

Capítulo 5

Resolución Numérica de Ecuaciones no Lineales

Resumen

En este capítulo se tratan problemas primeramente de existencia de soluciones de ecuaciones no lineales en una sola variable. El punto de partida lo constituye el teorema de Bolzano con el que se genera el algoritmo de separación de las raíces y el método de bisección. A continuación se trata el teorema de Banach del punto fijo que asegura la existencia del punto fijo de aplicaciones contractivas definidas en intervalos cerrados y acotados de \mathbb{R} , lo que conduce a su vez a construir aplicaciones contractivas en intervalos cerrados y acotados donde están localizada (aislada) una sola raíz de la ecuación $f(x) = 0$. De este modo se generan algunos métodos iterativos que permiten calcular en forma aproximada la o las raíces de dicha ecuación. Entre los métodos más importantes citamos el de punto fijo, punto fijo modificado, Newton Raphson, Newton modificado, secantes, regula-falsi. Por otro lado, interesa conocer la rapidez con la que se aproxima la solución y comparar los diferentes métodos. Con esta información se plantean métodos de aceleración de la convergencia, básicamente se desarrollan dos: el método Δ^2 de Aitken y el método de Steffensen. Se consideran métodos para determinar las raíces de multiplicidad. Se concluye con el estudio de las ecuaciones algebraicas, es decir ecuaciones con funciones polinomiales o lo que es lo mismo el cálculo de las raíces de polinomios. Damos prioridad a los polinomios con coeficientes reales y nos centramos en el cálculo de las raíces reales; para el efecto, la primera tarea es localizar las raíces para en una segunda etapa proceder al cálculo de las mismas.

5.1. Introducción

En la actualidad se pone mucha atención el problema de la contaminación ambiental, particularmente del agua, pues en el futuro se debe proteger mucho más a este recurso. A continuación describimos brevemente un modelo matemático de control de la calidad del agua propuesto por Streeter y Phelps (1925) ampliamente utilizado (véase G. Kiely, volumen II, R. Banks)

Los microorganismos que requieren de oxígeno para su crecimiento se llama aeróbicos y aquellos que no lo requieren se llaman anaeróbicos. En el caso de los microorganismos aeróbicos, el oxígeno debe estar disponible en forma de oxígeno libre disuelto. Los microorganismos que pueden crecer en presencia de oxígeno se llaman aeróbicos obligados. Cuando un nutriente entra en una corriente de agua, los microorganismos aeróbicos consumen el oxígeno disuelto al efectuar la descomposición del nutriente, de este modo, el nutriente ejerce una demanda sobre la disponibilidad de oxígeno disuelto.

Los nutrientes disueltos causan contaminación cuando entran en una corriente de agua en cantidades suficientes para destruir la capacidad de autopurificación de esta; esto es, si los nutrientes disueltos entran al agua con una tasa tal que el oxígeno disuelto se gaste más rápidamente de lo que puede reponer, el agua se desoxigena. En estas condiciones, ningún aeróbico obligado (desde los microorganismos hasta los

peces) podrá sobrevivir y los contaminantes orgánicos se acumularán en el agua dando lugar a los procesos anaeróbicos que producirán sustancias malolientes de los contaminantes y el agua quedará contaminada.

Uno de los parámetros de calidad del agua y aguas residuales es la demanda bioquímica de oxígeno (DBO) que se define (Gerard Kiely, Vol.II, página 413) como la cantidad de oxígeno que necesitan los organismos vivos (aeróbicos) en la fase de estabilización de la materia orgánica de las aguas y aguas residuales.

La DBO es una medida de su poder para causar contaminación y se produce cuando la demanda de oxígeno (DO) sobrepasa a la cantidad de oxígeno disponible.

La prueba de DBO estima el oxígeno gastado en la descomposición biológica de una muestra residual y es una simulación de laboratorio del proceso microbiano de autpurificación. Es importante el conocimiento preciso de la concentración de oxígeno disuelto en el agua para la prueba de DBO que es útil como indicador del estado de contaminación de una corriente de agua. La prueba DBO consiste en el proceso de laboratorio siguiente.

En una muestra de los residuos se diluye una mezcla con una población mixta adecuada de microorganismos. Se mide la concentración de oxígeno disuelto DO al instante $t = 0$. Esta mezcla se incuba a una temperatura fija ($T = 20^{\circ}C$) y luego de cierto tiempo ($t = 5$ días, $t = 15$ días, $t = 21$ días) se mide nuevamente la concentración de oxígeno disuelto $DO(t)$. El cambio $DO(0) - DO(t)$ mide la cantidad de oxígeno no utilizado en ese tiempo por los microorganismos al procesar nutrientes de la muestra de agua residual. Los más usuales son DBO_5 para $t = 5$ días, DBO_{15} para $t = 15$ días, DBO_{21} para $t = 21$ días. La primera prueba de este género fue propuesta en 1913.

El modelo más sencillo se establece en los términos siguientes: la tasa de descomposición de materia orgánica es proporcional a la cantidad de materia orgánica disponible, esto es,

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L,$$

donde L es la demanda bioquímica de oxígeno remanente en $\frac{mg}{l}$, $k_1 > 0$ es el coeficiente de velocidad de desoxigenación de DBO en días⁻¹.

Al instante $t = 0$, la DBO inicial del efluente en el punto de vertido a un curso de agua se le nota L_0 . Se tiene

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} &= -k_1 L & t \in]0, T], \\ L(0) &= L_0, \end{cases}$$

cuya solución es $L(t) = L_0 e^{-k_1 t}$ $t \geq 0$.

El modelo de Streeter y Phelps establece que

$$\frac{dDO}{dt} = k_1 L_1 - k_2 DO = k_1 L_0 e^{-k_1 t} - k_2 DO,$$

con DO el déficit de oxígeno disuelto, $k_2 > 0$ es la velocidad de reaeración atmosférica medida en día⁻¹.

La solución de la ecuación diferencial precedente es

$$DO(t) = \frac{k_1 L_0}{k_2 - k_1} \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right) + d_0 e^{-k_2 t} \quad t \geq 0,$$

donde d_0 es el déficit de oxígeno disuelto en $t = 0$. La función $DO(t)$ $t \geq 0$ representa el déficit de oxígeno disuelto saturado en cualquier instante.

Supóngase $d_0 = 0,7 \frac{mg}{L}$, $k_1 = 0,25$ día⁻¹, $L_0 = 25 \frac{mg}{L}$, $t = 4$ días y $DO(4) = 9,2 \frac{mg}{L}$, se tiene

$$9,2 = 0,7 e^{-4k_2} + \frac{0,25 \times 25}{k_2 - 0,25} \left(e^{-4 \times 0,25} - e^{-4k_2} \right),$$

y de esta, se obtiene la siguiente ecuación:

$$9,2 = 0,7 e^{-4k_2} + \frac{6,25}{k_2 - 0,25} \left(e^{-1} - e^{-4k_2} \right),$$

para la que no existe una fórmula que permita calcular k_2 , consecuentemente se debe recurrir a métodos numéricos iterativos para calcular una solución aproximada, siempre que esta exista.

Esta clase de problemas son muy comunes en aplicaciones de la matemática.

Posición del problema

Sean $I \subset \mathbb{R}$ con $I \neq \emptyset$ un conjunto cerrado y f una función real de I en \mathbb{R} . Consideramos el problema siguiente

$$\text{hallar } \hat{x} \in I, \text{ si existe, tal que } f(\hat{x}) = 0.$$

Más precisamente, asignada la función f definida en I y en consecuencia la ecuación $f(x) = 0$, se trata de estudiar si dicha ecuación tiene o no solución en I , esto es, estudiar si existe al menos un $\hat{x} \in I$ tal que $f(\hat{x}) = 0$; y en el caso en que exista solución, interesa como calcular \hat{x} o como aproximar \hat{x} , mediante una sucesión $(x_n) \subset I$ tal que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{x} \text{ y } f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\hat{x}) = 0.$$

Definición 1 *Asignada la ecuación $f(x) = 0$, un elemento $\hat{x} \in I$ tal que $f(\hat{x}) = 0$ se denomina cero de f o raíz de la ecuación $f(x) = 0$.*

Para un número limitado de funciones reales pueden darse métodos directos de resolución de la ecuación $f(x) = 0$. Así por ejemplo.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y f la función real definida por $f(x) = ax + b \quad x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a},$$

$\hat{x} = -\frac{b}{a}$ es la raíz de $f(x) = 0$ o cero de f ya que $f(-\frac{b}{a}) = 0$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $f(x) = ax^2 + bx + c \quad x \in \mathbb{R}$. La ecuación

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0,$$

tiene solución en \mathbb{R} si y solo si $d = b^2 - 4ac \geq 0$; en cuyo caso las raíces de la ecuación vienen dadas como:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $d = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces complejas, una conjugada de la otra.

3. Sea f la función real definida por $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin x$. Entonces,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Las siguientes son ecuaciones que igualmente se resuelven fácilmente en el conjunto \mathbb{R} : $2^x = \frac{1}{64}$, $\log_3(x) = 243$.

Para las ecuaciones como las que a continuación se indican, no es posible determinar un método directo que permita calcular las raíces exactas, únicamente es posible resolverlas de manera aproximada y es éste el objetivo de este capítulo.

1. $x - \cos(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$.

2. $\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$.

3. $x^4 + 5x^3 - x^2 + 1 = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $4 - x^2 - e^{-3x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$
5. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, $c = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-t^2} dt$. Ponemos $x_0 = 0$ y definimos

$$g_j(x) = c - \int_{x_{j-1}}^x e^{-t^2} dt \quad x \in [x_{j-1}, 1], \quad j = 1, \dots, n. \quad g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Nota: Sea P un polinomio de grado 3, esto es $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad x \in \mathbb{R}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Mediante transformaciones adecuadas, la ecuación $P(x) = 0$ puede resolverse directamente mediante las denominadas fórmulas de Cardano. De manera similar, si $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \quad x \in \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 4 con coeficientes en \mathbb{R} , mediante el método de Euler pueden calcularse directamente las raíces (reales o complejas) de la ecuación $P(x) = 0$ (véase H. Hall y Knight, Kurosh, Kostrikin).

Para polinomios de grado $n \geq 5$ no existen métodos directos de cálculo de las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ con la excepción de casos muy particulares como por ejemplo los que se citan a continuación:

$$P(x) = x^5 - 32, \quad P(x) = x(x^2 + 1)(x^2 - 1), \quad P(x) = (x - 1)^5.$$

Las raíces reales de polinomios de grado 3 o 4 con coeficientes reales serán aproximadas mediante sucesiones.

5.2. Separación de las raíces.

En lo sucesivo supondremos que f es una función real definida en un subconjunto I de \mathbb{R} y en consecuencia tendremos asignada la ecuación $f(x) = 0$ en el conjunto I .

La primera tarea para el estudio de la ecuación $f(x) = 0$ es la existencia de soluciones. Para el efecto consideramos dos procedimientos: el método gráfico y el algoritmo de búsqueda del cambio de signo.

Definición 2 Una raíz $\hat{x} \in I$ de la ecuación $f(x) = 0$ se dice separada en un intervalo $[a, b] \subset I$ si este intervalo contiene únicamente a la raíz \hat{x} .

i. Método gráfico

- a) Si la función f puede ser graficada sin dificultad, la separación de las raíces se obtiene observando los intervalos en los cuales la gráfica de f corta al eje x .

Por lo general este procedimiento es limitado ya que la construcción de la gráfica conduce al estudio de la función f , estudio que puede resultar mas complicado que resolver la ecuación. En efecto, si f es derivable en I , para determinar los subconjuntos de I en los que f es creciente, decreciente, se deben resolver las inecuaciones $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y la ecuación $f'(x) = 0$ que pueden ser más complejas que la ecuación $f(x) = 0$. Si f'' existe en I , se deben determinar los subconjuntos de I en los que f es cóncava, convexa y determinar los puntos de inflexión de f , lo que conduce a calcular f'' y resolver las inecuaciones $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$ y la ecuación $f''(x) = 0$ que pueden resultar más difíciles que la ecuación $f(x) = 0$. Más adelante se exhiben ejemplos con estas características.

Por otro lado, las imprecisiones en el trazado de la gráfica pueden conducir a falsas interpretaciones.

- b) Si la ecuación $f(x) = 0$ puede escribirse como $g(x) - h(x) = 0$, donde g, h son funciones definidas en el conjunto I cuyas gráficas pueden trazarse fácilmente, entonces la ecuación $f(x) = 0$ se transforma en determinar los puntos $x \in I$ tales que $g(x) = h(x)$. Las raíces de f se separan observando los intervalos en los cuales sus correspondientes gráficas se cortan. Este procedimiento es también limitado.

Ejemplos

1. Considerar la ecuación: $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - \cos(x) = 0$. Se tiene $\cos(x) = x$. Ponemos $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = x$ $x \in \mathbb{R}$. En la figura siguiente se muestran las gráficas de estas dos funciones. Se observa que dichas gráficas se cortan en un punto. La ecuación propuesta tiene una raíz $\hat{x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

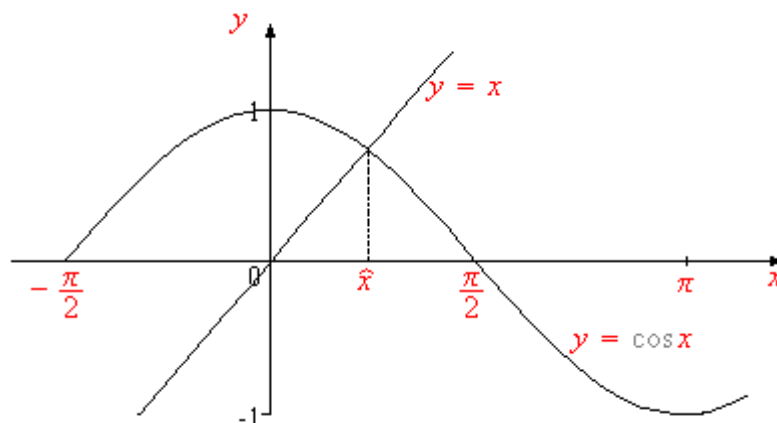


Figura 31

2. La ecuación $-x^2 + 1 - \tan(x) = 0$ puede escribirse en la forma $\tan(x) = -x^2 + 1$. Sean $g(x) = -x^2 + 1$, $h(x) = \tan(x)$ $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Las gráficas de g y h se cortan en un punto cuya abscisa $\hat{x} \in [0, 1]$.

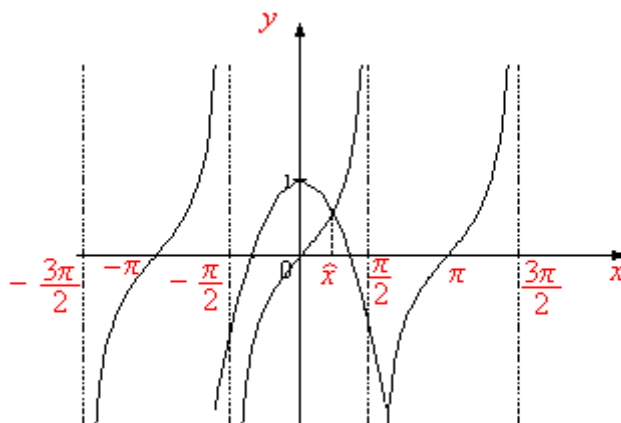


Figura 32

En el dibujo se observa que otra raíz está localizada en el intervalo $]\frac{\pi}{2}, \pi]$, ¿es justa esta aseveración? De ser así, ¿existen otras raíces para $x > \frac{\pi}{2}$? De acuerdo al gráfico no podemos dar respuesta inmediata. Requerimos de un análisis más fino para determinar, si existe o no, otras raíces de dicha ecuación.

3. Considerar la ecuación en \mathbb{R} siguiente: $x^3 - 12x - 1 = 0$. Ponemos $f(x) = x^3 - 12x - 1$ $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = 3x^2 - 12$. Luego,

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \Leftrightarrow 3(x+2)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[, \\ f'(x) &\leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

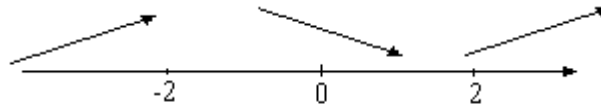


Figura 33

En $x = -2$ se tiene un máximo local y en $x = 2$ se tiene un mínimo local. Además, $f''(x) = 6x$. Se tiene

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

En $x = 0$ se tiene un punto de inflexión.

La gráfica de f siguiente muestra que tiene tres ceros $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ localizados en los intervalos $[-4, -3]$, $[-1, 0]$, $[3, 4]$. Observe que la gráfica presenta imprecisiones.

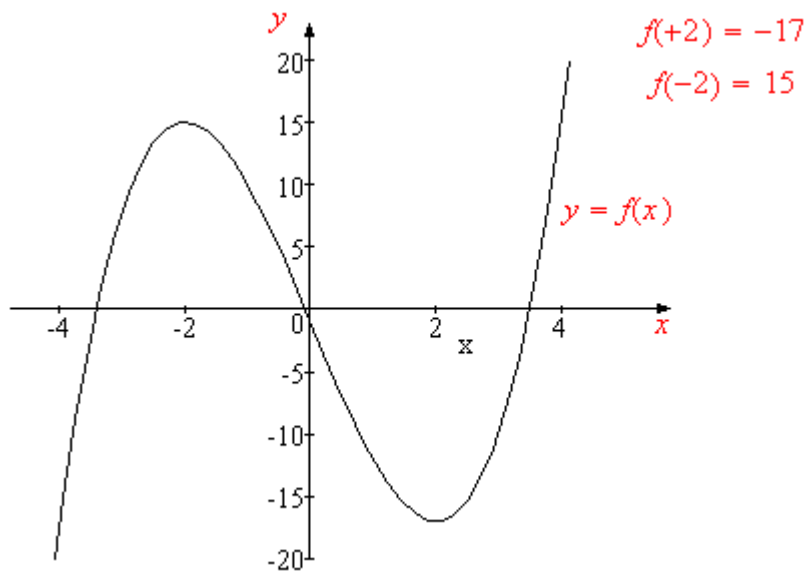


Figura 34

ii. Algoritmo de búsqueda del cambio de signo

Teorema 1 (de Bolzano)

Sea f una función de $[a, b]$ en \mathbb{R} continua en $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, existe $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

El teorema de Bolzano afirma que si la función continua f es tal que $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos opuestos, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz $\hat{x} \in [a, b]$. Además, este teorema garantiza la existencia de al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

En la práctica se tienen funciones continuas en las que $f(a)f(b) > 0$ y sin embargo la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en $[a, b]$ como lo prueba el siguiente ejemplo: $f(x) = x^2 - 1$ $x \in [-2, 2]$. Se tiene $f(-2) = f(2) = 3$

En las gráficas que se muestran a continuación se presentan los dos casos.

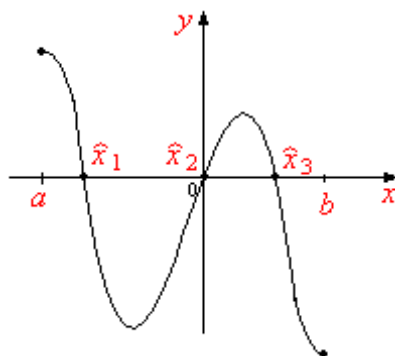


Figura 35

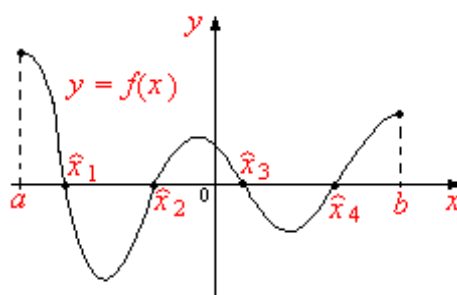


Figura 36

El algoritmo de búsqueda del cambio de signo se basa en el teorema de Bolzano y tiene dos propósitos: determinar la existencia de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ y separar las mismas. Describimos a continuación dicho algoritmo.

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $h = \frac{b-a}{n}$; h se denomina paso.

1. Calculamos $f(a)$.

Si $f(a) = 0$ entonces a es una raíz de f y continuar en el punto 2).

2. Calculamos $f(a+h)$.

Si $f(a) \neq 0$ y $f(a)f(a+h) = 0$ entonces $a+h$ es una raíz de f . Continuar en el punto 3).

Si $f(a)f(a+h) < 0$ entonces existe $\hat{x} \in]a, a+h[$ tal que $f(\hat{x}) = 0$, es decir que f tiene un cero en el intervalo $]a, a+h[$. Continuar en 3).

Si $f(a)f(a+h) > 0$ entonces f no tiene ceros en el intervalo $[a, a+h]$ o el paso h es demasiado grande. Continuar en 3).

3. Calculamos $f(a+2h)$. Entonces,

Si $f(a+2h) = 0 \Rightarrow a+2h$ es una raíz de $f(x) = 0$.

Si $f(a+h) \cdot f(a+2h) < 0 \Rightarrow \exists \hat{x} \in]a+h, a+2h[$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

Si $f(a+h) \cdot f(a+2h) > 0$, no tiene raíces reales en $[a+h, a+2h]$, o h es demasiado grande.

Este procedimiento continua hasta llegar al extremo b del intervalo $[a, b]$.

Una vez localizada una raíz en un cierto subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ con $x_j = a + jh$, $j = 1, \dots, n$, conviene asegurarse que no hay otras raíces. Para ello, se elige un entero $n_1 > n$ y se repite el procedimiento

anterior con el nuevo paso $h_1 = \frac{b-a}{n_1}$. Igualmente se repite el procedimiento en el caso en que no haya sido localizada ninguna raíz.

En la figura siguiente se ilustra esta situación: $f(x_3) * f(x_4) < 0$ con lo que existe al menos una raíz $\hat{x}_1 \in [x_3, x_4]$. Situación similar se presenta en los otros intervalos.

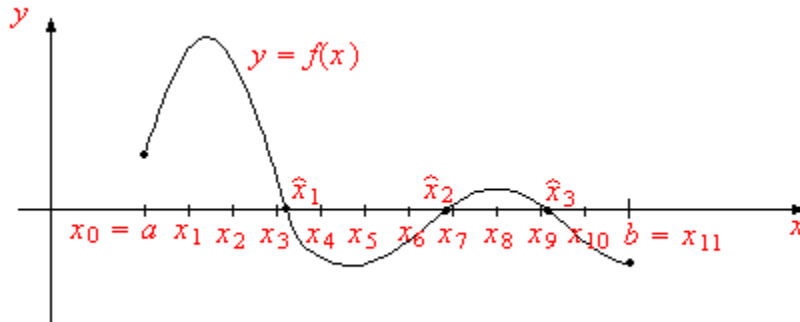


Figura 37

Observe en la gráfica que para el paso h seleccionado se han separado las tres raíces, cosa que no sucede para la gráfica de la función f siguiente.

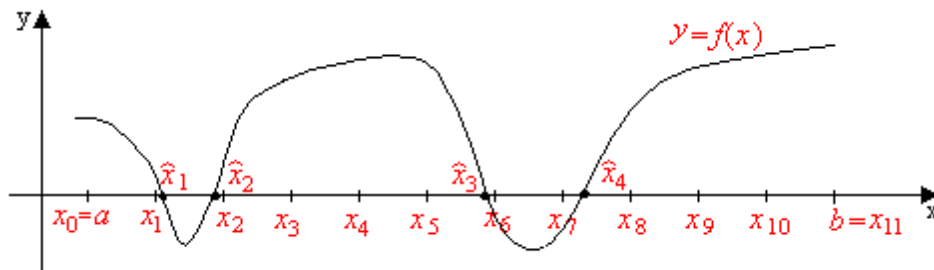


Figura 38

Al seleccionar un paso $h_1 = \frac{h}{2}$ se detectan raíces $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in [x_1, x_2]$.

Debemos notar que si f tiene una raíz de multiplicidad par, el cambio de signo no es detectado ya que si \hat{x} es una raíz de multiplicidad par y $\hat{x} \in]x_j, x_{j+1}[$ se tiene $f(x_j) \times f(x_{j+1}) > 0$. Este tipo de problemas serán abordados en la sección 5.

De lo dicho precedentemente, se desprende el siguiente algoritmo de búsqueda del cambio de signo.

Algoritmo

Datos de entrada: a, b extremos del intervalo $[a, b]$, función f .

Datos de salida: x_i, x_d extremos del intervalos $[x_i, x_d]$, mensajes.

1. Leer n y hacer $h = \frac{b-a}{n}$.
2. $x_i = a$.
3. $x_i > b$, fin del procedimiento. Continuar en 8).
4. $f(x_i) = 0$; Mensaje: " x_i es raíz de $f(x) = 0$ ".

$$x_d = x_i + h.$$

5. $xd > b$; Mensaje: “ f no tiene raíces reales en $[a, b]$ o f tiene raíces de multiplicidad par o h es demasiado grande”.
6. $f(xd) = 0$; Mensaje: “ xd es raíz de f ”.
- $xi = xd + h$. Continuar en 3).
7. $f(xi) \times f(xd) < 0$; Mensaje: “ f tiene una raíz en $[xi, xd]$ ”.
- $xi = xd$. Continuar en 5).
8. Fin.

Ejemplo

Sea f la función definida por $f(x) = x^3 - x - 1$ $x \in \mathbb{R}$. Hallar el cambio de f en el intervalo $[-2, 2]$.

Sea $n = 10$. Entonces $h = \frac{b-a}{n} = 0,4$, $x_k = -2 + kh$ $k = 0, 1, \dots, 10$. Escribimos $f(x) = -1 + x(-1 + x^2)$. En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo.

k	xi	xd	$yi = f(xi)$	$yd = f(xd)$	Signo($yi \times yd$)
0	-2	-1,6	-7	-3,496	+
1	-1,6	-1,2	-3,496	-1,528	+
2	-1,2	-0,8	-1,528	-0,712	+
3	-0,8	-0,4	-0,712	-0,664	+
4	-0,4	0	-0,664	-1,0	+
5	0	0,4	-1,0	-1,336	+
6	0,4	0,8	-1,336	-1,288	+
7	0,8	1,2	-1,288	-0,472	+
8	1,2	1,6	-0,472	1,492	-
9	1,6	2	1,492	5	+

El algoritmo de la búsqueda del cambio de signo muestra que f tiene una raíz real localizada en el intervalo $[1,2, 1,6]$. El estudio de la función f muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz localizada en el intervalo antes precisado.

5.3. Método de bisección

Sea f una función real, continua en $[a, b]$ y consideramos la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que el algoritmo de búsqueda del cambio de signo muestra que existe una raíz $\hat{x} \in [\alpha, \beta]$. Más aún, suponemos que dicha raíz ha sido separada en dicho intervalo.

Entre los métodos más usados para el cálculo aproximado de \hat{x} es el conocido método de bisección. Su aplicación radica en dos hechos importantes: el algoritmo es siempre convergente y porque es fácilmente programable. No obstante, el método tiene la desventaja de requerir un número bastante grande de iteraciones para aproximar \hat{x} con una precisión ε fijada.

Describimos el método de bisección.

Sea $c_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ el punto medio del intervalo $[\alpha, \beta]$. Ponemos $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$.

Si $f(c_1) = 0$ entonces c_1 es una raíz de $f(x) = 0$.

Si $f(c_1) \neq 0$, consideramos los intervalos $[\alpha_1, c_1]$, $[c_1, \beta]$ y controlamos si $f(\alpha)f(c_1) < 0$ o $f(c_1)f(\beta) < 0$. En la figura siguiente se muestra la gráfica de una función f que tiene una raíz localizada en el intervalo

$[\alpha, \beta]$.

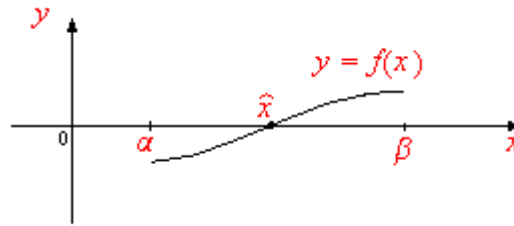


Figura 39

Supongamos que se verifica $f(c_1)f(\alpha) < 0$ (véase las gráficas de la función f y la posición de $\hat{x} \in [\alpha, \beta]$ raíz de la ecuación $f(x) = 0$), lo que significa que la raíz \hat{x} pertenece al intervalo $[\alpha, c_1]$. A este intervalo lo notamos $[x_1, y_1]$, donde $x_1 = \alpha$, $y_1 = c_1$.

