aproximan mediante el uso de las series de potencias, del análisis asimptótico en unos casos, y en otros, cuando es posible calcular directamente las integrales, como polinomios. En todos los casos, se aplican los criterios de condicionamiento y de estabilidad numérica. Se debe precisar que en la mayoría de textos de estadística citados en la bibliografía, es muy limitado el tratamiento de los problemas de aproximación numérica de las funciones de distribución estadística. En la mayor parte de libros de métodos perturbación se trata la función error, y fue esta función la que motivó emprender la tarea de construir métodos de aproximación de las funciones de distribución estadística mencionados así como de las funciones gama y beta de Euler. Otras funciones de distribución estadística como la log normal pueden aproximarse fácilmente siguiendo los citerios establecidos con las otras funciones.

4.1. Introducción

El propósito fundamental de este capítulo es el de construir métodos y elaborar algoritmos de cálculo de las principales funciones de distribución en estadística para que puedan incorporarse en los programas de simulación numérica. Las funciones que tratamos son:

1. Discretas: las distribuciones binomial y de Poisson.
2. Continuas: la función gama de Euler y la distribución gama, la función beta y la distribución beta, la distribución normal, χi-cuadrada, t de Student, F de Snedekor.

Estas funciones de distribución estadística se presentan en muchos problemas tales como estimación de parámetros, intervalos de confianza, pruebas de hipótesis, control de calidad, análisis de la varianza, análisis de regresión y correlación lineal y multilineal, en la teoría de colas tales como las líneas de espera, en problemas de econometría, análisis multivariante, en problemas de optimización, etc.

Por otro lado, en la mayoría de textos de probabilidades y estadística, vienen tabulados valores de las funciones de distribución estadística arriba citados, que sin duda alguna, constituye de una gran ayuda, no obstante tienen la desventaja de ser muy limitados y en la automatización de la información, por lo general, no se disponen a la mano. Por estas razones, es importante contar con algoritmos numéricos para elaborar programas computacionales para calcular valores de las mencionadas funciones de distribución para datos de entrada los más amplios posibles y que superen largamente a los datos proporcionados en las tablas.

Los temas del análisis matemático tales como los métodos de integración por partes y sustitución, las integrales impropias, sucesiones y series numéricas, criterios de convergencia, las sucesiones y series de funciones y la convergencia uniforme e integración y particularmente las series de potencias así como su aproximación numérica tratados en el capítulo anterior, son aplicados a los tipos de funciones de distribución estadística arriba citadas. Además se aplican los resultados de condicionamiento y la estabilidad numérica tratados en el primer capítulo, lo que permite elaborar algoritmos simples de cálculo con la precisión que se desee. Por cuestiones prácticas se ha seleccionado como precisión $\epsilon = 10^{-10}$ y la exactitud de cálculos del orden de 10^{-10}, aún cuando la metodología establecida se adapta fácilmente para $\epsilon > 0$ arbitrario. La metodología que se implementa puede adaptarse en forma inmediata a la aproximación de otras funciones de distribución estadística tanto discretas como continuas.

Al final del capítulo se provee de una amplia bibliografía.

4.2. La distribución de probabilidad binomial

Definición 1 *Una variable aleatoria X tiene una distribución binomial o distribución de Bernoulli basada en n pruebas, con probabilidad de éxito p, si su función de densidad está definida mediante*

$$f(k) = \begin{cases} 0, & si\ k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, \ldots, n\}, \\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}, & si\ k = 0, 1, \ldots, n, \end{cases}$$

donde $p \in [0,1]$, $q \in= 1 - p$ y $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ denota el coeficiente binomial definido por $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

De la definición de los coeficientes binomiales se deduce que

$$\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \frac{n-k}{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix},$$

consecuentemente

$$f(k+1) = \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} p^{k+1} q^{n-(k+1)} = \frac{n-k}{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{p}{q} p^k q^{n-k} = \frac{n-k}{k+1} r f(k),$$

con $r = \frac{p}{q}, \quad p \neq 1$.

Esta última relación nos permite elaborar un algoritmo para calcular $F(k)$, con $0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{Z}$.

Algoritmo

Datos de entrada: p, k, n.

Datos de salida: $x, F(k)$.

1. $q = 1 - p$.
2. $r = \dfrac{p}{q}$.
3. $S_1 = q^n$.
4. $S = S_1$.
5. $k = 0, 1, \ldots, x - 1$

$$S_1 = \frac{n-x}{x+1} r S_1$$

$$S = S + S_1$$

Fin de bucle k.

6. $F(x) = S$.

7. Fin.

Este algoritmo presenta algunos inconvenientes por lo que debe tomarse en consideración otras alternativas en base a las propiedades de la función de distribución se se verán a continuación.

Sea $r = \frac{p}{q}$ con $p \neq 1$. De la definición de la función F se establece la siguiente escritura anidada:

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = q^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} r^j \\ &= q^n \left(1 + nr\left(1 + \frac{n-1}{2} r\left(1 + \frac{n-2}{3} r\left(1 + \cdots + \frac{n-k-2}{k-1} r\right)\left(1 + \frac{n-k-1}{k}\right)\right)\right)\ldots\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ se tiene

$$1 = (p+q)^n = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j},$$

que permite obtener una forma alternativa de cálculo de $F(k)$:

$$\begin{aligned} F(k) &= 1 - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = 1 - \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n}{j+k+1} p^{j+k+1} q^{n-j-k-1} \\ &= 1 - p^{k+1} q^{n-k-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n}{j+k+1} r^j. \end{aligned}$$

Cuando k es aproximadamente $\leq \frac{n}{2}$ se utiliza la primera forma anidada de cálculo de $F(k)$, y si $\frac{n}{2} < k \leq n$ se utiliza su forma alternativa de cálculo de $F(k)$. Si $\frac{n}{2} < k \leq n$, la primera forma de cálculo de $F(k)$ contiene más términos que la segunda lo que incrementa los costos numéricos y si $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$, la forma alternativa contiene más términos que la primera. Además, si n es grande, q^n está mal condicionado, mientras que q^{n-k-1} es mucho mejor que q^n.

Para la primera forma de cálculo de $F(k)$ se propone el algoritmo que se da a continuación. Se propone como ejercicio escribir $F(k)$ en forma anidada así como elaborar el respectivo algoritmo numérico.

<u>Algoritmo</u>

Datos de entrada: p, k, n.

Datos de salida: x, $F(k)$.

1. $q = 1 - p$.

2. $r = \dfrac{p}{q}$.

3. $S = 1$.

4. $j = 1, \ldots, k$

$$i = k + 1 - j$$

$$S = 1 + \frac{n-k-j}{i} r S$$

Fin de bucle i.

Fin de bucle j.

5. $S = q^n S$.

6. Fin.

Tomando en consideración las condiciones $0 \leq k \leq \dfrac{n}{2}$, y $\dfrac{n}{2} < k \leq n$, se propone como ejercicio la elaboración completa del algoritmo de cálculo de $F(k)$ así como su respectivo programa computacional. Los resultados compárelos con los provistos en tablas de textos de estadística.

4.3. Distribución de Poisson

Definición 2 *Una variable aleatoria X tiene una distribución binomial o distribución de Poisson de media $\lambda > 0$ si su función de densidad está definida por*

$$f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

La función de distribución está definida mediante

$$F(\lambda, m) = \sum_{k=0}^{m} f(k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad m \in \mathbb{Z}^+,$$

donde $\lambda > 0$ es fijo.

Puesto que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda},$$

entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} < \varepsilon \qquad \forall m \geq n.$$

Por otro lado,

$$1 = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!},$$

de donde

$$F(\lambda, n) = 1 - e^{-\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Para elaborar un algoritmo de cálculo de $F(\lambda, n)$ con una precisión $\varepsilon > 0$ para $\lambda > 0$ y $0 \leq m \leq n$, determinemos una condición sobre el parámetro λ, n y ε. Para el efecto, apliquemos el criterio de comparación de series numéricas.

Sean $a_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$, y

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k+1}{(k-1)!}\lambda^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Luego, existe n tal que $\dfrac{k+1}{(k-1)!}\lambda^k < \varepsilon$ si $k \geq n$. Para k suficientemente grande, se puede considerar la desigualdad.

$$\frac{\lambda^k}{k!} < \varepsilon \text{ si } k \geq n,$$

y tomando logaritmos en la misma, tenemos

$$k\ln(\lambda)-\sum_{j=1}^{k}\ln(j)<\ln(\varepsilon)\Longleftrightarrow\sum_{j=1}^{k}\ln(j)-k\ln(\lambda)>-\ln(\varepsilon).$$

La determinación de n mediante esta última expresión resulta ser numéricamente costosa. Con el propósito de obtener una expresión práctica de cálculo del más pequeño entero positivo n que satisfaga la desigualdad precedente, utilizamos la desigualdad:

$$\sum_{j=1}^{k}\ln(j)\leq\int_{1}^{k}\ln(t)\,dt=k\ln(k)-k+1,$$

donde la integral se calcula utilizando el método de integración por partes. Entonces

$$k\ln(k)-k+1-k\ln(\lambda)>-\ln(\varepsilon)$$

y de esta desigualdad se obtiene la siguiente:

$$k\ln\left(\frac{k}{\lambda e}\right)>-1-\ln(\varepsilon),$$

donde $e=2{,}71828182\ldots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ es la base de los logaritmos naturales. Sea

$$n=\min\left\{k\in\mathbb{Z}^{+}\mid k\ln\left(\frac{k}{\lambda e}\right)>-1-\ln\varepsilon\right\},$$

donde $\lambda>0$ y $0<\varepsilon<1$ son fijos.

Si $\dfrac{n}{2}\leq m\leq n$, el cálculo de $F(\lambda,m)$ se vuelve numéricamente costoso. Para disminuir el costo numérico, utilizamos las siguiente relación:

$$1=e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{k}}{k!}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\lambda^{k}}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}\right)$$

y como $e^{-\lambda}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k}}{k!}<\varepsilon$, despreciando este último término, $F(\lambda,m)$ se aproxima mediante

$$1-e^{-\lambda}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\lambda^{k}}{k!}=1-e^{-\lambda}\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{\lambda}{m+2}\left(1+\frac{\lambda}{m+3}\left(1+\cdots+\frac{\lambda}{n-1}\right)\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\cdots\right)\right).$$

Con fines prácticos $\varepsilon=10^{-10}$, $\ln(\varepsilon)\backsimeq 23{,}1$, y $n=\min\left\{k\in\mathbb{Z}^{+}|k\ln\left(\dfrac{k}{e\lambda}\right)>22{,}1\right\}$. Por ejemplo para $\lambda\in\,]0,1]$ es $n=14$, para $\lambda=10$ es $n=45$ y para $\lambda=30$ se tiene $n=102$. Esta información nos permite definir la función $\tilde{F}(\lambda,m)$ para las distintas alternativas como a continuación se indica:

$$\tilde{F}(\lambda,m)=\begin{cases} e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{\lambda^{k}}{k!}, & 0\leq m\leq 14, m\in\mathbb{N},\ 0<\lambda\leq 1.\\ 1,\text{ si } m>14. \end{cases}$$

$$\tilde{F}(\lambda,m)=\begin{cases} e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{\lambda^{k}}{k!}, & \text{si } 0\leq m\leq\dfrac{n}{2},\\ 1-e^{-\lambda}\sum\limits_{k=m+1}^{n}\dfrac{\lambda^{k}}{k!}, & \text{si } \dfrac{n}{2}<m\leq n,\ \lambda>1.\\ 1,\text{ si } \ m>n. \end{cases}$$

Se tiene que $\tilde{F}(\lambda,m)$ es una aproximación de $F(\lambda,m)$ con una precisión ε.

Para $\lambda > 1$ y m grande, los términos λ^{m+1} y $(m+1)!$ son muy grandes lo que puede causar problemas al momento de su cálculo en el computador. Par evitar etas molestias, se calcula como sigue:

$$\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!} = \exp\left((m+1)\ln(\lambda) - \sum_{j=1}^{m+1}\ln(j)\right),$$

que mejora la estabilidad numérica. Además, para evitar el cálculo directo de los factoriales y de las potencias escribimos en forma anidada como a continuación se indica

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 + \frac{\lambda}{1}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\left(1 + \cdots + \frac{\lambda}{m-1}\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)\cdots\right)\right),$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \frac{\lambda}{m+2}\left(1 + \frac{\lambda}{m+3}\left(1 + \cdots + \frac{\lambda}{n-1}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\cdots\right)\right)\right)$$

que mejoran la estabilidad numérica.

En las aplicaciones prácticas de la distribución de Poisson tal como en la teoría de colas, el valor de λ está en el intervalo $]0,30]$.

En resumen $F(\lambda,m)$ se aproxima numéricamente con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$ por $\tilde{F}(\lambda,m)$ definidos a continuación

1. Si $0 < \lambda \leq 1$, entonces
$$\tilde{F}(\lambda,m) = \begin{cases} e^{\cdot\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\left(1 + \cdots + \frac{\lambda}{m-1}\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)\cdots\right)\right)\right), & \text{si } 0 \leq m \leq 14, \\ 1, \text{ si } m > 14. \end{cases}$$

2. Si $\lambda > 1$, entonces
$$\tilde{F}(\lambda,m) = \begin{cases} e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\left(1 + \cdots + \frac{\lambda}{m-1}\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)\cdots\right)\right)\right), & \text{si } 0 \leq m \leq \frac{n}{2}, \\ 1 - \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \frac{\lambda}{m+2}\left(1 + \frac{\lambda}{m+3}\left(1 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\cdots\right)\right)\right), \\ \qquad \text{si } \frac{n}{2} < m \leq n, \\ 1, \quad \text{si } \; m > n. \end{cases}$$

donde $n = \text{mín}\left\{k \in \mathbb{Z}^+ | k\ln\left(\frac{k}{\lambda e}\right) > 22{,}1\right\}$, $\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!} = \exp\left[(m+1)\ln(\lambda) - \sum_{j=1}^{m+1}\ln(j)\right]$.

Ejercicio

Se propone la elaboración del algoritmo respectivo de cálculo de $\tilde{F}(\lambda,m)$ y su programa computacional. Compare los resultados con los proporcionados en las tablas de textos de estadística y probabilidades.

4.4. Función gama de Euler.

Definición 3 *La función gama de Euler se define como sigue:*

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ p \longmapsto \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt. \end{cases}$$

Las propiedades mas importantes de la función gama se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 1

i. La integral $\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$ *converge para todo* $p \in \mathbb{R}^+$ *y diverge para todo* $p \leq 0$.

ii. $\Gamma(1) = 1$ *y* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

iii. Para todo $p \in \mathbb{R}^+$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. *En particular, si* $p = n \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma(n+1) = n!$.

iv. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)(2n-3) \times \ldots \times 1}{2^n}\sqrt{\pi}$.

v. Sea $p \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$. *Entonces* $\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n)$, *donde* $n = [p]$ *y* $[p]$ *denota el mayor entero menor menor o igual que* p.

vi. La función gama es continua sobre $\mathbb{R}^+$. *Además,*

$$\Gamma(\epsilon) \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \qquad y \qquad \Gamma(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Demostración.

i) Sea $p \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$\Gamma(p) = \int_0^1 t^{p-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$$

Ponemos $I_1 = \int_0^1 t^{p-1}e^{-t}dt, \qquad I_2 = \int_1^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$

Si $p \geq 1$, la función $t \to t^{p-1}e^{-t}$de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ es continua, con lo cual I_1 existe.

