# Capítulo 6

# Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales


**Resumen**

El objetivo de este capítulo es presentar algunos métodos numéricos muy conocidos y prácticos para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Primeramente se presentan algunos ejemplos donde surgen los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se examinan tres tipos de problemas con sistemas de ecuaciones lineales: sistemas de ecuaciones que poseen solución única, sistemas de ecuaciones que poseen infinitas soluciones, sistemas de ecuaciones que no tienen solución. Para el estudio de la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y el método numérico a elegir es importante el reconocimiento del tipo de matriz de dicho sistema, por lo que tratamos algunos tipos de matrices. Pasamos luego a la resolución numérica de los sistemas de ecuaciones lineales. Consideramos los sistemas más simples a resolver como son los triangulares superiores y los inferiores. A continuación tratamos el método de eliminación gaussiana y la implementación del pivoting parcial y total. Se consideran métodos para el cálculo del determinante de una matriz y el cálculo de la matriz inversa. Se trata el método de factorización $LU$ de Crout. Cuando las matrices son simétricas, definida positivas se implementa el método de factorización $L^TL$ de Choleski. Se dan aplicaciones a las matrices tridiagonales y a los sistemas de ecuaciones que tienen una infinidad de soluciones. Se concluye este capítulo con un análisis del condicionamiento de una matriz.

Las soluciones en mínimos cuadrados de sistemas de ecuaciones, que en general, no tienen solución serán tratados en el capítulo de mínimos cuadrados.

Para la aproximación de soluciones de grandes sistemas de ecuaciones lineales que poseen solución única cuya matriz del sistema tiene estructura de matriz en banda, se utilizan métodos iterativos. Algunos de estos métodos se tratan en el capítulo de métodos iterativos.

Al final del capítulo se precisa una amplia bibliografía sobre todos estos temas.


## 6.1. Problemas que conducen a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales surgen en modelos matemáticos de la mayor parte de las ciencias tales como la física, la química, la biología, la economía, la psicología, la medicina, las diferentes ramas de la ingeniería, en los problemas ambientales, en estadística, en optimización y muy particularmente en investigación de operaciones y en el cálculo científico. Es por esto que se deben disponer de algoritmos numéricos y de programas computacionales listos a ser implementados en una variedad de situaciones.

A continuación presentamos algunos problemas clásicos que conducen a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

### 6.1.1. Problemas de mínimos cuadrados discreto.

Supongamos que se dispone de un conjunto de $n$ pares de datos experimentales

$$S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, ..., n\}.$$

Se desea encontrar un polinomio $P$ de grado 3:

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

de modo que $P$ se ajuste de la mejor manera al conjunto de datos $S$.

El polinomio $P$ queda perfectamente bien definido si se conocen todos sus coeficientes $a$, $b$, $c$, $d$. Estos coeficientes son calculados mediante el denominado método de mínimos cuadrados discreto que describimos a continuación.

Denotemos con $r_i$ el residuo en cada medición, esto es,

$$y_i = P(x_i) + r_i = a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3 + r_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

En forma matricial, el conjunto de ecuaciones precedente, se escribe como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

El residuo en cada medición depende de los coeficientes $a$, $b$, $c$, $d$ del polinomio $P$. Definimos los vectores $\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x})$ como sigue:

$$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} r_1(\overrightarrow{x}) \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n(\overrightarrow{x}) \end{bmatrix},$$

y la matriz $A$ siguiente: $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix}$. El sistema de ecuaciones (3) se transforma en el siguiente

$$\overrightarrow{Y} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}),$$

de donde

$$\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y} - A\overrightarrow{x}. \tag{4}$$

El problema de hallar el "mejor polinomio" que se ajusta al conjunto de datos $S$ se expresa como sigue:

$$\text{hallar } \widehat{x}^T = (\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \widehat{d}) \in \mathbb{R}^4, \text{ si existe, talque } \quad \|\overrightarrow{r}(\widehat{x})\|^2 = \underset{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4}{\text{Min}} \|\overrightarrow{r}(\widehat{x})\|^2, \tag{5}$$

o de modo equivalente

$$\|\overrightarrow{y} - A\widehat{x}\|^2 = \underset{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4}{\text{Min}} \|\overrightarrow{y} - A\widehat{x}\|^2. \tag{6}$$

Este problema se conoce como método de mínimos cuadrados y se demostrará que conduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$A^T A\overrightarrow{x} = A^T \overrightarrow{y}, \tag{7}$$

donde $A^T$ denota la matriz transpuesta de $A$.