Sea $c_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$ el punto medio del intervalo $[x_1, y_1]$. Si $f(c_2) = 0$ entonces c_2 es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Si $f(c_2) \neq 0$, nuevamente consideramos los intervalos $[x_1, c_2]$ y $[c_2, y_1]$ y controlamos el signo de $f(x_1)f(c_2)$. Con referencia de la posición $\hat{x} \in [\alpha, \beta]$, se tiene $f(x_1)f(c_2) > 0$ lo que significa que $\hat{x} \in [c_2, y_1]$. Notamos a este intervalo $[x_2, y_2]$ con $x_2 = c_2$, $y_2 = y_1$.

Sea $c_3 = \frac{x_2 + y_2}{2}$ el punto medio del intervalo $[x_2, y_2]$. Calculamos $f(c_3) = 0$. En el caso contrario, controlamos el signo de $f(x_2)f(c_3)$. Observamos en la gráfica que $f(x_2)f(c_3) < 0$ que implica $\hat{x} \in [x_2, c_3]$. Ponemos $x_3 = x_2$, $y_3 = c_3$.

En la gráfica que se muestra a continuación se visualizan los puntos del intervalo $[\alpha, \beta]$ que se obtienen mediante este procedimiento.

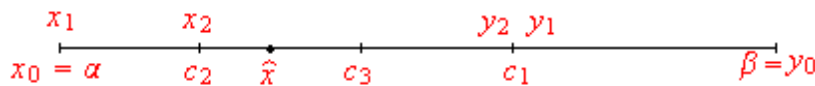


Figura 40

Este proceso repetimos n veces. Así, obtenemos el intervalo $[x_n, y_n]$, donde $f(x_n)f(y_n) < 0$. Como cada subintervalo $[x_n, y_n]$ de $[\alpha, \beta]$ $n = 0, 1, \dots$ se divide en dos subintervalos de igual longitud, la longitud del intervalo $[x_n, y_n]$ es

$$y_n - x_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n}.$$

Por otro lado los extremos izquierdos de los intervalos $[x_n, y_n]$ con $n = 1, 2, \dots$, forman una sucesión monótona creciente, o sea $x_n \leq x_{n+1}$ y como $\alpha \leq x_n < \beta$, la sucesión (x_n) es acotada. Consecuentemente (x_n) es creciente y acotada, por lo tanto convergente. Sea $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Los extremos derechos de los intervalos $[x_n, y_n]$ forman una sucesión y_n decreciente: $y_{n+1} \leq y_n$ $n = 1, 2, \dots$, y $\alpha < y_n \leq \beta$, con lo cual (y_n) es acotada. Así (y_n) es decreciente y acotada que implica (y_n) convergente. Sea $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{2^n} = 0$, se sigue que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n).$$

Luego

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y - x,$$

de donde $x = y$.

Por hipótesis f es continua en $[\alpha, \beta]$, entonces las sucesiones $(f(x_n))$ y $(f(y_n))$ son convergentes. Entonces

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(y).$$

Además,

$$\begin{aligned} x_n &< \hat{x} < y_n \quad n = 1, 2, \dots, \\ x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \hat{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \end{aligned}$$

y como $x = y$, entonces $\hat{x} = x = y$ y $f(x) = f(\hat{x}) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{x} \quad y \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\hat{x}) = 0, \\ y_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{x} \quad y \quad f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\hat{x}) = 0, \end{aligned}$$

que prueba que el método de bisección es convergente.

Teorema 2 Sea f una función real, continua en $[a, b]$. Supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces, el método de bisección genera una sucesión (c_n) que converge a \hat{x} raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y tal que

$$|c_n - \hat{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad n = 1, 2, \dots.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$ y $\hat{x} \in [x_n, y_n]$. Puesto que $c_n = \frac{x_n + y_n}{2}$ $n = 1, 2, \dots$, se sigue que

$$0 \leq |c_n - \hat{x}| \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \quad n = 1, 2, \dots.$$

Luego

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - \hat{x}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \hat{x}$, consecuentemente $0 = f(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n)$. Sea $\varepsilon > 0$. Del teorema precedente se tiene

$$|c_n - \hat{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad n = 1, 2, \dots,$$

y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, existe $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n \geq N_0 \implies \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$. En particular, para $n = N_0$ se tiene $\frac{b-a}{2^{N_0}} < \varepsilon$. Luego

$$|c_{N_0} - \hat{x}| \leq \frac{b-a}{2^{N_0}} < \varepsilon.$$

■

Para elaborar el algoritmo del método de bisección, queda determinar el número máximo de iteraciones $N_{\text{máx}}$. Para $\varepsilon = 10^{-t}$ con $t \in \mathbb{Z}^+$ (por ejemplo $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots$), se tiene $\frac{b-a}{2^{N_0}} < 10^{-t}$. Como la función logaritmo natural es creciente, tomando logaritmos en ambos lados de esta desigualdad, resulta

$$\ln\left(\frac{b-a}{2^{N_0}}\right) < \ln(10^{-t}) \iff \ln(b-a) - N_0 \ln(2) < \ln(10^{-t}) \iff N_0 > \frac{\ln[(b-a)10^t]}{\ln 2}.$$

El número máximo de iteraciones $N_{\text{máx}}$ elegimos como sigue:

$$N_{\text{máx}} = \left\lceil \frac{\ln[(b-a)10^t]}{\ln 2} \right\rceil + 1,$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ denota la función mayor entero menor o igual que. Así, $|c_{N_{\text{máx}}} - \hat{x}| < 10^{-t}$.

Debe considerarse el hecho siguiente: puede verificarse que $|c_n - \hat{x}| < \varepsilon$ pero $|f(c_n)| > \varepsilon$ para $n < N_{\text{máx}}$. En este caso el proceso debe continuar hasta lograr, en lo posible, $|f(c_n)| \leq \varepsilon$ para $n \leq N_{\text{máx}}$. Esto corresponde al denominado control vertical de la raíz.

Separada la raíz \hat{x} de la ecuación $f(x) = 0$ mediante el algoritmo de búsqueda del cambio de signo; esto es, dado $[a, b]$ intervalo en el que está localizada la única raíz \hat{x} de $f(x) = 0$ y dado $\varepsilon = 10^{-t}$ la precisión con la que \hat{x} será aproximada, el método de bisección se resume en el siguiente algoritmo.

Algoritmo

Datos de Entrada: a, b extremos del intervalo $[a, b]$, función f , $\varepsilon = 10^{-t}$.

Datos de Salida: \hat{x} , n , $N_{\text{máx}}$.

1. Calcular $N_{\text{máx}} = \left\lceil \frac{\ln [(b-a) 10^t]}{\ln 2} \right\rceil + 1$.
2. Poner $yi = f(a)$.
3. Para $n = 1, \dots, N_{\text{máx}}$.
4. $c = \frac{a+b}{2}$.
5. $y = f(c)$.
6. Si $y = 0$, continuar en 10).
7. Si $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$ y $|y| < \varepsilon$, continuar en 10).
8. Si $yi * y > 0$, entonces $a = c, yI = y$.
9. Si $yi * y < 0$, entonces $b = c$.
10. Imprimir $\hat{x} = c$ raíz de $f(x) = 0$, iteración n , $N_{\text{máx}}$.
11. Fin.

Nota: Si \hat{x} ha sido separada utilizando el método de búsqueda del cambio de signo, $\hat{x} \in [xi, xd] \subset [a, b]$. Previo al punto 1). del algoritmo de bisección de $x = xd$. Una vez calculado \hat{x} , no finalizar el programa, se designa $xi = x$ y continua la ejecución del programa en la parte correspondiente a la búsqueda del cambio de signo en el resto del intervalo $[a, b]$. Note además que

$$N_{\text{máx}} = \left\lceil \frac{\ln [(xd-xi) 10^t]}{\ln 2} \right\rceil + 1.$$

Ejemplos

1. Consideremos la ecuación: $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x - x^2 = 0$. Aproximemos la raíz de la misma con una precisión $\varepsilon = 10^{-2}$.

Ponemos $g(x) = e^x$, $h(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$. En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones g y h . Además, tales gráficas se cortan en el punto de abscisa $\hat{x} \in [-1, 0]$ que muestra que

la ecuación dada tiene una solución separada en el intervalo $[-1, 0]$.

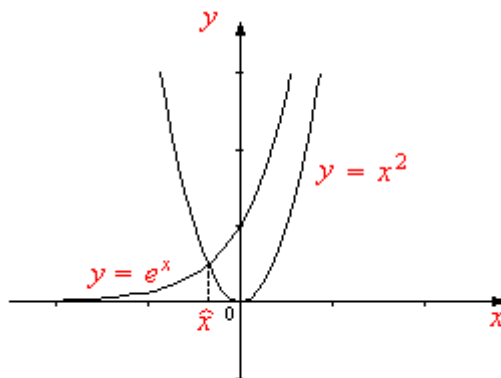


Figura 41

Para $\varepsilon = 10^{-2}$ y $xi = -1$, $xd = 0$, se tiene

$$N_{\max} = \left\lceil \frac{\ln[(xd - xi) \times 10^2]}{\ln(2)} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\ln(10^2)}{\ln(2)} \right\rceil + 1 = 6.$$

En la tabla siguiente se recogen los datos de la aplicación del algoritmo del método de bisección, donde f es la función real definida como $f(x) = e^x - x^2$ $x \in \mathbb{R}$.

n	a	b	c	$f(a) = yi$	$f(c) = y$	signo($yi * y$)
1	-1.	0.	-0,5	-0,632	0,357	-
2	-1.	-0,5	-0,75	-0,632	-0,901	+
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,901	0,145	-
4	-0,75	-0,625	-0,6875	-0,901	0,302	-
5	-0,75	-0,6875	-0,71875	-0,901	-0,0292	+
6	-0,71875	-0,6575	-0,703125	-0,029	$6,51 \times 10^{-4}$	-

La raíz aproximada de \hat{x} con una precisión $\varepsilon = 10^{-2}$ y $N_{\max} = 6$ es $c = -0,703125$. Note que para $n = 6$, se tiene $|f(c_6)| < \varepsilon$.

2. Aproximemos las raíces de la ecuación $2 \ln(x + 4) - x^2 = 0$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$.

Sean $f(x) = 2 \ln(x + 4) - x^2$, $g(x) = 2 \ln(x + 4)$ y $h(x) = x^2$. El método gráfico muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces separadas en los intervalos $[-2, -1]$ y $[1, 2]$. Sean $\hat{x}_1 \in [-2, -1]$, $\hat{x}_2 \in [1, 2]$ las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones g y h así como los puntos de corte de las mismas cuyas abscisas son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

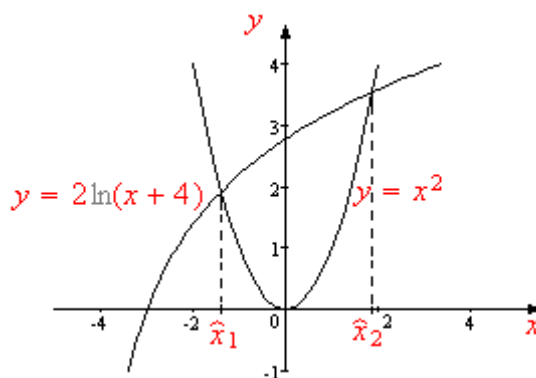


Figura 42

Aproximemos $\hat{x}_1 \in [-2, -1]$ utilizando el método de bisección con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. Se tiene $xi = -2$, $xd = -1$,

$$N_{\text{máx}} = \left\lceil \frac{\ln((xd - xi)\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rceil + 1 = 9.$$

En la tabla se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo del método de bisección.

n	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$yi = f(a)$	$y = f(c)$	$\text{sign}(yi * y)$
1	-2.	-1.	-1,5	-2,614	-0,417	+
2	-1,5	-1.	-1,25	-0,417	0,461	-
3	-1,5	-1,25	-1,375	-0,417	0,0395	-
4	-1,5	-1,375	-1,4375	-0,417	-0,184	+
5	-1,4375	-1,375	-1,40625	-0,184	-0,071	+
6	-1,40625	-1,375	-1,390625	-0,0713	-0,0156	+
7	-1,390625	-1,375	-1,3828125	-0,0156	0,0123	-
8	-1,390625	-1,3828125	-1,38671875	-0,0156	-0,001776	+
9	-1,38671875	-1,3828125	-1,384765625	-0,001776	0,00513	-

Raíz $\hat{x}_1 \simeq -1,385$, $f(-1,385) = 0,0043$. Note que $|f(c_9)| > \varepsilon$.

5.4. Desarrollo de métodos iterativos

Sean $E \subset \mathbb{R}$ con $E \neq \emptyset$ y f una función real definida en E . Consideramos el problema (P) siguiente:

$$\text{hallar } \hat{x} \in E, \text{ si existe, tal que } f(\hat{x}) = 0.$$

Suponemos que el problema (P) tiene al menos una solución $\hat{x} \in E$ y que no existe un método directo de cálculo de \hat{x} por lo que debemos recurrir a los métodos aproximados. Estos métodos, en la generalidad, son iterativos y tienen la forma siguiente.

Se comienza con $x_0 \in E$. Las aproximaciones sucesivas x_n , $n = 1, 2, \dots$ de \hat{x} se logra mediante una función iterativa Φ de \tilde{E} en \tilde{E} tal que $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ $n = 0, 1, 2, \dots$, donde $\tilde{E} \subset E$, $\tilde{E} \neq \emptyset$. De este modo se construye una sucesión $(x_n) \subset \tilde{E}$. Algunas cuestiones surgen de esta construcción: ¿es (x_n) convergente a la raíz \hat{x} de $f(x) = 0$? ¿qué condiciones ha de verificar la función de iteración Φ para que (x_n) sea convergente a la raíz \hat{x} ? ¿cómo seleccionar el conjunto \tilde{E} ? ¿cómo construir una función de iteración Φ de modo que la sucesión (x_n) converja a \hat{x} raíz de $f(x) = 0$?

En la mayoría de casos la función de iteración Φ aparece por la propia formulación del problema.

Esta sección está destinada a la construcción de funciones de iteración Φ ligadas a métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales muy conocidos en la literatura. Para ello introduciremos las denominadas funciones o aplicaciones contractivas y un teorema muy importante en análisis, a saber, el teorema de Banach del punto fijo.

Definición 3 Sean $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y T de E en E una función. Se dice que T es una aplicación contractiva en E si y solo si satisface la siguiente propiedad:

$$\exists k, \quad 0 \leq k < 1 \text{ tal que } |T(x) - T(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in E.$$

La constante k de la definición precedente es independiente de x e y .

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene que toda aplicación contractiva es uniformemente continua. El recíproco, en general, no es cierto.

Sea T una aplicación contractiva y $\varepsilon > 0$. De la definición se sigue que existe k , $0 \leq k < 1$ tal que $\forall x, y \in E$,

$$|T(x) - T(y)| \leq k|x - y| < \varepsilon.$$

Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ ($k \neq 0$). Entonces

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |T(x) - T(y)| < \varepsilon.$$

Observe que $\delta > 0$ es independiente de x e y . Además, si $k = 0$ se deduce que T es constante en E .

Por otro lado, si T es contractiva se tiene

$$|T(x) - T(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in E.$$

ya que $0 \leq k < 1$, esto es, $|T(x) - T(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in E$, pero puede suceder esto último sin ser contractiva se verá en un ejemplo propuesto más adelante.

Ejemplos

1. Sea $E = [1, 0]$ y $T : E \rightarrow E$ la función definida por $T(x) = \frac{1}{4}x^2$. Entonces T es contractiva. En efecto, sean $x, y \in E$, entonces

$$|T(x) - T(y)| = \left| \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \right| = \frac{1}{4} |(x+y)(x-y)| = \frac{1}{4} |x+y| |x-y|.$$

Como $x, y \in [1, 0]$, $0 \leq x + y \leq 2$, luego

$$|T(x) - T(y)| = \frac{1}{4} |x+y| |x-y| \leq \frac{1}{2} |x-y|.$$

La constante $k = \frac{1}{2}$, T es contractiva.

2. Sean $E = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y T la función real definida por $T(x) = ax \quad x \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|T(x) - T(y)| = |ax - ay| = |a| |x - y|.$$

La función T será contractiva si y solo si $|a| < 1$.

3. Sean $E = [0, \infty[$ y G la función de E en E definida por $G(x) = \sqrt{1+x^2}$. La función G no es contractiva. Efectivamente, para todo $x, y \in [0, \infty[$ se tiene

$$|G(x) - G(y)| = \left| \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} |x-y|.$$

Como $x \leq \sqrt{1+x^2}$, $y \leq \sqrt{1+y^2}$, se sigue que $\frac{x+y}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \leq 1$. Luego,

$$|G(x) - G(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \infty[.$$

Si $y = 0$, se tiene

$$|G(x) - G(0)| = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} |x - 0| \quad \forall x, y \in [0, \infty[.$$

Ponemos $k(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}$. Resulta $k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, $k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, luego $0 < k(x) < 1 \quad \forall x \in [0, \infty[$, con lo cual $|G(x) - G(y)| = k(x)|x - 0|$. De la última igualdad, observamos que no es posible encontrar una constante k con $0 < k < 1$ independiente de x . Este ejemplo pone de manifiesto que se verifica la desigualdad $|G(x) - G(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \infty[$, sin ser G contractiva.

Definición 4 Sean $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y T de E en E una función. Un punto $\hat{x} \in E$ se dice un punto fijo de T si verifica la condición $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Ejemplos

1. Sean $E = [1, 2]$ y T de E en E la aplicación definida por $T(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ $x \in [1, 2]$. El punto $x = \sqrt{2}$ es un punto fijo de T . Pues

$$T(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}.$$

Note que para todo $x \in [1, 2]$, $T(x) \in [1, 2]$.

2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Existe $\hat{x} \in [0, 1]$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Efectivamente, sea g la función real definida por $g(x) = x - f(x)$ $x \in [0, 1]$. Resulta que g es continua.

- i. Si $x = 0$, $g(0) = -f(0)$.

Si $f(0) = 0$, resulta que $\hat{x} = 0$ es un punto fijo de f .

Supongamos $f(0) \neq 0$. Como $f(0) \in [0, 1]$, se tiene $g(0) = -f(0) < 0$.

- ii. Si $x = 1$, $g(1) = 1 - f(1)$.

Si $f(1) = 1$, es $\hat{x} = 1$ un punto fijo de f .

Supongamos $f(1) \neq 1$. Puesto que $f(1) \in [0, 1]$ se tiene $g(1) > 0$. Luego, $g(0)g(1) < 0$ y por el teorema de Bolzano, existe $\hat{x} \in [0, 1]$ tal que $0 = g(\hat{x}) = \hat{x} - f(\hat{x})$, de donde $f(\hat{x}) = \hat{x}$, esto es, \hat{x} es un punto fijo de f .

El resultado de este ejemplo tiene la siguiente interpretación geométrica. Consideremos las gráficas de las funciones f y de la identidad I en $[0, 1]$. Un punto fijo de f es la abscisa del punto de intersección de la gráfica de f y de la función identidad I en el intervalo $[0, 1]$. En los gráficos siguientes se muestran tres situaciones.

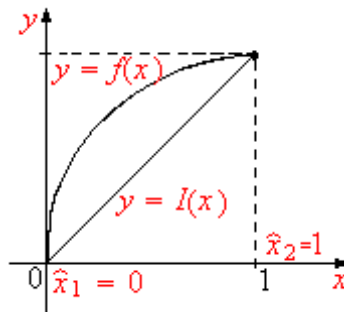


Figura 43

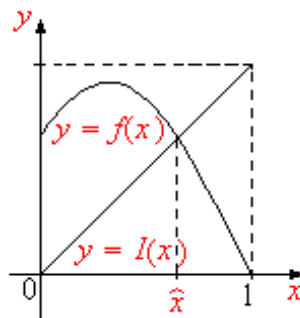


Figura 44

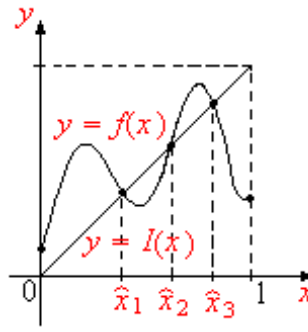


Figura 45

Teorema 3 (De Banach del punto fijo)

Sean $E \subset \mathbb{R}$ con $R \neq \emptyset$ y E cerrado, T de E en E una aplicación contractiva en E . Entonces, existe un único $\hat{x} \in E$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración. La demostración de este teorema la dividimos en dos partes. La primera que corresponde a la existencia del punto fijo \hat{x} de T y la segunda a la unicidad.

i) Existencia. Por hipótesis T es contractiva, entonces existe k , $0 \leq k < 1$ tal que

$$|T(x) - T(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in E. \quad (1)$$

Sea $x_0 \in E$. Definimos la sucesión $(x_n) \subset E$ como sigue

$$\begin{aligned} x_1 &= T(x_0) \\ x_2 &= T(x_1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= T(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Mostremos que la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy en E .

Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m > n$ y sea $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m = n + p$. Entonces, por la desigualdad triangular, se tiene

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_{n+p}| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p-1} - x_{n+p}|. \quad (2)$$

Por la definición de (x_n) y por (1) se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| &= |T(x_{n-1}) - T(x_n)| \leq k|x_{n-1} - x_n| = k|T(x_{n-2}) - T(x_{n-1})| \\ &\leq k^2|x_{n-2} - x_{n-1}| \\ &\vdots \\ &\leq k^n|x_0 - x_1|. \end{aligned}$$

Luego,

$$|x_n - x_{n+1}| \leq k^n|x_0 - x_1| \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3)$$

Aplicando (3) en (2), resulta

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq k^n|x_0 - x_1| + k^{n+1}|x_0 - x_1| + \dots + k^{n+p}|x_0 - x_1| = k^n|x_0 - x_1|(1 + k + \dots + k^p) \\ &\leq k^n|x_0 - x_1|(1 + k + \dots + k^p + k^{p+1} + \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

Sea $S_p(k) = 1 + k + \dots + k^p$. Entonces

$$(1 - k)S_p(k) = S_p(k) - kS_p(k) = 1 + k + \dots + k^p - (k + k^2 + \dots + k^{p+1}) = 1 - k^{p+1}.$$

de donde

$$S_p(k) = \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} = \frac{1}{1 - k} - \frac{k^{p+1}}{1 - k}.$$

Como $0 \leq k < 1$, $\lim_{p \rightarrow \infty} k^{p+1} = 0$. Luego

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p(k) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - k} - \frac{k^{p+1}}{1 - k} \right) = \frac{1}{1 - k} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{k^{p+1}}{1 - k} = \frac{1}{1 - k},$$

con lo cual

$$\sum_{p=0}^{\infty} k^p = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p(k) = \frac{1}{1 - k}. \quad (5)$$

Remplazando (5) en (4), se obtiene

$$|x_n - x_m| \leq k^n |x_0 - x_1| \sum_{p=0}^{\infty} k^p = \frac{k^n}{1 - k} |x_0 - x_1|. \quad (6)$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ se sigue que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n \geq n_0$

$$k^n < \frac{1 - k}{|x_0 - x_1|} \varepsilon \quad (7)$$

De (6) y (7) resulta

$$|x_n - x_m| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_0 - x_1| < \varepsilon \quad \text{si } m, n \geq n_0,$$

es decir que (x_n) es una sucesión de Cauchy en E y por hipótesis E es cerrado, entonces la sucesión (x_n) tiene límite en E ; esto es, existe $\hat{x} \in E$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$.

Puesto que T es contractiva, T es uniformemente continua y por lo tanto continua. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = T(\hat{x}).$$

Además, $x_{n+1} = T(x_n)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x}$, resulta que

$$T(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x}.$$

Así, $T(\hat{x}) = \hat{x}$ o sea $\hat{x} \in E$ es un punto fijo de T .

ii) Unicidad Probemos que $\hat{x} \in E$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$ es único. Para el efecto, supongamos que existe $y \in E$ tal que $T(y) = y$. Mostremos que $y = \hat{x}$.

Como T es contractiva, se tiene

$$|\hat{x} - y| = |T(\hat{x}) - T(y)| \leq k |\hat{x} - y|,$$

de donde $|\hat{x} - y| (1 - k) \leq 0$, y siendo $0 \leq k < 1$, entonces $1 - k > 0$ y en consecuencia $|\hat{x} - y| \leq 0$. Como el valor absoluto es no negativo, la única posibilidad es $|\hat{x} - y| = 0 \Leftrightarrow y = \hat{x}$. ■

Observaciones

1. El teorema de Banach del punto fijo asegura la existencia de un único punto fijo $\hat{x} \in E$ e la plicación contractiva T definida en el conjunto cerrado E de \mathbb{R} .
2. Note que la métrica usual d de \mathbb{R} está definida por $d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, además (\mathbb{R}, d) es un espacio métrico completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R} es convergente en \mathbb{R} . Como $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, el par (E, d) es un espacio métrico y siendo E cerrado, se prueba que toda sucesión de Cauchy en E es convergente en E , con lo cual (E, d) es un espacio métrico completo.

El conjunto $E =]0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es cerrado. La sucesión $(x_n) \subset E$ con $x_n = \frac{1}{n}$ $n = 1, 2, \dots$, es una sucesión de Cauchy en E que no es convergente en E , pues $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin E$. Luego (E, d) es un espacio métrico que no es completo.

En los textos de Análisis, el teorema de Banach del punto fijo se enuncia como sigue: Sea (E, d) un espacio métrico completo y T de E en E una aplicación contractiva. Entonces, existe un único $\hat{x} \in E$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

El enunciado y la prueba del teorema de Banach del punto fijo que hemos dado está particularizado a subconjuntos cerrados E de \mathbb{R} ($E \neq \emptyset$) provistos de la métrica usual de \mathbb{R} .

La demostración del teorema de Banach del punto fijo para espacios métricos completos muy generales (E, d) es muy similar a la aquí propuesta con la salvedad que los valores absolutos $|x - y| = d(x, y)$ $x, y \in \mathbb{R}$ se remplazan simplemente por $d(x, y)$ con d la métrica en el conjunto E .

- En la demostración del teorema de Banach del punto fijo se muestra una manera de calcular el punto fijo $\hat{x} \in E$. Pues se parte de un punto arbitrario $x_0 \in E$ y se construye la sucesión $(x_n) \subset E$ tal que $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. Entonces $\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ es el punto fijo de T . De este hecho se desprende que podemos aproximar el punto fijo \hat{x} con una precisión $\varepsilon > 0$.
- La construcción de la sucesión (x_n) tiene la siguiente interpretación geométrica. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y E cerrado, T de E en E una aplicación contractiva en E e I la aplicación identidad en E . Por el teorema de Banach del punto fijo, las gráficas de las funciones T e I se cortan en el punto $(\hat{x}, T(\hat{x})) = (\hat{x}, I(\hat{x}))$. La abscisa $\hat{x} \in E$ es el punto fijo de T .

En las dos figuras que se muestran a continuación se exhiben los puntos x_n de la sucesión (x_n) con $x_{n+1} = T(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Se parte de $x_0 \in E$. Se calcula $x_1 = T(x_0)$, se proyecta $T(x_0)$ sobre la recta $y = x$, como $x_1 = I(x_1)$ se obtiene en el eje X el punto x_1 . Nuevamente se calcula $x_2 = T(x_1)$ y se proyecta $T(x_1)$ sobre la recta $y = x$, se obtiene en el eje x el punto $x_2 = I(x_2)$. El proceso continúa.