Sea $0 < p < 1$. Puesto que

$$\int_0^1 t^{p-1}dt = \lim_{r\to 0}\int_r^1 t^{p-1}dt = \lim_{r\to 0}\frac{1}{p}t^p\bigg|_r^1 = \frac{1}{p}\lim_{r\to 0}(1-r^p) = \frac{1}{p},$$

se sigue que para $0 < r < 1$,

$$0 < \int_r^1 t^{p-1}e^{-t}dt < \infty.$$

Luego.

$$I_1 = \int_0^1 t^{p-1}e^{-t}dt = \lim_{r\to 0}\int_r^1 t^{p-1}e^{-t}dt \leq \lim_{r\to 0} e^{-r}\int_r^1 t^{p-1}dt = \frac{1}{p}.$$

En consecuencia, I_1 existe para todo $p \in \mathbb{R}^+$.

Mostremos la existencia de I_2. Puesto que $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2} = 1$, resulta

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{p-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} t^{p+1}e^{-t} = 0,$$

que es una consecuencia de la aplicación de la regla de L'Hópital. Por el criterio del cociente para integrales impropias, se deduce que I_2 existe.

Por lo tanto, $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$ está bien definida para todo $p > 0$.

Si $p = 0$, de la desigualdad $e^{-1}t^{-1} \leq t^{-1}e^{-t} \leq t^{-1} \quad \forall t \in]0,1[$, se sigue que $I_1 = +\infty$, pués $\int_0^1 t^{-1}dt = \ln t\big|_0^1 = +\infty$.

Si $p < 0$, la integral $I_1 = \int_0^1 t^{p-1}e^{-t}dt$ diverge. Pués

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = \ln t\big|_0^1 = +\infty,$$

por el criterio del cociente: para integrales impropias, se tiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{t^{p-1}e^{-t}} = \lim_{t\to 0} t^{-p}e^{+t} = 0,$$

y de este resultado se obtiene la conclusión.

ii) Para $p = 1$, se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

Sea $p = \frac{1}{2}$. Mostremos primeramente que $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. En efecto, sea $I = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt$. Entonces

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dt\right) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(t^2+x^2)}dtdx.$$

Sea $r > 0$ y $\overline{B(0,r)}$ el disco cerrado de centro 0 y radio r. Utilizando coordenadas polares: $\begin{cases} t = \rho\cos\theta, \\ x = \rho\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ 0 \leq \rho \leq r$, se tiene,

$$\iint\limits_{\overline{B(o,r)}} e^{-(t^2+x^2)}dtdx = \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho e^{-\rho^2}d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho e^{-\rho^2}d\rho = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^r\right) = \pi(1-e^{-r}),$$

luego

$$I^2 = \lim_{r\to\infty} \iint\limits_{\overline{B(0,r)}} e^{-(t^2+x^2)}dtdx = \lim_{r\to\infty} \pi(1-e^{-r}) = \pi,$$

con lo que $I = \sqrt{\pi}$.

Pasemos a probar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Por definición de la función gama, se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt.$$

Efectuando la sustitución $t = x^2$ en la integral indefinida precedente, resulta

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

iii) Sea $p \in \mathbb{R}^+$. De la definición de la función gama, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t}dt.$$

Utilizando el método de integración por partes: $u = t^p$, $dv = e^{-t}dt$, se sigue que

$$\Gamma(p+1) = -t^p e^{-t}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt,$$

y mediante la aplicación de la regal de L'Hôpital para evaluar $\lim\limits_{t\to\infty} t^p e^{-t} = 0$, se obtiene

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Si $p = n \in \mathbb{Z}^+$, por inducción se prueba que $\Gamma(n+1) = n!$.

iv) Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la propiedad iii), se deduce que

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&\vdots \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por la propiedad ii), $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, entonces

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 1}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

v) Sea $p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Denotemos con n el mayor entero menor o igual que p, entonces $p-n \in]0,1[$. Utilizando la propiedad iii) se deduce

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \Gamma((p-1)+1) = (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) \\
&\vdots \\
&= (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n).
\end{aligned}$$

vi) La demostración de la continuidad de la función Γ requiere de argumentos que están fuera del alcance de estas notas. (véase el Análisis Matemático de Apostol, el Cálculo Avanzado de Fulks).

Para $\epsilon > 0$, por la propiedad iii) se tiene

$$\Gamma(1+\epsilon) = \epsilon\Gamma(\epsilon) \Longrightarrow \Gamma(\epsilon) = \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon},$$

y por la continuidad de Γ se sigue que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \Gamma(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} = +\infty.$$

Como $n! \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, se sigue que $\Gamma(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

4.4.1. Definición de $\Gamma(p)$ para $p < 0$ y no entero

Puesto que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, entonces

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}, \quad p > 0.$$

Si $-1 < p < 0$, entonces $0 < p+1 < 1$, por lo tanto $\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$ está bien definido, en cuyo caso definimos

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}, -1 < p < 0.$$

Definido $\Gamma(p)$ para $p \in]-1,0[$, podemos definir $\Gamma(p)$ para $p \in]-2,-1[$ del modo siguiente:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+2)}{p(p+1)},$$

pues si $-2 < p < -1$ entonces $-1 < p+1 < 0$ y $0 < p+2 < 1$ con lo cual $\Gamma(p+1) = \dfrac{\Gamma(p+2)}{p+1}$ y

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{\Gamma(p+2)}{p(p+1)}.$$

Continuando con este proceso, si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $-n < p < -n+1$, se define $\Gamma(p)$ como sigue:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n)}{p(n+1)\dots(p+n-1)} = \frac{\Gamma(p+n)}{\prod_{j=1}^{n}(n+j-1)}.$$

Note que $0 < p+n < 1$ y $\Gamma(p+n)$ está bien definido

Ejemplos

1. $\Gamma(3) = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 2$.
2. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{3}{2}+1\right) = \dfrac{3}{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \dfrac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

   Observe que $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt$.
3. Para calcular $\Gamma(-2{,}5)$ procedemos como a continuación se indica

$$\begin{aligned}
\Gamma(-0{,}5) &= \frac{\Gamma(0{,}5)}{-0{,}5} = -2\sqrt{\pi}, \\
\Gamma(-1{,}5) &= \frac{\Gamma(-0{,}5)}{-1{,}5} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \\
\Gamma(-2{,}5) &= \frac{\Gamma(-1{,}5)}{-2{,}5} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

   Por otro lado,

$$\Gamma(-2{,}5) = \frac{\Gamma(0{,}5)}{(-2{,}5)(-1{,}5)(-0{,}5)} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

4.5. Aproximación numérica de $\Gamma(p)$.

Sea $0 < p < 1$ fijo y $a > 0$. Entonces

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt = \int_0^a t^{p-1}e^{-t}dt + \int_a^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$$

Ponemos

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_0^a t^{p-1}e^{-t}dt, \\
g(a) &= \int_a^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Con fines prácticos $\epsilon = 10^{-10}$ con lo que $\Gamma(p)$ será aproximado con 10 cifras decimales de precisión. Para el efecto, aproximemos $f(a)$ y $g(a)$ con una precisión $\dfrac{\varepsilon}{2}$ que precisaremos más adelante.

Aproximemos primeramente $g(a)$. Integrando por partes $k+1$ veces, obtenemos

$$\begin{aligned}
g(a) = {} & a^{p-1}e^{-a} + (p-1)a^{p-2}e^{-a} + (p-1)(p-2)a^{p-3}e^{-a} + \cdots + \\
& (p-1)(p-2)\cdots(p-k)a^{p-(k+1)}e^{-a} + (p-1)\cdots(p-(k+1))\int_a^\infty t^{p-(k+2)}e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}\theta_k(a) &= e^{-a}a^{p-1}\left[1+\frac{p-1}{a}+\cdots+\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k)}{a^k}\right],\\ \theta(a) &= (p-1)(p-2)\ldots(p-(k+1))\int_a^\infty t^{p-(k+2)}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Entonces $g(a)=\theta_k(a)+\theta(a)$. Determinemos a y k tales que $|\theta(a)|<\frac{\epsilon}{2}$, luego

$$|g(a)-\theta_k(a)|=|\theta(a)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}|\theta(a)| &= |(p-1)(p-2)\ldots(p-(k+1))|\int_a^\infty t^{p-(k+2)}e^{-t}dt \leq \left(\prod_{j=1}^{k+1}(j-p)\right)e^{-a}\int_a^\infty t^{p-(k+2)}dt\\ &= \left(\prod_{j=1}^{k+1}(j-p)\right)\frac{e^{-a}}{(k+1-p)a^{k+1-p}}.\end{aligned}$$

Cuando $p\to 0$, se tiene

$$|\theta(a)|\leq\frac{(k+1)!}{(k+1)e^aa^{k+1}}=\frac{k!}{e^aa^{k+1}}.$$

Como $\frac{a^k}{k!}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, la sucesión $\left(\frac{k!}{a^k}\right)$ no converge a 0; más aún dicha sucesión es divergente, pero si $k\in\mathbb{N}$ es fijo,

$$\frac{k!}{e^aa^{k+1}}\underset{a\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Notemos que

$$\frac{k!}{a^k}=\frac{1}{a}\times\cdots\times\frac{k}{a}<1 \quad\text{si}\quad \frac{k}{a}\leq 1,$$

en cuyo caso, de la igualdad

$$\frac{k!}{e^aa^{k+1}}=\frac{1}{ae^a}\frac{k!}{a^k},$$

obtenemos las dos relaciones siguientes:

$$\frac{1}{ae^a}<10^{-10} \quad\text{y}\quad \frac{k!}{a^k}\simeq 10^{-5}$$

Para $a=12$, tenemos $\frac{1}{12e^{12}}\simeq 5{,}12\times10^{-7}$ y $\frac{12!}{12^{12}}\simeq 5{,}37\times10^{-5}$, con lo que $\frac{k!}{e^aa^{k+1}}<\frac{\epsilon}{2}$ si $a\geq 12$ y $k=12$, luego $|\theta(a)|<\frac{\epsilon}{2}$. Así

$$|g(a)-\theta_1(a)|<\frac{\epsilon}{2} \quad\text{si}\quad a\geq 12.$$

Escribamos $\theta_k(a)$ de modo que sea numéricamente estable

$$\begin{aligned}\theta_k(a) &= e^{-a}a^{p-1}\left[1+\frac{p-1}{a}+\cdots+\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-k)}{a^k}\right]\\ &= e^{-a}a^{p-1}\left[1-\frac{1-p}{a}+\frac{(1-p)(2-p)}{a^2}-\frac{(1-p)(2-p)(3-p)}{a^3}+\right.\\ &\quad+\frac{(1-p)(2-p)(3-p)(4-p)}{a^4}+\cdots-\frac{(1-p)(2-p)\ldots(k-1-p)}{a^{k-1}}+\\ &\quad\left.+\frac{(1-p)(2-p)\ldots(k-p)}{a^k}\right].\end{aligned}$$

Sean $\theta_1(a)$, $\theta_2(a)$ las sumas de los términos positivos y de los negativos, respectivamente de $\theta_k(a)$, esto es

$$\begin{aligned}
\theta_1(a) &= 1+\frac{(1-p)(2-p)}{a^2}+\frac{(1-p)(2-p)(3-p)(4-p)}{a^4}+\cdots+\frac{(1-p)(2-p)\ldots(k-p)}{a^k}\\
&= 1+\frac{(1-p)(2-p)}{a^2}\left(1+\frac{(3-p)(4-p)}{a^2}\right.\\
&\qquad\left.\left(1+\cdots+\frac{(k-3-p)(k-2-p)}{a^2}\left(1+\frac{(k-1-p)(k-p)}{a^2}\right)\cdots\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(a) &= \frac{1-p}{a}+\frac{(1-p)(2-p)(3-p)}{a^3}+\cdots+\frac{(1-p)(2-p)\ldots(k-1-p)}{a^{k-1}}\\
&= \frac{1-p}{a}\left(1+\frac{(2-p)(3-p)}{a^2}\left(1+\frac{(4-p)(5-p)}{a^2}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left(1+\cdots+\frac{(k-3-p)(k-4-p)}{a^2}\left(1+\frac{(k-2-p)(k-1-p)}{a^2}\right)\cdots\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Para $k=12$, el número de términos de $\theta_k(a)$ dentro del corchete es 13 y el número de términos positivos es 7 y de los negativos es 6, es decir que $\theta_1(a)$ tiene 7 términos y $\theta_2(a)$ tiene 6 términos. La escritura anidada de $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ asegura la estabilidad numérica y además es fácil de programar. Luego

$$\theta_k(a)=e^{-a}a^{p-1}\left(\theta_1(a)-\theta_2(a)\right).$$

Aproximemos $f(a)$. Puesto que $e^{-t}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k t^k}{k!}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_0^a t^{p-1}e^{-t}dt=\int_0^a t^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^k}{k!}\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^a t^{p+k-1}dt\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+p)}a^{k+p}.
\end{aligned}$$

La última serie converge absolutamente (demuestre). Sean $m\in\mathbb{N}$ y $f_m(a)=\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{(-1)^k a^{k+p}}{k!(k+p)}$ tales que $|f(a)-f_m(a)|<\frac{\epsilon}{2}$. Para el efecto, aplicamos el criterio de comparación para series reales. Ponemos $a_k=\dfrac{a^{k+p}}{k!(k+p)}$, $b_k=\dfrac{1}{k(k+1)}$. Entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k=1$, y

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{k(k+1)a^{k+p}}{k!(k+p)}<\frac{(k+1)a^{k+1}}{k!}<\frac{\epsilon}{2}.$$

Para $a=12$, se prueba que para todo $k\geq 55$ se tiene $\dfrac{(k+1)a^{k+1}}{k!}<\dfrac{\epsilon}{2}$ es decir que $\dfrac{a_k}{b_k}<\dfrac{\epsilon}{2}$ si $k\geq 56$, con lo cual $m=56$ y

$$f_m(a)=\sum_{k=0}^{56}\frac{(-1)^k a^{k+p}}{k!(k+p)}.$$

Para elaborar un algoritmo numéricamente estable, escribamos $f_m(a)$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
f_m(a) &= a^p\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k a^k}{k!(k+p)}=a^p\left[\frac{1}{p}+a\left(\frac{a}{2!(2+p)}-\frac{1}{1+p}\right)+\frac{a^3}{3!}\left(\frac{a}{4(4+p)}-\frac{1}{3+p}\right)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{a^5}{5!}\left(\frac{a}{6(6+p)}-\frac{1}{5+p}\right)+\cdots+\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{a}{m(m+p)}-\frac{1}{m-1+p}\right)\right].
\end{aligned}$$

Ponemos $c_k = \dfrac{a}{2k(2k+p)} - \dfrac{1}{2k-1+p}, k = 1, 2, \ldots, \dfrac{m}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} f_m(a) &= a^p \left(\frac{1}{p} + c_1 a + c_2 \frac{a^3}{3!} + c_3 \frac{a^5}{5!} + \cdots + c_{\frac{m}{2}} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\ &= a^p \left(\frac{1}{p} + a \left(c_1 + \frac{a^2}{2\times 3} \left(c_2 + \frac{a^2}{4 \times 5} \left(c_3 + \cdots + \right.\right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left.\left. \frac{a^2}{(m-4)(m-3)} \right) \left(c_{\frac{m}{2}-1} + \frac{a^2}{(m-2)(m-1)} c_{\frac{m}{2}} \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma(p)$ se aproxima mediante $\Gamma_a(p)$ definido por

$$\Gamma_a(p) = f_m(a) + e^{-a} a^{p-1} (\theta_1(a) + \theta_2(a)),$$

donde $f_m(a), \theta_1(a), \theta_2(a)$ definidos precedentemente y $\epsilon = 10^{-10}$ para el cual $m = 56, a = 12$.