Otros problemas semejantes al descrito se presentan en la aproximación en mínimos cuadrados continuos, en regresión lineal y multilineal, ajuste de datos, entre otros.

La formulación algebraica del método de mínimos cuadrados fue publicada por vez primera por Legendre en 1805.

### 6.1.2. Aproximación de un problema de valores de frontera.

Sea $L > 0$. Se denota con $C^2([0,L])$ el conjunto de funciones que poseen derivadas segundas continuas en $[0,L]$. Consideramos el problema siguiente: dadas dos funciones $f$, $q$ continuas en $[0,L]$, hallar una función $u \in C^2([0,L])$ solución de

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad x \in ]0,L[\,, \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Supondremos que la función $q$ satisface la condición

$$q(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,L[\,.$$

Se demuestra que este problema tiene solución única. Desafortunadamente su solución exacta puede determinarse en muy pocos casos, lo que conduce a calcularla de manera aproximada. Para el efecto, aplicamos el método de diferencias finitas que describimos brevemente a continuación.

Este problema se encuentra en muchas aplicaciones en ingeniería, por ejemplo, en la flexión de una viga fija en los extremos y sujeta a una carga $f(x)$, $x \in [0,L[$, en problemas de transferencia de calor y de masa, en problemas de contaminación ambiental.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Dividimos el intervalo $[0,L[$ en $n$ subintervalos de longitud $h = \frac{L}{n}$. Ponemos $x_k = kh$, $k = 0,1,...,n$. El conjunto de puntos $\{x_0 = 0, x_1, ..., x_n = L\}$ se llaman nodos de discretización.

Sea $u_k$ una aproximación de $u(x_k)$ que escribimos $u_k \simeq u(x_k)$, $k = 0,1,...,n$. Entonces, para $x = 0$, se tiene $0 = u(0) = u_0$, y para $x = L$, $0 = u(L) = u_n$. El polinomio de Taylor con error permite escribir los desarrollos siguientes:

$$\begin{aligned} u(x_{k+1}) &= u(x_k + h) = u(x_k) + hu'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) + o(h^3), \\ u(x_{k-1}) &= u(x_k - h) = u(x_k) - hu'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) + o(h^3). \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro obtenemos

$$u(x_{k+1}) + u(x_{k-1}) = 2u(x_k) + h^2u''(x_k) + o(h^3),$$

de donde

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1})}{h^2} + o(h),$$

y en consecuencia, la derivada segunda $u''(x_k)$ se aproxima mediante el cociente

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2}, \quad k = 1,...,n-1$$

que se denomina diferencia finita central de segundo orden (véase el capítulo 2).

La ecuación diferencial en cada punto $x_k$, $k = 1,...,n-1$ se escribe

$$\begin{cases} -u''(x_k) + q(x_k)u(x_k) = f(x_k) \quad k = 1,...,n-1, \\ u_0 = u_n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

y al remplazar la derivada segunda por la diferencia finita central de segundo orden, la ecuación diferencial precedente se aproxima como

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + q(x_k)u_k = f(x_k) \quad k = 1,...,n-1, \\ u_0 = u_n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} -\frac{u_2 - 2u_1}{h^2} & +q(x_1)u_1 & = & f(x_1), \\ & & \vdots & \\ -\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} & +q(x_2)u_2 & = & f(x_2), \\ & & \vdots & \\ -\frac{2u_{n-1} + u_{n-1}}{h^2} & +q(x_{n-1})u_{n-1} & = & f(x_{n-1}), \end{cases}$$

pués para $k = 1$ se ha considerado $u_0 = 0$ y para $k = n-1$ se tiene $u_n = 0$, que en forma matricial se escribe

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+h^2q(x_2) & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & & 2+h^2q(x_{n-1}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Definimos la matriz $A$ como

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+h^2q(x_2) & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & & 2+h^2q(x_{n-1}) \end{bmatrix},$$

y los vectores $\overrightarrow{u}^T = (u_1, ..., u_{n-1})$, $\overrightarrow{b}^T = (h^2f(x_1), ..., h^2f(x_{n-1})) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

La matriz $A$ es tridiagonal, simétrica, definida positiva. El sistema de ecuaciones (10) se escribe entonces

$$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}. \qquad (11)$$

A continuación se indican otros problemas que se discretizan mediante el método de diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos.

1. Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales como la ecuación de Laplace que modela los flujos saturados incompresibles, la ecuación de conducción del calor y la ecuación de propagación de ondas.

2. Resolución numérica de ecuaciones integrales como las que provienen de la representación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales mediante funciones o núcleos de Green.