En la gráfica que se muestra a continuación se tiene una sucesión creciente que converge a \hat{x}

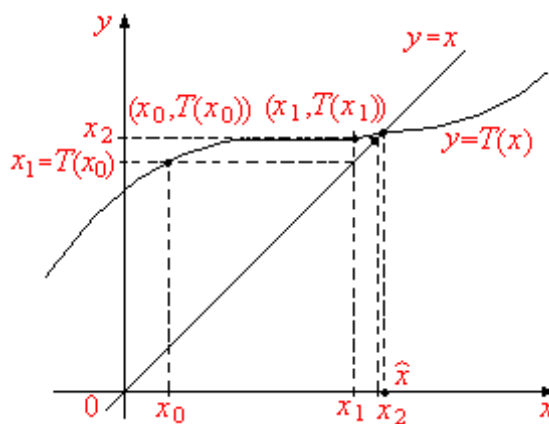


Figura 46

En la gráfica siguiente se muestran puntos de una sucesión que oscila entorno al punto fijo \hat{x} .

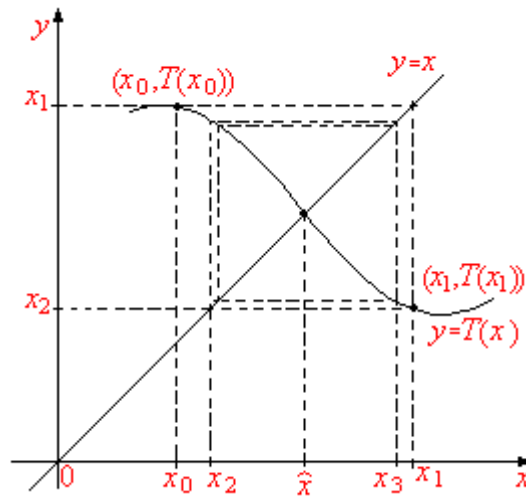


Figura 47

En la gráfica siguiente se muestra una función T que no es contractiva en E y una sucesión (x_n) que, en general, no es convergente.

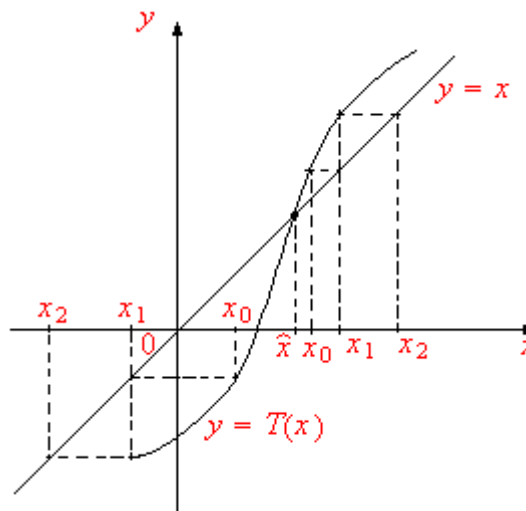


Figura 48

Ejemplos

- Sean $E = [1, 2]$ y T de E en E la aplicación definida por $T(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ $x \in [1, 2]$. Entonces, T es contractiva en E . Además $\hat{x} = \sqrt{2}$ es el punto fijo de T . Aproximamos $\hat{x} = \sqrt{2}$ mediante x_n , $n = 0, 1, \dots$, con $x_{n+1} = T(x_n)$.

Sea $x_0 = 2 \in E$. Entonces

$$\begin{aligned}
T(x_0) &= x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = 1,5, \\
T(x_1) &= x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(1,5 + \frac{2}{1,5} \right) = 1,4166667, \\
T(x_2) &= x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{2}{x_2} \right) = 1,414215686, \\
T(x_3) &= x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{2}{x_3} \right) = 1,414213562, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observamos que $1,414213\dots$ es una aproximación de $\sqrt{2}$.

2. Sea $E = [0, 1]$. La aplicación T de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ definida por $T(x) = \cos(x)$ es contractiva en $[0, 1]$. Por tanto, existe $\hat{x} \in [0, 1]$ tal que $\hat{x} = T(\hat{x}) = \cos(\hat{x})$, de donde $\hat{x} - \cos(\hat{x}) = 0$. El punto $\hat{x} \in [0, 1]$ solución de la ecuación $x - \cos(x) = 0$.

3. Sea $E = [0, \infty[$ y $T(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ $x \in [0, \infty[$. Resulta que T es contractiva en $[0, \infty[$. Luego, existe $\hat{x} \in [0, \infty[$ tal que $\hat{x} = T(\hat{x}) = (\hat{x}+1)^{\frac{1}{3}}$, de donde $\hat{x}^3 - \hat{x} - 1 = 0$. El punto fijo \hat{x} es solución de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$.

Sea $f(x) = x^3 - x - 1$ $x \in [0, \infty[$. La gráfica de f muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una sola raíz $\hat{x} \in [0, \infty[$. Más aún dicha raíz está separada en $[1, 2]$. Determinemos el valor aproximado de \hat{x} . En la tabla siguiente se muestran algunos valores de la sucesión (x_n) con $x_0 = 1$ y $x_{n+1} = T(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$

x	1	1,2599	1,3123	1,3224	1,3243	1,3246	1,3247
$T(x)$	1,2599	1,3123	1,3224	1,3243	1,3246	1,3247	1,3247

Con $n = 7$ iteraciones se tiene $|x_n - \hat{x}| < 5 \times 10^{-4}$. Luego $x_7 \simeq 1,3242$ es una aproximación de la raíz \hat{x} de $f(x) = 0$, $f(x_7) \simeq 0$.

5.4.1. Método de punto fijo

Sean $I \subset \mathbb{R}$, con $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Consideramos la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que este problema tiene al menos una solución $\hat{x} \in I$, y que esta ha sido separada en el intervalo $[a, b] \subset I$.

Si $f(x) = x - T(x)$ $x \in [a, b]$. Entonces $f(x) = 0 \Leftrightarrow T(x) = x$. Además, si T es contractiva en $[a, b]$, existe $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$ o bien $f(\hat{x}) = \hat{x} - T(\hat{x}) = 0$, es decir que \hat{x} es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$. La dificultad radica en la selección de la función T y del intervalo $[a, b]$ en el que está localizada la raíz \hat{x} de $f(x) = 0$ de modo que la imagen directa $T([a, b]) = [a, b]$ y T contractiva en $[a, b]$.

Supuesto que la función T de $[a, b]$ en $[a, b]$ es contractiva. El método de iteración de punto fijo se basa en la construcción de la sucesión (x_n) siguiente: elegimos $x_0 \in [a, b]$ y definimos $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. El algoritmo del método de punto fijo es el siguiente:

Algoritmo

Datos de entrada: $N_{\text{máx}}$ número máximo de iteraciones, $\varepsilon > 0$ la precisión, T función de $[a, b]$ en $[a, b]$.

Datos de salida: iteración n , valor aproximado x_n de \hat{x} .

1. Leer $x_0 \in [a, b]$ y poner $x = x_0$.
2. Para $n = 0, \dots, N_{\text{máx}}$,
3. Calcular $y = T(x)$.

4. Si $|x - y| < \varepsilon$. Continuar en 6).
5. $x = y$.
6. Si $n < N_{\text{máx}}$, imprimir “raíz aproximada y de \hat{x} en n iteraciones con una precisión $\varepsilon > 0$ ”. Continuar en 8).
7. Imprimir “raíz aproximada y de \hat{x} en $N_{\text{máx}}$ iteraciones con precisión $\varepsilon > 0$ ”.
8. Fin.

Ejemplos

1. Encontrar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\sin(x) = x^2 - 1$.

Definimos $f(x) = x^2 - 1 - \sin(x)$ y sean $\varphi_1(x) = \sin(x)$, $\varphi_2(x) = x^2 - 1$ $x \in \mathbb{R}$. En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones φ_1 y φ_2 que se cortan en dos puntos. El método gráfico muestra que f tiene dos raíces localizadas en los intervalos $[-1, 0]$ y $[1, 2]$.

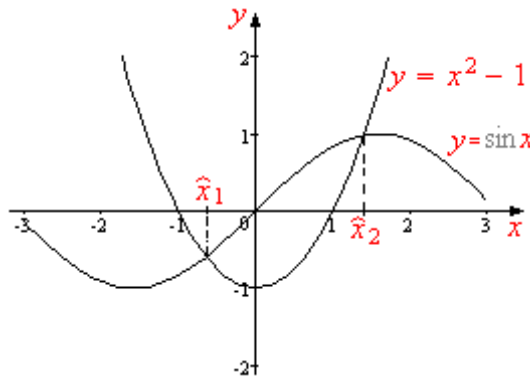


Figura 49

De la igualdad $\sin(x) = x^2 - 1$ se sigue que $x^2 = 1 + \sin(x)$. Luego $x = \pm \sqrt{1 + \sin(x)}$. Definimos $T(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$ $x \in [1, 2]$. La aplicación T es contractiva (véase el teorema que se enuncia a continuación), y para $x_0 \in [1, 2]$ dado, se define $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. En las dos tablas siguientes se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo de punto fijo para dos puntos iniciales distintos en $[1, 2]$.

a).	n	x_n	b).	n	x_n
	0	1		0	$\frac{\pi}{2} \simeq 1,5708$
	1	1.3570		1	1.4142
	2	1.4061		2	1.4199
	3	1.4094		3	1.4096
	4	1.4096		4	1.4096
	5	1.4096			

Raíz aproximada $\tilde{x}_2 = 1,4096$ de \hat{x}_2 .

Pongamos $T_1(x) = -\sqrt{1 + \sin(x)}$ $x \in [-1, 0]$. La aplicación T es contractiva en $[-1, 0]$. Para $x_0 = -0,5$, en 20 iteraciones se tiene $\tilde{x}_1 = -0,6367$.

2. Encontrar el menor valor $x \in \mathbb{R}^+$ para el cual $\tan^2(x) = 2x + 1$.

Sean $f(x) = 2x + 1 - \tan^2(x)$ y $\varphi_1(x) = \tan^2(x)$, $\varphi_2(x) = 2x + 1$ para $x \in \mathbb{R}^+$. El método gráfico muestra que la menor raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0$ está localizada en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Notemos además que $\varphi_1(1) \simeq 2,43$, $\varphi_2(1) = 3$ y $\varphi_1(1,2) \simeq 6,62$, $\varphi_2(1,2) = 3,4$, luego $\hat{x} \in [1, 1,2]$.

Elegir una función que sea contractiva resulta difícil.

Teorema 4 Sea T de $[a, b]$ en $[a, b]$ una función derivable en $[a, b]$. Si $|T'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a, b]$, entonces T es contractiva en $[a, b]$. Consecuentemente, existe $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$. Entonces

$$|T(x_1) - T(x_2)| = |T'(x)(x_1 - x_2)| = |T'(x)| |x_1 - x_2| \leq k |x_1 - x_2|,$$

donde $x \in [a, b]$. Así, existe k , $0 \leq k < 1$ tal que

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq k |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b],$$

que prueba que T es contractiva. Por el teorema de Banach del punto fijo, existe $\forall \hat{x} \in [a, b]$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$. ■

Ejemplo

Sea $T(x) = -\sqrt{1 + \sin(x)} \quad x \in [-1, 0]$. Entonces

$$T'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sqrt{1 + \sin(x)}} \quad x \in [-1, 0].$$

Se deduce que

$$0 < \frac{\cos(-1)}{2} \leq \frac{\cos(x)}{2} \leq T'(x) \leq \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1 - \sin(1)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin(1)}}.$$

Luego $k = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin(1)}} < 1$.

Nota: El método de punto fijo es muy limitado en las aplicaciones por la dificultad de seleccionar una aplicación contractiva, sin embargo ofrece una metodología para construir aplicaciones contractivas como se verá más adelante.

5.4.2. Método de punto fijo modificado

Definición 5 Sean $E \subset \mathbb{R}$ con $E \neq \emptyset$ y f una función real definida en E . Se dice que f es Lipschisiana o que satisface la condición de Lipschitz si y solo si $\exists k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in E$. La constante k se llama constante de Lipschitz.

Ejemplos

1. Sea f la función real definida por $f(x) = |x|$. Se tiene que f es lipschisiana. En efecto, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

La constante de Lipschitz es $k = 1$.

2. La función f de $[0, \infty[$ en $[0, \infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ es lipschisiana. Esta función se trató anteriormente, se probó que f no es contractiva y que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \infty[,$$

que prueba que f es lipschisiana.

Teorema 5 Sean $c, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ y g una función real definida en $[c - r, c + r]$. Si g es lipschisiana con constante $0 \leq k < 1$ tal que $|g(c) - c| \leq (1 - k)r$, entonces

i) Para todo $x \in [c - r, c + r]$, $g(x) \in [c - r, c + r]$.

ii) g tiene un único punto fijo $\hat{x} \in [c - r, c + r]$.

Demostración. Por hipótesis g es lipschisiana con constante $0 \leq k < 1$. Entonces

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [c - r, c + r].$$

Además, $|g(c) - c| \leq (1 - k)r$ y por la desigualdad triangular, se tiene para $x \in [c - r, c + r]$,

$$\begin{aligned} |g(x) - c| &= |g(x) - g(c) + g(c) - c| \leq |g(x) - g(c)| + |g(c) - c| \leq k|x - c| + (1 - k)r \\ &\leq kr + (1 - k)r = r. \end{aligned}$$

Así, $|g(x) - c| \leq r \quad \forall x \in [c - r, c + r]$ que implica $g(x) \in [c - r, c + r]$. En otros términos, la imagen directa $g([c - r, c + r]) = [c - r, c + r]$.

Sea $\tilde{g} : [c - r, c + r] \rightarrow [c - r, c + r]$ la función definida por

$$\tilde{g}(x) = g(x) \quad \forall x \in [c - r, c + r].$$

Entonces \tilde{g} es contractiva en $[c - r, c + r]$. Pues existe $k, 0 \leq k < 1$ tal que

$$|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| = |g(x) - g(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [c - r, c + r].$$

Por otro lado, $[c - r, c + r]$ es un conjunto cerrado. Por el teorema de Banach del punto fijo, existe un único $\hat{x} \in [c - r, c + r]$ tal que $\tilde{g}(\hat{x}) = \hat{x} = g(\hat{x})$, es decir que \hat{x} es el único punto fijo de g . ■

Sean $I \subset \mathbb{R}$ con $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Consideramos el problema (P) siguiente:

$$\text{hallar } \hat{x} \in I, \text{ si existe, tal que } f(\hat{x}) = 0. \quad (\text{P})$$

Supongamos que el problema (P) tiene solución, esto es, existe al menos un $\hat{x} \in I$ tal que $f(\hat{x}) = 0$ y que dicha raíz ha sido separada; o sea existe $[a, b] \subset I$ en el que \hat{x} es la sola raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Como se ha dicho anteriormente, el problema radica en construir una función T que sea contractiva en $[a, b]$ tal que el punto fijo \hat{x} de T es la raíz \hat{x} de $f(x) = 0$ y recíprocamente. El siguiente teorema muestra como construir tal función T utilizando f .

Teorema 6 Sea f una función real continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y sea $\hat{x} \in [a, b]$ el único número real tal que $f(\hat{x}) = 0$. Además, suponemos que

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &= \inf_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \\ \beta &= \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \quad \alpha < \beta. \end{aligned}$$

Entonces, existe una función T definida en $[a, b]$ tal que T es lipschisiana con constante $0 \leq k < 1$ y $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración. Por hipótesis f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$. Adicionalmente $\hat{x} \in [a, b]$ es único.

Sea $m \in \mathbb{R}$. Definimos la función T en $[a, b]$ como sigue: $T(x) = x - mf(x) \quad x \in [a, b]$. Se tiene

$$T(\hat{x}) = \hat{x} - mf(\hat{x}) = 0,$$

esto es, \hat{x} es un punto fijo de T , pues $f(\hat{x}) = 0$.

Determinemos una constante m para la cual T sea lipschisiana en $[a, b]$ de constante $0 \leq k < 1$.

Sean $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Entonces

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= |x - mf(x) - (y - mf(y))| = |x - y - m(f(x) - f(y))| \\ &= \left| (x - y) \left(1 - m \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) \right| = |x - y| \left| 1 - m \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|. \end{aligned}$$

Buscamos una constante \hat{m} tal que

$$\left| 1 - m \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k < 1 \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y.$$

Primeramente, la hipótesis $0 < \alpha = \inf_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$ implica que los cocientes $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ conservan el signo para todo $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$.

$$\text{Definimos } \hat{m} = \begin{cases} -\frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y, \\ \frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y. \end{cases}$$

i. Si $\hat{m} > 0$ entonces $\hat{m} = \frac{1}{\beta}$. Se tiene, $\forall x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \beta = \frac{1}{\hat{m}} \implies \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1,$$

de donde $0 \leq 1 - \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y$.

Además, $\forall x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$,

$$\alpha \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \implies \hat{m}\alpha \leq \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

con lo cual

$$0 \leq 1 - \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1 - \hat{m}\alpha = 1 - \frac{\alpha}{\beta} = k < 1.$$

ii. Si $\hat{m} < 0$ entonces $\hat{m} = -\frac{1}{\beta}$. Para todo $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$, se tiene

$$-\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \beta = -\frac{1}{\hat{m}} \implies \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1,$$

de donde

$$0 \leq 1 - \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

como

$$\alpha \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = -\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y,$$

se sigue que

$$\hat{m}\alpha \geq -\hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y,$$

consecuentemente

$$0 \leq 1 - \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1 + \hat{m}\alpha = 1 - \frac{\alpha}{\beta} = k < 1.$$

De i) y ii) se concluye que

$$\left| 1 - \hat{m} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta} = k < 1 \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y,$$

con lo cual

$$|T(x) - T(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b],$$

que prueba que $T(x) = x - \hat{m}f(x)$ $x \in [a, b]$ es lipschisiana con constante $0 \leq k < 1$. ■

Interpretación Geométrica

Sea f una función real continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y sea $\hat{x} \in [a, b]$ la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Sea aún

$$\begin{aligned}\beta &= \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \\ \hat{m} &= \begin{cases} -\frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y, \\ \frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } x \neq y. \end{cases} \\ T(x) &= x - \hat{m}f(x) \quad x \in [a, b].\end{aligned}$$

Por el teorema precedente, T es lipschisiana de constante $0 \leq k < 1$ y $T(\hat{x}) = \hat{x}$, $f(\hat{x}) = 0$.

Sea $x_0 \in [a, b]$ y $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. La interpretación geométrica del método iterativo

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = T(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

es la siguiente: se trata de aproximar la raíz \hat{x} de la ecuación $f(x) = 0$ mediante la sucesión de puntos de intersección de las rectas de ecuación

$$y = \frac{x - x_n}{\hat{m}} + f(x_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

con el eje X . Así la recta L_1 que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $\frac{1}{\hat{m}}$ con $x_0 \in [a, b]$ viene dada por

$$y - f(x_0) = \frac{1}{\hat{m}}(x - x_0).$$

Entonces, $y = 0 \iff x = x_0 - \hat{m}f(x_0)$. Ponemos $x_1 = x_0 - \hat{m}f(x_0)$.

La recta L_2 que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y que tiene pendiente $\frac{1}{\hat{m}}$ es

$$y - f(x_1) = \frac{1}{\hat{m}}(x - x_1),$$

con lo cual $y = 0 \iff x = x_1 - \hat{m}f(x_1)$. Ponemos $x_2 = x_1 - \hat{m}f(x_1)$.

Continuando con este proceso obtenemos una sucesión (x_n) que converge a la raíz \hat{x} de $f(x) = 0$.

En el gráfico que se muestra continuación se ilustra este procedimiento.

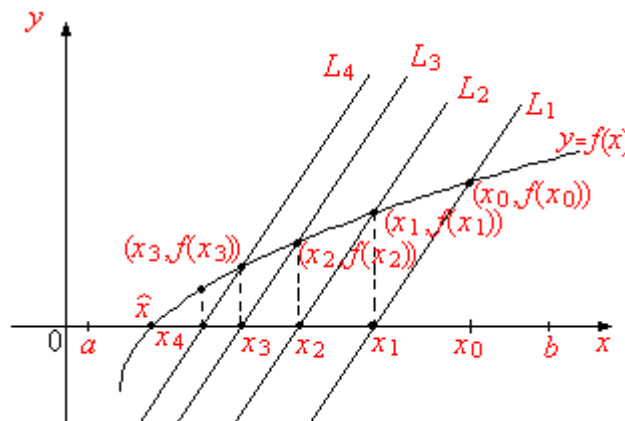


Figura 50

Algoritmo

El proceso iterativo $\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = T(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$ se llama método iterativo de punto fijo modificado. El problema principal de este método es calcular la constante \widehat{m} .

Supongamos que la función continua f cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, esto es, $f(a)f(b) < 0$ y que la longitud $b - a$ del intervalo $[a, b]$ sea suficientemente pequeña para que la aplicación $T(x) = x - mf(x)$ sea contractiva en $[a, b]$ con $m \in \mathbb{R}$. En estas condiciones elegimos m como sigue

$$m = \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

con lo cual

$$T(x) = x - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x) \quad x \in [a, b].$$

El método iterativo de punto fijo modificado queda en la forma

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Estimemos el número máximo de iteraciones que se requieren para aproximar \widehat{x} con una precisión $\varepsilon = 10^{-t}$ con $t \in \mathbb{Z}^+$ (por ejemplo $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-6} \dots$). En la demostración del teorema de Banach del punto fijo se dedujo la desigualdad

$$|x_n - x_m| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_0 - x_1| \quad m, n \in \mathbb{Z}^+, 0 < k < 1.$$

Dejando fijo n y considerando que $\widehat{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$, se tiene por la continuidad de la función valor absoluto

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k^n}{1 - k} |x_0 - x_1| \Leftrightarrow \left| x_n - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \right| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_0 - x_1| \Leftrightarrow \\ |x_n - \widehat{x}| &\leq \frac{k^n}{1 - k} |x_0 - x_1|. \end{aligned}$$

Puesto que $x_0, x_1 \in [a, b]$, $|x_0 - x_1| \leq b - a$, se sigue que

$$|x_n - \widehat{x}| \leq \frac{b - a}{1 - k} k^n,$$

y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{1 - k} k^n = \frac{b - a}{1 - k} \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0,$$

entonces para $\varepsilon = 10^{-t}$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{b - a}{1 - k} k^n < \varepsilon$.

Para $n = n_0$ podemos asumir que $\frac{b - a}{1 - k} k^{n_0} \leq \varepsilon$. Tomando logaritmos en ambos miembros de esta última desigualdad, obtenemos

$$n_0 \ln(k) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon(1 - k)}{b - a}\right),$$

y como $0 < k < 1$, $\ln(k) < 0$. Luego

$$n_0 \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1 - k)}{b - a}\right)}{\ln(k)}.$$

El número máximo de iteraciones N_{\max} elegimos como sigue:

$$N_{\max} = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1 - k)}{b - a}\right)}{\ln(k)} \right\rceil + 1,$$

con $[\cdot]$ la función mayor entero menor o igual que.

Así, $|x_n - \hat{x}| < \varepsilon = 10^{-t} \quad n = 1, 2, \dots, N_{\max}$.

Por el teorema 5, la constante $k = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$ resulta difícil de estimar.

Algoritmo

Datos de entrada: a, b extremos de $[a, b]$, función f , $\varepsilon = 10^{-t}$, N_{\max} .

Datos de salida: Valor aproximado \tilde{x} de \hat{x} , n número de iteraciones.

1. Leer $x_0 \in [a, b]$ y poner $x = x_0$.
2. Calcular $m = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$.
3. Para $n = 0, \dots, N_{\max}$.
4. Calcular $y = x - m f(x)$.
5. Si $|x - y| < \varepsilon$. Continuar en 7).
6. $x = y$.
7. Si $n < N_{\max}$, imprimir “raíz aproximada $\tilde{x} = y$ en n iteraciones”. Continuar en 9).
8. Imprimir “raíz aproximada $\tilde{x} = y$ en N_{\max} iteraciones”.
9. Fin.

Ejemplos

1. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[4]{2}$ con 6 cifras decimales de precisión.

Sea $f(x) = x^4 - 2$ con $x > 0$. Entonces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}.$$

La función f tiene a $\sqrt[4]{2}$ como raíz localizada en el intervalo $[1, 1.5]$. Además, $f(1) = -1$, $f(1.5) = 5.0625$ y $f(1) \cdot f(1.5) < 0$. Tenemos $a = 1, b = 1.5$. Luego

$$m = \frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{1.5-1}{f(1.5)-f(1)} = 0.1231.$$

El esquema numérico es el siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \in [1, 1.5] & \text{aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = x_n - 0.1231 f(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Tomando $x_0 = 1$, en la tabla de la izquierda se muestran los resultados de la aplicación del esquema numérico. En la tabla de la derecha se muestra la aplicación del mismo esquema numérico pero con otra aproximación inicial $x_0 = 1.3$.

n	x_n	n	x_n
0	1,0	0	1,3
1	1,1231	1	1,194614
2	1,173446	2	1,190106
3	1,186241	3	1,189367
4	1,188688	4	1,189233
\vdots	\vdots	5	1,189212
10	1,189207102	6	1,18907
11	1,189207113	7	1,189207
12	1,189207115,		

El valor aproximado de $\sqrt[4]{2}$ con una precisión de 6 cifras decimales es 1,189207. Valor obtenido en una calculadora de bolsillo $\tilde{x} = 1,18927115\dots$

2. Encontrar todas las raíces reales de la ecuación $x^3 + 2,1x^2 + 32,17x - 23,205 = 0$.

Solución: pongamos $f(x) = x^3 + 2,1x^2 + 32,17x - 23,205$ y escribamos f utilizando el esquema de Hörner. Se tiene

$$f(x) = -23,205 + x(-32,17 + x(2,1 + x)).$$

Busquemos las raíces en el intervalo $[-10, 10]$ (en la sección 6 se precisará como determinar los intervalos en los que están localizadas las raíces reales de polinomios). Sea $n = 50$, entonces $h = \frac{20}{50} = 0,4$. Aplicamos el algoritmo de búsqueda de cambio de signo. Tenemos

x	$f(x)$
-10	-491,5
-9,6	-405,6
\vdots	\vdots
-7,2	-55,9
-6,8	-21,8
-6,4	6,555
-6,0	29,4
\vdots	\vdots

x	$f(x)$
-1,2	16,7
-0,8	3,4
-0,4	-10,1
0	-23,205
\vdots	\vdots

x	$f(x)$
4,4	-38,9
4,8	-18,6
5,2	6,9
5,6	38,1
\vdots	\vdots
10	865,1

La ecuación $f(x) = 0$ tiene 3 raíces localizadas (separadas) en los intervalos $[6,8, -6,4]$, $[-0,8, -0,4]$, $[4,8, 5,2]$.

Observación: La constante \hat{m} está definida por (véase teorema 5)

$$\hat{m} = \begin{cases} -\frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \text{con } x \neq y, \\ \frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \text{con } x \neq y. \end{cases}$$

con $\beta = \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$ es equivalente a la siguiente selección

$$\hat{m} = \frac{\text{sign} \left(\frac{f(x')-f(y')}{x'-y'} \right)}{\sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|},$$

donde $x', y' \in [a, b]$ con $x' \neq y'$ los puntos en los que $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$ $x \neq y$, alcanza el valor extremo.

Si la función f es derivable en cada subintervalo en el que está separada cada raíz de $f(x) = 0$, se sigue que

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x)(x_1 - x_2) \quad \text{con } x \text{ entre } x_1 \text{ y } x_2,$$

de donde

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x), \quad x_1 \neq x_2.$$

Resulta que si $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$,

$$\hat{m} = \frac{\text{sign}(f'(\bar{x}))}{\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|},$$

con $\bar{x} \in [a, b]$ en el que $|f'(x)|$ alcanza el valor extremo. Entonces, la aplicación contractiva T está definida por

$$T(x) = x - \hat{m}f(x) \quad x \in [a, b].$$

Calculemos las raíces de $f(x) = 0$ utilizando \hat{m} el estimado con $f'(x)$. Tenemos

$$f'(x) = 3x^2 + 4,2x - 32,17 = -32,17 + x(4,2 + 3x).$$

i. Cálculo de $\widehat{x}_1 \in [6,3, -6,4]$.

Se tiene $f'(-6,8) = 79,99$, $f'(-6,4) = 63,83$. Luego

$$\sup_{x \in [-6,8, -6,4]} |f'(x)| = 79,99,$$

con lo cual $\widehat{m}_1 = \frac{1}{79,99} \simeq 0,013$, $T(x) = x - 0,013f(x)$ $x \in [6,3, -6,4]$.