El algoritmo para calcular $\Gamma_a(p)$, $0 < p < 1$, con una precisión $\epsilon = 10^{-10}$ es el siguiente:

Algoritmo

Dato de entrada: p.

Dato de salida: $p, \Gamma_a(p)$.

1. Leer p y verificar que $p \in]0, 1[$.
2. Hacer $m = 56$, $a = 12$.
3. Calcular $f_m(a)$.
4. Para $k = 12$, calcular $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$.
5. Calcular $\Gamma_a(p) = f_m(a) + e^{-a} a^{p-1} (\theta_1(a) - \theta_2(a))$.
6. Fin.

Nota: para el cálculo de $f_m(a)$ se debe elaborar un algoritmo tipo esquema de Hörner. De manera similar $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ requieren de la elaboración de los respectivos algoritmos para su cálculo. Se propone como ejercicio la elaboración de algoritmos para el cálculo de $f_m(a)$, $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ utilizando su escritura anidada de modo que se eviten los cálculos directos de los factoriales y de las potencias. En la siguiente sección necesitaremos nuevamente la escritura anidada de $f_m(a)$, $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ para aproximar la función de distribución gama.

De las propiedades de la función gama, de la definición de $\Gamma(p)$ para $p \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$, así como de la aproximación de $\Gamma(p)$ mediante $\Gamma_a(p)$, $0 < p < 1$, se presenta el siguiente algoritmo de cálculo de $\Gamma(p)$.

Algoritmo

Dato de entrada: p.

Dato de salida: $p, \Gamma(p)$.

1. Si $p \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma(p) = (p-1)!$.
2. Si $p = n + \dfrac{1}{2}, \Gamma(p) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n} \prod_{j=1}^{n} (2j-1)$.
3. Si $0 < p < 1$, $\Gamma(p) = \Gamma_a(p)$.
4. Si $p > 1, n = [p], \Gamma(p) = \Gamma(p-n) \prod_{j=1}^{n} (p-j)$.

([ ] denota la función mayor entero menor o igual que, $p \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$, $p - n \in]0, 1[$, $\Gamma(p-n) \simeq \Gamma_a(p-n)$).

5. Si $p < 0$, $p \notin \mathbb{Z}^-$, $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+n)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(p+j-1)}$,

   (donde $n = |[p]-1|$, $p+n \in]0,1[$, $\Gamma(p+n) \simeq \Gamma_a(p+n)$).

Nota: para la elaboración de un programa computacional, el siguiente indicador indi es de utilidad:

indi $= 1$, si p es un entero positivo.

indi $= 2$, si p es un real positivo de la forma $n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

indi $= 3$, si p es un real tal que $p \in]0,1[$.

indi $= 4$, si p es un real tal que $p > 1$, $p \notin \mathbb{N}$.

indi $= 5$, si p es un real negativo tal que $p \notin \mathbb{Z}^-$.

4.6. Distribución de probabilidad de tipo gama

Definición 4 *Una variable aleatori X tiene una distribución del tipo gama si su función de densidad está definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & si\ t \leq 0, \\ \dfrac{t^{p-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^p\Gamma(p)}, & si\ t \in]0,\infty[, \end{cases}$$

donde p, $\beta \in \mathbb{R}^+$ y Γ denota la función gama.
La función de distribución de probabilidad del tipo gama está definida por

$$F_\beta(x) = \frac{1}{\beta^p\Gamma(p)}\int_0^x t^{p-1}e^{-\frac{t}{\beta}}dt, \quad x \geq 0.$$

Cuando $p = 1$, la distribución gama coincide con la distribución exponencial:

$$F_\beta(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x \geq 0.$$

Para $p = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\beta = 2$, la distribución gama coincide con la distribución χ^2 con n grados de libertad. Esta distribución se estudiará más adelante.

Cuando $p = n \in \mathbb{Z}^+$ y $\beta = \frac{1}{n\mu}$ con $\mu > 0$, la distribución gama se conoce con el nombre de distribución de Erlang de parámetros (n,μ). Cuando $p = m+1$, $m \in \mathbb{N}$ y $\beta = 1$, la distribución gama se llama distribución exponencial potencial.

Utilizando el cambio de variable $v = \frac{t}{\beta}$, se tiene

$$F_\beta(x) = \frac{1}{\beta^p\Gamma(p)}\int_0^{\beta x}(v\beta)^{p-1}e^{-v}\beta dv = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\beta x} v^{p-1}e^{-v}dv,$$

lo que nos conduce a estudiar la función F_p definida por

$$F_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x t^{p-1}e^{-t}dt, \; x \geq 0,$$

que se conoce con el nombre de distribución gama.

Aproximación de $F_p(x)$, $\quad x, p \in]0,\infty[$.

Para escribir un algoritmo de aproximación de $F_p(x)$, consideramos los tres casos siguientes:

1. $p \in \mathbb{Z}^+$,
2. $0 < p < 1$,
3. $p > 1$, $p \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 1. Si p es un entero positivo, entonces $\Gamma(p) = (p-1)!$ y de la definición de la función $F_p(x)$, se sigue que

$$F_p(x) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^x t^{p-1}e^{-x}dx \quad x \geq 0.$$

Para $p = 1$ se tiene que $F_1(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$.

Si $p > 1$, integrando por partes $p-1$ veces, se tiene

$$\begin{aligned} F_p(x) &= \frac{1}{(p-1)!}\left(-x^{p-1}e^{-x} - (p-1)\,x^{p-2}e^{-x} - (p-1)\,(p-2)\,x^{p-3}e^{-x} - \cdots - \right. \\ & \left. (p-1)(p-2)\ldots \times 2e^{-x} + (p-1)(p-2)\ldots \times 1 - (p-1)(p-2) \times \cdots \times 1 \times e^{-x}\right) \\ &= 1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\right) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Así,

$$F_p(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!} \qquad x \geq 0.$$

Note que, por la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{k!}e^{-x} = 0$, luego

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!} = 0,$$

Para $\varepsilon = 10^{-10}$, determinemos una condición sobre x y p tal que $F_p(x)$ sea calculado con una precisión ε. Esta condición es $x^{p-1}e^{-x} \leq 10^{-10}$, de donde $x - (p-1)\ln(x) \geq 10\ln(10)$.

Para $p = 1$, definimos

$$F(1,x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x \leq 10\ln(10), \\ 1, & \text{si } x > 10\ln(10). \end{cases}$$

Para $p > 1$, definimos

$$F(p,x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-x + \ln\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1}\dfrac{x^k}{k!}\right)\right), & \text{si } x - (p-1)\ln(x) \leq 10\ln(10), \\ 1, \quad \text{si } x - (p-1)\ln(x) > 10\ln(10). \end{cases}$$

En esta última escritura de $F(p,x)$ se evita que el término $e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{p-1}\dfrac{x^k}{k!}$ se redondee por 0. Además $\sum\limits_{k=0}^{p-1}\dfrac{x^k}{k!}$ tiene que escribirse de forma anidada para evitar el cálculo directo de las potencias y de los factoriales..

Caso 2.- Supongamos ahora que $0 < p < 1$.

Recordemos que si $0 < p < 1$, $\Gamma(p)$ se aproxima mediante

$$\Gamma_a(p) = f_m(a) + e^{-a}a^{p-1}(\theta_1(a) - \theta_2(a)),$$

donde $m = 56$ y $a = 12$, $f_m(a)$, $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ están definidos en la sección precedente.

La escritura anidada de $f_m(a)$, $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ serán utilizados para aproximar $F_p(x)$ del modo siguiente: si $0 \leq x \leq 12$, entonces $F_p(x)$ se aproxima mediante

$$F_m(x) = \frac{f_m(x)}{\Gamma_a(p)}.$$

Si $x > 12$, entonces $F_p(x)$ se aproxima mediante

$$F_m(x) = \frac{f_m(x) + \theta(a) - \theta(x)}{\Gamma_a(p)},$$

donde $\theta(t) = e^{-t}t^{p-1}(\theta_1(t) - \theta_2(t))$, $t \in [12, \infty[$.

Por otro lado, como $\Gamma(p)$ converge para todo $p > 0$, en particular para $0 < p < 1$ se sigue que dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que para todo $x \geq R$, se tiene

$$\left| \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt - \int_0^x t^{p-1}e^{-t}dt \right| = \int_x^\infty t^{p-1}e^{-t}dt < \varepsilon.$$

Para $\varepsilon = 10^{-10}$ se deduce que $\int\limits_R^\infty t^{p-1}e^{-t}dt < 10^{-10}$ si $R \backsimeq 24$. En consecuencia,

$$F_m(x) = \begin{cases} \dfrac{f_m(x)}{\Gamma_a(p)}, & \text{si } 0 \leq x \leq 12, \\ \dfrac{f_m(x) + \theta(12) - \theta(x)}{\Gamma_a(p)}, & \text{si } 12 < x \leq 24, \\ 1, \quad \text{si } x > 24. \end{cases}$$

Para completar el algoritmo debe tomarse en cuenta lo siguiente: para cada $x \in [0, 12]$, $f_m(x)$ debe calcularse con $m = 56$ que se obtuvo cuando $x = 12$, pero para $0 < x < 12$ se requerirán menos términos para lograr la misma precisión. En la tabla siguiente se ilustran algunos subintervalos de $[0, 12]$ con sus respectivos valores de m.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	16	21	25	29	33	37	40	43	47	50	53	56

.

Para simplificar la selección de m para $x \in [0, 12]$, la siguiente relación puede ser útil:

$$j = 1, \ldots, 12,\ x = j,\ m = 16 + 4(j - 1).$$

Si $x = j$ entonces $m = 16 + 4\,(j - 1)$ para $j = 1,\ 2, \ldots, 12$.

Caso 3.- Consideremos ahora el caso $p > 1,\ \ p \notin \mathbb{Z}^+$.

Sea $q = p - n$ con $n = [p]$ el mayor entero menor o igual que p, entonces $q \in]0, 1[$. Utilizando el método de integración por partes $n - 1$ veces, tenemos

$$\begin{aligned} F_p(x) \quad &= \quad \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\int_0^x t^{q-1}e^{-t}dt \right) \left(\prod_{j=1}^n (p - j) \right) - x^{p-1}e^{-x} - (p-1)x^{p-2}e^{-x} \\ &\quad -(p-1)(p-2)x^{p-3}e^{-x} - \cdots - (p-1)(p-2)\cdots(p-(n-1)x^{p-n}e^{-x}). \end{aligned}$$

Además, $\Gamma(p) = \Gamma(q) \prod\limits_{j=1}^n (p - j)$.

Sean

$$F_q(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\int_0^x t^{q-1}e^{-t}dt \right) \prod_{j=1}^n (p - j) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x t^{q-1}e^{-t}dt,$$

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= -\frac{1}{\Gamma(p)}\Bigg(x^{p-1}e^{-x}+(p-1)x^{p-2}e^{-x}+(p-1)(p-2)x^{p-3}e^{-x}+\cdots \\
&\quad +x^{p-n}e^{-x}\prod_{j=1}^{n-1}(p-j)\Bigg) \\
&= -\frac{x^q}{q}e^{-x}\left(1+\frac{x}{q+1}+\frac{x^2}{(q+1)(q+2)}+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\frac{x^{n-2}}{(q+n-2)\cdots(q+1)}+\frac{x^{n-1}}{(q+n-1)\cdots(q+1)}\right) \\
&= -\frac{x^q}{q}e^{-x}\left(1+\frac{x}{q+1}\left(1+\frac{x}{q+2}\left(1+\cdots+\frac{x}{q+n-2}\left(1+\frac{x}{q+n-1}\right)\cdots\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

entonces

$$F_p(x)=F_q(x)+Q(x),\ \ x\geq 0.$$

El algoritmo para evaluar $F_q(x)$ con $q\in]0,1[$, $x\geq 0$, está descrito en la parte 2) precedente. Describimos el algoritmo para evaluar $Q(x)$.

Algoritmo

Datos de entrada: n, q, x.

Datos de salida: $Q(x)$.

1. $b=1$.

2. $\left[\begin{array}{lll} k & = & 1,\cdots,n-1 \\ & & J=n-k \\ & & b=1+\dfrac{bx}{q+j} \end{array}\right.$

   Fin de bucle k.

3. $Q(x)=-\dfrac{x^q e^{-x}}{q}$.

4. Fin.

En resumen, para $p>0$ y $x\geq 0$, $F_p(x)$ se calcula (aproxima) con una precisión $\varepsilon=10^{-10}$ del modo siguiente.

Si $p\in\mathbb{Z}^+$,

Si $p=1$, $F(1,x)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & \text{si } x\leq 10\ln(10), \\ 1, & \text{si } x>10\ln(10), \end{cases}$

Si $p>1$, $F(p,x)=\begin{cases} 1-\exp\left(-x+\ln\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1}\dfrac{x^k}{k!}\right)\right), & \text{si } x-(p-1)\ln(x)\leq 10\ln(10), \\ 1, & \text{si } x-(p-1)\ln(x)>10\ln(10). \end{cases}$

Si $0<p<1$, $F_m(x)=\begin{cases} \dfrac{f_m(x)}{\Gamma_a(p)}, & \text{si } 0\leq x\leq 12, \\ \dfrac{f_m(x)+\theta(12)-\theta(x)}{\Gamma_a(p)}, & \text{si } 12<x\leq 24, \\ 1, & \text{si } x>24. \end{cases}$

Si $p>1$, $p\notin\mathbb{Z}^+$, $F_p(x)=F_q(x)+Q(x)$.

4.7. Función beta. Aproximación de la función beta $B(p,q)$, $p>0$, $q>0$.

Definición 5 *Sean $p,\ q\in\mathbb{R}^+$. La función beta denotada $B(p,q)$ se define por*

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

Algunas propiedades fundamentales de la función beta se proponen en el teorema siguiente.

Teorema 2

i) La función beta $B(p,q)$ está bien definida si $p>0,\ q>0$ y diverge en cualquier otro caso. Además, la función beta es continua sobre $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$.

ii) Para todo $p,\ q\in\mathbb{R}^+,\ B(p,q)=B(q,p)$.

iii) Para todo $p,\ q\in\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} B(p,q) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}(\theta)\cos^{2q-1}(\theta)d\theta,\\ B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \end{aligned}$$

iv) Para todo $r>0$,

$$\begin{aligned} B\left(\frac{r+1}{2},\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^r(\theta)d\theta,\\ B\left(\frac{1}{2},\frac{r+1}{2}\right) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

En particular, si $r=n\in\mathbb{Z}^+$, se tiene

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(\theta)d\theta=\begin{cases}\dfrac{1\times3\times\ldots\times(n-1)}{2\times4\times\ldots\times n}\dfrac{\pi}{2}, & si\ n\ es\ par,\\ \dfrac{2\times4\times\ldots\times(n-1)}{1\times3\times\ldots\times n}, & si\ \ n\ es\ impar.\end{cases}$$

v) Para todo $p\in\left]0,1\right[$,

$$B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}.$$

Demostración.

i) Sean $p,q\in\mathbb{R}^+$. Si $p\geq1,\ q\geq1$, la función $t\mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ es continua, por lo tanto $B(p,q)$ está bien definida.