### 6.1.3. Trazado de una curva suave a partir de observaciones experimentales.

Supóngase que se dispone de un conjunto de $n$ pares de datos experimentales de $\mathbb{R}^2$ siguiente:

$$S = \left\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, ..., n\right\},$$

tales que $a = x_1 < x_2 < .... < x_n = b$.

El trazado de una curva suave que pase por todos los puntos de $S$, es un problema de interpolación que consiste en hallar una función $f$ de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ que posee una cierta regularidad tal que

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, ..., n,$$

de modo que dado $x \in [a, b]$ podamos calcular $f(x)$.

La construcción de la función $f$ permite trazar una curva suave que pasa por todos ellos. Una estrategia es hallar un polinomio $f$ cuya gráfica para por todos los puntos del conjunto $S$. Este problema se conoce como interpolación polinomial. Lastimosamente, cuando el número de puntos es grande se presentan oscilaciones lo que provoca muchas imprecisiones en los cálculos. Otra estrategia es utiliza tipos especiales de funciones denominada splines. Las gráficas de estas funciones no necesariamente pasan por todos los puntos, es decir que, en general, no se interpolan.

Esta clase de problemas se presentam fundamentalmente en computación gráfica, diseño geométrico asistido por computadora, en la robótica, etc.

Un spline cúbico ajusta una curva suave (de clase $C^2([a,b])$) al conjunto de puntos $S$.

Para fijar las ideas, se consideran los splines cúbicos con condiciones de frontera naturales que a continuación se definen. Denotamos con $\mathcal{P}_3$ al espacio vectorial de polinomios de grado $\leq 3$. Dado el conjunto $S$, se busca una función $f$ de al menos clase $C^2([a,b])$ que cumpla con las siguientes condiciones:

i) $f\diagup_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_3$ que se le denota $S_i$, $i = 1, ..., n-1$.

ii) $S_i(x_i) = Y_i \quad i = 1, ..., n$.

iii) $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), \quad i = 1, ..., n-1$.

iv) $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), \quad i = 1, ..., n-1$.

v) $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1}) \quad i = 1, ..., n-1$.

vi) $S''(a) = S''(b) = 0$.

Para la construcción de la función $f$ consecuentemente de $S_i$ que es un polinomio de grado $\leq 3$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\quad i = 1, ..., n$ ponemos $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, ..., n-1$, y

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad i = 1, ..., n-1.$$

Notemos que las condiciones iii), ii), v) establecen la continuidad de la función $f$, $f'$ y $f''$ en todo $[a,b]$.

De ii) se deduce

$$y_i = S_i(x_i) = a_i, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{1}$$

Se define

$$a_n = f(x_n) = y_n.$$

Por iii), se tiene

$$\begin{cases} S_{i+1}(x_{i+1}) = a_{i+1}, \\ S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \end{cases}$$

de donde

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{2}$$

Las derivadas $S'_i(x)$ y $S'_{i+1}(x)$ están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2, \\ S'_{i+1}(x) &= b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_{i+1}) + 3d_{i+1}(x - x_{i+1})^2, \end{aligned}$$

y por la condición iv) tenemos

$$\begin{aligned} S'_{i+1}(x_{i+1}) &= b_{i+1}, \\ S'_i(x_{i+1}) &= b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad i = 1, ..., n-1, \end{aligned}$$

con lo cual $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$ implica

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad i = 1, ..., n-1. \tag{3}$$

Se define $b_n = f'(x_n)$.

Las derivadas $S''_i(x)$ y $S''_{i+1}(x)$ están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} S''_i(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_i), \\ S''_{i+1}(x) &= 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_{i+1}). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S''_{i+1}(x_{i+1}) &= 2c_{i+1}, \\ S''_i(x_{i+1}) &= 2c_i + 6d_i h_i, \end{aligned}$$

y de la condición v) obtenemos

$$2c_{i+1} = 2c_i + 6d_ih_i,$$

o bien

$$c_{i+1} = c_i + 3d_ih_i \quad i = 1, ..., n-1. \tag{4}$$

de donde

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad i = 1, ..., n-1. \tag{5}$$

Remplazando $d_i$ en (2), obtenemos

$$a_{i+1} = a_i + b_ih_i + c_ih_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}h_i^3 = a_i + b_ih_i + c_ih_i^2 + \frac{1}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right)h_i^2,$$

$$a_{i+1} = a_i + b_ih_i + \frac{1}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right)h_i^2 \quad i = 1, ..., n-1. \tag{6}$$