Esquema numérico: $\begin{cases} x_0 \in [-6,8, -6,4] & \text{punto inicial,} \\ x_{n+1} = T(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$ En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del esquema numérico precedente:

n	x_n
0	-6,8
1	-6,517
2	-6,502
3	-6,500...
4	-6,50003
5	-6,500000

La solución en el intervalo $[6,3, -6,4]$ es: $\widehat{x}_1 = -6,5$.

ii. Cálculo de $\widehat{x}_2 \in [-0,8, -0,4]$.

Se tiene $f'(-0,8) = -33,61$, $f'(-0,4) = -33,37$, $\sup_{x \in [-0,8, -0,4]} |f'(x)|$, $\widehat{m}_2 = \frac{-1}{33,61} \simeq -0,03$ y

$T(x) = x + 0,03f(x)$ $x \in [-0,8, -0,4]$. En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo de punto fijo modificado:

n	x_n
0	-0,8
1	-0,699
2	-0,700008
3	-0,699999...
4	-0,7

La solución en el intervalo $[-0,8, -0,4]$ es $\widehat{x}_2 = -0,7$.

iii. Cálculo de $\widehat{x}_3 \in [4,8, 5,2]$. Estimemos la constante \widehat{m}_3 . Obtenemos $f'(4,8) = 57,11$, $f'(5,2) = 70,79$, luego

$$\begin{aligned} \widehat{m}_3 &= \frac{1}{\sup_{x \in [4,8, 5,2]} |f'(x)|} = \frac{1}{7079}, \\ \widehat{m}_3 &\simeq 0,0141, \\ T(x) &= x - 0,0141f(x) \quad x \in [4,8, 5,2]. \end{aligned}$$

El esquema numérico es el siguiente:

$$\begin{cases} x_0 = 4,8, \\ x_{n+1} = T(x_n) \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

En la tabla que se muestra a continuación se resumen los resultados obtenidos en la ejecución del algoritmo precedente.

n	x_n
0	4,8
1	5,063
2	5,098
3	5,0998
4	5,0999
5	5,09999
6	5,09999
7	5,1

La solución es $\hat{x}_3 = 5,1$.

Calculemos ahora las raíces $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ pero esta vez utilizamos \hat{m} dado por

$$\hat{m} = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

- i. $\hat{m}_1 = \frac{0,4}{f(-6,4)-f(-6,8)} = \frac{0,4}{6,555+21,8} = 0,0141$. Note la diferencia entre este valor \hat{m}_1 y el calculado con la derivada ($\hat{m}_1 \approx 0,013$). Se tiene $T(x) = x - 0,0141f(x)$. En la tabla siguiente se muestran los términos de la sucesión (x_n) , con $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$, con x_0 dado:

n	x_n
0	-6,8
1	-6,493
2	-6,4996
3	-6,4999
4	-6,49999
5	-6,499999
6	-6,5

Raíz $\hat{x}_1 = -6,5$.

- ii. Para el cálculo de \hat{x}_2 , obtenemos

$$\hat{m}_2 = \frac{0,4}{f(-0,4)-f(-0,8)} = -0,0296, \quad T(x) = x + 0,0296f(x) \quad x \in [-0,8, -0,4].$$

Procediendo como en el caso precedente, tenemos los siguientes resultados:

n	x_n
0	-0,8
1	-0,7000...
2	-0,7000019
3	-0,7

Raíz $\hat{x}_2 = 0,7$.

- iii. Cálculo de \hat{x}_3 . Se tiene $\hat{m}_3 = \frac{0,4}{f(5,2)-f(4,8)} = 0,0157$ $T(x) = x - 0,0157f(x)$ $x \in [4,8, 5,2]$. Como en los casos precedentes, se obtienen los siguientes resultados:

n	x_n
0	4,8
1	5,093
2	5,1004
3	5,09997
4	5,100001
5	5,099999...
6	5,1

$\hat{x}_3 = 5,1$.

3. Encontrar el menor $\hat{x} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\tan^2(\hat{x}) = 2\hat{x} + 1$.

Solución: sean $f(x) = 2x + 1 - \tan^2(x)$, $\varphi_1(x) = \tan^2(x)$, $\varphi_2(x) = 2x + 1$. El método gráfico muestra que la menor raíz positiva de $f(x) = 0$ está localizada en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (véase gráfico adjunto).

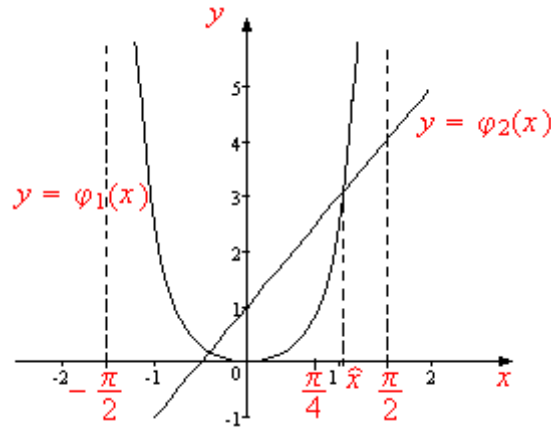


Figura 51

Más aún, $\varphi_1(1,2) \simeq 6,62$, $\varphi_2(1,2) \simeq 3,4$. Luego $\hat{x} \in [1, 1,2]$,

$$\begin{aligned} f(1) &\simeq 0,57, f(1,2) \simeq -3,22, \\ \hat{m} &= \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \simeq -0,0528, \end{aligned}$$

y la función contractiva está dada por

$$T(x) = x + 0,0528f(x) \quad x \in [1, 1,2].$$

Con $x_0 = 1$, la sucesión (x_n) con $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$ converge a \hat{x} . Con $n = 30$ iteraciones $\hat{x} \simeq 1,05486$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$.

5.4.3. Método de Newton-Raphson

Sea $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Consideramos el problema (P) siguiente:

$$\text{hallar } \hat{x} \in I, \text{ si existe, talque } f(\hat{x}) = 0. \quad (\text{P})$$

Suponemos nuevamente que el problema (P) tiene solución; es decir, existe al menos un $\hat{x} \in I$ tal que $f(\hat{x}) = 0$ y que \hat{x} ha sido separada, o sea, existe $[a, b] \subset I$ en el que \hat{x} es la única raíz de $f(x) = 0$ allí localizada.

El método iterativo de punto fijo presenta los siguientes inconvenientes:

- i) A partir de f , elegir una función contractiva T .
- ii) Supuesto que se ha seleccionado una aplicación contractiva T y dado $x_0 \in [a, b]$, la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = T(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ converge muy lentamente.

En el método de punto fijo modificado, la construcción de la aplicación contractiva T es relativamente sencilla si la longitud del intervalo $[a, b]$ en el que está localizada la raíz es muy pequeña. En tal caso, si $f(a)f(b) < 0$,

$$T(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(x) \quad x \in [a, b]$$

es contractiva. La constante $m = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ no es la óptima.

La sucesión (x_n) puede converger lentamente para $x_0 \in [a, b]$ dado y $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. Note que no se requiere que f sea derivable. Para acelerar la convergencia se utilizará este método en el denominado método de Steffensen que será abordado en una sección posterior de este capítulo.

En el caso en que la función f sea derivable en $[a, b]$, uno de los métodos más utilizados para aproximar la solución \hat{x} de la ecuación $f(x) = 0$ el método de Newton del que nos ocuparemos en esta sección.

En la demostración del teorema 5 se propuso la búsqueda de una constante m tal que

$$\left| 1 - m \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k < 1 \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \text{con } x \neq y.$$

Se ha supuesto que los cocientes $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$ conservan el signo de la constante \hat{m} dada por

$$\hat{m} = \frac{\text{sign}(f'(\bar{x}))}{\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|},$$

con $\bar{x} \in [a, b]$ en el que $|f'(x)|$ alcanza el valor extremo (véase ejemplo 2 de la sección 4.2). Si en vez de buscar una constante global \hat{m} en $[a, b]$, se busca m que dependa de cada punto $x \in [a, b]$, esto es, para cada par de puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= f'(x)(x_1 - x_2) \quad \text{con } x \in [x_1, x_2], \\ f'(x) &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \end{aligned}$$

se busca m que dependa de $x \in [a, b]$ y que satisfaga la condición

$$\left| 1 - m(x) \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k < 1 \quad x \in [a, b],$$

se tiene igualmente una aplicación contractiva. Si se pone $m = \frac{1}{f'(x)}$, con $f'(x) \neq 0$, entonces

$$T(x) = x - \frac{1}{f'(x)} f(x) \quad x \in [a, b]$$

es contractiva en $[a, b]$.

La función T es la función de iteración del método de Newton siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ dado,} \\ x_{n+1} = T(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Interpretación geométrica

Sea $x_0 \in [a, b]$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

La recta L corta al eje X en el punto $(x_1, 0)$, esto es

$$L(x) = 0 \iff f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \iff x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Pongamos $x_1 = x$. Notemos que x_1 es un valor aproximado de \hat{x} .

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ es

$$L_1(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

que corta al eje X en $(x_2, 0)$, en cuyo caso $L_1(x) = 0$, de donde

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Sea $x_2 = x$. Entonces x_2 es un valor aproximado de \hat{x} .

Continuando con este procedimiento n veces, tenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde x_{n+1} es un valor aproximado de la raíz \hat{x} de $f(x) = 0$.

De esta construcción podemos definir la función de iteración del método de Newton siguiente

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad x \in [a, b], \quad f'(x) \neq 0.$$

En la figura que se muestra a continuación se exhibe el procedimiento que acabamos de describir.

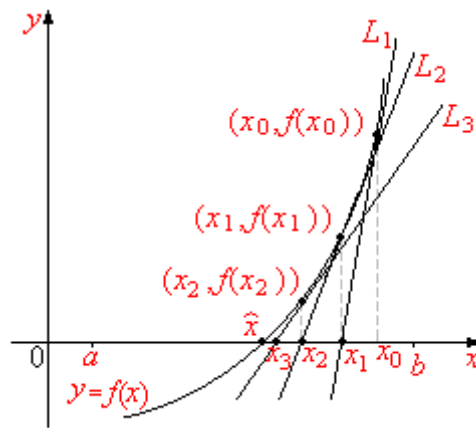


Figura 52

Otra forma de obtener la función de iteración del método de Newton es la siguiente. El desarrollo de Taylor en un entorno de \hat{x} raíz de la ecuación $f(x) = 0$, está dado por $0 = f(x) + f'(x)(x - \hat{x})$ de donde

$$\hat{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad f'(x) \neq 0, \quad x \in [a, b].$$

Ponemos

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad f'(x) \neq 0, \quad x \in [a, b],$$

y se tiene la función de iteración del método de Newton.

Observación

Supongamos que f tenga dos raíces \hat{x}_1, \hat{x}_2 en el intervalo $[a, b]$ y que f posea derivada segunda continua en $]a, b[$.

Sea $[\hat{x}_1 - r, \hat{x}_1 + r]$ un entorno cerrado de \hat{x}_1 y $x_0 \in [\hat{x}_1 - r, \hat{x}_1 + r]$ tal que $f''(x_0) = 0$, es decir $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de f . Entonces, el método de Newton, en general, no converge a \hat{x}_1 sino a \hat{x}_2 o

bien diverge. Véase la figura siguiente:

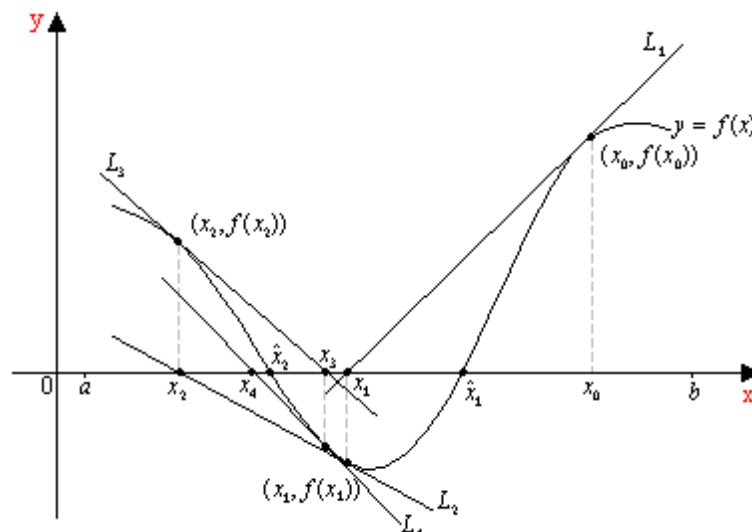


Figura 53

Supongamos que $f''(\hat{x}) = 0$, es decir que $(\hat{x}, f(\hat{x})) = (\hat{x}, 0)$ es un punto de inflexión de f y que \hat{x} es la sola raíz localizada en $[a, b]$.

Sea $x_0 \in [a, b]$. La sucesión (x_n) con $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n = 0, 1, \dots$ puede ser divergente.

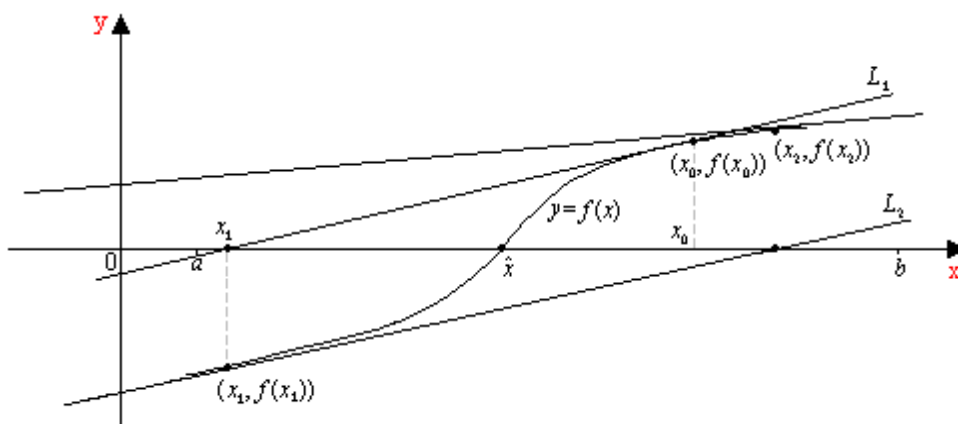


Figura 54

Estos dos problemas ponen de manifiesto que el método de Newton-Raphson, en general, no converge a \hat{x} .

Establezcamos las condiciones que la función f y el punto inicial x_0 han de verificar para que el método de Newton-Raphson sea convergente.

Teorema 7 Supongamos que $f \in C^2([a, b])$ tal que $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Si $x_0 \in [a, b]$ es una aproximación inicial de \hat{x} tal que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, entonces la sucesión (x_n) generada por la función de iteración T converge a \hat{x} .
El punto x_0 se denomina extremo de Fourier.

Demostración. Notemos que $\hat{x} \in [a, b]$ es la única raíz de $f(x) = 0$ allí localizada. Se tiene $f(a)f(b) < 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; y que $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$

$\forall x \in [a, b]$; esto es, f es estrictamente creciente y convexa.

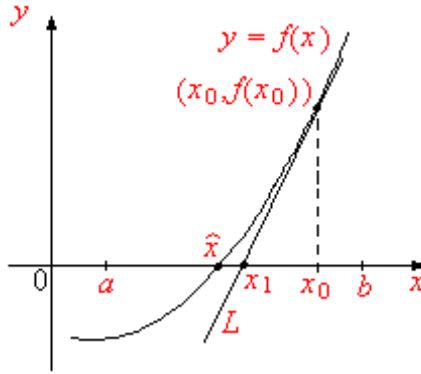


Figura 55

Sea $x_0 \in [a, b]$ y supongamos que $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Como $f''(x_0) > 0$, se sigue que $f(x_0) > 0$ y por todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_n > \hat{x}$ y $f(x_n) > 0$. Probemos por inducción.

i) $x_0 > \hat{x}$. Puesto que $f(\hat{x}) = 0$ y f es estrictamente creciente, se tiene

$$f(x_0) - f(\hat{x}) = f(x_0) > 0,$$

con lo cual $x_0 > \hat{x}$.

ii) Supongamos que $x_n > \hat{x}$ para $n \geq 0$. Probemos que $x_{n+1} > \hat{x}$ y $f(x_{n+1}) > 0$. Como $f \in C^2([a, b])$. Por el desarrollo de Taylor, se tiene

$$0 = f(\hat{x}) = f(x_n) + f'(x_n)(\hat{x} - x_n) + \frac{1}{2!}f''(x_n)(\hat{x} - x_n)^2.$$

Puesto que $f''(x_n) > 0$, entonces $\frac{1}{2!}f''(x_n)(\hat{x} - x_n)^2 > 0$. Para que la igualdad precedente tenga lugar; debemos tener

$$f(x_n) + f'(x_n)(\hat{x} - x_n) < 0.$$

Además, por hipótesis $f'(x_n) > 0$. Luego

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \hat{x} - x_n < 0,$$

y multiplicando por -1 , obtenemos

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n - \hat{x} > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= T(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} - \hat{x} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \hat{x} > 0, \end{aligned}$$

de donde $x_{n+1} - \hat{x} > 0$ que implica $x_{n+1} > \hat{x}$. Por ser f creciente, $f(x_{n+1}) - f(\hat{x}) = f(x_{n+1}) > 0$.

Mostremos que (x_n) converge a \hat{x} . Para ello probemos que (x_n) es una sucesión decreciente y acotada. Como $T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$, resulta que T es derivable en $[a, b]$ pues $f \in C^2([a, b])$. Por el teorema del valor medio, tenemos

$$T(x_n) - T(\hat{x}) = T'(t_n)(x_n - \hat{x}) \quad \text{con } \hat{x} < t_n < x_n.$$

Como $x_n > \hat{x}$, $x_{n+1} > \hat{x}$ y por definición de (x_n) , se tiene

$$T(x_n) - T(\hat{x}) = x_{n+1} - \hat{x} > 0,$$

luego

$$T'(x_n)(x_n - \hat{x}) > 0 \Rightarrow T'(x_n) > 0 \text{ ya que } x_n > \hat{x}.$$

Además, $f(x_n) > 0$, $f'(x_n) > 0$, $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$, y

$$T(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - T(x_n) > 0,$$

de donde

$$x_n - x_{n+1} > 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1},$$

pues $x_{n+1} = T(x_n)$.

Así, $(x_n) \in c[a, b]$ y (x_n) decreciente. Luego (x_n) es convergente.

Para completar la prueba, mostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$.

Como $x_{n+1} < x_n$ se sigue que $x_{n+1} - \hat{x} < x_n - \hat{x}$. Luego

$$0 < \frac{x_{n+1} - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} < 1.$$

Pero

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \hat{x} &= T(x_n) - \hat{x} = T(x_n) - T(\hat{x}) = T'(t_n)(x_n - \hat{x}), \\ 0 &< T'(x_n) = \frac{x_{n+1} - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} < 1 \end{aligned}$$

que prueba que T es contractiva. ■

Observaciones

1. De la condición $f(x_0)f''(x_0) > 0$ resulta que $f(x_0) > 0$ y $f''(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$ y $f''(x_0) < 0$.

- i. Si $f(x_0)$ y $f''(x_0) > 0$, f es convexa. Por hipótesis del teorema 6, $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, f' mantiene el mismo signo en $[a, b]$ dando como resultado que f es estrictamente decreciente en $[a, b]$ o f es estrictamente creciente en $[a, b]$. En las dos figuras que se muestran a continuación se presentan estas dos situaciones

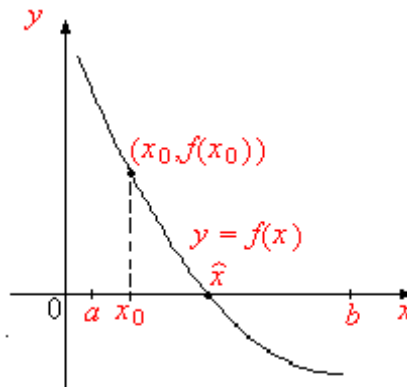


Figura 56

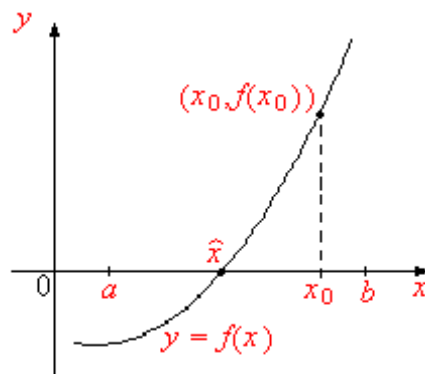


Figura 57

- ii. Si $f(x_0) < 0$ y $f''(x_0) < 0$. Resulta que f es cóncava, estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

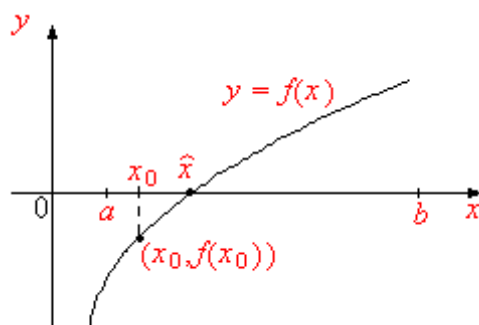


Figura 58

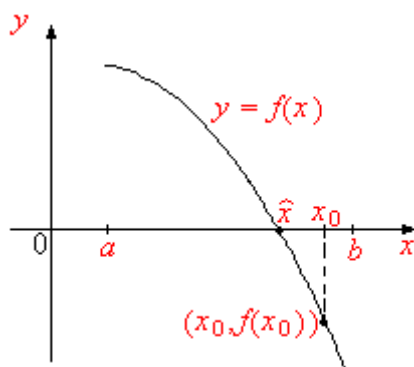


Figura 59

2. Si $f(x_0) f''(x_0) < 0$ entonces $f(x_0) > 0$ y $f''(x_0) < 0$ o $f(x_0) < 0$ y $f''(x_0) > 0$.

Supongamos $f(x_0) > 0$ y $f''(x_0) < 0$. Entonces f es cóncava. Puede suceder que $x_1 = T(x_0) \notin$

$[a, b]$.

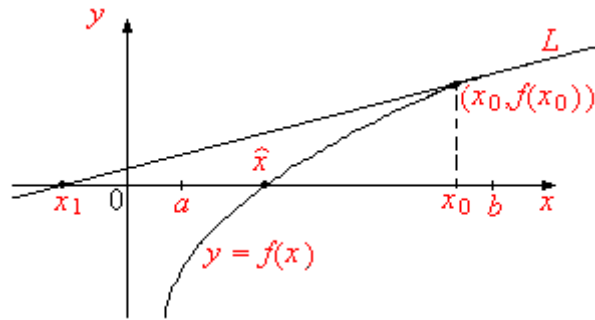


Figura 60

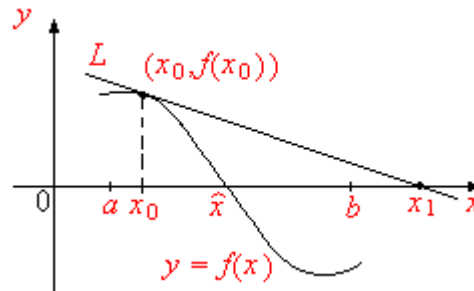


Figura 61

Teorema 8 Supongamos que $f \in C^2([a, b])$ y $\hat{x} \in [a, b]$ la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ allí localizada. Si $f'(\hat{x}) \neq 0$, existe $r > 0$ tal que la sucesión (x_n) generada por el método de Newton converge a \hat{x} para todo $x_0 \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r]$ aproximación inicial de \hat{x} .

Demostración. Mostremos que la función de iteración $T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $x \in [a, b]$ es lipschisiana en $[\hat{x} - r, \hat{x} + r]$ para algún $r > 0$ y constante $0 < k < 1$.

Por hipótesis $f \in C^2([a, b])$ entonces f' es continua en $[a, b]$. Además $f'(\hat{x}) \neq 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta] \subset [a, b]$. Definimos

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta].$$

Como f y f' son continuas en $[a, b]$, entonces T es continua en $[\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$. Por otra parte,

$$T'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \quad \forall x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta].$$

Resulta $T \in C^1([\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta])$. Puesto que $f(\hat{x}) = 0$ entonces $T'(\hat{x}) = \frac{f(\hat{x})f''(\hat{x})}{(f'(\hat{x}))^2} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} T'(x) = T'(\hat{x}) = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $\forall x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ con $|x - \hat{x}| < r \Rightarrow |T'(x) - T'(\hat{x})| < \varepsilon$. En particular para $0 < \varepsilon < 1$, existe $r > 0$ tal que $r < \delta$ y

$$|T'(x)| < \varepsilon < 1 \quad \forall x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r],$$

y por el teorema del valor medio

$$T(x) - T(\hat{x}) = T'(t)(x - \hat{x}) \quad \text{con } t \text{ entre } x \text{ y } \hat{x}.$$

Entonces

$$|T(x) - T(\hat{x})| = |T(x) - \hat{x}| = |T'(t)| |x - \hat{x}| < \varepsilon |x - \hat{x}| \leq \varepsilon r < r.$$

Luego

$$|T(x) - \hat{x}| < r \Leftrightarrow \hat{x} - r < T(x) < \hat{x} + r \quad \forall x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r].$$

Resulta que la imagen directa $T([\hat{x} - r, \hat{x} + r]) = [\hat{x} - r, \hat{x} + r]$ y $|T'(x)| \leq \varepsilon < 1 \quad \forall x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r]$ que muestra que T es contractiva. Por el teorema de Banach del punto fijo, para todo $x_0 \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r]$, la sucesión (x_n) con $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$ converge a \hat{x} . ■

Ejemplos

1. Sean $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Calculemos $\sqrt[n]{a}$.

Sea f de $[0, \infty[$ en \mathbb{R} la función definida por $f(x) = x^n - a \quad x \in [0, \infty[$.

i) Si $0 < a < 1$ entonces $f(0) = -a < 0$, $f(1) = 1 - a > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $\hat{x} \in [0, 1]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$, esto es,

$$f(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \hat{x}^n - a = 0 \Rightarrow \hat{x} = \sqrt[n]{a}.$$

Además, $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Se tiene

$$f'(x) > 0, f''(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

La función de iteración del método de Newton está definida por

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1}} = \frac{nx^n - x^n + a}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \left[(1-n)x + \frac{a}{x^{n-1}} \right] \quad x \in [0, 1].$$

Sea $x_0 = 1$, x_0 es el extremo de Fourier, pues $f(x_0)f''(x_0) > 0$. La sucesión (x_m) generada por la función de iteración T es convergente a $a^{\frac{1}{n}}$.

ii) Si $a = 1$. Se tiene $\hat{x} = 1$.

iii) Si $a > 1$, entonces $f(1) = 1 - a < 0$, $f(a) = a^n - a > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $\hat{x} \in [1, a]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$. La función de iteración está definida por

$$T(x) = \frac{1}{n} \left[(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}} \right] \quad x \in [1, a].$$

Para valores de $a > 1$ suficientemente grandes, resulta difícil elegir $x_0 \in [1, a]$ de modo que la sucesión (x_m) generada por la función de iteración T converja rápidamente.

Sean $a > 1$ y $j \in \mathbb{Z}^+$ el mas pequeño entero tal que $10^{-nj}a < 1$. Ponemos $b = 10^{-nj}a$ y definimos $g(t) = t^n - b$. Por i). existe $\hat{t} \in [0, 1]$ tal que $g(\hat{t}) = 0 \Leftrightarrow \hat{t} = b^{\frac{1}{n}} = (10^{-nj}a)^{\frac{1}{n}} = 10^{-j}a^{\frac{1}{n}}$ de donde $a^{\frac{1}{n}} = 10^j\hat{t}$. En estas condiciones, con $t_0 = 1$, la sucesión (t_m) definida por $t_{m+1} = \frac{1}{n} \left[(n-1)t_m + \frac{b}{t_m^{n-1}} \right] \quad m = 0, 1, \dots$ converge a \hat{t} y en consecuencia $a^{\frac{1}{n}} = 10^j \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = 10^j\hat{t}$.