Supongamos que $0<p<1,\ 0<q<1$. La función $t\to t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ de $]0,1[$ en $\mathbb{R}$ es discontinua en 0 y 1.

Sean $I_1=\int_0^{1/2}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\quad I_2=\int_{1/2}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$, entonces $B(p,q)=I_1+I_2$. Mostremos la existencia de I_1 y I_2. Se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\leq\int_0^{\frac{1}{2}}t^{p-1}dt=\frac{1}{2^p p},\\ I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\leq\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{q-1}dt=\frac{1}{2^q q}, \end{aligned}$$

que prueba que I_1 e I_2 existen.

En consecuencia $B(p,q)$ está bien definida si $p>0$, $q>0$.

Para probar que $B(p,q)$ diverge en cualquier otro caso, admitamos que $p\leq 0$ y $q\geq 0$. Entonces

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1}(1-t)^{q-1}dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}dt=\frac{1}{2^{q-1}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2^{q-1}}\ln|_0^{1/2}=+\infty.$$

ii) Sean $p,q\in\mathbb{R}^+$ y $x=1-t$, $t\in]0,1[$. Entonces

$$B(p,q)=\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}dx=B(q,p).$$

iii) Sean $p,q\in\mathbb{R}^+$ y $t=\operatorname{sen}^2(\theta)$, $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Entonces

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2(\theta))^{p-1}(1-\operatorname{sen}^2(\theta))^{q-1}2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2p-1}(\theta)\cos^{2q-1}(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Sea $t=x^2,\ x\in]0,\infty[$. Entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(p) &= \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt=2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx,\\ \Gamma(q) &= 2\int_0^\infty x^{2q-1}e^{-x^2}dx.\end{aligned}$$

Luego

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\left(\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2q-1}e^{y^2}dy\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Utilizando coordenadas polares: $\begin{cases} x=\varrho\cos\varphi,\\ y=\varrho\operatorname{sen}\varphi,\end{cases}$ $\varrho\geq 0$, $\varphi\in]0,\frac{\pi}{2}[$, se deduce que

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \varrho^{2p-1}\varrho^{2q-1}\cos^{2p-1}(\varphi)\operatorname{sen}^{2q-1}(\varphi)\ \varrho^{-\rho^2}\varrho d\varrho d\varphi\\ &= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}(\varphi)\operatorname{sen}^{2q-1}(\varphi)d\varphi\right)\left(\int_0^\infty \varrho^{2(p+q)-1}e^{-\varrho^2}d\varrho\right)\\ &= 2\left(\int_0^\infty v^{p+q-1}e^{-v}dv\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}(\varphi)\operatorname{sen}^{2q-1}(\varphi)d\varphi\right)\\ &= \Gamma(p+q)B(p,q).\end{aligned}$$

iv) Sea $r>0$. Por la propiedad iii), haciendo $p=\frac{r+1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, se tiene

$$B\left(\frac{r+1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2\left(\frac{r+1}{2}\right)-1}(\theta)\cos^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}(\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^r(\theta)d\theta,$$

Además

$$B\left(\frac{r+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)},$$

de donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^r(\theta)d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}.$$

Si $r = n \in \mathbb{Z}^+$, utilizando las propiedades de la función gama se obtiene la conclusión.

Mediante la sustitución $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2]$ se obtiene $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^r(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^r(\theta) d\theta$.

Note que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$ y $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$. Luego $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

v) Sea $p \in]0, 1[$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene

$$B(p, n+1) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^n dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Por otro lado, si $t = \frac{x}{n}$ entonces

$$B(p, n+1) = \int_0^n \left(\frac{x}{n}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{n} = \frac{1}{n^p} \int_0^n x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx,$$

Luego

$$\int_0^n x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n^p \Gamma(p)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Utilizando el binomio de Newton, no es difícil demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{p-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p \Gamma(p)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} = \Gamma(p) \lim_{n\to\infty} \frac{n^p n!}{\Gamma(n+p+1)},
\end{aligned}$$

con lo cual $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p n!}{\Gamma(n+p+1)} = 1$.

El límite $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ es consecuencia del teorema de convergencia de Tannery para integrales de Riemann (véase el Análisis de Apostol, página 365).

Como $\Gamma(n+p+1) = (n+p)(n+p-1)\dots p\Gamma(p)$, se sigue que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p n!}{(n+p)(n+p-1) \times \dots \times p\,\Gamma(p)},$$

de donde

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p n!}{(n+p)(n+p-1)\dots p},$$

que es la definición de Gauss de la función gama.

Por otra parte,

$$\Gamma(1-p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-p} n!}{(n+1-p)(n-p)\dots(1-p)},$$

luego

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(p-1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n!)^2}{(n+1-p)(n^2-p^2)((n-1)^2-p^2)\cdots(1-p^2)p} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1-p} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(1-p^2)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\cdots\left((1-\frac{p^2}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(1-p^2)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-\frac{p^2}{j^2}\right)}.
\end{aligned}$$

La función f definida por $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)\quad x\in\mathbb{R}$ se anula en $x=k\in\mathbb{Z}$, es decir que el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x)=0$ es $\mathbb{Z}$. La función real g definida por

$$g(x)=x\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{j}\right)\left(1+\frac{x}{j}\right)=x\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\qquad x\in\mathbb{R},$$

es tal que $g(x)=0$ si y solo si $x=j\in\mathbb{Z}$; esto es, las funciones f y g tienen el mismo conjunto de ceros. Con estos argumentos se demuestra que

$$\operatorname{sen}(\pi x)=\pi x\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right),$$

que es la representación factorial de Weierstrass de $\operatorname{sen}(\pi x)$. Por lo tanto

$$\Gamma(p)\,\Gamma(p-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-\frac{p^2}{j^2}\right)}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}.$$

■

Aproximación de la función beta $B(p,q)$, $p>0$, $q>0$

Sean $p,q\in\mathbb{R}^+$.

1. Si $p,q\in\mathbb{Z}^+$, de las propiedades establecidas para las funciones gama y beta, se tiene

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

2. Si p,q son tales que $p+q=1$, de la propiedad v) de la función beta, obtenemos

$$B(p,1-p)=\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}.$$

3. Si $0<p<1$, $0<q<1$, y $p+q\neq 1$, entonces

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

Sea $x=1-t\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, resulta que

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx,$$

consecuentemente

$$B(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt+\int_0^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt.$$

Sea $g(t)=(1-t)^{\alpha-1}$, donde $0<\alpha<1$, $t\in]-1,1[$. Representemos la función g mediante una serie de Taylor en un entorno de cero. Tenemos

$$\begin{aligned} g(0)&=1,\\ g'(0)&=1-\alpha,\\ g''(0)&=(1-\alpha)(2-\alpha)\\ &\ \ \vdots\\ g^{(k)}(0)&=\prod_{j=1}^{k}(j-\alpha),\ \ \forall k\in\mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Entonces
$$g(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-\alpha)}{k!} t^k.$$
Esta serie es absolutamente convergente para todo $t \in]-1,1[$ y converge uniformemente sobre todo conjunto $[-a,a]$, $0 < a < 1$ (demuestre!). Sean

$$\begin{aligned} A_1(p,q) &= \int_0^{1/2} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \\ A_2(p,q) &= \int_0^{1/2} t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt, \end{aligned}$$

es decir que $B(p,q) = A_1(p,q) + A_2(p,q)$.

Para $\alpha = q$, obtenemos

$$\begin{aligned} A_1(p,q) &= \int_0^{1/2} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^{1/2} t^{p-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)(2-q)\ldots(k-q)}{k!} t^k \right) dt \\ &= \int_0^{1/2} t^{p-1} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)(2-q)\ldots(k-q)}{k!} \int_0^{1/2} t^{p+k-1} dt \\ &= \left. \frac{t^p}{p} \right|_0^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)(2-q)\ldots(k-q)}{k!} \left. \frac{t^{p+k}}{p+k} \right|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{p2^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)(2-q)\ldots(k-q)}{k!(k+p)2^{p+k}} \\ &= \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)(2-q)\ldots(k-q)}{k!(k+p)2^k} \right). \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos

$$A_2(p,q) = \frac{1}{2^q} \left(\frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)(2-p)\ldots(k-p)}{k!(k+q)2^k} \right).$$

Para construir un algoritmo bien condicionado y numéricamente estable, aproximemos $A_1(p,q)$ y $A_2(p,q)$ mediante sumas finitas con $m+1$ términos $\theta_1(p,q)$ y $\theta_2(p,q)$ respectivamente tales que si $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |A_1(p,q) - \theta_1(p,q)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |A_2(p,q) - \theta_2(p,q)| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sea

$$\theta_1(p,q) = \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(1-q)(2-q)\cdots(k-q)}{k!(k+p)2^k} \right).$$

Con fines prácticos $\varepsilon = 10^{-10}$.Apliquemos el criterio del cociente.

Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, entonces si

$$a_k = \frac{(1-q)(2-q)\cdots(k-q)}{k!(k+p)2^k}, \qquad b_k = \frac{1}{k(k+1)},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{b_k} &= \frac{(1-q)(2-q)\cdots(k-q)k(k+1)}{k!(k+p)2^k} < \frac{k!k(k+1)}{k!k2^k} \\ &= \frac{k+1}{2^k} < \frac{1}{2}10^{-10} \quad \text{si } k \geq 41. \end{aligned}$$

Si escogemos $m=41$, tenemos

$$\theta_1(p,q)=\frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{41}\frac{(1-q)(2-q)\cdots(k-q)}{k!(k+p)2^k}\right),$$

que en forma anidada se escribe

$$\begin{aligned}\theta_1(p,q) &= \frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1-q}{2}\left(\frac{1}{1+p}+\frac{2-q}{2\times 2}\left(\frac{1}{2+p}+\frac{3-q}{3\times 2}\left(\frac{1}{3+p}+\cdots+\right.\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.\left.\frac{40-q}{40\times 2}\right)\left(\frac{1}{40+p}+\frac{41-q}{40\times 2\times(41+p)}\right)\cdots\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Cambiando p por q, se obtiene una escritura anidada de $\theta_2(p,q)$.

Se propone como ejercicio elaborar un algoritmo que permita calcular $\theta_1(p,q)$ y $\theta_2(p,q)$.

Finalmente $B(p,q)$ se aproxima mediante $\theta_1(p,q)+\theta_2(p,q)$ con una precisión $\varepsilon=10^{-10}$.

Nota: Puesto que $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. Si para aproximar $B(p,q)$ se utiliza el algoritmo para aproximar $\Gamma(p),\Gamma(q)$ y $\Gamma(p+q)$, resulta que este es numéricamente más costoso que la aproximación mediante $\theta_1(p,q)+\theta_2(p,q)$. Además este último es muy simple de programar.

4. Supongamos que al menos uno de los dos parámetros p, q es mayor o igual que 1, además $p,q\notin\mathbb{Z}^+$.

   Sean $m=[p]$, $n=[q]$ donde $[\cdot]$ denota la función mayor entero menor o igual que y $r=m+n$, entonces $p-m$, $q-n\in]0,1[$.

   Luego

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\frac{((p-1)\cdots(p-n)\,\Gamma(p-m))\,((q-1)\cdots(q-n)\Gamma(q-n))}{(p+q-1)\cdots(p+q-r)\,\Gamma(p+q-r)}\\ &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(p-j)\prod\limits_{k=1}^{n}(q-k)}{\prod\limits_{i=1}^{m+n}(p+q-i)}\frac{\Gamma(p-n)\,\Gamma(q-m)}{\Gamma(p+q-r)},\end{aligned}$$

   donde

$$\begin{aligned}p+q &= (p-n)+n+(q-m)+m=(p-n)+(q-m)+r,\\ p+q-r &= (p-n)+(q-m),\end{aligned}$$

   consecuentemente

$$B(p-m,q-n)=\frac{\Gamma(p-m)\Gamma(q-n)}{\Gamma(p+q-n-m)}=\frac{\Gamma(p-m)\Gamma(q-n)}{\Gamma(p+q-r)},$$

   y

$$B(p,q)=\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{m}(p-j)\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(q-k)\right)}{\prod\limits_{i=1}^{m+n}(p+q-i)}B(p-m,q-n),$$

   con $B(p-m,\,q-n)$ que se aproxima mediante $\theta_1\,(p-m,q-n)+\theta_2\,(p-m,q-n)\,.$

En resumen,

1. Si $p,q\in\mathbb{Z}^+$,

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

2. Si $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que $p + q = 1$,
$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}.$$

3. Si $0 < p < 1,\ \ 0 < q < 1$, tales que $p + q \neq 1$, entonces
$$B(p, q) \simeq \theta_1(p, q) + \theta_2(p, q).$$

4. Si $p \geq 1$ o $q \geq 1$ y $p, q \notin \mathbb{Z}^+$, entonces
$$B(p, q) \simeq \frac{\left(\prod_{j=1}^{m} (p-j)\right)\left(\prod_{k=1}^{n} (q-k)\right)}{\prod_{i=1}^{m+n} (p+q-i)} (\theta_1(p-m, q-n) + \theta_2(p-m, q-n)),$$
y $m = [p]$, $n = [q]$.