Remplazando $d_i$ en (3)

$$b_{i+1} = b_i + 2c_id_i + 3\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}h_i^2 = b_i + 2c_ih_i + \left(c_{i+1} - c_i\right)h_i.$$

$$b_{i+1} = b_i + h_i\left(c_{i+1} + c_i\right) \qquad i = 1, ..., n-1. \tag{7}$$

Por otro lado, de (6)

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3}h_i \quad i = 1, ..., n-1. \tag{8}$$

y disminuyendo en 1 el índice de la igualdad precedente, se obtiene

$$b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{c_i + 2c_{i-1}}{3}h_{i-1} \quad i = 2, ..., n, \tag{9}$$

y en (7)

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}\left(c_i + c_{i-1}\right), \quad i = 2, ..., n. \tag{10}$$

Remplazando (8) y (9) en (10), se deduce

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3}h_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{c_i + 2c_{i-1}}{3}h_{i-1} + h_{i-1}\left(c_i + c_{i-1}\right),$$

de donde

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} = \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3}h_i - \frac{c_i + 2c_{i-1}}{3}h_{i-1} + \left(c_i + c_{i-1}\right)h_{i-1}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\frac{3}{h_i}\left(a_{i+1} - a_i\right) &= \frac{3}{h_{i-1}}\left(a_i - a_{i-1}\right) = c_{i+1} + 2c_i - \left(c_i + 2c_{i-1}\right)h_i + 3\left(c_i + c_{i-1}\right)h_{i-1} \\ &= c_{i-1}h_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)c_i + c_{i+1}h_i.\end{aligned}$$

De (1) se tiene

$$\frac{3}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{3}{h_{i-1}}\left(y_i - y_{i-1}\right) = c_{i-1}h_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)c_i + c_{i+1}h_i \qquad i = 2, ..., n-1,$$

que a su vez puede escribirse como

$$\left(h_{i-1}, 2\left(h_{i-1} + h_i\right), h_i\right)\begin{bmatrix} c_{i-1} \\ c_i \\ c_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{3}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{3}{h_{i-1}}\left(y_i - y_{i-1}\right) \quad i = 2, ..., n-1.$$

Por otro lado, se tiene

$$c_n = \frac{1}{2}f''\left(x_n\right) = 0,$$

y

$$0 = f''(x_1) = S_1''(x_1) = 2c_1,$$

de donde $c_1 = 0$.

Se definen $\overrightarrow{c}^T = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ con $c_1 = c_n = 0$, la matriz $A$ siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & h_{n-2} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y el vector $\overrightarrow{b}^T \in \mathbb{R}^n$:

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{3}{h_1}(y_2 - y_1) \\ \\ \frac{3}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(y_{n-1} - y_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$A\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}.$$

Una vez calculado $\overrightarrow{c}$, de (5) se obtiene $d_1, ..., d_{n-1}$ y de (8) se obtiene $b_1, ..., b_{n-1}$.

**Problemas de optimización.**

Mencionamos brevemente otros problemas que requieren de la resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas de optimización como en: programación lineal, programación cuadrática, programación dinámica, control optimal, optimización de funciones convexas con o sin restricciones, problemas de grafos y redes, y de manera más general en el análisis combinatorio.

## 6.2. Problemas con sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_1 x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases} \tag{12}$$

donde $x_1, ..., x_n$ son las incógnitas cuyos valores queremos determinar, y $a_{ij} \quad i = 1, ..., n$, $b_i$, $i = 1, ..., m$ son constantes reales conocidas. Pongamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

entonces $A$ es una matriz de $m \times n$, esto es, $A \in M_{m\times n}[\mathbb{R}]$; $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. El sistema de ecuaciones (12) se expresa en forma matricial como $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

En lo sucesivo consideraremos el problema (P) siguiente: hallar, si existe, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ solución del sistema de ecuaciones lineales

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Consideremos tres clases de problemas.

**Problema I**

Suponemos que $m < n$, es decir que tenemos más incógnitas que ecuaciones. Esta clase de sistemas de ecuaciones poseen infinitas soluciones o ninguna solución.

Cuando el sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones, se dice que el sistema es sobredeterminado. Si el rango de la matriz $A$ es $m$, esto es, $R(A) = m$, el sistema de ecuaciones posee infinitas soluciones y en tal caso consideramos el problema siguiente denominado solución del sistema de ecuaciones lineales en norma mínima:

$$\|\widehat{x}\|^2 = \underset{\substack{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}}}{\text{Min}} \|\overrightarrow{x}\|^2, \tag{13}$$

esto es, entre todas las soluciones $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, seleccionamos una que posea norma mínima que lo notamos con $\widehat{x}$.