Nota: Un hecho importante del análisis matemático es probar que todo número real es límite de una sucesión de números racionales. Para $a \in \mathbb{Q}^+$ que no sea potencia n-ésima de $c \in \mathbb{Q}^+$, la función de iteración

$T(x) = \frac{1}{n} \left[(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}} \right] \quad x > 0$ proporciona una forma de construir sucesiones de números racionales que convergen a $a^{\frac{1}{n}} \notin \mathbb{Q}^+$. Así por ejemplo

i. Para $a = 2$, $n = 2$, $x_0 = 2$ y $x_{m+1} = \frac{1}{2} \left(x_m + \frac{2}{x_m} \right)$. La sucesión (x_m) converge a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$.

ii. Para $a = 2$, $n = 5$, $x_0 = 3$ y $x_{m+1} = \frac{1}{5} \left(4x_m + \frac{2}{x_m^4} \right)$, (x_m) converge a $\sqrt[5]{2} \notin \mathbb{Q}^+$.

iii. Para $a = 5$, $n = 3$, $x_0 = 3$ y $x_{m+1} = \frac{1}{3} \left(2x_m + \frac{5}{x_m^2} \right)$, (x_m) converge a $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}^+$.

2. Encontrar las raíces de la ecuación $e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$.

Ponemos $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1$. Entonces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{4}} = \frac{1}{2-x} \quad x \neq 2.$$

El método gráfico muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene única raíz localizada en el intervalo $[0, 1]$, como se puede observar en la figura siguiente.

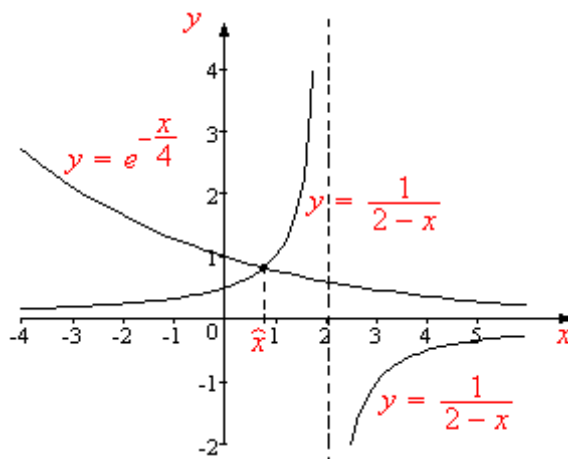


Figura 62

Puesto que

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}(6-x), \\ f''(x) &= \frac{1}{16}e^{-\frac{x}{4}}(10-x). \end{aligned}$$

Sea $x_0 = 0$. Entonces $f(0) \cdot f''(0) > 0$ con lo cual x_0 es el extremo de Fourier. La función de iteración del método de Newton está dada por

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + \frac{4(2-x-e^{-\frac{x}{4}})}{6-x} \quad x \in [0, 1].$$

Luego, el esquema numérico es $x_{n+1} = T(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$. En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del método de Newton:

n	x_n
0	0
1	0,666667
2	0,780646
3	0,783594
4	0,783596
5	0,783596

Sea $x_0 = 1$. Se tiene $f(1) f''(1) < 0$, x_0 no es el extremo de Fourier, sin embargo el método converge. A continuación se muestran los resultados de la aplicación del método de Newton:

n	x_n
0	1
1	0,772779
2	0,783570
3	0,783596
4	0,783596

Si equivocadamente se elige el punto $x_0 = 8 \notin [0, 1]$, se tiene $T(x_0) = 34,778$, $T(x_1) = 869,153$, $T(x_2) = 1,079 \times 10^{32}$, $T(x_3)$ overflow. Así (x_n) diverge.

3. Hallar las raíces de la ecuación $e^x(x - 2,4055) + 3 = 0$. Como en los ejemplos anteriores definimos la función real f como sigue: $f(x) = e^x(x - 2,4055) + 3$. Entonces $f'(x) = e^x(x - 1,4055)$, $f''(x) = e^x(x - 0,4055)$. El estudio de la función f muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces ubicadas en los intervalos $[0, 1]$ y $[1, 3]$ como se puede observar en la figura que se muestra a continuación.

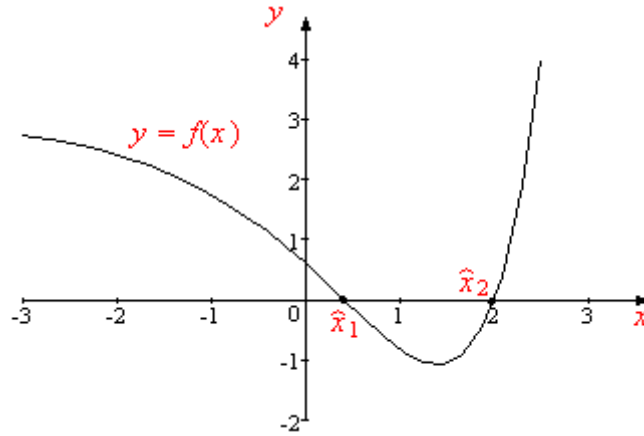


Figura 63

Además, f es convexa si $x > 0,4055$, cóncava si $x < 0,4055$.

La función de iteración del método de Newton está definida por

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x(x - 2,4055) + 3}{e^x(x - 1,4055)} \\ &= \frac{2,4055 + x(-2,4055 + x) - 3e^{-x}}{x - 1,4055} \quad x \neq 1,4055.\end{aligned}$$

Calculemos los valores aproximados de las raíces \hat{x}_1 , \hat{x}_2 de la ecuación $f(x) = 0$. Para ello vamos a elegir un punto x_0 que sea, en unos casos, el extremo de Fourier, y en otros que no lo sea.

- i. Sea $x_0 = 0$. Entonces $f(0)f''(0) < 0$. El punto x_0 no es el extremo de Fourier, sin embargo el método converge. A continuación se muestran los resultados del método de Newton:

n	x_n
0	0
1	0,422981
2	0,405428
3	0,405430
4	0,405430
5	0,405430.

Valor aproximado de $\hat{x}_1 : 0,405430$ (precisión $\varepsilon = 10^{-6}$).

- ii. Sea $x_0 = 1,3$. Se tiene $f(1,3)f''(1,3) < 0$ con lo cual x_0 no es el extremo de Fourier. Los resultados son los siguientes.

n	x_n
0	1,3
1	-1,428954
2	1,636376
3	2,437981
4	2,152753.

Valor aproximado de \hat{x}_2 con una precisión $\varepsilon = 10^{-6} : 2,152753$.

Si en i) se elige $x_0 = -1,5$ o $x_0 = -2$ para aproximar \hat{x}_1 , la sucesión (x_n) no converge a \hat{x}_1 sino a \hat{x}_2 .

iii. Sea $x_0 = 1,4$. Se tiene $f(x_0)f''(x_0) < 0$. Con este punto inicial la sucesión (x_n) es divergente.

n	x_n
0	1,4
1	-46,911
2	$1,4659 \times 10^{19}$
3	<i>Overflow.</i>

Situación análoga si se toma $x_0 = -1,3$.

iv. Para $x_0 = 2,4$, $f(x_0)f''(x_0) > 0$, o sea x_0 es el extremo de Fourier. Se tiene

n	x_n
0	2,4
1	2,131871
2	2,018683
3	1,999645
4	1,999148
5	1,999148.

Para $\varepsilon = 10^{-6}$ el valor aproximado de \hat{x}_3 es 1,999148.

5.4.4. Método de Newton modificado

El método de Newton-Raphson requiere que en cada paso se evalúe $f'(x)$ que en muchos casos puede resultar laborioso.

Sea x_0 un punto inicial para el que $f'(x) \neq 0$ y sea $\alpha = \frac{1}{f'(x_0)}$. La función de iteración Φ definida por $\Phi(x) = x - \alpha f(x)$ se denomina método de Newton modificado.

Hemos supuesto que una función f tiene un cero \hat{x} separado en $[a, b]$ y que f' existe en $[a, b]$. La sucesión (x_n) generada por el método de Newton modificado esta definida por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) = x_n - \alpha f(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Si x_0 es el extremo de Fourier, la sucesión (x_n) generada por $x_{n+1} = \Phi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots$, converge a la sola raíz \hat{x} de $f(x) = 0$.

Ejemplo

Hallar las raíces reales de la ecuación $x^3 \sin(x) - 1 = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$. Para el efecto, sea $f(x) = x^3 \sin(x) - 1 = 0 \quad x \in [0, \pi]$. Entonces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{x^3} \quad x \neq 0$$

El método gráfico muestra dos raíces de $f(x) = 0$ ubicadas en los intervalos $[1, \frac{\pi}{2}]$ y $[3, \pi]$.

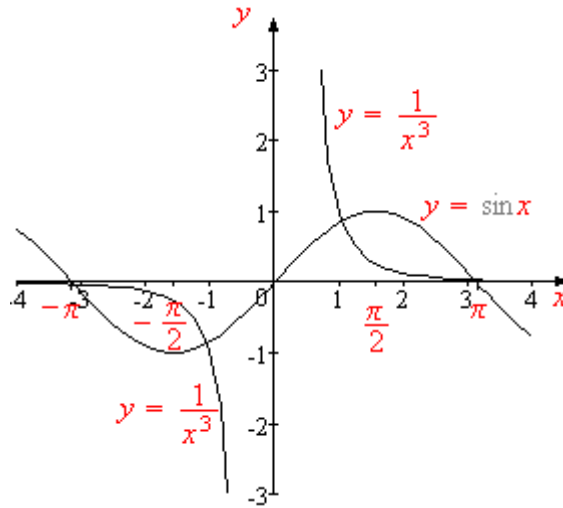


Figura 64

Note que $f(1) = -1,158$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1,8757$, $f(3) = 1,81$, $f(\pi) = -1$. Además,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2(3 \sin x + x \cos x), \\ f''(x) &= x[(6 - x^2 \sin x + 6x \cos x)]. \end{aligned}$$

Sea $x_0 = \frac{\pi}{2} \simeq 1,5708$. Entonces $f(x_0)f''(x_0) > 0$, x_0 es el extremo de Fourier. Ponemos

$$\alpha = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{7,4022} \simeq 0,1351.$$

La función de iteración Φ del método de Newton modificado está dada por $\Phi(x) = x - 0,1351f(x)$. Se tiene

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2}, \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

En 18 iteraciones se logra $\hat{x}_1 = 1,278283055$.

Para el cálculo de la segunda raíz elegimos $x_0 = \pi$. Entonces $f'(\pi) = -\pi^3$, resulta

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{f'(\pi)} = -\frac{1}{\pi^3} \simeq -0,03225, \\ \Phi(x) &= x + 0,03225f(x). \end{aligned}$$

Par $n = 10$ se tiene $\hat{x}_2 = 3,072589665$.

5.4.5. Método de las secantes

Sea $f \in C([a, b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$. Supongamos que \hat{x} es la única raíz allí localizada. Para evitar el problema de la evaluación de la derivada en el método de Newton, podemos obtener una variable de éste. Por definición

$$f'(x_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow x_{n-1}} \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

Con esta aproximación de la derivada $f'(x_{n-1})$, el método de Newton se expresa en la siguiente forma:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{\frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}} f(x_{n-1})$$

o bien

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}) \quad n = 2, 3, \dots \quad (*)$$

La aproximación de la raíz \hat{x} de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando la fórmula (*) se llama método de las secantes.

Interpretación geométrica

Sean $x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que $f(x_0)f(x_1) < 0$. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ viene dada por

$$L_1(x) - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_1).$$

Luego,

$$L_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1).$$

Sea $x_2 = x$. La ecuación de la recta que pasa por $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ está definida por

$$\begin{aligned} L_1(x) - f(x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2), \\ L_2(x) &= 0 \Leftrightarrow x = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2). \end{aligned}$$

Sea $x_3 = x$. Continuando con este procedimiento, obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

En la gráfica siguiente se muestra el procedimiento previamente descrito.

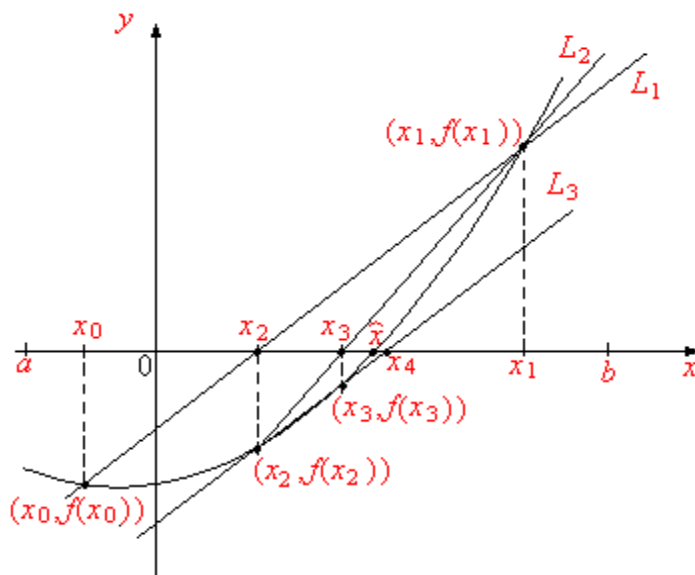


Figura 65

Ejemplo

Hallar la raíz positiva de la ecuación $e^{\sin(x)} - \frac{2}{1+x^2} = 0$.

Sea $f(x) = e^{\sin(x)} - \frac{2}{1+x^2}$. Entonces

$$f'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x) + \frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Este es un ejemplo de una función f cuyo estudio de f conduce a resolver las inecuaciones $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y a la ecuación $f'(x) = 0$ más complicadas que la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\sin(x)} - \frac{2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{\sin(x)} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Sean $\varphi_1(x) = e^{\sin(x)}$, $\varphi_2(x) = \frac{2}{1+x^2}$. En la figura que se muestra a continuación se exhiben las gráficas de φ_1 y φ_2 .

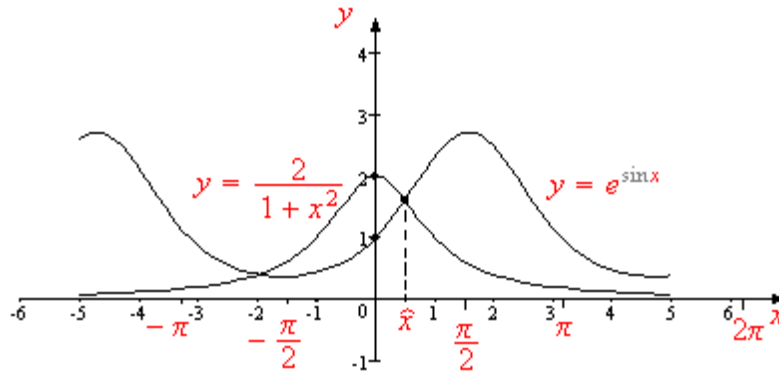


Figura 66

La búsqueda del cambio de signo con un paso $h = 0,2$ en el intervalo $[0, \infty[$ muestra que $f(x) = 0$ tiene una sola raíz en $[0, \infty[$ ubicada en el intervalo $[0,4, 0,6]$:

x	0	0,2	0,4	0,6
$f(x)$	-1	-0,7	-0,25	0,29

Ponemos $x_0 = 0,4$, $x_1 = 0,6$, $y_0 = f(0,4) = -0,24802$, $y_1 = f(0,6) = 0,28823$. En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del método de las secantes:

n	x_n
0	0,4
1	0,6
2	0,49250
3	0,49435
4	0,49438
5	0,49438.

Valor aproximado de \hat{x} con una precisión $\varepsilon = 10^{-5}$: 0,49438.

Algoritmo

Datos de entrada: aproximaciones iniciales $x_0, x_1 \in [a, b]$, $\varepsilon = 10^{-t}$, $N_{\text{máx}}$ número máximo de iteraciones, función f .

Datos de salida: \hat{x} , n número de iteraciones.

1. $y_0 = f(x_0)$.
2. $y_1 = f(x_1)$.
3. $n = 2, \dots, N_{\text{máx}}$.
4. $x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_0$.
5. Si $|x - x_1| < \varepsilon$, continuar en 7).

6. $x_0 = x_1$.
 $y_0 = y_1$.
 $x_1 = x$.
 $y_1 = f(x)$.
7. Si $n < N_{\text{máx}}$, imprimir x, n . Continuar en 9).
8. Si $n = N_{\text{máx}}$, imprimir $x, f(x)$.
9. Fin.

5.4.6. Método regula-falsi

Sean $I \subset \mathbb{R}$ con $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Consideramos el problema (P) siguiente:

$$\text{hallar } \hat{x} \in I, \text{ si existe tal que } f(\hat{x}) = 0.$$

Supongamos que (P) tiene solución y que mediante la aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo se ha separado una única raíz $\hat{x} \in [a, b] \subset I$. El método de las secantes no puede ser escrito en la forma

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

donde φ es una función de iteración sobre $[a, b]$.

El método regula-falsi es una combinación del método de las secantes y un análogo al método de bisección. Se le conoce también como método de las cuerdas o de la falsa posición. Sean $a_n, x_n \in [a, b]$ tales que $f(x_n)f(a_n) < 0$ $n = 0, 1, \dots$, donde a_n, x_n son determinados en cada paso de modo que solo en uno de los intervalos $[x_n, a_n]$ o $[a_n, x_n]$ está localizada la única raíz \hat{x} de $f(x) = 0$.

Para definir a_{n+1}, x_{n+1} consideramos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(a_n, f(a_n))$:

$$L(x) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n}(x - x_n).$$

Luego

$$L(x) = 0 \iff x = x_n - \frac{x_n - a_n}{f(x_n) - f(a_n)}f(x_n).$$

Sea $u_n = x$. Puesto que $f(x_n) \cdot f(a_n) < 0$ entonces $f(x_n) - f(a_n) \neq 0$ con lo cual

$$u_n = \frac{x_n - a_n}{f(x_n) - f(a_n)}f(x_n),$$

esta bien definido. Se tiene $a_n < u_n < x_n$ o $x_n < u_n < a_n$. En las figuras que se muestran a continuación se presentan estos dos casos.

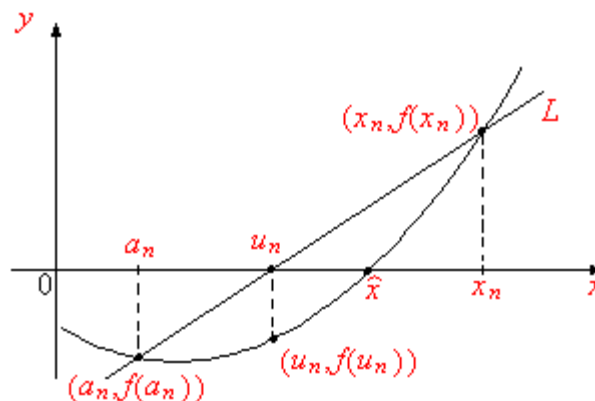


Figura 67

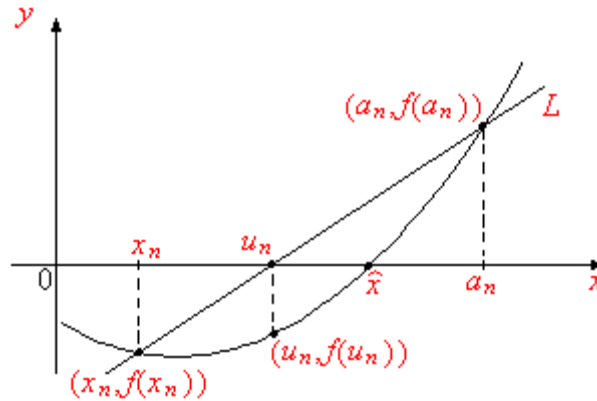


Figura 68

Supongamos que se tenga $a_n < u_n < x_n$. se tienen las tres situaciones siguientes.

- i) Si $f(u_n) = 0$ entonces $\hat{x} = u_n$ es la raíz buscada y el procedimiento concluye.
- ii) Si $f(u_n) \cdot f(x_n) < 0$ entonces $a_{n+1} = u_n, x_{n+1} = x_n$.
- iii) Si $f(u_n) \cdot f(x_n) > 0$ entonces $a_{n+1} = a_n, x_{n+1} = u_n$.

El procedimiento que acabamos de describir tampoco puede expresarse en la forma:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

donde φ es una función de iteración definida en $[a, b]$. Sin embargo, si $x_0 \in [a, b]$ es el extremo de Fourier, esto es, supuesto que $f''(x_0)$ existe, $f(x_0)f''(x_0) > 0$; se define

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x) \quad x \in [a, b] \text{ con } f(x)f(x_0) < 0,$$

con lo cual φ es una función de iteración definida en un subconjunto E de $[a, b]$ en el que puede hacerse φ una aplicación contractiva, resultando que la sucesión (x_n) generada por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ extremo de Fourier,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

con $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1)f(x_0) < 0$, converge a \hat{x} raíz de $f(x) = 0$.

Note que si x_0 es el extremo de Fourier, se tiene $f(x_0)f''(x_0) > 0$. En el primer caso se tiene que f es convexa y en el segundo f es cóncava.

Supongamos que $x_0 < x_1$ ($f(x_0)f(x_1) < 0$). Si f es convexa se tiene $f(u_1) < 0$, luego $\hat{x} \in [x_0, u_1]$ y $a_2 = x_0, x_2 = u_1$.

Si f es cóncava, se tiene $f(u_1) > 0$, luego $\hat{x} \in [x_0, u_1]$ y $a_2 = x_0, x_2 = u_1$.

En la figura de la izquierda se muestra el primer caso (f es convexa) y en la de la derecha se muestra el

caso en que f es cóncava.

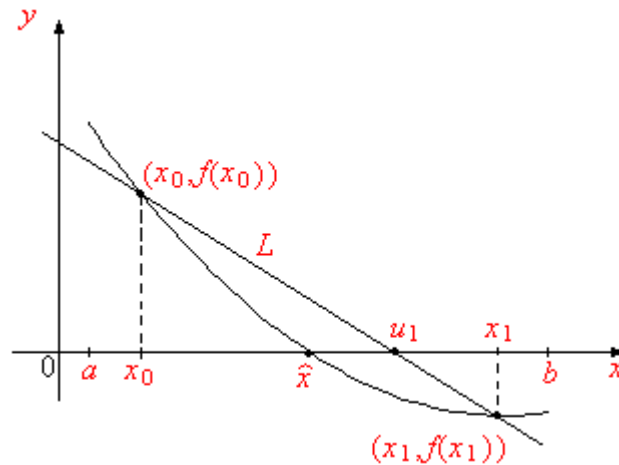


Figura 69

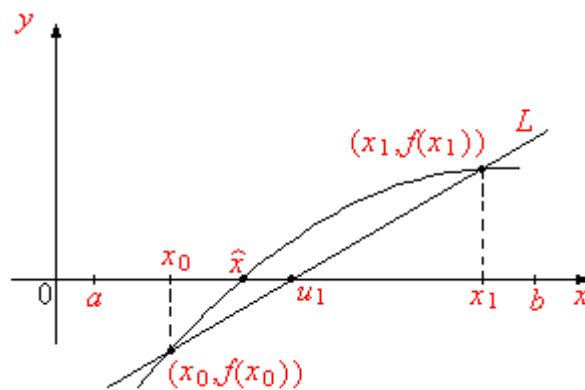


Figura 70

Algoritmo

Datos de Entrada: a, b extremos del intervalo $[a, b]$, precisión $\varepsilon > 0$, función f , número máximo de iteraciones $N_{\text{máx}}$.

Datos de Salida: n número de iteraciones, \tilde{x} aproximación de \hat{x} , $f(\tilde{x})$.

1. $x_0 = a$.
2. $x_1 = b$.
3. Para $n = 2, \dots, N_{\text{máx}}$.
4. $u = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \quad // \quad f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.
5. $|u - x_1| < \varepsilon$ continuar en 9).
6. $f(u) = 0$ continuar en 9).
7. $f(x_0) f(u) < 0$ entonces $x_1 = u$. Continuar en 4).
8. $f(x_0) f(u) > 0$ entonces $x_0 = u, x_1 = b$. Continuar en 4).

9. Si $n < N_{\text{máx}}$, $\tilde{x} = u$. Continuar en 11).

10. “ $\hat{x} = u$ en n iteraciones”. Continuar en 11).

11. Fin.

Ejemplos

1. Hallar las raíces reales de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$. Con un paso $h = 0,5$, el algoritmo de búsqueda de cambio de signo, muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una sola raíz localizada en el intervalo $[2,5, 3,5]$.

Sean $x_0 = 2,5$, $x_1 = 3,5$. Entonces $f(2,5) = -4,125$, $f(3,5) = 7,125$. Los resultados de la aplicación del algoritmo precedente se muestran en la tabla siguiente:

n	x_n
2	2,86667
3	3,09889
4	2,99272
5	2,99962
6	3,00607
7	2,99999
8	2,99999
9	3,0.

2. Encontrar las dos mas pequeñas raíces positivas de la ecuación $x^2 |\sin(x)| - 4 = 0$.

Ponemos $f(x) = x^2 |\sin(x)| - 4 = 0$ $x \in [0, \infty[$. Para $h = 0,2$, el algoritmo de búsqueda de cambio de signo muestra la existencia de una raíz localizada en el intervalo $[3,2, 3,6]$ y otra en $[6,2, 6,4]$. En la tabla de la izquierda se muestran los resultados de la aproximación de $\hat{x}_1 \in [3,2, 3,6]$ y a la derecha, de $\hat{x}_2 \in [6,2, 6,4]$.

$x_0 = 3,4, x_1 = 3,5$		$x_0 = 6,2, x_1 = 6,4$	
n	x_n	n	x_n
2	3,47522	2	6,30204
3	3,52215	3	6,35202
4	3,47846	4	6,37650
5	3,47851	5	6,38849
6	3,47856	6	6,38155
7	3,47851	7	6,38156
8	3,47851	8	6,38157
		9	6,38156

5.5. Convergencia. Convergencia acelerada

En esta sección estudiamos el orden de convergencia de los métodos que hemos tratado previamente, es decir que determinaremos la rapidez con la que la sucesión (x_n) generada por el método numérico utilizado converge a la raíz \hat{x} de la ecuación $f(x) = 0$.

Sea $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$, f una función real definida en I . Suponemos que existe una única raíz $\hat{x} \in [a, b] \subset I$ de $f(x) = 0$.

Definición 6 Sea (x_n) una sucesión que converge a \hat{x} raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

- i. Ponemos $\varrho_n = x_n - \hat{x}$ $n = 0, 1, \dots$, ϱ_n se llama error de la n -ésima iteración.
- ii. Si existen $p > 0, c > 0$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varrho_{n+1}|}{|\varrho_n|^p} = c$, entonces (x_n) se dice convergente a \hat{x} de orden p , con un error asintótico constante c .
- iii. Un método numérico se dice convergente de orden p si la sucesión (x_n) generada por tal método converge a la raíz \hat{x} es de orden p .

Para $p = 1$, (x_n) se dice convergente a \hat{x} de orden 1 o que el método converge linealmente. Para $p = 2$, (x_n) se dice convergente a \hat{x} de orden 2 o que el método converge cuadráticamente.

Supongamos que la sucesión (x_n) es generada por una función de iteración $\varphi \in C^{p+1}([a, b])$ para $p \in \mathbb{Z}^+$, esto es, (x_n) está generada por el siguiente esquema numérico:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Para determinar el orden de convergencia podemos utilizar el polinomio de Taylor con resto entorno a la raíz $\hat{x} \in [a, b]$.