4.8. Distribución beta.

Definición 6 *Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de probabilidad beta con parámetros p y q si y solo si la función de densidad de X está definida mediante:*
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{p-1}(1-p)^{q-1}}{B(p,q)}, & t \in [0,1]\,, \\ 0, & si\ t \in \mathbb{R} \setminus [0,1]\,, \end{cases}$$
donde $p,\ q \in \mathbb{R}^+$ y $B(p,q)$ denota la función beta en p y q.
La función de distribución beta está definida por
$$F(p,q,x) = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^x t^{p-1}(1-p)^{q-1}dt, \quad x \in [0,1]\,.$$

Proposición 3 *Para todo $x \in [0,1]$, se tiene*
$$F(p, q, x) = 1 - F(q, p, 1-x).$$

Demostración. Puesto que
$$1 = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$
se sigue que para todo $x \in [0, 1]$,
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{B(p,q)} \left(\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt + \int_x^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \right) \\ &= F(p,q,x) + \frac{1}{B(p,q)} \int_x^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \end{aligned}$$
Utilizando el cambio de variable $u = 1 - t$, se deduce que
$$\begin{aligned} F(p,q,x) &= 1 - \frac{1}{B(p,q)} \int_{1-x}^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}(-du) \\ &= 1 - \frac{1}{B(q,p)} \int_0^{1-x} u^{q-1}(1-u)^{p-1}du = 1 - F(q,p,1-x). \end{aligned}$$

■

Proposición 4 *Sea* $p, q \in \left]0,1\right[$ *fijos,* $f(x) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ x \in [0,1]\,,\ \varepsilon > 0$. *Existen dos funciones* $P_1,\ P_2$ *tales que*

$$\begin{aligned} |f(x) - P_1| &< \varepsilon \quad si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ |f(x) - P_2| &< \varepsilon \quad si\ x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[. \end{aligned}$$

Demostración. En la sección precedente se mostró que la serie de Taylor de la función $g(t) = (1-t)^{\alpha-1}$, $t \in [0, x[$ y $0 < \alpha < 1$ está dada por

$$g(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-\alpha)}{k!} t^k,$$

la cual es uniformemente convergente sobre $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Entonces, para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \int_0^x t^{p-1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)\cdots(k-q)}{k!} t^k\right) dt \\ &= \frac{x^p}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)\cdots(k-q)}{k!\,(k+p)} t^{p+k}. \end{aligned}$$

Ahora bien, para todo $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)\cdots(k-q)}{k!(k+p)} x^{p+k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k!k} \frac{1}{2^{p+k}} = \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$ es convergente. Sean $a_k = \frac{1}{k2^k}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)}$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, y

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k+1}{2^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Luego, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{a_k}{b_k} < \varepsilon$ si $k \geq m$, con lo cual

$$\frac{1}{2^p} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} < \varepsilon.$$

Definimos

$$P_1(x) = \frac{x^p}{p} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(1-q)\cdots(k-q)}{k!(k+p)} x^{k+p} \quad \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

entonces

$$|f(x) - P_1(x)| = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(1-q)\cdots(k-q)}{k!\,(k+p)} x^{k+p} \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} < \varepsilon.$$

Aplicando la proposición precedente, definimos

$$P_2(x) = 1 - P_1(x), \ \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[,$$

entonces

$$|f(x) - P_2(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

■

1. Sean $p, q \in]0,1[$.

   En el caso en que $p, q \in]0,1[$, la proposición precedente es utilizada para construir un algoritmo numéricamente estable. Definimos

$$P_1(p,q,x) = \frac{x^p}{B(p,q)}\left(\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(1-q)\cdots(k-q)}{k!\,(k+p)} x^k\right) \qquad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

   donde m es tal que $|f(x) - P_1(x)| < \varepsilon$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, y $P_1(x)$ definida en la proposición precedente

$$P_2(p,q,x) = 1 - P_1(q,p,1-x), \;\; x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

   Sea $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. A medida que x se aproxima a $\frac{1}{2}$, $P_1(x)$ requiere de un número mayor de términos para alcanzar la precisión requerida. Sea $\varepsilon = 10^{-10}$ y dividamos al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en cinco subintervalos de igual longitud $[x_{j-1}, x_j]$, donde $x_j = 0{,}1j, \;\; j = 1,2,3,4,5$. Entonces

$$m_j = 12 + 7(j-1), \quad j = 1, \cdots, 5.$$

   es tal que $\sum\limits_{k=m_j+1}^{\infty} \frac{x_j^k}{k} < \varepsilon, \;\; j = 1, \cdots 5.$

   Como es habitual, $P_1(p,q,x)$ se escribe en forma anidada.

   Se propone como ejercicio la elaboración de un algoritmo para calcular $P_1(p,q,x)$ y $P_2(p,q,x)$. El algoritmo para el cálculo de $B(p,q)$ está descrito en la sección precedente.

2. Sean $p, q \in]1, \infty]$.

   Sean $k = [q] - 1$ y $r = q - (k+1) \in [0,1[$, donde $[\cdot]$ denota la función mayor entero menor o igual que. Integrando por partes k veces, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt &= \frac{t^p}{p}(1-t)^{q-1}|_0^x + \frac{q-1}{p}\int_0^x t^p(1-t)^{q-2}dt \\
&= \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1} + \frac{(q-1)}{p}\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^{q-2} + \frac{q-2}{p+1}\int_0^x t^{p+1}(1-t)^{q-3}dt\right) \\
&= \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1} + \frac{(q-1)}{p(p+1)}x^{p+1}(1-x)^{q-2} + \frac{(q-1)(q-2)}{p(p+1)(p+2)}x^{p+2}(1-x)^{q-3} \\
&\quad + \cdots + \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-(k-1))}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+k-1)}x^{p+k-1}(1-x)^{q-k} \\
&\quad + \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}\int_0^x t^{p+k-1}(1-t)^{q-(k+1)}dt.
\end{aligned}$$

   Identificamos dos casos: $q = k+1 \in \mathbb{Z}^+$, $p > 1$; y, $q > 1, \;\; q \notin \mathbb{Z}^+$, $p > 1$.

   Consideremos el primer caso: $q = k+1 \in \mathbb{Z}^+, \;\; p > 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt &= \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1} + \frac{q-1}{p(p+1)}x^{p+1}(1-x)^{q-2} + \frac{(q-1)(q-2)}{p(p+1)(p+2)}x^{p+2}(1-x)^{q-3} \\
&\quad + \cdots + \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-(k-1))}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}x^{p+k-1}(1-x)^{q-k} \\
&\quad + \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{p(p+1))\cdots(p+k-1)}\frac{x^{p+k}}{p+k}.
\end{aligned}$$

   Por otro lado,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(p+k+1)} = \frac{k!\,\Gamma(p)}{(p+k)(p+k-1)\cdots p\Gamma(p)} = \frac{k!}{(p+k)(p+k-1)\cdots p}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
F(p,q,x) &= \frac{1}{B(p,q)}\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \\
&= x^{p+k} + \frac{p+k}{1!}x^{p+k-1}(1-x) + \frac{(p+k)(p+k-1)}{2!}x^{p+k-2}(1-x)^2 + \cdots + \\
&\quad \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}{k!}x^p(1-x)^k \\
&= x^{p+k}\left(1 + \frac{(p+k)}{1}y\left(1 + \frac{p+k-1}{2}y\left(1 + \frac{p+k-2}{3}y\left(1 + \cdots + \right.\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.\left.\frac{p+2}{k-1}y\right)\left(1 + \frac{p+1}{k}y\right)\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

donde $y = \frac{1-x}{x}$, $x > 0$.

Note que este último desarrollo es válido cualesquiera que sea $p > 0$ y $q = k + 1$ un entero mayor que 1.

Para $q = 2$, $p > 1$, se tiene

$$F(p,2,x) = x^{p+1}(1 + (p+1)y).$$

Para $q = 3$, $p > 1$,

$$F(p,3,x) = x^{p+2}(1 + (p+2)\ y(1 + \frac{p+1}{2}y)),$$

donde $y = \dfrac{1-x}{x}$, $0 < x \leq 1$.

En el caso en que $q > 0$ y $p = k + 1$ un entero mayor que 1 se utiliza la relación

$$F(p,q,x) = 1 - F(q,p,1-x)$$

y $F(q,p,1-x)$ se calcula mediante el algoritmo arriba descrito a condición de cambiar p por q y x por $1-x$.

Consideremos ahora el segundo caso: $q > 1$, $q \notin \mathbb{Z}^+$.

Definimos

$$\begin{aligned}
P_3(p,q,x) &= \frac{x^p}{p}\left((1-x)^{q-1} + \frac{q-1}{p+1}\frac{x}{1-x}(1-x)^{q-1} + \frac{(q-1)(q-2)}{(p+1)(p+2)}\frac{x^2}{(1-x)^2}(1-x)^{q-1}\right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k+1)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k-1)}\frac{x^{k-1}}{(1-x)^{k-1}}(1-x)^{q-1}\right) \\
&= \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\left(1 + \frac{q-1}{p+1}\frac{x}{1-x} + \frac{(q-1)(q-2)}{(p+1)(p+2)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots + \right. \\
&\quad \left.\frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k+1)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k-1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\left(1 + \frac{q-1}{p+1}y\left(1 + \frac{q-2}{p+2}y\left(1 + \cdots + \right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.\frac{q-k+2}{p+k-2}y\right)\left(1 + \frac{q-k+1}{p+k-1}y\right)\cdots\right)\right),
\end{aligned}$$

donde $y = \frac{x}{1-x}$, $0 \leq x < 1$, y.

$$P_4(p,q,x) = \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}\int_0^x t^{p+k-1}(1-t)^{q-(k+1)}dt,$$

entonces

$$F(p,q,x) = \frac{1}{B(p,q)}\left(P_3(p,q,x) + P_4(p,q,x)\right).$$

Para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, la integral $\int_0^x t^{p+k-1}(1-t)^{q-(k+1)}dt$ se calcula utilizando el algoritmo descrito en i) y si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ se utiliza la relación

$$F(p,q,x) = 1 - F(p,q,1-x) = 1 - \frac{1}{B(p,q)}\left(P_3\left(q,p,1-x\right) + P_4\left(q,p,1-x\right)\right),$$

y a continuación $P_4(q,p,1-x)$ se calcula en la parte precedente.

3. Finalmente, si $p = 1$ tenemos

$$F(1,q,x) = 1 - (1-x)^q, \quad x \in [0,1].$$

Si $q = 1$,

$$F(p,1,x) = x^p, \quad x \in [0,1].$$

Se propone como ejercicio la elaboración de un algoritmo completo que permite calcular (aproximar) valores de la distribución beta para $p > 0, q > 0$ y $x \in [0,1]$.

4.9. Distribución normal.

Definición 7 *Una variable aleatoria X tiene una distribución de probabilidad normal de media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma > 0$ si su función densidad está dada por*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La función de distribución está definida por

$$N(\mu,\sigma,x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt \quad x \in \mathbb{R}.$$

Utilizando el cambio de variable $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$, se tiene

$$N(\mu,\sigma,\frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

En lo que sigue consideraremos la función φ definida por

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad x \in \mathbb{R}.$$

que corresponde a $N(0,1,x)$.

Se probó que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ y utilizando el cambio de variable $t = \sqrt{2}x$ se prueba que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$. Por otro lado, si $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad t \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, es decir que f es una función par. En consecuencia

$$\varphi(x) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Utilizando la serie de potencias de e^α :

$$e^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

que converge absolutamente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y es uniformemente convergente sobre todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y haciendo $\alpha = -\frac{t^2}{2}$, tenemos

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!\, 2^k},$$

luego

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,2^k}t^{2k}\right)dt = 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,2^k}\int\limits_0^x t^{2k}dt\\ &= 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,2^k(2k+1)}x^{2k+1}.\end{aligned}$$

La última serie de potencias es absolutamente convergente para todo $x\in\mathbb{R}$.

Para aproximar $\varphi(x)$ mediante una suma finita, se debe tomar en cuenta que el número de términos depende de x. Más adelante volveremos a tratar esta serie.

Sea $\varepsilon>0$. Con el propósito de elaborar un algoritmo numéricamente estable y económico, determinemos $r>1$ tal que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right|<\varepsilon \quad \text{si } x\ge r,$$

es decir que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt<\varepsilon \quad \text{si } x\ge r.$$

Apliquemos el criterio de comparación para integrales impropias. Como $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}=1$ y haciendo $g(t)=\frac{1}{t^2}$, se tiene

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{t^2}{2}}}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

luego, existe $r>1$ tal que

$$\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{t^2}{2}}}<\varepsilon \quad \text{si } \ t\ge r.$$

Para $\varepsilon=10^{-10}$, esta última desigualdad se verifica para $r=8$, es decir que

$$\frac{f(t)}{g(t)}<10^{-10} \quad \text{si } t\ge 8,$$

en consecuencia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_8^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt<10^{-10}.$$

Definimos

$$\varphi_r(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\le -8,\\ \varphi(x), & \text{si } -8<x<8,\\ 1, & \text{si } x\ge 8.\end{cases}$$

Para todo $a,x\in\,]-8,8[$, tenemos

$$\varphi(x)=0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=\varphi(a)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Además, para todo $x\in\,]-8,8[$,

$$1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_8^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)\simeq\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_8^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

y como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_8^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt<10^{-10}$, despreciando este último término, resulta que

$$1=\varphi_r(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

de donde

$$\varphi_r(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{si } x\in\,]-8,8[\,.$$

Para calcular $\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$, utilicemos el método de integración por partes. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= \int_a^x \frac{-t\,e^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}dt = -\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Bigg|_a^x - \int_a^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}dt = -\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Bigg|_a^x - \int_a^x \frac{-te^{-\frac{t^2}{2}}}{-t^3}dt \\ &= -\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Bigg|_a^x - \left(-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^3}\Bigg|_a^x - 3\int_a^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4}dt\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\Bigg|_a^x + 3\int_a^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4}dt.\end{aligned}$$

Continuando con este procedimiento k veces, obtenemos

$$\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \theta_1(t)|_a^x + \theta_2(x),$$

donde

$$\theta_1(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\left(-1+\frac{1}{t^2}-\frac{1\times 3}{t^4}+\frac{1\times 3\times 5}{t^6}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1)}{t^{2k}}\right),$$

$$\theta_2(x) = (-1)^{k+1}1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k+1)\int_a^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}{t^{2k+2}}.$$

Entonces, para $x > a > 0$, tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}|\theta_2(x)| &\leq e^{-\frac{a^2}{2}}\left[1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k+1)\right]\int_a^x t^{-(2k+2)}dt \\ &= \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k+1)}{2k+1}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{1}{a^{2k+1}}-\frac{1}{x^{2k+1}}\right) \\ &< \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k+1)}{2k+1}\,\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a^{2k+1}} < \varepsilon = 10^{-10}.\end{aligned}$$

Para $a = 4{,}7$ y $k = 10$ se tiene $|\theta_2(x)| < 10^{-10}$.

Por otro lado, $\theta_1(8) < 10^{-10}$. En consecuencia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\theta_1(t)|_x^8 + \theta_2(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\theta_1(8)-\theta_1(x)+\theta_2(x)\right),$$

con lo cual $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ se aproxima mediante $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta_1(x)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$, y

$$\varphi_r(x) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^8 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

se aproxima mediante $1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta_1(x)$ para $x \in [4{,}7,\ 8[$.

Escribamos $\theta_1(x)$ en forma anidada de modo que se adapte a la estabilidad numérica. Tenemos

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x}\left(\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{3\times 5}{x^4}\left(1+\frac{7\times 9}{x^4}\left(1+\frac{11\times 13}{x^4}\left(1+\frac{11\times 17}{x^4}\right)\right)\right)\right)\right. \\ &\quad \left.-\left(1+\left(\frac{1\times 3}{x^4}\left(1+\frac{5\times 7}{x^4}\left(1+\frac{9\times 11}{x^4}\left(1+\frac{13\times 15}{x^4}\left(1+\frac{17\times 19}{x^4}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

cuyo algoritmo es el siguiente:

<u>Algoritmo</u>

Datos de entrada: $x \in [4{,}7,\ 8[$.

Datos de salida: $x \in [4{,}7,\ 8[$.

1. $y = x^4$.

2. $b_1 = 1$.

3. $b_2 = 1$.

4. $\left[\begin{array}{ll} j = & 1, \ldots, 4 \\ & k = 6 - j \\ & b_1 = 1 + \frac{(4k-1)(4k-3)}{y} b_1 \\ & b_2 = 1 + \frac{(4k-3)(4k-5)}{y} b_2 \end{array}\right.$

   Fin de bucle j.

6. $\theta_1(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}\left(\frac{b_2}{x^2} - \frac{3b_1}{y} - 1\right) = -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}\left(1 + \frac{3b_1}{y} - \frac{b_2}{x^2}\right)$.