**Ejemplos**

1. La ecuación $x+y+z+w = 1$ posee infinitas soluciones. Esta ecuación se escribe en forma matricial como
$$(1,1,1,1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 1.$$
Note que la matriz $A = (1,1,1,1)$ es un vector fila y su rango es $R(A) = 1$, $b = 1$. La solución en norma mínima es $\widehat{x} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

2. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 2 \\ 8x + y - 3z = 3 \end{cases}$ con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tiene infinitas soluciones. La matriz $A$, los vectores $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{x}$ son
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$
El rango de la matriz $A$ es 2.

3. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ -4x + 8y - 12z = 0 \end{cases}$ con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, no tiene solución. Pués si multiplicamos por $-4$ a la primera ecuación, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:
$\begin{cases} -4x + 8y - 12z = 4 \\ -4x + 8y - 12z = 0, \end{cases}$ que es un sistema contradictorio.

**Problema II**

Supongamos que $m > n$. En este caso, el sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que incógnitas. Esta clase de ecuaciones tienen, por lo general, solución única o ninguna solución.

Denotemos con $A_j$ la j-ésima columna de la matriz $A$. Si el vector $\overrightarrow{b}$ pertenece el espacio generado por las columnas de $A$:

$$\overrightarrow{b} \in \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad j = 1, ..., n \right\},$$

entonces, el sistema de ecuaciones lineales posee una única solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $\overrightarrow{b} \notin \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, ..., n \right\}$, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. En este caso, consideraremos el problema siguiente: hallar $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|A\widehat{x} - \overrightarrow{b}\|^2 = \underset{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} \|A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\|^2. \tag{14}$$

Este problema se conoce como solución en mínimos cuadrados.

Note que no se pretende resolver el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, de hecho este sistema no tiene solución. En realidad planteamos un problema de mínimos cuadrados análogo al presentado en la sección precedente. En efecto, como el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ no tiene solución, definimos el residuo $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^m$ como

$$\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}) = A(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{b}, \qquad \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

El problema de mínimos cuadrados consiste en determinar en vector $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ que minimice $\|\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x})\|^2$ cuando $\overrightarrow{x}$ recorre todo $\mathbb{R}^n$, o sea

$$\|\overrightarrow{r}(\widehat{x})\|^2 = \underset{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} \|\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x})\|^2.$$

Este problema se abordará con más detalle en el capítulo de mínimos cuadrados.

**Ejemplo**

Considérese los datos de la tabla siguiente:

| $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 |
| 1 | 1.5 | 10.9 |
| 2 | 2 | 17.1 |
| 3 | 2.5 | 23 |
| 4 | 3 | 30 |

Con estos datos se desea encontrar una función real $f$ de la forma

$$z = f(x, y) = a + bx + cy \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se establece el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} a & & & + & c & = & 5 \\ a & + & b & + & 1{,}5 & = & 10{,}9 \\ a & + & 2b & + & 2c & = & 17{,}1 \\ a & + & 3b & + & 2{,}5c & = & 23 \\ a & + & 4b & + & 3c & = & 30. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución. Poniendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2{,}5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10{,}5 \\ 17{,}1 \\ 23 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

el residuo es

$$\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{r}(a, b, c) = A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b},$$

con lo cual

$$\|\overrightarrow{r}(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c})\|^2 = \underset{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3}{\text{Min}} \|\overrightarrow{r}(a, b, c)\|^2.$$

**Problema III**

Cosideramos sistemas de ecuaciones lineales que tienen igual número de ecuaciones que incógnitas, esto es, $m = n$. Encontramos tres clases de sistemas: aquellos que tienen solución única denominados sistemas de ecuaciones lineales consistente. Aquellos sistemas que tienen infinitas soluciones denominados sobredeterminados y aquellos que no tienen solución llamados inconsistentes.

Denotamos con $T_A$ la aplicación lineal asociada a la matriz $A$, esto es:

$$T_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{x} & \to & T_A(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}. \end{array} \right.$$

El núcleo de $T_A$ se define como el conjunto

$$\ker(T_A) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid T_A(\overrightarrow{x}) = 0\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\overrightarrow{x} = 0\}.$$

El rango de $T_A$

$$R(T_A) = \{T_A(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{A\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

El resultado fundamental del álgebra lineal que caracteriza a las aplicaciones lineales en espacios de dimensión finita es la relación que se establece entre las dimensiones del núcleo y del rango que están ligadas por la siguiente fórmula:

$$\dim\ker(T_A) + \dim R(T_A) = n.$$

Entonces, el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene solución única si y solo si una de las propiedades siguientes se verifica:

**i)** $\ker(T_A) = \{0\}$.

**ii)** $R(T_A) = \mathbb{R}^n$.

**iii)** $A$ es una matriz invertible.

**iv)** $\det(A) \neq 0$.

La propiedad $i)$ significa que $T_A$ es inyectiva. La propiedad $ii)$ muestra que $T_A$ es sobreyectiva. La propiedad $iii)$ significa que $T_A$ es biyectiva y $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$. Además, en el caso en que una de estas propiedades se verifique, las columnas de la matriz $A$ son linealmente independientes. De manera similar, las filas de la matriz $A$ son linealmente independientes.