Sea $x_n \in [a, b]$ $n = 0, 1, \dots$. Supongamos que $\varphi^{(k)}(\hat{x}) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, p-1$ pero $\varphi^{(p)}(\hat{x}) \neq 0$. Entonces

$$\varphi(x_n) = \sum_{k=0}^p \frac{\varphi^{(k)}(\hat{x})}{k!} (x_n - \hat{x})^k + E_p(x_n, \hat{x}),$$

con $E_p(x_n, \hat{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Puesto que $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$, $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ $n = 0, 1, \dots$, y $\varphi^{(k)}(\hat{x}) = 0$ para $k = 1, \dots, p-1$, se tiene

$$x_{n+1} = \varphi(\hat{x}) + \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!} (x_n - \hat{x})^p + E_p(x_n, \hat{x}),$$

de donde

$$\frac{x_{n+1} - \hat{x}}{(x_n - \hat{x})^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!} + \frac{1}{(x_n - \hat{x})^p} E_p(x_n, \hat{x}).$$

De la formula integral del error $E_p(x_n, \hat{x})$ y de la forma de Lagrange del resto, se tiene

$$E_p(x_n, \hat{x}) = \frac{1}{p!} \int_{\hat{x}}^{x_n} (x_n - t)^p \varphi^{(p+1)}(t) dt = \frac{1}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)}(c_n) (x_n - \hat{x})^{p+1},$$

para c_n en el intervalo cerrado que une x_n con \hat{x} , $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \hat{x}$. Resulta que

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!} + \frac{x_n - \hat{x}}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)}(c_n).$$

Tomando en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ y de la continuidad de $\varphi^{(p+1)}$, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!} + \frac{1}{(p+1)!} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \hat{x}) \varphi^{(p+1)}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n\right) = \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!}.$$

Así, si $\varphi \in C^{p+1}([a, b])$, la sucesión (x_n) generada por φ convergente a \hat{x} es de orden p .

Si $\varphi \in C^p([a, b])$ y si se supone que $E_p(x, \hat{x}) = 0$ $\left(|x - \hat{x}|^{p+1}\right)$, esto es, $E_p(x, \hat{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0$, se tiene

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!} + 0(|x_n - \hat{x}|),$$

con lo cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\hat{x})}{p!}.$$

Nota: Existen muchas sucesiones (x_n) que son generadas por esquemas numéricos que no se expresan mediante funciones de iteración φ . Un ejemplo de esta clase de sucesiones son las que provienen del método de las secantes.

A continuación estudiamos el orden de convergencia de los métodos numéricos que hemos tratado.

1. Método del punto fijo

En este método y en los que siguen, suponemos que $\hat{x} \in [a, b]$ es la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Supóngase que $\varphi \in C^1([a, b])$ y (x_n) la sucesión definida por $\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$
Supongamos además que existe $k, 0 \leq k < 1$ tal que $|\varphi'(x)| \leq k \quad \forall x \in [a, b]$. Entonces

$$\varrho_{n+1} = x_{n+1} - \hat{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\hat{x}) = \varphi'(c_n)(x_n - \hat{x}) = \varphi'(c_n)\varrho_n,$$

con c_n entre x_n y \hat{x} . Luego

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} = \varphi'(c_n).$$

Como $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(\hat{x}) = \hat{x}$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(c_n) = \varphi'(\hat{x})$. Resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(c_n) = \varphi'(\hat{x}).$$

Si $\varphi'(\hat{x}) \neq 0$, el método de punto fijo converge linealmente.

Si $\varphi'(\hat{x}) = 0$, se puede tener un orden de convergencia más elevado. Así, si $\varphi \in C^2([a, b])$ tal que $\varphi''(\hat{x}) \neq 0$, entonces

$$\varphi(x) = \varphi(\hat{x}) + \varphi'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2!} \varphi''(c_x) (x - \hat{x})^2 \quad x \in [a, b],$$

con c_x entre x y \hat{x} .

Para $x = x_n$, se tiene $\varphi(x_n) = x_{n+1}$, $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$, $\varphi'(\hat{x}) = 0$, luego

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \hat{x} + \varphi'(\hat{x})(x_n - \hat{x}) + \frac{1}{2!} \varphi''(c_n)(x_n - \hat{x})^2, \\ \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} &= \frac{1}{2!} \varphi''(c_n), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} = \frac{1}{2!} \varphi''(\hat{x}).$$

En este caso el método numérico converge cuadráticamente.

2. Método de punto fijo modificado

En este método la función de iteración φ está definida por $\varphi(x) = x - \hat{m}f(x) \quad x \in [a, b]$ con $f \in C([a, b])$, donde \hat{m} está definido por

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \begin{cases} -\frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \quad \forall x, y \in [a, b], \quad x \neq y, \\ \frac{1}{\beta}, & \text{si } \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \quad \forall x, y \in [a, b], \quad x \neq y, \end{cases} \\ \beta &= \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|. \end{aligned}$$

φ es contractiva, y el esquema numérico está dado por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \hat{x} &= \varphi(x_n) - \varphi(\hat{x}) = x_n - \hat{m}f(x_n) - (\hat{x} - \hat{m}f(\hat{x})) = x_n - \hat{x} - \hat{m}(f(x_n) - f(\hat{x})), \\ \varrho_{n+1} &= \varrho_n - \hat{m}[f(x_n) - f(\hat{x})] \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Supongamos $x_n \neq \hat{x}$ $n = 0, 1, \dots$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} &= 1 - \hat{m} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{\varrho_n} = 1 - \hat{m} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \\ \left| \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} \right| &= \left| 1 - \hat{m} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \right| \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1, \end{aligned}$$

donde $0 < \alpha = \inf_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$. En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} \right| = 1 - \frac{\alpha}{\beta},$$

con lo cual el método de punto fijo modificado es de orden 1, o sea la sucesión (x_n) converge a \hat{x} linealmente.

3. Método de Newton-Raphson

Supongamos que $f \in C^3([a, b])$. La función de iteración del método de Newton-Raphson está dada por

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0 \quad x \in [a, b].$$

Entonces

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad x \in [a, b].$$

Para $x = \hat{x}$, se tiene $f(\hat{x}) = 0$ y

$$\varphi'(\hat{x}) = \frac{f(\hat{x})f''(\hat{x})}{[f'(\hat{x})]^2} = 0.$$

Calculemos la derivada segunda de φ (esta existe ya que $f \in C^3$), obtenemos

$$\varphi''(x) = \frac{f(x)f'(x)f'''(x) + [f'(x)]^2f''(x) - 2f(x)[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4} \quad x \in [a, b].$$

Para $x = \hat{x}$, resulta

$$\varphi''(\hat{x}) = \frac{f(\hat{x})f'(\hat{x})f'''(\hat{x}) + [f'(\hat{x})]^2f''(\hat{x}) - 2f(\hat{x})[f''(\hat{x})]^2}{[f'(\hat{x})]^4} = \frac{f''(\hat{x})}{[f'(\hat{x})]^2} \neq 0.$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} = \frac{f''(\hat{x})}{[f'(\hat{x})]^2}, \quad f'(\hat{x}) \neq 0, \quad f''(\hat{x}) \neq 0.$$

El método de Newton es de segundo orden.

Si $f \in C^2([a, b])$ y $f''(\hat{x}) \neq 0$, se prueba que

$$\varrho_{n+1} = x_{n+1} - \hat{x} = \frac{1}{2} \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (x_n - \hat{x})^2 = \frac{1}{2} \frac{f''(c_n)}{f'(c_n)} \varrho_n^2,$$

con c_n entre x_n y \hat{x} . Resulta

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(c_n)}{f'(c_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Método de la secantes

Sean $f \in C^2([a, b])$, $x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que $f(x_0)f(x_1) < 0$. En el método de las secantes se construye una sucesión (x_n) definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad n = 2, 3, \dots$$

Supongamos que para todo n , $x_n \neq \hat{x}$. Entonces

$$x_{n+1} - \hat{x} = x_n - \hat{x} - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) = (x_n - \hat{x}) \left[1 - \frac{f(x_n)}{x_n - \hat{x}} \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]. \quad (1)$$

Definimos

$$L(x) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n) \quad x \in [a, b].$$

Se tiene, $L(x_n) = f(x_n)$ y $L(x_{n-1}) = f(x_{n-1})$, es decir que L es un interpolante de f . Luego,

$$f(x) = L(x) + \varepsilon(x) \quad x \in [\tilde{a}, \tilde{b}],$$

con $\tilde{a} = \min\{x_{n-1}, x_n\}$, $\tilde{b} = \max\{x_{n-1}, x_n\}$ y $\varepsilon(x)$ el error de interpolación en x (error de interpolación polinomial de Lagrange). Para $x = \hat{x}$, se tiene

$$0 = f(\hat{x}) = L(\hat{x}) + \varepsilon(\hat{x}).$$

Se prueba que $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} (x - x_{n-1})(x - x_n) f''(\eta)$ $x \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ $\eta \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Así,

$$f(x) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n) + \frac{1}{2} (x - x_{n-1}) f''(\eta),$$

y para $x = \hat{x}$, se tiene

$$0 = f(\hat{x}) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (\hat{x} - x_n) + \frac{1}{2} (\hat{x} - x_{n-1}) (\hat{x} - x_n) f''(\eta),$$

de donde

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - \hat{x}} \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - 1 = \frac{1}{2} \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f''(\eta). \quad (2)$$

Además,

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(t_n) (x_n - x_{n-1}),$$

con t_n entre x_n y x_{n-1} . Luego

$$x_{n+1} - \hat{x} = -\frac{1}{2} (x_n - \hat{x}) (x_{n-1} - \hat{x}) \frac{f''(\eta)}{f'(t_n)},$$

consecuentemente

$$\varrho_{n+1} = -\frac{1}{2} \varrho_n \varrho_{n-1} \frac{f''(\eta)}{f'(t_n)}.$$

Por hipótesis $f \in C^2([a, b])$, entonces

$$0 < \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f''(\eta)}{f'(t_n)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\eta_{\hat{x}})}{f'(\hat{x})} \right| \leq c,$$

se sigue que

$$|\varrho_{n+1}| \leq c |\varrho_n| |\varrho_{n-1}|.$$

Sea $E_n = c |\varrho_n|$. Multiplicando por c en la desigualdad precedente, resulta

$$E_{n+1} \leq E_n E_{n-1} \quad n = 2, 3, \dots$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} E_0 &\leq \lambda, & E_1 &\leq \lambda \text{ con } 0 < \lambda < 1. \text{ Luego} \\ E_2 &\leq E_1 E_0 \leq \lambda^2, \\ E_3 &\leq E_2 E_1 \leq \lambda^2 \cdot \lambda = \lambda^3, \\ E_4 &\leq E_3 E_2 \leq \lambda^3 \cdot \lambda^2 = \lambda^5, \\ E_5 &\leq E_4 E_3 \leq \lambda^5 \cdot \lambda^3 = \lambda^8, \\ &\vdots \\ E_k &\leq \lambda^{a_k}, \end{aligned}$$

donde (a_k) es la sucesión de Fibonacci definida por

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \quad k \geq 1. \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación en diferencias homogénea de segundo orden,

$$a_{k+1} - a_k - a_{k-1} = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

cuya ecuación característica es $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ y cuya solución es

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Las soluciones de (4) son: $c_1 + c_2$, $c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2$, $c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2, \dots$. Como $c_1 + c_2 = a_1$ y $c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = a_2$, se tiene

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ a_k &= c_1 \alpha_1^{k-1} + c_2 \alpha_2^{k-1} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_2^k - \alpha_1^k}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

que es conocida como la fórmula de Binet. Consecuentemente

$$E_k \leq \lambda^{a_k} = \lambda^{\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_2^k} \lambda^{-\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_1^k},$$

y como $|\alpha_1| = \left|\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right| < 1$, se sigue que

$$\lambda^{-\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_1^k} \leq \beta \quad k = 2, 3, \dots$$

de donde

$$E_k \leq \beta \lambda^{\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_2^k} \quad k = 2, 3, \dots$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|^p} = c \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varrho_{n+1}|}{|\varrho_n|^p} = c,$$

se sigue que para $\varepsilon > 0$, $\tilde{c} = c + \varepsilon$ y

$$\begin{aligned} |\varrho_{n+1}| &\leq \tilde{c} |\varrho_n|^p = \tilde{c} |\varrho_n| |\varrho_{n-1}|, \\ E_{n+1} &\leq \tilde{c} E_n^p = \tilde{c} E_n E_{n-1} \leq c \left(\lambda^{\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_2} \right)^{\alpha_2^k}, \end{aligned}$$

con lo cual $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$.

El método de las secantes es de orden $p \simeq 1,618$.

El método de las secantes es uno de los métodos de interpolación para calcular las raíces de ecuaciones. En cada paso del método de las secantes requiera la evaluación adicional de la función f . Dos pasos del método de las secantes es algo más costoso que un paso del método de Newton. Además, dos pasos del método de las secantes conducen a un método de orden $p \simeq 1,618 \dots$ que hace que converja localmente mas rápidamente que el método de Newton.

La ventaja de este método radica en que no requiere del cálculo de la derivada de la función f , pero requiere, como se ha dicho, de una evaluación adicional de la función f en cada paso.

5. Método regula-falsi

Este método es también uno de los métodos de interpolación para calcular las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. En el siguiente teorema se considera una variante de este método.

Teorema 9 Sean $f \in C^2([a, b])$ y $\hat{x} \in [a, b]$ la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que $x_1 < y$ tales que $f(x_1) \cdot f(y) < 0$ y $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Entonces

i. La sucesión (x_n) generada por la función de iteración φ definida por

$$\varphi(x) = x - \frac{y - x}{f(y) - f(x)} f(x) \quad x \in [x_1, y[$$

converge a \hat{x} .

ii. (x_n) converge linealmente.

Demostración.

i. La ecuación de la recta L que pasa por $(x_1, f(x_1))$, $(y, f(y))$ esta dada por

$$L(x) = f(x_1) + \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} (x - x_1) \quad x \in [x_1, y].$$

Se tiene $L(x_1) = f(x_1)$, $L(y) = f(y)$ con lo cual L es una interpolante de f , más exactamente, tal como en el caso del método de las secantes, L es un caso particular de polinomio de interpolación de Lagrange (L es un polinomio de grado 1). De la fórmula de interpolación con error $f(x) = L(x) + \varepsilon(x) \quad x \in [x_1, y]$, con $\varepsilon(x)$ el error de interpolación en el punto x , definimos

$$F(x) = f(x) - L(x) + k(x - x_1)(x - y) \quad x \in [x_1, y],$$

donde k es una constante a determinarse por la condición $F(\bar{x}) = 0$ para $\bar{x} \in [x_1, y]$.

Puesto que $L(x_1) = f(x_1)$, $L(y) = f(y)$, se sigue que $F(x_1) = F(y) = F(\bar{x}) = 0$, entonces F tiene tres raíces en $[x_1, y]$. Además F es derivable, y

$$F'(x) = f'(x) - L'(x) + k(2x - x_1 - y) \quad x \in [x_1, y].$$

Por el teorema de Rolle, existen $\eta_1, \eta_2 \in [x_1, y]$ tales que $\eta_1 < \eta_2$ y

$$F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0.$$

Por otro lado,

$$F''(x) = f''(x) - L''(x) + 2k \quad x \in [x_1, y]$$

y como $L''(x) = 0$, se tiene

$$F''(x) = f''(x) + 2k \quad x \in [x_1, y].$$

Nuevamente, por el teorema de Rolle, existe $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ tal que

$$F''(\eta) = 0,$$

entonces

$$0 = F''(\eta) = f''(\eta) + 2k \Rightarrow k = -\frac{f''(\eta)}{2}.$$

Consecuentemente

$$F(x) = f(x) - L(x) - \frac{1}{2}(\bar{x} - x_1)(x - y)f''(\eta) \quad x \in [x_1, y]$$

y para $x = \bar{x} \in [x_1, y]$ se tiene

$$0 = F(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L(\bar{x}) - \frac{1}{2}(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - y)f''(\eta),$$

$$f(\bar{x}) - L(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - y)f''(\eta).$$

Por hipótesis $f''(\eta) \geq 0$, $x_1 \leq \bar{x} \leq y \Rightarrow \bar{x} - x_1 \geq 0$, $\bar{x} - y \leq 0$, entonces

$$\frac{1}{2}(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - y)f''(\eta) \leq 0,$$

y de esta desigualdad se deduce que

$$f(\bar{x}) - L(\bar{x}) \leq 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) \leq L(\bar{x}).$$

En particular, si $L(u_1) = 0$ (La recta L corta al eje X , véase la figura) entonces

$$u_1 = x_1 - \frac{y - x_1}{f(y) - f(x_1)}f(x_1)$$

y por la desigualdad previa

$$f(u_1) \leq L(u_1) = 0 \Rightarrow f(u_1) \leq 0.$$

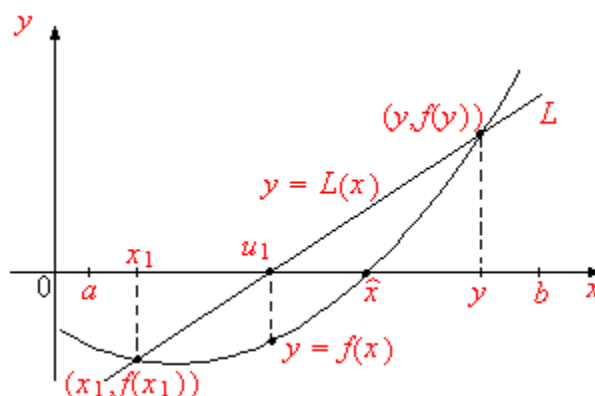


Figura 71

Si $f(u_1) = 0$, u_1 es la raíz \hat{x} de la ecuación $f(x) = 0$ y el proceso concluye. Supongamos $f(u_1) < 0$. Como por hipótesis $f(y) > 0$, $f(u_1)f(y) < 0$, consecuentemente $\hat{x} \in [u_1, y]$. Ponemos $x_2 = u_1$.

El proceso anterior se repite con el intervalo $[x_2, y]$. De este modo se construye una sucesión (x_n) creciente y acotada por y . Luego (x_n) es convergente a \hat{c} , eso es,

$$\hat{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} x_n.$$

Por hipótesis f es continua en $[a, b]$ y por construcción de (x_n) , $x_n \leq \hat{c}$, $n = 1, 2, \dots$, $f(x_n) < 0$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces

$$f(\hat{c}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0.$$

Si $f(\hat{c}) < 0$ y como $f(y) > 0$, $f(\hat{c})f(y) < 0$ luego $\hat{x} \in [\hat{c}, y]$ con $\hat{c} < \hat{x}$. Existe $u \in]\hat{c}, y[$ tal que $f(u) \leq 0$ con lo que u es un término de la sucesión (x_n) y en consecuencia $u \leq \hat{c}$ lo que constituye una contradicción con $u \in]\hat{c}, y[$. Así, $f(\hat{c}) = 0$ o sea $\hat{c} = \hat{x}$ la raíz de $f(x) = 0$.

Observe que

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{y - x_n}{f(y) - f(x_n)} f(x_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

ii. Puesto que $f \in C^2([a, b])$, entonces $\varphi \in C^2([a, b])$. Tenemos

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f(y) - f(x)][(y - x)f'(x) - f(x)] + (y - x)f(x)f'(x)}{[f(y) - f(x)]^2}.$$

Como $f(\hat{x}) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \varphi'(\hat{x}) &= 1 - \frac{[f(y) - f(\hat{x})][(y - \hat{x})f'(\hat{x}) - f(\hat{x})] + (y - \hat{x})f(\hat{x})f'(\hat{x})}{[f(y) - f(\hat{x})]^2} \\ &= 1 - \frac{f(y)(y - \hat{x})f'(\hat{x})}{[f(y)]^2} = 1 - \frac{y - \hat{x}}{f(y)} f'(\hat{x}) = 1 - \frac{y - \hat{x}}{f(y) - f(\hat{x})} f'(\hat{x}). \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio, existe $\eta \in [\hat{x}, y]$ tal que

$$f(y) - f(\hat{x}) = f'(\eta)(y - \hat{x}) \Rightarrow \frac{f(y) - f(\hat{x})}{y - \hat{x}} = f'(\eta),$$

luego

$$\varphi'(\hat{x}) = 1 - \frac{f'(\hat{x})}{f'(\eta)}.$$

Puesto que $f''(x) > 0$, f' es creciente y $f' > 0$. Entonces $f'(\hat{x}) < f'(\eta)$ de donde $\frac{f'(\hat{x})}{f'(\eta)} < 1$ y $0 < \varphi'(\hat{x}) < 1$, o sea φ es contractiva en $[x_1, y]$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} = \varphi'(\hat{x}).$$

El método regula-falsi converge linealmente. ■

Análisis del error para métodos iterativos

Hemos definido el orden de un método iterativo con el número real $p > 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varrho_{n+1}|}{|\varrho_n|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|^p} = c > 0,$$

o sea la sucesión (x_n) generada por el método iterativo converge a \hat{x} de orden p , con una constante de error asintótico $c > 0$.

Método	Orden
Iteración de punto fijo modificado	1
Newton - Raphson para raíces simples	2
Newton modificado	1
Secantes	1,618
Regula - falsi	1

Sean $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Suponemos que existe una única raíz \hat{x} de $f(x) = 0$ localizada en un intervalo $[a, b] \subset I$. Supongamos que para el cálculo aproximado de \hat{x} se utilizan dos métodos iterativos cuyas sucesiones generadas por dichos métodos son (x_n) y (t_n) respectivamente. Pongamos $\varrho_n = x_n - \hat{x}$, $E_n = t_n - \hat{x}$ $n = 1, 2, \dots$ los errores cometidos en cada iteración por cada algoritmo. Para simplificar, supongamos que el primer método es de primer orden y el segundo método es de segundo orden. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} \right| = c_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E_{n+1}|}{E_n^2} = c_2 > 0,$$

con $0 < c_1 < 1$.

Para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} \right| \simeq c_1 \implies |\varrho_{n+1}| \simeq c_1 |\varrho_n|,$$

$$\frac{|E_{n+1}|}{E_n^2} \simeq c_2 \implies |E_{n+1}| \simeq c_2 |E_n|^2.$$

Para el primer método, se tiene

$$|\varrho_n| \simeq c_1 |\varrho_{n-1}| \simeq c_1^2 |\varrho_{n-2}| \simeq \dots \simeq c_1^n |\varrho_0|, \quad (1)$$

y para el segundo, obtenemos

$$\begin{aligned} |E_n| &\simeq c_2 |E_{n-1}|^2 \simeq c_2 (c_2 E_{n-2}^2)^2 = c_2^3 |E_{n-2}|^4 \simeq c_2^3 (c_2 |E_{n-2}|^2)^4 \\ &= c_2^7 |E_{n-2}|^8 \simeq \dots \simeq c_2^{2^n-1} |E_0|^{2^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Con la finalidad de comparar la rapidez de convergencia de estos métodos, supongamos que $0 < \lambda < 1$ con $\lambda = |x_0 - \hat{x}|$, $\lambda = |\varrho_0|$, $\lambda = |E_0|$ y sea $\varepsilon = 5 \times 10^{-m}$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ la precisión con la que es aproximada \hat{x} para los dos métodos. Determinemos el número mínimo de iteraciones para el cual la raíz \hat{x} es aproximada con la precisión ε .

Para el primer método, tenemos:

$$|\varrho_n| \simeq c_1^n |\varrho_0| = c_1^n \lambda \leq 5 \times 10^{-m},$$

de donde

$$c_1^n \lambda \leq 5 \times 10^{-m} \implies c_1^n \leq \frac{5 \times 10^{-m}}{\lambda},$$

$$\begin{aligned} n \ln c_1 &\leq \ln 5 - m \ln 10 - \ln \lambda \\ n &\geq \frac{-\ln 5 + m \ln 10 + \ln \lambda}{-\ln c_1} = \frac{\ln \left(\frac{\lambda}{5} \right) + m \ln 10}{-\ln c_1}. \end{aligned}$$

Sea

$$N_0 = \left\lceil -\frac{\ln \left(\frac{\lambda}{5} \right) + m \ln 10}{\ln c_1} \right\rceil + 1. \quad (3)$$

Para el segundo método, de (2) se sigue que

$$|E_n| \simeq c_2^{2^n-1} |E_0|^{2^n} = c_2^{2^n-1} \lambda^{2^n} \leq 5 \times 10^{-m},$$

de donde

$$\begin{aligned} (c_2 \lambda)^{2^n} &\leq 5 \times 10^{-m}, \\ 2^n \ln (c_2 \lambda) &\leq \ln (5 c_2) - m \ln 10. \end{aligned} \quad (4)$$

Al menor número entero positivo n que verifica (4) designémosle con N_1 , es decir que N_1 es tal que

$$2^{N_1} \ln (c_2 \lambda) \leq \ln (5 c_2) - m \ln 10.$$

Exhibamos mediante un ejemplo que $N_1 < N_0$.

Ejemplo

Considerar la ecuación $-x + \ln^2(x) = 0$.

Sea $f(x) = -x + \ln^2(x)$ $x > 0$, y $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz localizada en el intervalo $[0,4, 0,5]$. Aproximemos \hat{x} con los métodos regula falsi y Newton-Raphson. Se tiene los siguientes resultados:

Método regula-falsi		Método de Newton-Raphson	
n	x_n	n	t_n
0	0,4	0	0,4
1	0,6	1	0,4787588
2	0,5129111	2	0,4943978
3	0,49794886	3	0,4948660
\vdots	\vdots	4	0,4948664
11	0,4948664		
12	0,4948664		

Tenemos $\lambda = |\varrho_0| = |E_0| = |0,4 - 0,4948664| \simeq 0,1$.

Para el método regula falsi,

$$c_1 = \frac{|x_3 - \hat{x}|}{|x_2 - \hat{x}|} = \frac{|0,4979486 - 0,4948664|}{|0,5129111 - 0,4948664|} \simeq 0,17.$$

Entonces

$$N_0 = \left\lceil -\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{5}\right) + m \ln 10}{\ln c_1} \right\rceil + 1 = \left\lceil -\frac{\ln\left(\frac{0,1}{5}\right) + 8 \ln 10}{\ln 0,17} \right\rceil + 1 = [12,60341292] + 1 = 13.$$

Esto significa que a partir de $N_0 = 13$ se logra la precisión deseada. Si en el método regula - falsi se considera un número máximo de iteraciones $N_{\text{máx}}$ tal que $N_{\text{máx}} < N_0$, no se logrará la precisión deseada. Debemos tener $N_{\text{máx}} \geq N_0$ para lograr la precisión requerida.

Para el método de Newton - Raphson, tenemos

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \frac{1}{2}\varphi''(\hat{x}) = -\frac{[-2 + 3 \ln \hat{x}] \ln \hat{x}}{\hat{x}(-\hat{x} + 2 \ln \hat{x})^2},$$

con lo cual

$$c_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|^2} = \frac{1}{2}\varphi''(\hat{x}) \simeq 1,4723.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2^n \ln(c_2 \lambda) &\leq \ln(5c_2) - m \ln 10, \\ 2^n \ln(1,4723 \times 0,1) &\leq \ln(5 \times 1,4723) - 8 \ln 10, \\ -1,915759289 \times 2^n &\leq -16,42441703, \\ n \ln 2 &\geq \ln\left(\frac{16,42441703}{1,915759289}\right) = \ln 8,573319792, \\ n &\geq \frac{\ln(8,573319792)}{\ln 2} \simeq 3,099. \end{aligned}$$

Se tiene $N_1 = 4$. La precisión deseada se logra a partir de $N_1 = 4$, o lo que es lo mismo $|x_n - \hat{x}| \leq 5 \times 10^{-8}$ para $n \geq 4$.

Si $N_{\text{máx}}$ denota el número máximo de iteraciones. Para $N_{\text{máx}} \geq N_1$.

El método de Newton modificado es un algoritmo de primer orden. Para $N_0 = 13$ se logra la precisión deseada. Sea $x_0 = 0,4$. La función de iteración φ del método de Newton modificado está definida por

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(x_0)} f(x) \quad x \in [0,4, 0,5].$$

Como $f(x) = -x + \ln^2(x) \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{x} \ln(x)$, entonces

$$f'(0,4) = -1 + \frac{2}{0,4} \ln(0,4) = -5,58145366,$$

$$\varphi(x) = x + 0,1792 f(x) = x + 0,1792 (-x + \ln^2(x)).$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación de este método.

n	x_n
0	0,4
1	0,478774296
2	0,49018866
3	0,493437619
4	0,494424147
5	0,497289704
6	0,494823648
\vdots	\vdots
11	0,494866289
12	0,4948663754
13	0,4948664023

Se tiene $f(x_{13}) = 0,000000047 \leq 5 \times 10^{-8} = \varepsilon$.