7. Imprimir $\theta_1(x)$.

8. Fin.

Por lo tanto $\varphi(x)$ se aproxima mediante la función $\Phi(x)$ definida a continuación:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{si } x \leq -8, \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta_1(x), \quad \text{si } x \in \left]-8, -4{,}7\right[, \\ 0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\, 2^k (2k+1)}, \quad \text{si } x \in [-4{,}7, 0], \\ 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\, 2^k (2k+1)}, \quad \text{si } x \in \left]0, 4{,}7\right], \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta_1(x), \;\; \text{si } x \in \left]4{,}7, 8\right[, \\ 1, \quad \text{si } x \geq 8. \end{cases}$$

Queda por determinar m tal que para todo $x \in [-4{,}7,\ 4{,}7]$ se verifique

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\, 2^k (2k+1)} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\, 2^k (2k+1)}\right| < \epsilon = 10^{-10}.$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de m_j para $x_j = 1, 2, 3, 4, 4{,}7$.

x_j	1	2	3	4	4,7
m_j	11	23	31	43	55

Sean $m_1 = \frac{m_{j-1}}{2}$ y

$$\begin{aligned} S_{m_j} &= \sum_{k=0}^{m_J} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\, 2^k (2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{m_1} \frac{x}{(2k)!\,(4k+1)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2k} - \sum_{k=0}^{m_1} \frac{x}{(2k+1)!(4k+3)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2k+1} \\ &= S_1(x) - S_2(x) \quad x \in [-4{,}7, 4{,}7]. \end{aligned}$$

La escritura anidada de $S_1(x)$ y $S_2(x)$ garantizan la estabilidad numérica.

Se propone como ejercicio elaborar un algoritmo completo para calcular $\Phi(x)$ (valores aproximados de $\varphi(x)$). Así mismo, elabore un programa computacional y los resultados numéricos compare con los datos provistos en las tablas de la distribución normal proporcionados en los libros de probabilidad y estadística.

4.10. Distribución χi- cuadrada

Definición 8 *Una variable aleatoria X que tiene una función de distribución de probabilidad definida por*

$$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \qquad t > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

se dice que tiene una distribución χi-cuadrada con n grados de libertad.
La función de distribución χ-cuadrada está definida mediante

$$F(n,x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt \qquad x \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

La distribución χi-cuadrada es un caso particular de la distribución tipo gama (véase la distribución tipo gama) cuando $p = \frac{1}{n}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Esta función es muy importante en estadística y probabilidades.

Utilizando el cambio de variable $t = 2u$, obtenemos

$$F(n,x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{x}{2}} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} du.$$

Dados $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \geq 0$, para calcular o aproximar $F(n,x)$ consideramos cuatro casos.

1. Si $n = 1$, utilizando el cambio de variable $t = \frac{u^2}{2}$, tenemos

$$F(1,x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{x}{2}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{2\pi} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

La integral $\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ no puede calcularse mediante funciones elementales, lo que nos conduce a aproximarla numéricamente. En la sección relativa a la distribución normal se dió una técnica de aproximación de dicha integral que la escribimos inmediatamente a continaución.

$$\tilde{F}(1,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!\, 2^k} \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{2k-1}, & \text{si } x \in \left]0, 22\right], \\ 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta_1(x), & \text{si } x \in \left]22, 64\right[, \\ 1, & \text{si } x \geq 64, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_1\left(\sqrt{x}\right) &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{3\times 5}{x^2}\left(1 + \frac{7\times 5}{x^2}\left(1 + \frac{11\times 13}{x^2}\left(1 + \frac{15\times 17}{x^2}\right)\right)\right)\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \left(1 + \frac{1\times 3}{x^2}\left(1 + \frac{5\times 7}{x^2}\left(1 + \frac{9\times 11}{x^2}\left(1 + \frac{13\times 15}{x^2}\left(1 + \frac{17\times 19}{x^2}\right)\right)\right)\right)\right)\right]\right], \end{aligned}$$

Además,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!\, 2^k} \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1} = \sqrt{x}\left(\sum_{k=0}^{m_1} \frac{x^{2k}}{(2k)!\, 2^{2k}(4k+3)} - x\sum_{k=0}^{m_1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)! 2^{2k+1}(4k+3)}\right),$$

y cada sumatorio se escribe en forma anidada, donde $m_1 = \frac{m+1}{2}$ con m impar y para $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, 5$, m y x_j están dados en la siguiente tabla ($x_0 = 0$):

x_j	2	4	9	16	22
m	11	21	31	43	55

2. Si $n = 2$, entonces

$$F(2,x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-t} dt = 1 - e^{-\frac{x}{2}},\ x \geq 0.$$

Sean $n > 2$. Integrando por partes k veces $\int_0^{\frac{x}{2}} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} F(n,x) &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[-\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} - \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-2} - \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-3} - \cdots - \right. \\ & \left. \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-(k+1)} \right] + \\ & \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-(k+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{x}{2}} t^{\frac{n}{2}-(k+2)} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

3. Si $n = 2k+4$, $x = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2k+4}{2}\right) = (k+1)!, \\ \int_0^{\frac{x}{2}} t^{\frac{n}{2}-(k+2)} e^{-t} dt &= \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-t} dt = 1 - e^{-\frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

y reemplazando en la desarrollo precedente de $F(n,k)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(2k+4,x) &= 1 - e^{-\frac{x}{2}} \left[1 + \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} + \frac{k+1}{(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k} + \frac{k(k+1)}{(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} + \cdots + \frac{x}{2} \right] \\ &= 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j}. \end{aligned}$$

Así, si $n = 2k+4$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$F(2k+4,x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j} \quad x \geq 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{t} dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\int_0^{\frac{x}{2}} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt + \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt \right) \\ &= F(2k+4,x) + \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} t^{k+1} e^{-t} dt \\ &= 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j} + \frac{1}{(k+1)!} \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} t^{k+1} e^{-t} dt, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} t^{k+1} e^{-t} dt = (k+1)!\ e^{-\frac{x}{2}} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j} \quad x \geq 0.$$

Así por ejemplo

$$\int_1^{\infty} t^3 e^{-t} dt = 2\, e^{-1} \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!} = \frac{4\, e^{-1}}{3}.$$

4. Supongamos que $n = 2k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2k+1)(2k-1)\times\cdots\times 1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

$$\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-(k+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\frac{1}{2}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\int_0^{\frac{x}{2}} t^{\frac{n}{2}-(k+2)}e^{-t}dt=\int_0^{\frac{x}{2}} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Esta última integral se aproxima como en la parte 1).

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
F(2k+3,x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\right.\\
&\quad \left.\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-3}+\cdots\div\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-(k+1)}\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}+\frac{k+\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-\frac{1}{2}}+\right.\\
&\quad \left.\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\sqrt{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k}+\frac{k+\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}+\right.\\
&\quad \left.\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-2}+\cdots+\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\sqrt{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2}{1\times 3\sqrt{\pi}}\frac{x}{2}+\frac{2^3}{1\times 3\times 5\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\right.\\
&\quad \left.\frac{2^k}{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}+\frac{2^{k+1}}{1\times 3\times\cdots\times(2k+1)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{k}\right).
\end{aligned}$$

Ponemos

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= 1+\frac{2}{1\times 3}\frac{x}{2}+\frac{2^2}{1\times 3\times 5}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{2^{k-1}}{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}\\
&\quad +\frac{2^k}{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k}\\
&= 1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{x}{5}\left(1+\frac{x}{7}\left(1+\cdots+\frac{x}{2k-1}\left(1+\frac{x}{2k+1}\right)\cdots\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Resulta que

$$F(2k+3,x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\sqrt{\frac{2x}{\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\theta(x),\quad x\geq 0.$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
F(1,x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad x\geq 0,\\
F(2,x) &= 1-e^{-\frac{x}{2}} \qquad x\geq 0,\\
F(2k+4,x) &= 1-e^{-\frac{x}{2}}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j \qquad x\geq 0,\ k=0,1,2,\ldots,\\
F(2k+3,x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\sqrt{\frac{2x}{\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\theta(x),\ x\geq 0, k=0,1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

donde la integral $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ se aproxima como en 1).

4.11. Distribución t de Student

Definición 9 *Una variable aleatoria T se dice que tiene una distribución de probabilidad t de Student con n grados de libertad si su función densidad está definida por*

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t \geq 0.$$

La función de distribución t de Student está definida mediante:

$$F(n,k) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cuando $n = 1$, tenemos

$$F(1,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

que es conocida con el nombre de distribución de Cauchy.

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $h(n,t) = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces $h(-t) = h(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, luego

$$F(n,x) = 0{,}5 + \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x h(n,t)dt, \ \ x \in \mathbb{R},$$

y si $x < 0$, $\int\limits_0^x h(n,t)dt = -\int\limits_0^{-x} h(n,t)dt$, se sigue que

$$F(n,x) = \begin{cases} 0{,}5 - \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_0^{-x} h(n,t)dt, & \text{si } x < 0, \\ 0{,}5 + \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_0^{x} h(n,t)dt, & \text{si } \ x > 0. \end{cases}$$

Por otro lado,

$$1 = 0{,}5 + \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\int_0^x h(n,t)dt + \int_x^\infty h(n,t)dt\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde

$$F(n,x) = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_x^\infty h(n,t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 10^{-10}$). Ponemos

$$G(n,x) = \int_0^x h(n,t)dt \quad x \in \mathbb{R},\ n = 2, 3, \ldots.$$

En lo que sigue, nos ocuparemos de aproximar $G(n,x)$ con una precisión ε. Para $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo, $n > 1$, $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ y $\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ se calculan con una precisión ε.

Para obtener una relación que ligue x con n de modo que

$$\int_x^\infty h(n,t)dt < 10^{-10},$$

aplicamos el criterio de comparación para integrales impropias. Para el efecto, sea $g(t) = \frac{1}{t^2}$, $t \geq 1$. Entonces $\int_1^\infty g(t)dt = 1$, y

$$\frac{h(n,t)}{g(t)} = t^2\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad n>1,$$

luego existe $x>1$ tal que $t^2\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} < 10^{-10}$, si $t \geq x$, $n>1$.

Por ejemplo para $n = 11$, esta última relación se verifica si $t \geq 40$. Para $n = 40$ se tiene $t \geq 12$, para $n = 140$ obtenemos $t \geq 8$.

Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n > 1$, notamos con

$$\hat{x}_n = Min\left\{t>0 \mid t^2\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} < 10^{-10}\right\},$$

el término $\int_{\hat{x}_n}^\infty h(n,t)dt$ será despreciado, pués por el criterio del cociente se tiene

$$\int_{\hat{x}_n}^\infty h(n,t)dt < 10^{-10}\int_{\hat{x}_n}^\infty \frac{dt}{t^2} \leq 10^{-10}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 10^{-10},$$

consecuentemente $F(n,x)$ se aproxima por 1 si $x \geq \hat{x}_n$.

La aproximación de $G(n,x)$ se limitará al intervalo $]0,\hat{x}_n[$.

Sea $u = \arctan(\frac{t}{\sqrt{n}})$ entonces $\tan(u) = \frac{t}{\sqrt{n}}$y para $t = x$, notaremos $y_n(x) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})$. Entonces

$$\tan(y_n(x)) = \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{\operatorname{sen}(y_n(x))}{\cos(y_n(x))},$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(y_n(x)) &= \frac{x}{\sqrt{n+x^2}}, \\ \cos(y_n(x)) &= \left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} G(n,x) &= \int_0^x h(n,t)dt = \int_0^{y_n(x)} \frac{\sqrt{n}\sec^2(u)du}{(1+\tan^2(u))^{\frac{n+1}{2}}} = \sqrt{n}\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-1}(u)du \\ &= \sqrt{n}\int_0^{y_n(x)} \cos(t)\cos^{n-2}(t)dt \quad n\geq 2. \end{aligned}$$

Integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} G(n.x) &= \sqrt{n}\left(\operatorname{sen}(y_n(x))\cos^{n-1}(y_n(x)) + (n-2)\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-3}(t)(1-\cos^2(t))dt\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\operatorname{sen}(y_n(x))\cos^{n-2}(y_n(x)) + (n-2)\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-3}(t)dt\right) - (n-2)G(n,k) \end{aligned}$$

donde

$$G(n,k) = \sqrt{n}\left(\frac{(\operatorname{sen}(y_n(x))\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-3}(t)dt\right) \quad n\geq 3.$$

Esta fórmula recursiva será utilizada para obtener una expresión general de $F(n,x)$ $n \geq 3$.

Para $n = 2$ tenemos

$$G(2,x) = \sqrt{2}\int_0^{y_2(x)} \cos(u)du = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(y_2(x)) = \sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}},$$

$$F(2,x) = 0{,}5 + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma(1)}\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = 0{,}5 + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \quad x \geq 0.$$

Puesto que

$$\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-3}(t)dt = \frac{\mathrm{sen}(y_n(x))\cos^{n-4}(y_n(x))}{n-3} + \frac{n-4}{n-3}\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-5}(t)dt,$$

entonces

$$\begin{aligned} G(n,x) &= \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(y_n(x))\left(\frac{\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\cos^{n-4}(y_n(x))\right) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{n}(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-5}(t)dt. \end{aligned}$$

Continuando con este procedimiento k veces, tenemos

$$\begin{aligned} G(n,x) &= \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(y_n(x))\left(\frac{\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1} + \tfrac{n-2}{(n-1)(n-3)}\cos^{n-4}(y_n(x)) + \right. \\ &\quad \left. + \tfrac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\cos^{n-6}(y_n(x)) + \cdots + \tfrac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k+2)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)}\cos^{n-2k}(y_n(x))\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{n}(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)}\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-2k-1}(t)dt. \end{aligned}$$

Consideramos dos casos: n par y n impar.

1. Supongamos que n es impar; esto es, $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $n - 2k - 1 = 0$,

$$\int_0^{y_n(x)} dt = y_n(x),$$

$$\frac{\sqrt{n}(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)} = \frac{\sqrt{n}(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times 1}{2k(2k-2)\times\cdots\times 2} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

$$\begin{aligned} G(n,x) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}y_n(x) + \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(y_n(x))\left(\frac{\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\cos^{n-4}(y_n(x)) + \right. \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\cos^{n-6}(y_n(x)) + \cdots + \\ &\quad \left. \frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k+2)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)}\cos^{n-2k}(y_n(x))\right) \end{aligned}$$

Para $n = 2k+1$, se tiene la siguiente expresión para el cálculo de $F(2k+1,x) \quad k = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} F(2k+1,x) &= 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\mathrm{sen}(y_n(x))\left(\frac{\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1}\right. \\ &\quad + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\cos^{n-4}(y_n(x)) + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-3)(n-5)}\cos^{n-6}(y_n(x)) + \cdots + \\ &\quad \left. \frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times 3}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times 4}\cos^3(y_n(x)) + \frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times 1}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times 2}\cos(y_n(x))\right). \end{aligned}$$

Reemplazando $\operatorname{sen}(y_n(x)) = \frac{x}{\sqrt{n+x^2}}$, $\cos(y_n(x)) = \left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{1/2}$ y tomando en cuenta que $\frac{n-2j}{2} = \frac{2k+1-2j}{2} = k-j+\frac{1}{2}$, $j=1,2,\ldots,k$, se tiene

$$\begin{aligned}
F(2k+1,x) &= 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}}) + \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{x}{\sqrt{n+x^2}}\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-\frac{1}{2}} + \right.\\
&\quad + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-\frac{3}{2}} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-\frac{5}{2}} + \cdots +\\
&\quad \left.\frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times 3}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times 4}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times 1}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times 2}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

Sea $z = \frac{n}{n+x^2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(2k+1,x) &= 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}}) + \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\sqrt{n}x}{n+x^2}\left(\frac{z^{k-1}}{2k} + \frac{2k-1}{2k(2k-2)}z^{k-2} + \right.\\
&\quad + \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)(2k-u)}z^{k-3} + \cdots + \frac{(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times 3}{2k(2k-2)\times\cdots\times 4}z\\
&\quad \left. + \frac{(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times 1}{2k(2k-2)\times\cdots\times 2}\right)\\
&= 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}}) + \frac{\sqrt{n}}{\pi}\frac{x}{n+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{2\times 4}{3\times 5}z^2 + \frac{2\times 4\times 6}{1\times 3\times 5\times 7}z^3 + \cdots + \right.\\
&\quad \left.\frac{2\times 4\times\cdots\times 2(k-2)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-3)}z^{k-2} + \frac{2\times 4\times\cdots\times 2(k-1)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1)}z^{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Por ejemplo, para $x \geq 0$ se tiene: $z = \frac{n}{n+x^2}$, y

$$F(3,x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{x}{3+x^2},$$

$$F(5,x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{5}}) + \frac{\sqrt{5}}{\pi}\frac{x}{5+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}z\right),$$

$$F(7,x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{7}}) + \frac{\sqrt{7}}{\pi}\frac{x}{7+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}z\left(1 + \frac{4}{5}z\right)\right),$$

$$F(9,x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{9}}) + \frac{\sqrt{9}}{\pi}\frac{x}{9+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}z\left(1 + \frac{4}{5}z\left(1 + \frac{6}{7}z\right)\right)\right),$$

así sucesivamente.