A la solución única del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ lo notamos con $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$, donde $A^{-1}$ denota la matriz inversa de $A$.

Si el sistema de ecuaciones no tiene solución, abordaremos el problema de mínimos cuadrados siguiente:

$$\text{hallar } \ \widehat{x} \in \mathbb{R}^n \ \text{ tal que } \ \| A\widehat{x} - \widehat{b} \|^2 = \underset{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} \| A\widehat{x} - \widehat{b} \|^2 .$$

Si el sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones, trataremos el problema de norma mínima siguiente:

$$\text{hallar } \widehat{x} \in \mathbb{R}^n \ \text{ tal que } \ \| \widehat{x} \|^2 = \underset{\substack{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ A\widehat{x} = \widehat{b}}}{\text{Min}} \| \widehat{x} \|^2 .$$

En este capítulo nos ocuparemos de la resolución numérica de estos tres problemas. Particularmente, para los sistemas cuadrados de ecuaciones lineales utilizaremos los métodos directos. Los métodos iterativos y las soluciones en mínimos cuadrados se tratarán más adelante en capítulos separados.

Observación: Si $A$ es una matriz de $n \times n$ invertible, cuando notamos a la solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ con $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$, donde $A^{-1}$ denota la matriz inversa de $A$, lo único que queremos indicar es que nuestro sistema de ecuaciones tiene solución única. Esto no quiere decir que debemos calcular la la matriz inversa $A^{-1}$ para hallar su solución $\overrightarrow{x}$. Del punto de vista numérico esto no se hace, es por ello que se buscan métodos para resolver el sistema de ecuaciones que evitan el cálculo de la matriz inversa $A^{-1}$.

## 6.3. Algunos tipos de matrices importantes.

En esta sección tratamos principalmente los siguientes tipos de matrices: simétricas definidas positivas, monótonas, estrictamente diagonalmente dominantes, normales, y ortogonales.

Las relaciones de orden $\leq$ y $<$ en el espacio de matrices $M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ se definen a continuación. Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ dos matrices de $M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Escribiremos

$$\begin{aligned} A &\leq B \Leftrightarrow a_{ij}\leq b_{ij} \quad i,j=1,...,n,\\ A &< B \Leftrightarrow a_{ij}<b_{ij} \quad i,j=1,...,n. \end{aligned}$$

De acuerdo a las relaciones de orden $\leq$ y $<$ definidas en $M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, escribiremos

$$\begin{aligned} A &\geq 0 \Leftrightarrow a_{ij}\geq 0 \quad i,j=1,...,n,\\ A &> 0 \Leftrightarrow a_{ij}>0 \quad i,j=1,...,n. \end{aligned}$$

En forma similar se definen las relaciones de orden $\leq$, y $<$ en $\mathbb{R}^n$, esto, es, si $\overrightarrow{x}^T=(x_1,...,x_n)$, $\overrightarrow{y}^T=(y_1,...,ny_n)$ son dos elementos de $\mathbb{R}^n$, escribiremos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &\leq \overrightarrow{y} \Leftrightarrow x_i\leq y_i \quad i=1,...,n,\\ \overrightarrow{x} &< \overrightarrow{y} \Leftrightarrow x_i< y_i \quad i=1,...,n,\\ \overrightarrow{x} &\geq 0 \Leftrightarrow x_i\geq 0 \quad i=1,...,n,\\ \overrightarrow{x} &> 0 \Leftrightarrow x_i> 0 \quad i=1,...,n. \end{aligned}$$

El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ de dos vectores columna $\overrightarrow{x}^T=(x_1,...,x_n)$, $\overrightarrow{y}^T=(y_1,...,y_n)$ s denota $\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\rangle$, o también $\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}$ o $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$ y se define como

$$\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\rangle=\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

La norma asociada al producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se nota $\|\cdot\|$ y se define como

$$\|\overrightarrow{x}\|=\left(\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n,$$

con $\overrightarrow{x}^T=(x_1,...,x_n)$.