Convergencia acelerada

Sean $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Suponemos que existe una raíz \hat{x} de $f(x) = 0$ separada en el intervalo $[a, b] \subset I$ y sea (x_n) una sucesión convergente a \hat{x} . Los métodos de aceleración de la convergencia transforman la sucesión (x_n) en sucesiones (t_n) que convergen más rápidamente que $[x_n]$. En general, los métodos de aceleración de la convergencia utilizan métodos de orden 1 en los que intervienen únicamente la función f y no su derivada. Los más conocidos son Δ^2 de Aitken y el método de Steffensen.

Método Δ^2 de Aitken

Sea (x_n) una sucesión que converge a \hat{x} raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Suponemos que (x_n) converge linealmente. Entonces existe $0 < c < 1$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} \right| = c,$$

y sea $E_n = x_n - \hat{x}$ para $n = 1, 2, \dots$. Se tiene $x_{n+1} - \hat{x} = c(x_n - \hat{x})$. Entonces c y \hat{x} pueden ser determinados utilizando las ecuaciones

$$\begin{cases} x_{n+1} - \hat{x} = c(x_n - \hat{x}), \\ x_{n+2} - \hat{x} = c(x_{n+1} - \hat{x}), \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} c &= \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}, \\ \hat{x} &= x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \quad \text{con } x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0. \end{aligned}$$

Definimos

$$t_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \quad (1)$$

El método de Δ^2 de Aitken se basa en la suposición de que la sucesión (t_n) converge más rápidamente que (x_n) .

Teorema 10 Sea (x_n) una sucesión convergente a \hat{x} y $x_n \neq \hat{x} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos que existen una constante k , $0 < k < 1$ y una sucesión $[\delta_n]$ tales que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \hat{x} &= (k + \delta_n)(x_n - \hat{x}), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n &= 0. \end{aligned}$$

Entonces (t_n) dada por (1) está bien definida y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} = 0$.

Demostración. Sea $E_n = x_n - \hat{x}$. Entonces $E_{n+1} = (k + \delta_n)E_n$. Luego

$$\begin{aligned} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= x_{n+2} - \hat{x} - 2(x_{n+1} - \hat{x}) - x_n - \hat{x} = E_{n+2} - 2E_{n+1} + E_n \\ &= (k + \delta_{n+1})E_{n+1} - 2(k + \delta_n)E_n + E_n \\ &= (k + \delta_{n+1})(k + \delta_n)E_n - 2(k + \delta_n)E_n + E_n \\ &= E_n \left[(k - 1)^2 + (\delta_n + \delta_{n+1})k + \delta_n(\delta_{n+1} - 2) \right], \end{aligned}$$

además

$$x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - \hat{x} - (x_n - \hat{x}) = E_{n+1} - E_n = E_n[k - 1 + \delta_n].$$

Puesto que $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$, $E_n = x_n - \hat{x} \neq 0$, $0 < k < 1$ y por hipótesis $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, Entonces

$$(\delta_n + \delta_{n+1})k + \delta_n(\delta_{n+1} - 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de donde para n suficientemente grande

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \frac{E_n^2(k - 1 + \delta_n)^2}{E_n \left[(k - 1)^2 + \mu_n \right]} = E_n \frac{(k - 1) + \delta_n^2}{(k - 1)^2 + \mu_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

con $\mu_n = (\delta_n + \delta_{n+1})k + \delta_n(\delta_{n+1} - 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \hat{x}.$$

La sucesión (t_n) es convergente a \hat{x} . Así, (t_n) está bien definida.

Por otro lado

$$\begin{aligned} t_n - \hat{x} &= x_n - \hat{x} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = E_n - \frac{E_n^2(k - 1 + \delta_n)^2}{E_n \left[(k - 1)^2 + \mu_n \right]} \\ &= E_n \left(1 - \frac{(k - 1 + \delta_n)^2}{(k - 1)^2 + \mu_n} \right), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{t_n - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} &= \frac{t_n - \hat{x}}{E_n} = 1 - \frac{(k - 1 + \delta_n)^2}{(k - 1)^2 + \mu_n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k - 1 + \delta_n)^2}{(k - 1)^2 + \mu_n} = 1 - \frac{(k - 1)^2}{(k - 1)^2} = 0. \end{aligned}$$

■

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |t_n - \hat{x}| < |x_n - \hat{x}| \varepsilon$.

La última desigualdad muestra que la sucesión (t_n) converge mas rapidamente que $[x_n]$.

Ejemplo

Hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x - 0,5x + 1 = 0$. Pongamos $f(x) = e^x - 0,5x + 1$. Entonces

$$f(x) = 0 \iff e^x = -0,5x - 1.$$

El método gráfico muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz \hat{x} localizada o separada en el intervalo $[-2,5, -2,0]$. Aproximemos la raíz \hat{x} con el método de punto fijo modificado y luego aceleramos la convergencia con el método de Δ^2 de Aitken.

La función de iteración del método de punto fijo modificado está definida por

$$\varphi(x) = x - mf(x) \quad x \in [-2,5, -2,0],$$

$$\text{donde } m = \frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{-2+2,5}{f(-2)-f(-2,5)} = 1,6488,$$

$$\varphi(x) = x - 1,6488(1 + 0,5x + e^x) \quad x \in [-2,5, -2,0].$$

La tabla que se muestran a continuación se exhiben los resultado de la aplicación del método de punto fijo modificado.

n	x_n
0	-2,0
1	-2,223140815
2	-2,217696668
3	-2,217715177
4	-2,217715105
5	-2,217715106
6	-2,21771506

A continuación se muestran los términos de (t_n) con el método de Δ^2 de Aitken.

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_3 - 2x_2 - x_1} = -2,217715144, \\ t_2 &= x_2 - \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_4 - 2x_3 - x_2} = -2,217715105, \\ t_3 &= x_3 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_5 - 2x_4 - x_3} = -2,217715106. \end{aligned}$$

Valor aproximado de $\hat{x} : -2,217715106$.

Método de Steffensen

En el método de Δ^2 de Aitken, para inicializar el proceso se requieren de x_1, x_2, x_3 . Con esta información se calcula t_1 . A continuación se calcula x_4 y con los precedentes x_2, x_3 se calcula t_2 , luego se calcula x_5 y con este se obtiene t_3 , así sucesivamente.

El método de Steffensen toma ventaja de la construcción de la sucesión (t_n) cuando la sucesión (x_n) está generada por una función de iteración φ . El método de Steffensen es recomendado para métodos de orden 1.

Pongamos $y_n = \varphi(x_n)$, $z_n = \varphi(y_n)$. Se tiene

$$t_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n} = x_n - \frac{(\varphi(x_n) - x_n)^2}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n} \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

La sucesión (t_n) construida mediante el esquema (1) se conoce como método de Steffensen.

El esquema núérico dado por (1) conduce a una nueva función de iteración ψ definida

$$\psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \quad x \in [a, b],$$

donde $\hat{x} \in [a, b]$ es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

El esquema numérico (1) se escribe entonces

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \psi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Las funciones de iteración φ y ψ , por lo general, tienen el mismo punto fijo, más precisamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 11 Sea $\hat{x} \in [a, b]$. Entonces $\psi(\hat{x}) = \hat{x} \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = \hat{x}$. Recíprocamente, si $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$ y $\varphi'(\hat{x}) \neq 1 \Rightarrow \psi(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración. Por la definición de la función de iteración ψ , se tiene

$$\psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \quad x \in [a, b],$$

de donde

$$[\psi(x) - x][\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x] = (\varphi(x) - x)^2 \quad x \in [a, b].$$

Entonces, si $\psi(\hat{x}) = \hat{x}$ se tiene

$$\begin{aligned} [\psi(\hat{x}) - \hat{x}][\varphi(\varphi(\hat{x})) - 2\varphi(\hat{x}) + \hat{x}] &= (\varphi(\hat{x}) - \hat{x})^2 \\ 0 &= (\varphi(\hat{x}) - \hat{x})^2 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = \hat{x}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$ y $\varphi'(\hat{x}) \neq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi(\hat{x}) &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} = \hat{x} - \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \\ &= \hat{x} - \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{2(\varphi(x) - x)(\varphi'(x) - 1)}{\varphi'(\varphi(x))\varphi'(x) - 2\varphi'(x) + 1} = \hat{x} - \frac{2(\varphi(\hat{x}) - \hat{x})(\varphi'(\hat{x}) - 1)}{\varphi'(\varphi(\hat{x}))\varphi'(\hat{x}) - 2\varphi'(\hat{x}) + 1} \\ &= \hat{x}. \end{aligned}$$

ya que $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$.

Note que

$$\varphi'(\varphi(\hat{x}))\varphi'(\hat{x}) - 2\varphi'(\hat{x}) + 1 = \varphi'(\hat{x})\varphi'(\hat{x}) - 2\varphi'(\hat{x}) + 1 = (\varphi'(\hat{x}) - 1)^2,$$

y por hipótesis $\varphi'(\hat{x}) \neq 1, (\varphi'(\hat{x}) - 1)^2 \neq 0$. ■

Algoritmo

Datos de Entrada: a, b extremos del intervalo $[a, b]$. precisión $\varepsilon > 0$, $N_{\text{máx}}$ número máximo de iteraciones, función f .

Datos de Salida: \hat{x} raíz, $y = f(\hat{x})$, n número de iteraciones.

1. Leer $x_0 \in [a, b]$ y poner $x = x_0$.
2. Para $n = 1, \dots, N_{\text{máx}}$
3. $y_1 = \varphi(x)$.
4. $y_2 = \varphi(y_1)$.
5. $t = x - \frac{(y_1 - x_0)^2}{y_2 - 2y_1 + x}$.
6. Si $|t - x| < \varepsilon$. Continuar en 8).
7. Si $|t - x| > \varepsilon, x = t$. Continuar en 3).

8. Si $n < N_{\text{máx}}$, imprimir $\hat{x} = t, y = f(t)$. Continuar en 10).

9. Si $n > N_{\text{máx}}$, imprimir $\hat{x} = t, y = f(t)$.

10. Fin.

Ejemplo

Sea $f(x) = \sin(x) \cosh\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) - 1$. Hallar los ceros de f para $x \in [0, 10]$.

La aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo en $[0, 10]$ con un paso $h = 0,4$ muestra que f tiene cuatro ceros localizados en los intervalos $[0,8, 1,2]$, $[2, 2,4]$, $[6,4, 6,8]$, $[9,2, 9,6]$.

Calculemos las dos primeras raíces con el método regula-falsi (método de orden 1). En la tabla de la izquierda se muestran los resultados de la aplicación de este método para la aproximación de $\hat{x}_1 \in [0,8, 1,2]$ raíz de $f(x) = 0$ y en la de la derecha para $\hat{x}_2 \in [2, 2,4]$.

n	x_n		n	x_n
1	0,8		1	2,4
2	1,0838480		2	2,39602478
3	1,0698168		3	2,397285172
4	1,0564792		4	2,397287862
5	1,0681479		5	2,397287868
6	1,0681382			
7	1,0681286			
8	1,0681382			

Aplicamos el método de Steffensen:
$$\begin{cases} \psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}, \\ t_{n+1} = \psi(t_n) \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Cálculo de $\hat{x}_1 \in [0,8, 1,2]$. Se tienen los siguientes resultados de la aplicación del método de Steffensen:

$$t_1 = 0,8,$$

$$t_2 = t_1 - \frac{(\varphi(t_1) - t_1)^2}{\varphi(\varphi(t_1)) - 2\varphi(t_1) + t_1} = 0,8 - \frac{(\varphi(0,8) - 0,8)^2}{\varphi(\varphi(0,8)) - 2\varphi(0,8) + 0,8} = 1,0678892,$$

$$t_3 = \psi(t_2) = 1,068137133,$$

$$t_4 = \psi(t_3) = 1,068138455,$$

$$t_5 = \psi(t_4) = 1,068138463.$$

Cálculo de $\hat{x}_2 \in [2, 2,4]$:

$$t_1 = 2, \quad y = 2,4,$$

$$t_2 = \psi(t_1) = 2,397289196,$$

$$t_3 = \psi(t_2) = 2,397287868.$$

Nota: Para método de orden 1, el método de Steffensen es de orden 2.

5.6. Raíces de multiplicidad

Sean $I \subset \mathbb{R}$ con $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Consideramos el problema (P) siguiente:

$$\text{hallar } \hat{x} \in I, \text{ si existe, solución de } f(x) = 0. \quad (\text{P})$$

Definición 7 Se dice que $\hat{x} \in I$ es una raíz de multiplicidad $m \geq 2$ de la ecuación $f(x) = 0$ si existe una función g definida en I tal que $f(x) = (x - \hat{x})^m g(x)$ $x \in I$, con $g(\hat{x}) \neq 0$.

Ejemplos

1. Sea f la función definida por $f(x) = x(x-2)^2$ $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\hat{x} = 2$ es una raíz de multiplicidad 2. Note que $g(x) = x$ y $g(2) = 2$. Además $\hat{x} = 0$ es una raíz real simple de $f(x) = 0$.
2. Sea f la función real dada por $f(x) = (x^2 + 5)(x+1)^3$ $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\hat{x} = -1$ es la única raíz real de multiplicidad 3. Se tiene $g(x) = x^2 + 5$ con $g(-1) = 6$.

La aplicación del algoritmo de búsqueda de cambio de signo, en general, no da resultados positivos si la ecuación $f(x) = 0$ tiene raíces de multiplicidad $m \geq 2$. En el ejemplo 1), la aplicación de este algoritmo no separa la raíz $\hat{x} = 2$, mientras que en el ejemplo 2), si lo separa pero no detecta que sea de multiplicidad 3.

En el ejemplo 1). La raíz $\hat{x} = 2$ es de multiplicidad $m = 2$ (par). y en el ejemplo 2) la raíz $\hat{x} = -1$ es de multiplicidad $m = 3$ (impar).

Supongamos que \hat{x} es una raíz de multiplicidad $m \geq 2$ de la ecuación $f(x) = 0$. Entonces, existe una función g definida en I tal que

$$f(x) = (x - \hat{x})^m g(x) \quad x \in I, g(\hat{x}) \neq 0.$$

Si $f \in C^2([a, b])$, donde $\hat{x} \in [a, b] \subset I$ y $m \geq 2$, entonces

$$f'(x) = m(x - \hat{x})^{m-1} g(x) + (x - \hat{x})^m g'(x) = (x - \hat{x})^{m-1} [mg(x) + (x - \hat{x})g'(x)] \quad x \in [a, b].$$

Se tiene $f'(\hat{x}) = 0$. Ponemos

$$v(x) = mg(x) + (x - \hat{x})g'(x) \quad x \in [a, b].$$

Resulta $v(\hat{x}) = mg(\hat{x}) \neq 0$.

Puesto que $f \in C^2([a, b])$, entonces las funciones g y v son continuas en $[a, b]$ y como $g(\hat{x}) \neq 0$, $v(\hat{x}) \neq 0$, existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$, $v(x) \neq 0 \quad \forall x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r] \subset [a, b]$.

Definimos

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - \hat{x})^m g(x)}{(x - \hat{x})^{m-1} (mg(x) + (x - \hat{x})g'(x))} \\ &= (x - \hat{x}) \frac{g(x)}{v(x)} \quad x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r] \setminus \{\hat{x}\}, \end{aligned}$$

con $\frac{g(x)}{v(x)} \neq 0 \quad \forall x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r]$.

Como $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} u(x) = 0$, la función u tiene una discontinuidad evitable. Definimos

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = \hat{x}, \\ u(x) & \text{si } x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r] \setminus \{\hat{x}\}. \end{cases}$$

Entonces, $\tilde{u}(\hat{x}) = 0 = f(\hat{x})$, es decir que $\tilde{u}(x) = 0$ tiene la misma raíz que $f(x)$ en el entorno $[\hat{x} - r, \hat{x} + r]$. La raíz \hat{x} es una raíz simple de $\tilde{u}(\hat{x}) = 0$.

El método de Newton-Raphson es efectivo para raíces simples. Podemos aplicar este método a la función u .

La función de iteración φ está dada por

$$\varphi(x) = x - \frac{u(x)}{u'(x)} \quad x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r] \setminus \{\hat{x}\}.$$

Como $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, se sigue que

$$u'(x) = \frac{(f'(x))^2 + f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

con lo cual

$$\varphi(x) = x - \frac{u(x)}{u'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \quad x \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r] \setminus \{\hat{x}\}.$$

El esquema numérico para la aproximación de la raíz \hat{x} es el siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \in [\hat{x} - r, \hat{x} + r] \setminus \{\hat{x}\} & \text{aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Por otro lado, supongamos que $\forall x \in [a, b]$, $g(x) > 0$ y $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{\hat{x}\}$. Definimos

$$w(x) = (f(x))^{\frac{1}{m}} \quad x \in [a, b].$$

Como $f(x) = (x - \hat{x})^m g(x) \quad x \in [a, b]$ con $g(\hat{x}) \neq 0$, se tiene

i. Si m es par, $(x - \hat{x})^m \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ y siendo $g(x) > 0$, resulta que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Luego

$$w(x) = (f(x))^{\frac{1}{m}} = [(x - \hat{x})^m g(x)]^{\frac{1}{m}} = |x - \hat{x}| (g(x))^{\frac{1}{m}} \quad x \in [a, b].$$

ii. Si m es impar,

$$w(x) = (x - \hat{x}) (g(x))^{\frac{1}{m}} \quad x \in [a, b].$$

De i) y ii) se sigue que $w(\hat{x}) = 0$, esto es, la función w tiene \hat{x} como cero simple en $[a, b]$. Apliquemos el método de Newton. La función de iteración Φ está definida por

$$\Phi(x) = x - \frac{u(x)}{u'(x)} = x - \frac{(f(x))^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m} [f(x)]^{\frac{1}{m}-1} f'(x)} = x - m \frac{f(x)}{f'(x)} \quad x \in [a, b] \setminus \{\hat{x}\}.$$

El método de Newton para ceros de multiplicidad $m \geq 2$ con m dado, se expresa como

$$\Phi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)} \quad x \in [a, b], x \neq \hat{x}.$$

El esquema numérico es el siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \setminus \{\hat{x}\} & \text{aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Nota: Se pueden implementar fácilmente los otros métodos que han sido estudiados anteriormente.

Ejemplos

1. Hallar las raíces reales positivas de la ecuación: $x^4 - 8,6x^3 - 35,51x^2 + 464,4x - 998,46 = 0$.

La búsqueda del cambio de signo en el intervalo $[0, \infty[$ muestra que la función f asociada a la ecuación dada tiene una raíz en el intervalo $[7, 8]$ y posiblemente una raíz de multiplicidad en un entorno de $x = 4$ (se presume por la observación de los valores de $f(x)$ en un entorno de $x = 4$). Por otro lado, el estudio de la función f muestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz en el intervalo $] -\infty, 0]$. Ponemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8,6x^3 - 35,51x^2 + 464,4x - 998,46, \\ u(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \quad f'(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(4) &= \frac{f(4)}{f'(4)} = \frac{-3,44}{23,52} < 0, \\ u(5) &= \frac{f(5)}{f'(5)} = \frac{-14,23}{-35,7} > 0. \end{aligned}$$

La función u tiene una raíz en el intervalo $[4, 5]$, esta raíz de la ecuación $f(x) = 0$. De este modo confirmamos que $f(x) = 0$ tiene una raíz de multiplicidad 2.

Nota: La búsqueda del cambio de signo se aplicó a la función u en el intervalo $[0, 7]$.

Para la aproximación de la raíz $\hat{x} \in [4, 5]$ se utilizan las dos funciones de iteración φ y Φ .

i. Con la función de iteración $\varphi(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}$ se tiene

n	x_n
0	4
1	4,3081
2	4,3081
3	4,3000

La raíz $\hat{x} = 4,3$ de $f(x) = 0$ es de multiplicidad $m = 2$.

ii. Como $m = 2$, con la función de iteración

$$\Phi(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)},$$

se tiene

n	x_n
0	4
1	4,29082
2	4,29998
3	4,29998
4	4,3000

iii. Con $x_0 = 7$, la raíz simple localizada en el intervalo $[7, 8]$, se aproxima con el método de Newton. Con 5 iteraciones se tiene $\hat{x}_1 = 7,34847$.

2. Hallar las raíces de la ecuación: $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$. Sea $f(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = (x - e^x)^2$ $x \in \mathbb{R}$.

Entonces,

$$f(x) = 0 \iff (x - e^x)^2 = 0 \iff x - e^x = 0 \iff x = e^{-x}.$$

La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$. Calculemos $f'(x)$. Se tiene $f'(x) = 2(x - e^x)(1 + e^{-x})$. Definimos

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad f'(x) \neq 0.$$

Con la ayuda de la función u , separamos la raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Tenemos $u(0) < 0$, $u(1) > 0$, luego existe $\hat{x} \in]0, 1[$ tal que $f(\hat{x}) = 0$. Para la aproximación de \hat{x} utilizamos el método de Newton.

i. Sea

$$\varphi(x) = x - \frac{u(x)}{u'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}.$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del esquema numérico:

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

n	x_n
0	0
1	0,666667
2	0,568769
3	0,567144
4	0,567144

$\hat{x} \simeq 0,567144$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-6}$.

ii. Sea

$$\Phi(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Los resultados de la aplicación del esquema numérico

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

se muestran a continuación.

n	x_n
0	0,0
1	0,5
2	0,566311
3	0,567143
4	0,567143

Valor aproximado de \hat{x} con una precisión $\varepsilon = 10^{-6} : 0,567143$.

Teorema 12

- i) Si $f \in C^1([a, b])$ y si la ecuación $f(x) = 0$ tiene un cero simple $\hat{x} \in [a, b]$, entonces $f'(\hat{x}) \neq 0$.
- ii) Si $f \in C^m([a, b])$ para $m \geq 2$ y si la ecuación $f(x) = 0$ tiene un cero de multiplicidad m , entonces $f^{(m)}(\hat{x}) \neq 0$.

Demostración.

i) Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz simple en $x = \hat{x}$, entonces $f(\hat{x}) = 0$ y existe una función g tal que

$$f(x) = (x - \hat{x})g(x) \text{ con } g(\hat{x}) \neq 0.$$

Por hipótesis $f \in C^1([a, b])$, entonces $g \in C^1([a, b])$ y

$$f'(x) = (x - \hat{x})g'(x) + g(x),$$

de donde

$$f'(\hat{x}) = g(\hat{x}) \neq 0.$$

ii) Sean $m \geq 2$ y $f \in C^m([a, b])$. Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz de multiplicidad m , existe una función $g \in C^m([a, b])$ tal que

$$f(x) = (x - \hat{x})^m g(x) \text{ con } g(\hat{x}) \neq 0.$$

Resulta que

$$f^m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g^{(k)}(x) [(x - \hat{x})^m]^{(m-k)},$$

de donde $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, $[(x - \hat{x})^m]^{(m-k)}$ denota la derivada de $(x - \hat{x})^m$ de orden $m - k$. Entonces

$$f^{(m)}(\hat{x}) = m!g(\hat{x}) \neq 0.$$

Observe que si $m \geq 2$, $g(x) = \frac{f(x)}{(x-\hat{x})^m}$ $x \neq \hat{x}$, y

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} g(x) = g(\hat{x}).$$

■

Ejemplo

Considere la función f definida por $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$. Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz de multiplicidad 3 en $x = 0$. Sea

$$g(x) = \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3} \quad x \neq 0.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Además,

$$f(x) = (x - 0)^3 \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3} = x^3 g(x).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} g^{(k)}(x) [x^3]^{(3-k)} = 6g(x) + 18xg'(x) + 9x^2g''(x) + x^3g'''(x), \\ f'''(0) &= 6g(0) = 3!g(0) = 3! \frac{1}{6} = 1. \end{aligned}$$

Nota: El método de Newton para ceros de multiplicidad $m \geq 2$ es de orden 1; o sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \hat{x}}{x_n - \hat{x}} \right| = c \quad \text{con } 0 < c < 1.$$

5.7. Raíces reales de polinomios

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ $k = 0, 1, \dots, n$ con $a_n \neq 0$. Una función real P de forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k \quad x \in \mathbb{R},$$

se llama polinomio de grado n con coeficientes reales a_k . El polinomio nulo P_0 definido por $P_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ no se le asigna grado alguno.

En lo sucesivo consideraremos polinomios reales de grado $n \geq 1$ con coeficientes en \mathbb{R} y diremos simplemente P polinomio de grado n sobrentendiéndose que $n \geq 1$ y sus coeficientes son reales.

Definición 8 Sea P un polinomio de grado n . La ecuación

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0,$$

se llama ecuación algebraica.

Teorema 13 (teorema fundamental del álgebra)

Sea P un polinomio de grado n . Entonces, la ecuación $P(x) = 0$ tiene exactamente n raíces reales o complejas incluidas las de multiplicidad.

Demostración. La demostración de este teorema está fuera del alcance de estas notas, se encuentra en, por ejemplo, Churchill, páginas 145-146. ■

Ejemplos

1. Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ con $x_i \neq x_j$, $i, j = 1, \dots, n$. El polinomio $P(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ tiene exactamente n raíces reales.
2. El polinomio $P(x) = (x + 5)(x - 2)^3(x^2 + 1)^2$ tiene ocho raíces: $\hat{x}_1 = -5$ es una raíz real simple, $\hat{x}_2 = 2$ es una raíz real de multiplicidad 2 y $\hat{x}_3 = i$, $\hat{x}_4 = -i$ son raíces complejas de multiplicidad 2.

Sea P un polinomio de grado n . Si la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz compleja z_1 , existe $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $z_2 = \overline{z_1}$ raíz de la ecuación $P(x) = 0$, donde $\overline{z_1}$ denota el número complejo conjugado de z_1 .

En el estudio de una ecuación algebraica dada $P(x) = 0$ interesa los siguientes aspectos:

- i. Determinar los intervalos en los que se encuentran localizadas las raíces reales positivas y las raíces reales negativas.
- ii. El número de raíces reales simples y de multiplicidad y como calcularlas.
- iii. Los discos en los cuales se localizan las raíces complejas.
- iv. El número de raíces complejas simples y de multiplicidad y como calcularlas.

En esta sección daremos especial atención a los aspectos i) y ii) Los aspectos iii) y iv) no serán abordados.

Supongamos que $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $a_n > 0$. Sea $x > 0$. Entonces

$$P(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n \right).$$

Si n es par, resulta que $P(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} \infty$. Si n es impar, se tiene $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty$. Por lo tanto, si n es impar, la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz real. En la siguiente tabla se muestra el número de raíces reales y complejas según el grado del polinomio P .

grad(P)	Número de raíces reales	Número de raíces complejas
1	1	0
2	0, 2	2, 0
3	1, 3	2, 0
4	0, 2, 4	4, 2, 0
5	1, 3, 5	4, 2, 0
6	0, 2, 4, 6	6, 4, 2, 0
7	1, 3, 5, 7	6, 4, 2, 0
\vdots	\dots	\dots

Supongamos que $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, $\text{grad}(P) \geq 2$ y $P(x) = 0$ tiene $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$ raíces reales. Entonces ζ_{n-1} y ζ_n son raíces complejas con $\zeta_{n-1} = \overline{\zeta_n}$. Pongamos $\zeta_n = a + ib$. Entonces

$$(x - \zeta_{n-1})(x - \zeta_n) = x^2 - (\zeta_{n-1} + \zeta_n)x + \zeta_{n-1}\zeta_n,$$

resulta que

$$\begin{aligned}\zeta_{n-1} + \zeta_n &= 2R_e(\zeta_n) = 2a, \\ \zeta_{n-1} \cdot \zeta_n &= |\zeta_n|^2 = a^2 + b^2,\end{aligned}$$

con lo cual

$$(x - \zeta_{n-1})(x - \zeta_n) = x^2 + 2ax + a^2 + b^2,$$

y en consecuencia

$$P(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \prod_{j=1}^{n-2} (x - \zeta_j).$$

Si $\text{grad}(P) \geq 4$ y P tiene cuatro raíces complejas simples, el razonamiento anterior muestra que P puede escribirse en la forma

$$P(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) (x^2 - 2\tilde{a}_1x + \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2) Q(x),$$

con $z_1 = a + ib$, $z_2 = \tilde{a}_1 + i\tilde{b}_1$, $\text{grad}(Q) = n - 4$ y $P(z_1) = P(z_2) = 0$.