2. Supongamos que $n = 2k+2$, $k = 0,1,2,\ldots$. Entonces $n-2k-1 = 1$,

$$\int_0^{y_n(x)} \cos^{n-2k-1}(t)dt = \int_0^{y_n(x)} \cos(t)dt = \operatorname{sen}(y_n(x)),$$

y como

$$\frac{\sqrt{n}(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)} = \sqrt{n}\frac{2k(2k-2)\times\cdots\times 2}{(2k+1)(2k-1)\times\cdots\times 3} = \sqrt{\pi n}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
G(n,x) &= \sqrt{\pi n}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\operatorname{sen}(y_n(x)) + \sqrt{n}\operatorname{sen}(y_n(x))\left(\frac{\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\cos^{n-4}(y_n(x))\right.\\
&\quad + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\cos^{n-6}(y_n(x)) + \cdots +\\
&\quad \left.\frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k+2)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)}\cos^{n-2k}(y_n(x))\right).
\end{aligned}$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
F(2k+2,x) &= 0{,}5+\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}G(n,x)\\
&= 0{,}5+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(y_n(x))+\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\operatorname{sen}(y_n(x))\left(\frac{\cos^{n-2}(y_n(x))}{n-1}+\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\right.\\
&\quad \cos^{n-4}(y_n(x))+\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\cos^{n-6}(y_n(x))+\cdots+\\
&\quad \left.\frac{(n-2)(n-4)\times\cdots\times(n-2k+2)}{(n-1)(n-3)\times\cdots\times(n-2k+1)}\cos^{n-2k}(y_n(x))\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(2k+2,x) &= 0{,}5+\frac{x}{2\sqrt{n+x^2}}+\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)}\frac{x}{\sqrt{n+x^2}}\left(\frac{1}{2k+1}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^k+\right.\\
&\quad \frac{2k}{(2k+1)(2k-1)}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-1}+\frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-2}+\cdots+\\
&\quad \left.\frac{2k(2k-2)\times\cdots\times 4}{(2k+1)(2k-1)\times\cdots\times 3}\times\frac{n}{n+x^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(2k+2,x) &= 0{,}5+\frac{x}{2\sqrt{n+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{n}{n+x^2}+\frac{3}{2^3}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^2+\frac{5\times 3}{3\times 2^4}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^3\right.\\
&\quad +\cdots+\frac{(2k-5)(2k-7)\times\cdots\times 3\times 1}{(k-2)!\;2^{k-2}}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-2}+\\
&\quad \frac{(2k-3)(2k-5)\times\cdots\times 3\times 1}{(k-2)!\;2^{k-1}}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{k-1}+\\
&\quad \left.\frac{(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times 1}{k!\;2^k}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Haciendo $z=\frac{n}{n+x^2}$, tenemos

$$\begin{aligned}
F(2k+2,x) &= 0{,}5+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{n+x^2}}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{3}{2^3}z^2+\frac{5\times 3}{3\times 2^4}z^3+\cdots+\right.\\
&\quad \frac{(2k-5)(2k-7)\times\cdots\times 3\times 1}{(k-2)!\,2^{k-2}}z^{k-2}+\frac{(2k-3)(2k-5)\times\cdots\times 3\times 1}{(k-1)!\,2^{k-1}}z^{k-1}+\\
&\quad \left.+\frac{(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times 1}{k!\,2^k}z^k\right)
\end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
F(4,x) &= 0{,}5+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{4}{4+x^2}\right)=0{,}5+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\left(1+\frac{2}{4+x^2}\right)\\
F(6,x) &= 0{,}5+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{6+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{6}{6+x^2}+\frac{3}{2^3}\left(\frac{6}{6+x^2}\right)^2\right)\\
&= 0{,}5+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{6+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{6}{6+x^2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{6}{6+x^2}\right)\right)\\
F(8,x) &= 0{,}5+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{8+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{8}{8+x^2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{8}{8+x^2}\left(1+\frac{5}{2}\frac{8}{8+x^2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

En resumen

$F(1,x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(x)$, $x\in\mathbb{R}$,

$F(2,x) = 0{,}5 + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$, $x \geq 0$.

Para $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ y $x \geq 0$, $z = \frac{n}{n+x^2}$,

$$\begin{aligned} F(2k+1,x) &= 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}}) + \frac{\sqrt{n}}{\pi}\frac{x}{n+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{2\times 4}{3\times 5}z^2 + \frac{2\times 4\times 6}{1\times 3\times 5\times 7}z^3 + \cdots + \right. \\ & \left. \frac{2\times 4\times\cdots\times 2(k-2)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-3)}z^{k-2} + \frac{2\times 4\times\cdots\times 2(k-1)}{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}z^{k-1}\right) \end{aligned}$$

Para $n = 2k+2$, $k = 1, 2, 3, \ldots, x \geq 0$, $z = \frac{n}{n+x^2}$,

$$\begin{aligned} F(2k+2,x) &= 0{,}5 + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{n+x^2}}\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{2^3}z^2 + \frac{5\times 3}{3\times 2\times 2^3}z^3 + \cdots + \right. \\ & \left. \frac{(2k-3)(2k-5)\times\cdots\times 3\times 1}{(k-1)!\,2^{k-1}}z^{k-1} + \frac{(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times 1}{k!\,2^k}z^k\right) \end{aligned}$$

Además $x \in \left]-\hat{x}_n, \hat{x}_n\right[$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$\hat{x}_n = \text{mín}\left\{ t > 0 | t^2 \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} < 10^{-10} \right\},$$

$F(n,x)$ se aproxima por 0 si $x \leq -\hat{x}_n$ y se aproxima por 1 si $x \geq \hat{x}_n$.

Por otro lado, para $x \in \left]-\hat{x}_n, x_n\right[$, $F(n,x)$ se escribe en forma anidada.

Se recomienda al lector elaborar un algoritmo para el cálculo de $F(n,x)$ así como su respectivo programa computacional. Los resultados del programa deben compararse con las tablas de la distribución t de Student proporcionados en los libros de probabilidad y estadística.

4.12. Distribución F (de Snedekor)

Definición 10 *Sean Y, Z variables aleatorias independientes que tienen distribuciones χ-cuadrada con m y n grados de libertad, respectivamente. La variable aleatoria*

$$X = \frac{\frac{y}{m}}{\frac{z}{n}}$$

tiene una distribución F definida por

$$F(m,n,x) = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(n+mt)^{-\frac{m+n}{2}}\,dt \qquad x \geq 0.$$

Para $m = 1$, se tiene

$$F(1,n,x) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(n+t)^{-\frac{n+1}{2}}\,dt \quad x \geq 0.$$

Efectuando el cambio de variable $t = u^2$, se obtiene

$$F(1,n,x) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} du,$$

que tiene la forma de la distribución t de Student. La función

$$G(n,\sqrt{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} (1 + \frac{u^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} du \qquad x \geq 0,$$

se aproxima utilizando el algoritmo de aproximación de la distribución t de Student. Luego

$$F(1,n,x) = 2\,G(n,\sqrt{x}) \quad x \geq 0,\ \ n = 1,2,\cdots.$$

Si $m = 2$, tenemos

$$F(2,n,x) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x \left(1+\frac{2}{n}t\right)^{-\frac{n+2}{2}} dt = 1 - \left(1+\frac{2x}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \qquad x \geq 0,\ n = 1,2,\cdots.$$

Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m > 2$. Entonces

$$F(m,n,x) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{mt}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}} dt.$$

Utilizando el cambio de variables $u = \frac{mt}{n}$, tenemos

$$\begin{aligned} F(m,n,x) &= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{mx}{n}} \left(\frac{nu}{m}\right)^{\frac{m}{2}-1} (1+u)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{n}{m} du \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{mx}{n}} t^{\frac{m}{2}-1}(1+t)^{-\frac{m+n}{2}} dt \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Para $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m > 2$, definimos

$$I(m,n,\alpha) = \int_0^\alpha t^{\frac{m}{2}-1}(1+t)^{-\frac{m+n}{2}} dt \quad \alpha \geq 0,$$

y mediante el método de integración por partes, obtenemos

$$I(m,n,\alpha) = -\frac{\alpha^{\frac{m}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-2+n}{2}}}{\frac{m-2+n}{2}} + \frac{\frac{m}{2}-1}{\frac{m-2+n}{2}} \times I(m-2,n,x).$$

Esta fórmula recursiva la aplicaremos sucesivamente para obtener una expresión que nos permita describir un algoritmo de cálculo de $F(m,n,\alpha)$. Así,

$$\begin{aligned} I(m-2,n,\alpha) &= -\frac{\alpha^{\frac{m-2}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-4+n}{2}}}{\frac{m-4+n}{2}} + \frac{\frac{m-2}{2}-1}{\frac{m-4+n}{2}} \times I(m-4,n,\alpha), \\ I(m-4,n,\alpha) &= -\frac{\alpha^{\frac{m-4}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-6+n}{2}}}{\frac{m-6+n}{2}} + \frac{\frac{m-4}{2}-1}{\frac{m-6+n}{2}} \times I(m-6,n,\alpha). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I(m,n,\alpha) &= -\frac{\alpha^{\frac{m}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-2+n}{2}}}{\frac{m-2+n}{2}} - \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-2}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-4+n}{2}} \\ &\quad -\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\left(\frac{m-6+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-4}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-6+n}{2}} + \\ &\quad \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\left(\frac{m-4}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\left(\frac{m-6+n}{2}\right)} \times I(m-6,n,\alpha). \end{aligned}$$

Continuando con este procedimiento k veces, obtenemos

$$\begin{aligned} I(m,n,\alpha) &= \frac{\alpha^{\frac{m}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-2+n}{2}}}{\frac{m-2+n}{2}} - \frac{\frac{m}{2}-1}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-2}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-4+n}{2}} \\ &\quad -\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\left(\frac{m-6+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-4}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-6+n}{2}} - \cdots - \\ &\quad \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+4}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-2k+2}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-2k+n}{2}} + \\ &\quad \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+2}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+n}{2}\right)} \times I(m-2k,n,\alpha). \end{aligned}$$

1. Si $\frac{m-2k}{2}-1=0$, entonces $m=2k+2$, $k=1,2,3,\ldots,$

$$\begin{aligned} I(m-2k,n,\alpha) &= I(2,n,\alpha)=\int_0^\alpha (1+t)^{-\frac{m-2k+n}{2}}dt=\int_0^\alpha (1+t)^{-\frac{n+2}{2}}dt \\ &= \left.\frac{(1+t)^{-\frac{n+2}{2}+1}}{-\frac{n+2}{2}+1}\right|_0^\alpha=\frac{1}{\frac{n}{2}}\left(1-(1+\alpha)^{-\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\frac{n}{2}}{k!}, \end{aligned}$$

y para $j=1,2,\ldots,k$,

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2j+4}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2j+2+n}{2}\right)\left(\frac{m-2j+n}{2}\right)} \\ &= \frac{k(k-1)\times\cdots\times(k-j+2)}{\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{n}{2}+k-j+2\right)\left(\frac{n}{2}+k-j+1\right)} \\ &= \frac{k!}{(k-j+3)!\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{n}{2}+k-j+2\right)\left(\frac{n}{2}+k-j+1\right)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2j+4}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2j+2+n}{2}\right)\left(\frac{m-2j+n}{2}\right)} &= \frac{k(k-1)\times\cdots\times(k-j+2)}{\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{n}{2}+k-j+2\right)\left(\frac{n}{2}+k-j+1\right)} \\ &= \frac{k!}{(k-j+3)!\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{n}{2}+k-j+2\right)\left(\frac{n}{2}+k-j+1\right)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $m=2k+2$, $k=0,1,2,\ldots$, tomando en cuenta el desarrollo de $I(m,n,\alpha)$ y el cálculo de los coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned} F(m,n,\alpha) &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times I(m,n,\alpha)=\frac{\left(\frac{n}{2}+k\right)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\times\cdots\times\frac{n}{2}}{k!}\times I(m,n,\alpha) \\ &= 1-(1+\alpha)^{-\frac{n}{2}}\left(1+ny+\frac{n(n+2)}{2!}y^2+\frac{n(n+2)(n+4)}{3!}y^3+\cdots+\right. \\ &\quad \left.\frac{n(n+2)\times\cdots\times(n+2(k-1))}{k!}y^k\right), \end{aligned}$$

donde $\alpha=\dfrac{mx}{n}$ y $y=\dfrac{\alpha}{2(1+\alpha)}$.

En conclusión, si $m=2k+2$, $k=0,1,2,\ldots$, $n=1,2,3,\ldots$, $\alpha=\frac{mx}{n}$, $x\geq 0$, $y=\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}$, entonces

$$F(2k+2,n,\alpha)=1-(1+\alpha)^{-\frac{n}{2}}\left(1+ny\left(1+\tfrac{n+2}{2}y\left(1+\cdots+\tfrac{n+2(k-2)}{k-1}y\left(\tfrac{n+2(k-1)}{k}y\right)\cdots\right)\right)\right).$$

Ejemplos

1. Si $m=10$, $n=5$, $x=4{,}74$, se tiene

$$F(m,n,\alpha)=1-(1+\alpha)^{-\frac{n}{2}}\left(1+ny\left(1+\tfrac{n+2}{2}y\left(1+\tfrac{n+4}{3}y\left(1+\tfrac{n+6}{4}y\right)\right)\right)\right),$$

$\alpha=9{,}48$, $y=0{,}4522900763$, $F(10,\,5,\,9{,}48)=0{,}950104214$.