### 6.3.1. Matrices simétricas definidas positivas.

Sea $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz simétrica, esto es, $A=A^T$, donde $A^T$ denota la matriz transpuesta de $A$.

**Definición 1** *Consideramos la forma cuadrática $q$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definida por $q(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{x}^TA\overrightarrow{x}$ $\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$.*

*i) Se dice que la forma cuadrática $q$ es definida positiva si $q(\overrightarrow{x})>0 \quad \forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n, \quad \overrightarrow{x}\neq 0$.*

*ii) Se dice que la forma cuadrática $q$ es semi-definida positiva si $q(\overrightarrow{x})\geq 0 \quad \forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$.*

*iii) Se dice que $q$ es definida negativa si $-q$ es definida positiva.*

*iv) Se dice que $q$ es semi-definida negativa si $-q$ es semi-definida positiva.*

**Definición 2**

*i)* *Diremos que $A$ es definida positiva si la forma cuadrática $q$ es definida positiva.*

*ii)* *Diremos que $A$ es semi-definida positiva si la forma cuadrática $q$ es semi-definida positiva.*

*iii)* *Diremos que $A$ es definida negativa (semi-definida negativa) si la forma cuadrática $q$ es definida negativa (resp. semi-definida negativa).*

**Ejemplos**

1. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ la matriz definida como

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \lambda_i, \quad i = 1, ..., n, \\ a_{ij} &= 0, \quad i.j = 1, ..., n, \;\; i \neq j. \end{aligned}$$

   La matriz $A$ se llama matriz diagonal y se le denota como $A = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ . Se tiene que $A$ es simétrica. Además, $A$ es definida positiva si y solo si $\lambda_i > 0, \quad i = 1, ..., n.$

2. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matrtiz no singular. Las matrices $B = A^T A$ y $C = AA^T$ son simétricas, definidas positivas. En efecto, $B$ es simétrica. Pués, $B^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T$ y como $\left(A^T\right)^T = A$, se sigue que $B^T = A^T A = B$. Además, como $A$ no es singular, se tiene $A\overrightarrow{x} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$. Luego, para $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\overrightarrow{x} \neq 0$,

$$\overrightarrow{x}^T B \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T A^T \overrightarrow{x} = (A\overrightarrow{x})^T A\overrightarrow{x} = \|A\overrightarrow{x}\|^2 > 0,$$

   que prueba que $B$ es definida positiva.

   Así, $B$ es simétrica, definida positiva. En forma similar se muestra que $C$ es simétrica, definida positiva.

**Consecuencias**

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ .

1. Si $A$ es simétrica, definida positiva, $A$ es no singular.

2. Si $A$ es simétrica, definida positiva, entonces la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\langle A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle = \overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x} \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,$$

   es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y la norma asociada a este producto se nota

$$\|\overrightarrow{x}\|_A = \left(\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 1** *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Las siguiente proposiciones son equivalentes.*

*i)* *$A$ es simétrica, definida positiva.*

*ii)* *Para toda matriz $B \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ no singular, $B^T AB$ es simétrica definida positiva.*

*iii)* *Todos los valores propios de $A$ son positivos.*

*iv)* *$A^{-1}$ es simétrica, definida positiva.*

*v)* $a_{ii} > 0 \quad i = 1, ..., n.$

*vi)* $\det(A) > 0$ *y* $\det(A_k) > 0, \quad k = 1, ..., n,$ *donde $A_k$ es la matriz de $k \times k$ obtenida de $A$ con las $k$ primeras filas y columnas de $A$.*

*vii)* *Se define $A^0 = I, \ A^{m+1} = A^m A$ y $A^{-m} = \left(A^{-1}\right)^m$ para $m \in \mathbb{N}$. Se tiene $A^m$ simétrica, definida positiva, para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

*viii)* *Existe una matriz triangular inferior $L$ no singular tal que $A = LL^T$.*

**Demostración.** Son resultados conocidos del álgebra lineal. Las demostraciones y más detalles sobre este tema puede encontrar en los textos de Algebra Lineal citados en la bibliografía. ■

### 6.3.2. Matrices monótonas y diagonalmente dominantes.

**Definición 3** *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Se dice que $A$ es monótona si para $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $A\overrightarrow{x} \geq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{x} \geq 0$.*

**Ejemplo**

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\overrightarrow{x}^T = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Entonces,

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

es decir

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & \geq & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & \geq & 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Multiplicando por 2 a la primera desigualdad y sumando con la segunda, obtenemos $3x_1 - x_3 \geq 0 \quad (*)$. De manera similar, multiplicando por 2 a la tercera desugaldad y sumando con la segunda, obtenemos $-x_1 + 3x_3 \geq 0 \quad (**)$. Multiplicando por 3 a (**) y sumando (*) deducimos $8x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq 0$. De (*), se tiene

$$3x_1 \geq x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0.$$

Como $-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 0 \Rightarrow 2x_2 \geq x_1 + x_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq 0.$

Luego, $A\overrightarrow{x} \geq 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} \geq 0$, es decir $A$ es monótona.