5.7.1. Fronteras superior e inferior de las raíces de la ecuación $P(x) = 0$

Sea P un polinomio de grado n . Como P está definido en todo \mathbb{R} , necesitamos, en términos de los coeficientes de P , seleccionar los intervalos en los que se debe aplicar el algoritmo de búsqueda del cambio de signo. A continuación se establecen criterios para seleccionar tales intervalos.

Teorema 14 Sea $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polinomio de grado n . Entonces, para todo $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| > 1$ y $0 < k \leq \frac{|a_n|(|x|-1)}{\text{Max}_{k=0, \dots, n-1} |a_k|}$ se tiene

$$|a_n x^n| > k \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right|.$$

Demostración. Sea $A = \text{Max}_{k=0, \dots, n-1} |a_k|$. Entonces, para $|x| \neq 1$, se tiene

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |x|^k \leq A \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k = A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < A \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Luego

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| < \frac{A}{|x| - 1} |x|^n \quad \text{para } |x| \neq 1.$$

Sea $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| > 1$. Si $k \in \mathbb{R}$ es tal que

$$0 < k \leq \frac{|a_n|(|x| - 1)}{A}$$

entonces

$$0 < \frac{k}{|a_n|} \leq \frac{|x| - 1}{A} \Leftrightarrow \frac{A}{|x| - 1} \leq \frac{|a_n|}{k}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{|a_n|}{k} |x|^n &\geq \frac{A}{|x| - 1} |x|^n > \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \\ |a_n x^n| &> k \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \quad \text{si } |x| > 1.\end{aligned}$$

■

Teorema 15 Sea $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polinomio de grado n y $A = \max_{k=0, \dots, n-1} |a_k|$. Si \hat{x}_i , $i = 1, \dots, n$, son las raíces (reales o complejas) de la ecuación $P(x) = 0$, entonces $|\hat{x}_i| < 1 + \frac{A}{|a_n|}$ $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Por el teorema anterior, si $k = 1$ entonces $\frac{|a_n|(|x|-1)}{A} \geq 1$ para $|x| > 1$, y en consecuencia

$$|a_n x^n| > \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \quad \text{si } |x| > 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} |a_n x^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| &\geq |a_n x^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |x|^k \geq |a_n x^n| - A \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k \\ &= |a_n| |x|^n - A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} > |a_n| |x|^n - A \frac{|x|^n}{|x| - 1} \\ &= |x|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|x| - 1} \right). \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| > 1$ y $|x|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|x| - 1} \right) \geq 0 \Rightarrow |a_n| - \frac{A}{|x| - 1} \geq 0$. Resulta que

$$|P(x)| \geq |a_n x^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| > |x|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|x| - 1} \right) \geq 0 \quad |x| > 1.$$

Más aún $|a_n| - \frac{A}{|x| - 1} \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 + \frac{A}{|a_n|}$. Así, $|P(x)| > 0$ si $|x| \geq 1 + \frac{A}{|a_n|} = R$. Consecuentemente, $|\hat{x}_i| < R$ $i = 1, \dots, n$. ■

Denotamos con $\overline{B(0, R)}$ el disco cerrado de centro 0 y radio $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$.

Para $|x| > R$ se tiene $|P(x)| > 0$ con lo que en el exterior de $\overline{B(0, R)}$ no se encuentra localizada ninguna raíz de $P(x) = 0$. Todas las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ están localizadas en $\overline{B(0, R)}$, esto es,

$$\hat{x}_i \in \overline{B(0, R)} \quad i = 1, \dots, n.$$

Ejemplos

1. Consideremos el polinomio $P(x) = 8x^8 - x^6 + 16x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

Sea $A = \max_{k=0, \dots, n-1} |a_k| = \max\{1, 3, 5, 1, 16, 1\} = 16$. Entonces

$$R = 1 + \frac{A}{|a_n|} = 1 + \frac{16}{8} = 3.$$

Todas las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ se localizan en el disco cerrado $\overline{B(0, 3)}$.

2. Todas las raíces de la ecuación $2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$ están localizadas en el disco cerrado $\overline{B(0, R)}$ con

$$R = 1 + \frac{\max_{k=0, 4} |a_k|}{|a_n|} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Teorema 16 Sea $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polinomio de grado n con $a_0 \neq 0$ y \hat{x}_i $i = 1, \dots, n$ las raíces de la ecuación $P(x) = 0$. Entonces

$$\hat{x}_i > \frac{|a_0|}{|a_0| + \max_{k=1, \dots, n} |a_k|} = r, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demostración. Puesto que $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = x^n \sum_{k=0}^n a_k x^{k-n}$ para $x \neq 0$. Sea $y = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$ y $Q(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$. Resulta

$$P\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^n} Q(y) \Rightarrow Q(y) = y^n P\left(\frac{1}{y}\right).$$

Para $|y| > 1 + \frac{\max_{k=1, \dots, n} |a_k|}{|a_0|}$ se tiene $y^n P\left(\frac{1}{y}\right) > 0$, entonces

$$\frac{1}{|x|} > 1 + \frac{\max_{k=1, \dots, n} |a_k|}{|a_0|} \Rightarrow P(x) > 0,$$

de donde

$$|x| < \frac{|a_0|}{|a_0| + \max_{k=1, \dots, n} |a_k|} \Rightarrow P(x) > 0.$$

Consecuentemente, $|\hat{x}_i| > r = \frac{|a_0|}{|a_0| + \max_{k=1, \dots, n} |a_k|}$. ■

Conclusión: si \hat{x}_i , $i = 1, \dots, n$ son las raíces reales o complejas de la ecuación algebraica $P(x) = 0$, entonces $\hat{x}_i \in \overline{B}(0, R) - \overline{B}(0, r)$, con

$$R = 1 + \frac{\max_{k=0, \dots, n-1} |a_k|}{|a_n|}, \quad \text{y} \quad r = \frac{|a_0|}{|a_0| + \max_{k=1, \dots, n} |a_k|}, \quad a_0 \neq 0,$$

R es la frontera superior y r es la frontera inferior en las que están localizadas todas las raíces:

$$r < |\hat{x}_i| < R \quad i = 1, \dots, n.$$

En particular, las raíces reales se encuentran localizadas en los intervalos $[-R, -r]$ y $[r, R]$.

Las raíces positivas de $P(x) = 0$ pertenecen a $[r, R]$ y las negativas a $[-R, r]$.

En el siguiente teorema se establece una mejor estimación de la frontera superior de las raíces reales.

Teorema 17 (de Lagrange)

Sea $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polinomio de grado n . Supongamos que $a_n > 0$ y $k < n$ el mayor de los índices para los que $a_k < 0$. Entonces, la frontera superior de las raíces positivas de la ecuación $P(x) = 0$ es el número real $R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}}$, donde $B = \max\{|a_k| \mid a_k < 0\}$.

Demostración. Sea $x > 1$ y $Q(x)$ el polinomio que se obtiene de P al sustituir todos los coeficientes no negativos a_{n-1}, \dots, a_{k+1} por cero y cada uno de los coeficientes restantes a_k, \dots, a_0 se sustituyen por $-B$, donde $B = \max\{|a_k| \mid a_k < 0\}$.

Como $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, entonces

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_n x^n - B x^k - B x^{k-1} - \dots - B = a_n x^n - B \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} > a_n x^n - B \frac{x^{k+1}}{x - 1} \\ &= \frac{x^{k+1}}{x - 1} \left(a_n x^{n-k-1} (x - 1) - B \right) > \frac{x^{k+1}}{x - 1} \left[a_n (x - 1)^k - B \right] \quad x \neq 1. \end{aligned}$$

Para $x > 1$ tal que $a_n(x-1)^k - B \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 + \left(\frac{B}{a_n}\right)^{\frac{1}{k}}$ se tiene $P(x) > Q(x) \geq 0$.

Luego, $\hat{x}_i < 1 + \left(\frac{B}{a_n}\right)^{\frac{1}{k}}$ con $\hat{x}_i > 0$. ■

Si todos los coeficientes de P son positivos, para $x \geq 0$, $P(x) > 0$, es decir que la ecuación $P(x) = 0$ no tiene raíces reales positivas.

Ejemplos

1. Sea $P(x) = 8x^8 - x^6 + 16x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

Observamos que el mayor de los índices $k < 8$ para los que $a_k < 0$ es $k = 6$. Además, los índices para los que $a_k < 0$ son 6 y 2. Entonces $b = \text{Max}\{|a_k| \mid a_k < 0\} = \text{Max}\{1, 5\} = 5$. Resulta que

$$\begin{aligned} Q(x) &= 8x^8 - 5(x^6 + x^5 + \cdots + 1), \\ R &= 1 + \left(\frac{B}{a_8}\right)^{\frac{1}{6}} = 1 + \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{6}} \simeq 1,925. \end{aligned}$$

2. Considerar el polinomio $P(x) = 3x^6 + 2x^5 + 8x^4 - x^3 - 10x^2 - 60$.

Los coeficientes negativos son $a_3 = -1$, $a_2 = -10$, $a_0 = -60$, el mayor de los índices de estos coeficientes es $k = 3$. Además $B = \text{Max}\{|a_k| \mid a_k < 0\} = \text{Max}\{1, 10, 60\} = 60$. Luego

$$\begin{aligned} Q(x) &= 3x^6 - 60(x^3 + x^2 + 1) \\ R &= 1 + \left(\frac{B}{a_6}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{60}^{\frac{1}{3}} \simeq 3,72. \end{aligned}$$

Si $R' = 1 + \frac{\text{Max}_{k=0,\dots,5}|a_k|}{|a_6|} = 1 + \frac{60}{3} = 21$. Claramente $R < R'$.

Observación

Sean $0 < r < R$ las fronteras inferior y superior respectivamente de las raíces positivas de la ecuación $P(x) = 0$. El algoritmo de búsqueda del cambio de signo se aplica en el intervalo $[r, R]$ y para las negativas, el algoritmo se lo aplica en el intervalo $[-R, -r]$.

Ejemplo

Hallemos todas las raíces de la ecuación $3x^4 - 5,4x^3 + 3,11x^2 - 9x - 3,15 = 0$.

Sea $P(x) = 3x^4 - 5,4x^3 + 3,11x^2 - 9x - 3,15$. Determinemos un conjunto en el que están localizadas todas las raíces reales y complejas. Como $R = 1 + \left(\frac{B}{a_n}\right)^{\frac{1}{k}}$, donde $a_n > 0$, k el mayor de los índices para los que $a_k < 0$, $B = \text{Max}\{|a_k| \mid a_k < 0\}$. Se tiene $a_4 = 3$, $k = 3$ pues $a_3 = -5,4$, $a_1 = -9$, $a_0 = -3,15$, $B = 9$. Luego

$$R = 1 + \left(\frac{9}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 2,44225.$$

Todas las raíces reales o complejas están localizadas en el disco cerrado $\overline{B(0, 2,5)}$ ($2,5 > 1 + 3^{\frac{1}{3}} \simeq 2,44225$).

La aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo con un paso $h = 0,5$ muestra que $P(x) = 0$ tiene dos raíces reales localizadas en los intervalos $[-0,5, 0]$ y $[2,0, 2,5]$.

Note que $r = \frac{|a_0|}{|a_0| + \text{Max}_{k=1,\dots,n}|a_k|} = \frac{3,15}{3,15+9} \simeq 0,25926$. En el intervalo $[-r, r]$ no existen raíces de $P(x) = 0$.

Además, si $u(x) = \frac{P(x)}{P'(x)}$, la aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo muestra que u no tiene raíces reales múltiples. Consecuentemente, la ecuación propuesta tiene dos raíces reales y dos raíces complejas una conjugada de la otra.

i. Cálculo de $\hat{x}_i \in [-0,5, -0,25]$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-4}$. Apliquemos el método de Newton:

$$\varphi(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)} \quad x \in [-0,5, -0,25].$$

Escribamos $P(x)$ y $P'(x)$ usando el esquema de Hörner:

$$\begin{aligned} P(x) &= -3,15 + x(-9 + x(3,11 + x(-5,4 + 3x))), \\ P'(x) &= 12x^3 - 16,2x^2 + 6,22x - 9 = -9 + x(6,22 + x(-16,2 + 12x)). \end{aligned}$$

El esquema numérico es el siguiente: $\begin{cases} x_0 \in [-0,5, -0,25] \text{ aproximación inicial,} \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots, \end{cases}$ con $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$.

Sea $x_0 = -0,5$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,5 - \frac{P(-0,5)}{P'(-0,5)} = -0,5 - \frac{8,63}{-17,66} = -0,01133, \\ x_2 &= -0,01133 - \frac{P(-0,01133)}{P'(-0,01133)} = -0,01133 - \frac{-3,04767}{-9,07254} = -0,34725, \\ x_3 &= x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = -0,34725 - \frac{0,61996}{-13,61574} = -0,30172, \\ x_4 &= x_3 - \frac{P(x_3)}{P'(x_3)} = -0,30172 - \frac{0,02172}{-12,68007} = -0,300002, \\ x_5 &= -0,3 \end{aligned}$$

Se tiene $|x_5 - x_4| < 10^{-4}$. La raíz negativa de $P(x) = 0$ es $\hat{x}_1 = -0,3$.

Mediante un procedimiento análogo, con una aproximación inicial $x_0 = 2$ y cuatro iteraciones se calcula la raíz $\hat{x}_2 = 2,1$

Se tiene $P(x) = (x + 0,3)(x - 2,1)Q(x)$ con $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Se verifica fácilmente que $Q(x) = 3x^2 + 5$. Así $P(x) = (x + 0,3)(x - 2,1)(3x^2 + 5)$. Las raíces complejas son $\hat{x}_3 = \frac{\sqrt{15}}{3}i$, $\hat{x}_4 = -\frac{\sqrt{15}}{3}i$.

5.8. Ejercicios

- Para las ecuaciones que en cada ítem se propone, separar las raíces utilizando el método gráfico y el algoritmo de búsqueda del cambio de signo. Aplique el método de bisección para aproximar la o las raíces, si existen, con una precisión $\varepsilon = 10^{-2}$.
 - $x^2 + 2x - 3 = 0$.
 - $x^3 - x - 1 = 0$.
 - $x - 3^{-x} = 0$.
 - $e^x - x^2 - 4x + 2 = 0$.
 - $e^x + 2^{-x} - \frac{1}{x} = 0 \quad x > 0$.
 - $e^{|x|+1} - \sin(x) = 0$.
 - $\cos(x) + x^2 + 2 = 0$.
- Aplicar los métodos de punto fijo modificado, Newton modificado y regula. falsi para aproximar $\sqrt[3]{2}$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. Para los tres métodos elija el mismo punto inicial x_0 . Compare el número de iteraciones que se requieren para aproximar $\sqrt[3]{2}$ con la precisión ε .
- Sea $a \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < a < 1$ y a no es potencia cuarta de ningún número racional.
 - Construya las funciones de iteración de los métodos: punto fijo modificado, Newton - Raphson, Newton modificado y regula - falsi para aproximar $\sqrt[4]{a}$.
 - Para cada función de iteración φ del inciso **a**., sea $x_0 = 1$ y $x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots$. ¿Es (x_n) convergente a $\sqrt[4]{a}$?
- En cada inciso, determine un intervalo $[a, b]$ en el cual la función de iteración Φ dada tenga un punto fijo. Estime el número $N_{\text{máx}}$ de iteraciones necesarias para obtener una precisión del punto fijo de 10^{-4} .

a) $\Phi(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}}$. **b)** $\Phi(x) = 5^{-x}$. **c)** $\Phi(x) = \frac{1}{3}(2 - e^x + x^2)$. **d)** $\Phi(x) = \frac{5}{x^2} + 2$.

e) $\Phi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. **f)** $\Phi(x) = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}$.

Escriba la ecuación para la cual la raíz es punto fijo de Φ .

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$. Demostrar que la ecuación $x^n + ax + b = 0$ tiene a lo más dos raíces reales si n es par y tres raíces reales si n es impar.

Si n es par, ¿qué condiciones han de verificar a y b para que la ecuación $x^n + ax + b = 0$ tenga dos raíces reales?

Si n es impar, ¿qué condiciones han de verificar a y b para que la ecuación $x^n + ax + b = 0$ tenga tres raíces reales?

6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 3$. Estudiar la ecuación $x^n + ax^2 + b = 0$.

7. Encontrar todas las raíces de la ecuación $e^{0,2x^2} - 5x - 2 = 0$. Aplique los métodos de Newton-Raphson y de las secantes. La precisión $\varepsilon = 10^{-3}$.

8. Hallar la mas pequeña raíz positiva de la ecuación $2 - e^x \cos(x) = 0$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-7}$, aplicando los métodos de Steffensen, donde φ es la función de iteración del método de Newton modificado; y, el algoritmo que se describe a continuación:

$$\begin{aligned} y &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y - \frac{f(y)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

9. Hallar la más grande raíz negativa de la ecuación $e^{-x} \sin(x) - 1 = 0$. Aplique los métodos de las secantes y de Steffensen donde la función de iteración φ viene dada por el método de regula-falsi. (precisión $\varepsilon = 10^{-6}$). Escriba en cada caso el algoritmo correspondiente.
10. Escriba un algoritmo que permita aproximar la raíz $\hat{x} \in [a, b]$ de $f(x) = 0$ de tal manera que cada aproximación de \hat{x} se obtenga intercambiando el método de bisección y de Newton modificado, así sucesivamente.
11. Encontrar todas las raíces reales de la ecuación $x^3 - 0,6x^2 - 18,63x + 34,992 = 0$. ¿Existe alguna raíz de multiplicidad? Aplique el método de Newton - Raphson para determinar la raíz simple si esta existe y/o un método para determinar raíces de multiplicidad.
12. Dar un método localmente convergente para determinar el punto fijo $\hat{x} = \sqrt[5]{2}$ de $\Phi(x) = x^5 + x - 2$.
13. Sea $\varepsilon = 10^{-5}$. Para la ecuación que se da en cada inciso aplicar el método que se propone para aproximar la o las raíces de la misma con la precisión ε . Escriba el respectivo algoritmo. Nota: si la ecuación tiene una infinidad de raíces, calcule todas aquellas que están localizadas en el intervalo $[-3, 6]$.
- a)** $x - e^{-x} = 0$, método de punto fijo.
- b)** $e^x + 2^{-x} + 2 \cos(x) - 6 = 0$, método de punto fijo modificado.
- c)** $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$, método de Newton - Raphson.
- d)** $x^2 + 10 \cos(x) = 0$, método de Newton modificado.
- e)** $4 \cos(x) - e^x = 0$, método de las secantes.
- f)** $\ln(x^2 + 1) - e^{0,4x} \cos(\pi x) = 0$, método de regula - falsi.
- g)** $x^3 - 3,23x^2 - 5,54x + 9,84 = 0$, método de punto fijo modificado.
- h)** $e^{x \sin(x)} + 0,5x = 0$, método de las secantes.
14. Calcular las cuatro primeras raíces positivas de la ecuación $\tan(x) - 2x = 0$.

15. Calcular todas las raíces reales de las ecuaciones que se dan a continuación. Analice el caso de posibles raíces de multiplicidad.
- a) $x^4 - 7,223x^3 + 13,447x^2 - 0,672x - 10,223 = 0$. b) $5x^3 + 4,5x^2 - 34,8x + 25,2 = 0$.
- c) $x^4 - 2,2x^3 - 5,03x^2 + 6,864x + 9,7344 = 0$. d) $4x^3 - 22,8x^2 - 34,2x - 64,8 = 0$.
16. Aplique el método de Steffensen para calcular las raíces de las ecuaciones:
- a) $e^{0,5x^2} - 2x^2 - 3 = 0$. b) $(x-1)^2 - \log(2x^2 + 3) = 0$.
17. Sea $I \subset \mathbb{R}$ con $I \neq \emptyset$ y f una función real definida en I . Supongamos que existe $\hat{x} \in [a, b] \subset I$ tal que $f(\hat{x}) = 0$ y que $f \in C^2([a, b])$. Se define la sucesión (x_n) como sigue:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ y = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & f'(x_n) \neq 0 \\ x_{n+1} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

- a) Dé una interpretación geométrica de este esquema numérico.
- b) Si (x_n) es convergente, pruebe que (x_n) converge a \hat{x} al menos cúbicamente.
- c) Escriba el algoritmo correspondiente y aplique a las dos ecuaciones que se proponen a continuación.
- i) $2e^x - x - 5 = 0$. ii) $\cos(x) - x^2 + 1 = 0 \quad x \in [-\pi, \pi]$.
18. Sean $I \subset \mathbb{R}$ con $I \neq \emptyset$, f de I en \mathbb{R} una función definida en I y $\hat{x} \in I$ la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Se define la función de iteración φ de I en \mathbb{R} como $\varphi(x) = x - f(x)$ $x \in I$. Sea $x_0 \in I$ y (x_n) la sucesión que se define a continuación:

$$\begin{aligned} y_n &= \varphi(x_n) \\ z_n &= \varphi(y_n) \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n} \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

- a) Muestre que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \quad n = 0, 1, \dots$$

Este esquema numérico se conoce como método casi Newton.

- b) Dé una interpretación geométrica del esquema numérico.
- c) Probar que $[x_n]$ converge a \hat{x} cuadráticamente.
- d) Sea $a \in \mathbb{R}$. La ecuación $(x^2 + 1)(x - a) = 0 \iff x^3 - ax^2 + x - a = 0$ tiene a $\hat{x} = a$ como la única raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = x^3 - ax^2 + x - a$. Sea $a = 1,3521$ y $x_0 = 1$. Muestre que la sucesión (x_n) generada por el esquema numérico dado en a) converge a $\hat{x} = 1,3521$.
19. Sea $a > 0$ y $\hat{x} = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$. Sea φ de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R} la función definida por $\varphi(x) = \sqrt{a + x}$, $x > -a$. Se define (x_n) como sigue: $\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots$
- a) Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ y que $\hat{x} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.
- b) Sea $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 2$. Aproxime \hat{x} con una precisión ε .
20. Sea $a > 0$. Se desea calcular $\hat{x} = \frac{1}{a}$ sin usar la división. Para el efecto se define la función $f(x) = \frac{1}{x} - a$ para $x > 0$. Utilice el método de Newton para construir una sucesión (x_n) convergente a \hat{x} .

21. Considerar el método de Newton de dos pasos siguiente

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

a) Encuentre una función de iteración Φ sobre $[a, b]$ tal que $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ $n = 0, 1, \dots$.

b) Si (x_n) converge a \hat{x} muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \hat{x}}{(y_n - \hat{x})(x_n - \hat{x})} = \frac{f''(\hat{x})}{f'(\hat{x})}.$$

c) Pruebe que la convergencia es cúbica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\hat{x})}{f'(\hat{x})} \right)^2.$$

22. En cada inciso se define una función f . considere la ecuación $f(x) = 0$. Aplique los métodos de aproximación de raíces de multiplicidad para calcular la raíz de $f(x) = 0$.

a) $f(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x}$.

b) $f(x) = \sin^2[\pi(3x+2)] - \sin[\pi(3x+2)] - 1$ $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

c) $f(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$.

23. Sean $\varepsilon = 10^{-6}$, $p = 0,8$ y $\varphi(x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x \geq 0$, la función de distribución normal.

Construya un método que permita aproximar $\hat{x} > 0$ tal que $\varphi(\hat{x}) = 0,8$ con una precisión ε . [Sugerencia: aplique la serie de Taylor de e^x y adecuadas sumas finitas de una serie de potencias].

24. Sea f una función real dependiente de un parámetro c . Escribiremos $t = f(x, c)$. Suponga que $\frac{\partial f}{\partial c}$ es continua.

Se dispone de un conjunto de datos experimentales $S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \dots, n\}$ y se asume que cada $y_i = f(x_i, c) + r_i(c)$, donde $r_i(c)$ denota el error en la observación y_i , $i = 1, \dots, n$. En el método de mínimos cuadrados se considera el problema siguiente:

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n r_i^2(c).$$

Se define $E(c) = \sum_{i=1}^n r_i^2(c) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, c))^2$.

a) Elaborar un algoritmo para aproximar $\hat{c} \in \mathbb{R}$ tal que $E(\hat{c}) = \min_{c \in \mathbb{R}} E(c)$.

b) Se considera la siguiente información experimental:

$$S = \{(1, 1,35), (1,5, 0,498), (2, 0,183), (2,2, 0,123)\}$$

Aplique el método de mínimos cuadrados para calcular la constante $\hat{c} > 0$ tal que $f(t) = 10e^{-\hat{c}t}$.

c) Se considera el siguiente conjunto de datos

$$S = \{(0,26, 5), (0,785, 5), (0,5, 8,7), (1,05, 8,7)\}$$

Aplique el método de mínimos cuadrados para calcular la constante \hat{c} tal que $f(t) = 10 \sin(ct)$.

5.9. Lecturas complementarias y bibliografía

1. Tom M. Apostol, Análisis Matemático, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.
2. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 1, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1977.
3. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 2, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.
4. N. Bakhvalov, Métodos Numéricos, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
5. Robert B. Banks, Growth and Diffusion Phenomena, Mathematical Frameworks and Applications, Editorial Springer-Verlag, Berlín, 1994.
6. R. M. Barbolla, M. García, J. Margalef, E. Outerelo, J. L. Pinilla. J. M. Sánchez, Introducción al Análisis Real, Editorial Alambra Universidad, Madrid, 1981.
7. G. Birkhoff, S. MacLane, Algebra Moderna, Cuarta Edición, Editorial Vicens-Vives, Barcelona, 1974.
8. E. K. Blum, Numerical Analysis and Computation. Theory and Practice, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1972.
9. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México, 2002.
10. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.
11. S. D. Conte, Carl de Boor, Análisis Numérico, Segunda Edición, Editorial McGraw-Hill, México, 1981.
12. Ruel V. Churchill, James Ward Brown, Variable Compleja y Aplicaciones, Cuarta Edición, Editorial McGraw-Hill, Madrid, 1986.
13. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. Cálculo Numérico Fundamental, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.
14. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. S. Schuwalowa, Métodos Numéricos de Análisis, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
15. Ferruccio Fontanella, Aldo Pasquali, Calcolo Numerico. Metodi e Algoritmi, Volumi I, II Pitagora Editrice Bologna, 1983.
16. Waltson Fulks, Cálculo Avanzado, Editorial Limusa, México, 1973.
17. A. Kurosh, Cours D'Algèbre Supérieure, Editions Mir, Moscou, 1973.
18. Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, Análisis Numérico con Aplicaciones, Sexta Edición, Editorial Pearson Educación de México, México, 2000.
19. H. Hall, S.R. Knight, Algebra Superior, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México, 1977.
20. Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, Numerical Mathematics, Editorial Springer-Verlag, New York, 1991.
21. Robert W. Hornbeck, Numerical Methods, Quantum Publishers, Inc., New York, 1975.
22. Gerard Kiely, Ingeniería Ambiental, Volumen II, Editorial McGraw-Hill, Madrid, 1999.
23. David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.

24. A. Kurosh, Cours D'Algèbre Supérieure, Editions Mir, Moscou, 1973.
25. A. I. Kostrikin, Introducción al Algebra, Editorial Mir, Moscú, 1978.
26. Peter Linz, Theoretical Numerical Analysis, Editorial Dover Publications, Inc., New York, 2001.
27. Rodolfo Luthe, Antonio Olivera, Fernando Schutz, Métodos Numéricos, Editorial Limusa, México, 1986.
28. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.
29. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.
30. Antonio Nieves, Federico C. Dominguez, Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, Tercera Reimpresión, Compañía Editorial Continental, S. A. De C. V., México, 1998.
31. J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equatios in Several Variables, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2000.
32. Anthony Ralston, Introducción al Análisis Numérico, Editorial Limusa, México, 1978.
33. A. A. Samarski, Introducción a los Métodos Numéricos, Editorial Mir, Moscú, 1986.
34. Michelle Schatzman, Analyse Numérique, Inter Editions, París, 1991.
35. Francis Scheid, Theory and Problems of Numerical Analysis, Schaum's Outline Series, Editorial McGraw-Hill, New York, 1968.
36. M. Sibony, J. Cl. Mardon, Analyse Numérique I, Systèmes Linéaires et non Linéaires, Editorial Hermann, París, 1984.
37. J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Editorial Springer-Verlag, 1980.
38. E. A. Volkov, Métodos Numéricos, Editorial Mir, Moscú, 1990.