2. Si $n=32$ y $x=2{,}14$, obtenemos

$$F(10,\,32,\,0{,}66875)=0{,}9497430676.$$

2. Si $m = 2k+1$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$I(m-2k, n, x) = \int_0^\alpha t^{\frac{m-2k}{2}-1}(1+t)^{-\frac{m-2k+n}{2}} dt = \int_0^\alpha t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{n+1}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n\alpha}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt.$$

En la sección precedente se describió un procedimiento de cálculo de la función de distribución t de Student:

$$T(n,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^x \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \quad x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Dicho procedimiento se centró en calcular $\int_0^x \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \quad x \geq 0$. Esos resultados serán utilizados para calcular valores de $F(2k+1, n, x)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \geq 0$. Para el efecto, definimos

$$F_1(n,\beta) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\beta \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \quad \beta \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Si $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\beta \geq 0$, $z = \frac{n}{n+\beta^2}$, entonces

$$\begin{aligned} F_1(n,\beta) &= \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{\beta}{\sqrt{n}}) + \frac{2\sqrt{n}}{\pi}\frac{\beta}{n+\beta^2}\left(1 + \frac{2}{1\times 3}z + \frac{2\times 4}{1\times 3\times 5}z^2 + \frac{2\times 4\times 6}{1\times 3\times 5\times 7}z^3 + \cdots + \right. \\ & \left. \frac{2\times 4\times\cdots\times 2(k-2)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-3)}z^{k-2} + \frac{2\times 4\cdots\times 2(k-1)}{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}z^{k-1}\right). \end{aligned}$$

Si $n = 2k+2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} F_1(n,\beta) &= \frac{\beta}{\sqrt{n+\beta^2}}\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{2\times 1\times 2^2}z^2 + \frac{3\times 5}{3\times 2\times 1\times 2^3}z^3 + \cdots + \right. \\ & \left. \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{(k-1)!\,2^{k-1}}z^{k-1} + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!\,2^2}z^k\right). \end{aligned}$$

Volvamos al cálculo de $F(2k+1, n, x)$. Comencemos con el análisis del término que contiene $I(m-2k, n, x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{m+n1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+2}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+n}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{mx}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \\ = & \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{mx}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt = F_1(n, \sqrt{mx}). \end{aligned}$$

Luego

$$F(2k+1, n, \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times I(m, n, \alpha) = G(m, n, \alpha) + F_1(n, \sqrt{mx}),$$

donde

$$\begin{aligned} G(m,n,\alpha) &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(-\frac{\alpha^{\frac{m}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-2+n}{2}}}{\frac{m-2+n}{2}} - \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\alpha^{\frac{m-2}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-4+n}{2}}}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)}\right. \\ & -\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\left(\frac{m-6+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-4}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-6+n}{2}} - \cdots - \\ & \left.\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m-2}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+4}{2}-1\right)}{\left(\frac{m-2+n}{2}\right)\left(\frac{m-4+n}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{m-2k+n}{2}\right)}\alpha^{\frac{m-2k+2}{2}-1}(1+\alpha)^{-\frac{m-2k+n}{2}}\right). \end{aligned}$$

Teniendo presente que $m = 2k+1$, $k = 1, 2, \ldots$, $G(m,n,\alpha)$ se escribe en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} G(m,n,\alpha) &= -\alpha^{\frac{1}{2}}(1+\alpha)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\alpha^{k-1}(1+\alpha)^{-k+1}}{\frac{n+2k-1}{2}}+\right. \\ & \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha^{k-2}(1+\alpha)^{-k+2}}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)}+\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k\frac{3}{2}\right)(1+\alpha)^{-k+3}}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)\left(\frac{n+2k-5}{2}\right)}+\cdots+ \\ & \left.\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{n+1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Sea $y = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, la expresión anterior se escribe como

$$\begin{aligned} G(m,n,\alpha) &= -\sqrt{y}(1+\alpha)^{-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{\frac{n+2k-1}{2}}y^{k-1}+\right. \\ & \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)}y^{k-2}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)\left(\frac{n+2k-5}{2}\right)}y^{k-3}+\cdots+ \\ & \left.\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{n+1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Para obtener una forma práctica de cálculo de $G(m,n,\alpha)$ debemos expresaar de modo conveniente todos los coeficientes. Para el efecto, obervemos que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\frac{n+2k-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\frac{n+2k-3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{k-\frac{1}{2}}{\left(\frac{m+2k-1}{2}\right)\left(\frac{m+2k-3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\frac{n+2k-5}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{2}}{\left(k-\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)\left(\frac{n-2k-5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2k-5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\frac{n+2k-7}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{2}}{\left(k-\frac{5}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}}{\left(\frac{n+2k-1}{2}\right)\left(\frac{n+2k-3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{n+1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(m,n,\alpha) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{y}\left(1+\alpha^{-\frac{n}{2}}\right)\left(1+\frac{n+1}{y}\left(1+\frac{n+3}{5}y\left(1+\cdots+\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.\frac{n+2k-7}{2k-5}\left(1+\frac{n+2k-5}{2k-3}y\left(1+\frac{n+2k-3}{2k-1}y\right)\right)\cdots\right)\right)\right) \end{aligned}$$

que es una expresión muy fácil de programar.

Debemos notar que si $n = 2j$, $j = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{(j-1)!} = \frac{\left(j-\frac{1}{2}\right)}{j-1}\frac{\left(j-\frac{3}{2}\right)}{j-2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

y si $n = 2j+1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} &= \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\frac{1}{2})} = \frac{j!}{\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{j}{j-\frac{1}{2}}\times\frac{j-1}{j-\frac{3}{2}}\times\cdots\times\frac{1}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Si $m = 9$, $n = 15$, $x = 2{,}59$. Se tiene $k = 4$, $j = 7$,

$$\begin{aligned} F_1(n,\beta) &= \frac{1}{2}\arctan(\frac{\beta}{\sqrt{15}}) + \frac{2\sqrt{15}}{\pi}\frac{\beta}{15+\beta^2}\left(1+\frac{2z}{3}\left(1+\frac{4z}{5}\left(1+\frac{6z}{7}\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\left(1+\frac{8z}{9}\left(1+\frac{10z}{11}\left(1+\frac{12z}{13}\right)\right)\right)\right)\right)\right), \end{aligned}$$

donde $\beta = \sqrt{mx}$, $z = \frac{n}{n+\beta^2}$. Entonces $\beta = 4{,}828043082$, $z = 0{,}3915426782$, $x = \frac{mx}{n} = 1{,}554$, $y = \frac{\alpha}{1+\alpha} = 0{,}608457322$, $F_1(n,\beta) = 0{,}9997786188$.

$$\begin{aligned} G(m,n,\alpha) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{y}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)}(1+\alpha)^{-\frac{15}{2}}\left(1+\frac{16y}{3}\left(1+\frac{18y}{5}\left(1+\frac{20y}{7}\right)\right)\right) \\ &= -0{,}04961972164. \end{aligned}$$

$$F(9,15,2{,}59) = G(m,n,\alpha) + F_1(n,\beta) = 0{,}9501588972.$$

4.13. Ejercicios

1. Aplique la función gama de Euler para calcular las integrales siguientes

   a) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/4}}dt$. **b)** $\int_0^\infty t^{1/2}e^{-t^4}dt$. **c)** $\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{1/3}}dt$. **d)** $\int_0^\infty t^2e^{-t^3}dt$. **e)** $\int_0^\infty t\,e^{-\sqrt{t}}dt$.

   f) $\int_0^\infty t^3e^{-t^{1/3}}dt$. **g)** $\int_0^\infty x^me^{-ax^{1/n}}dx$, donde $a\in\mathbb{R}^+$, $m,n\in\mathbb{Z}^+$.

   h) $\int_0^\infty x^{1/m}e^{-ax^n}dx$, donde $a\in\mathbb{R}^+, m,n\in Z^+$.

2. Sea $p\in\mathbb{R}^+$. Demuestre que $\Gamma(p) = \int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dt$.

3. Utilice el resultado del ejercicio 2) para calcular las siguientes integrales.

   a) $\int_0^1 \frac{dx}{\left(\ln(\frac{1}{x})\right)^{1/3}}$. **b)** $\int_0^1 \frac{dx}{\left(\ln(\frac{1}{x})\right)^{1/4}}$. **c)** $\int_0^1(\ln(x))^2\,dx$. **d)** $\int_0^1(\ln(x))^6\,dx$.

   e) $\int_0^1(\ln(x))^{2k}\,dx$, donde $k\in\mathbb{Z}^+$. **f)** $\int_0^1 \frac{dx}{\left(\ln(\frac{1}{x})\right)^{1/m}}$, donde $m\in\mathbb{Z}^+$.

4. Sean $\alpha,p\in\mathbb{R}^+$. Demuestre que $\Gamma(p) = \alpha^p\int_0^\infty t^{p-1}e^{-\alpha t}dt$.

5. Calcular las integrales siguientes

   a) $\int_0^1 x^{1/2}(\ln(x))^3dx$. **b)** $\int_0^1 x^{1/3}(\ln(x))^4dx$. **c)** $\int_0^1 x^2(\ln(x))^{1/5}dx$.

   d) $\int_0^1 x^p(\ln(x))^m dx$, donde $p\in\mathbb{R}^+$, $m\in\mathbb{Z}^+$.

6. Sea $p\in\mathbb{R}^+$. Demostrar que
$$\frac{d\Gamma(p)}{dp} = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}(\ln(t))dt.$$

7. Calcular los términos de la sucesión $(\Gamma(-n+\frac{1}{2}))$, donde $n\in\mathbb{Z}^+$.

8. Sea $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ la función definida por
$$g(p) = 2[(2-\sqrt{\pi})p(-3+p)+4{,}5-2\sqrt{\pi}].$$

a) La función g es una interpolante de $\Gamma(p)$ con $p \in [1,2]$. Calcule $g(1)$, $g(1{,}5)$, $g(2)$ y compare con $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ y $\Gamma(2)$.

b) Utilizando la función g bosqueje la gráfica de $\Gamma(p)$, $p \in [1,2]$.

c) Tomando en cuenta que $\Gamma(p) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \infty$, $\Gamma(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \infty$; y de la información proporcionada en a) y b), bosqueje la gráfica de $\Gamma(p)$, $p \in \mathbb{R}^+$.

d) Bosqueje la gráfica de $\Gamma(p)$ para $p \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$.

9. Aplique las propiedades de la función beta para calcular las integrales siguientes.

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(\theta)\cos^3(\theta)d\theta$. **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\theta)\cos^5(\theta)d\theta$. **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$.

   e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,d\theta$. **f)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^9(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$. **g)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{10}(\theta)\,d\theta$. **h)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9(\theta)\,d\theta$.

10. Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$. Utilizar la transformación $t = \dfrac{x}{1+x}$ para demostrar que

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$$

11. Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$.

   a) Demostrar que el área de la región S limitada por la curva de ecuación $x^{\frac{2}{p}} + y^{\frac{2}{q}} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ y los ejes coordenados viene dada por:

$$a(S) = \frac{pq}{2(p+q)} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)} = \frac{pq}{2(p+q)} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

   b) Calcule $a(S)$ para p, q en los casos siguientes: $p = q = 1$, $p = q = 2$, $p = q = 3$ (arco de asteroide).

12. Calcule las integrales siguientes en términos de la función beta y luego en términos de la función gama.

   a) $\int_0^1 x^7(1-x)^8dx$. **b)** $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^4dx$. **c)** $\int_0^1 x^3(1-x)^{1/2}dx$. **d)** $\int_0^a x^2(a-x)^5dx$, $a > 0$.

   e) $\int_0^a x^m(a-x)^n dx$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$. **f)** $\int_0^a x^m(a^n - x^n)^{\frac{1}{2}}dx$, donde $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

   g) $\int_0^2 \dfrac{x^{1/2}dx}{(4-x^2)^{1/5}}$.

13. Calcular las integrales siguientes en términos de la función gama.

   a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^6}\,dx$. **b)** $\int_0^1 (1-x^4)^{1/5}dx$. **c)** $\int_0^1 (1-x^8)^{-\frac{1}{3}}dx$.

   d) $\int_0^1 (1-x^{2k})^{1/n}dx$, $k, n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$. **e)** $\int_0^1 (1-x^m)^{-1/n}dx$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

14. En muchos casos se requieren valores de la distribución normal con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. Establezca las modificaciones necesarias para generar un algoritmo que permita calcular valores de dicha función de distribución con $\varepsilon = 10^{-3}$.

15. Se requieren calcular valores de la distribución gama con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. Establezca las modificaciones necesarias para generar un algoritmo que permita calcular valores de dicha función de distribución con $\varepsilon = 10^{-3}$. Calcule algunos de ellos y verifique sus resultados con los dados en los textos de Estadística y Probabilidades.

16. Se desea calcular valores de la distribución χ-cuadrada con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. Establezca las modificaciones necesarias para generar un algoritmo que permita calcular valores de dicha función de distribución con $\varepsilon = 10^{-3}$. Calcule algunos de ellos y verifique sus resultados con los dados en los textos de Estadística y Probabilidades.

17. Establezca las modificaciones necesarias para generar un algoritmo que permita calcular valores de la función de distribución t de Student con $\varepsilon = 10^{-3}$. Calcule algunos de ellos y verifique sus resultados con los dados en los textos de Estadística y Probabilidades.

18. Establezca las modificaciones necesarias para generar un algoritmo que permita calcular valores de la función de distribución F de Snedekor con $\varepsilon = 10^{-3}$. Calcule algunos de ellos y verifique sus resultados con los dados en los textos de Estadística y Probabilidades.

4.14. Lecturas complementarias y bibliografía

1. Tom M. Apostol, Análisis Matemático, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.

2. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 1, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1977.

3. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 2, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.

4. R. M. Barbolla, M. García, J. Margalef, E. Outerelo, J. L. Pinilla. J. M. Sánchez, Introducción al Análisis Real, Editorial Alambra Universidad, Madrid, 1981.

5. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México,2002.

6. Alan W. Bush, Perturbation Methods for Engineers and Scientists, CRC Press, Boca Raton, 1992.

7. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.

8. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. Cálculo Numérico Fundamental, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.

9. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. S. Schuwalowa, Métodos Numéricos de Análisis, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.

10. John E. Freund, Ronald E. Walpole, Estadística Matemática con Aplicaciones, Cuarta Edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1990.

11. Waltson Fulks, Cálculo Avanzado, Editorial Limusa, México, 1973.

12. Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, Análisis Numérico con Aplicaciones, Sexta Edición, Editorial Pearson Educación de México, México, 2000.

13. Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

14. E. J. Hinch, Perturbation Methods, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

15. William W. Hines, Douglas C. Montgomery, Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración, Compañía Editorial Continental, México, 1986.

16. Erwin Kreyszig, Introducción a la Estadística Matemática, Editorial Limusa, México, 1981.

17. L. Lebart, A. Morineau, J.-P. Fénelon, Tratamiento Estadístico de Datos, Editorial Marcombo Boixareu Editores, Barcelona, 1985.

18. Thomas M. Little, F. Jackson Hills, Métodos Estadísticos para la Investigación en la Agricultura, Editorial Trillas, México, 2002.

19. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.

20. William Mendenhall, Dennis D. Wackerly, Richard L. Scheaffer, Estadística Matemática con Aplicaciones, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.

21. Paul L. Meyer, Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas, Editorial Fondo Educativo Interamericano, México, 1973.

22. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.

23. Anthony Ralston, Introducción al Análisis Numérico, Editorial Limusa, México, 1978.

24. Francis Scheid, Theory and Problems of Numerical Analysis, Schaum's Outline Series, Editorial McGraw-Hill, New York, 1968.

25. J. W. Schmidt, R. E, Taylor, Análisis y Simulación de Sistemas Industriales, Editorial Trillas, México, 1979.

26. Stephen P. Shao, Estadística para Economistas y Admistradores de Empresas, Editorial Herrero Hermanos, México, 1967.

27. Bhimsen K. Shivamoggi, Perturbation Methods for Differential Equations, Editorial Birkhäuser, Boston, 2003.

28. Fausto I. Toranzos, Estadística, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1962.