**Teorema 2** *Sea $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Entonces, $A$ es monótona si y solo si $A^{-1} \geq 0$.*

**Demostración.** Supongamos que $A^{-1} \geq 0$. Mostremos que $A$ es monótona. En efecto, sea $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ y supongamos $A\overrightarrow{x} \geq 0$. Entonces,

$$A^{-1}(A\overrightarrow{x}) \geq A^{-1} \times 0 = 0,$$

de donde

$$\left(A^{-1}A\right)\overrightarrow{x} \geq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \geq 0.$$

Así,

$$A\overrightarrow{x} \geq 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} \geq 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $A$ es monótona, probemos que $A$ es invertible y que $A^{-1} \geq 0$.

Sea $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\overrightarrow{x} = 0$. Por ser $A$ monótona, se tiene $\overrightarrow{x} \geq 0$.

Por otro lado, $A(-\overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow -\overrightarrow{x} \geq 0$ o $\overrightarrow{x} \leq 0$. Consecuentemente, $A\overrightarrow{x} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} = 0$, es decir que $\ker(T_A) = \{0\}$, donde $T_A$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T_A(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, que prueba que $A$ es invertible.

Ponemos $A^{-1} = [B_1, ..., B_n]$ con $B_j$ la j-ésima columna de $A^{-1}$ y sea $\left\{\overrightarrow{e}_1^T, ..., \overrightarrow{e}_n^T\right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Puesto que

$$AA^{-1}\overrightarrow{e}_j = \overrightarrow{e}_j \geq 0 \Rightarrow A^{-1}\overrightarrow{e}_j \geq 0 \quad j = 1, ..., n,$$

pero $A^{-1}\overrightarrow{e}_j = B_j \geq 0$. Luego $A^{-1} \geq 0$. ■

**Definición 4** *Sea* $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$.

*i) Se dice que A es estrictamente diagonalmente dominante si y solo si* $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, ..., n.$

*ii) Se dice que A es diagonalmente dominante si y solo si* $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, ..., n.$

**Ejemplos**

1. La siguiente es una matriz estrictamente diagonalmente dominante: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

2. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalmente dominante.

3. Sean $\tau_k > 0, \quad k = 1, ..., m, \ h_i > 0, \ i = 1, ..., n+1; \ A = (a_{ij}), \ B = (b_{ij})$ las matrices que se definen a continuación:

$$\begin{cases} a_{ii} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}, & i = 1, ..., n, \\ a_{ii-1} = -\frac{1}{h_i}, & i = 2, ..., n, \\ a_{ii+1} = -\frac{1}{h_{i+1}}, & i = 1, ..., n-1, \\ a_{ij} = 0 \quad \text{si} & |i-j| > 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{ii} = \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}, & i = 1, ..., n, \\ b_{i,i-1} = \frac{h_i}{6}, & i = 2, ..., n, \\ b_{ii+1} = \frac{h_{i+1}}{6}, & i = 1, ..., n-1, \\ b_{ij} = 0 \quad \text{si} & |i-j| > 1. \end{cases}$$

   Las matrices $A$ y $B$ son tridiagonales con $A$ diagonalmente dominante y $B$ estrictamente diagonalmente dominante. Las matrices $B + \frac{\tau_k}{2}A \quad k = 1, ..., m$, son estrictamente diagonalmente dominantes. Esta clase de matrices surgen en la discretización de ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

**Teorema 3** *Sea* $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$.

*i) Si A es estrictamente diagonalmente dominante, A es no singular.*

*ii) Si A es estrictamente diagonalmente dominante y simétrica con* $a_{ii} > 0$ $i = 1, ..., n$; *A es definida positiva.*

**Demostración.** i) Supongamos que $A$ es singular, entonces $\ker(T_A) = \{0\}$ donde $T_A$ es la aplicación lineal definida por $T_A(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}, \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Sea $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n) \in \ker(T_A)$ con $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ y $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $|x_k| = \underset{i=1,...,n}{\text{Max}} |x_i|$. Se tiene $x_k \neq 0$ y como $\overrightarrow{x} \in \ker(T_A), \quad T_A(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = 0$ y en consecuencia la k-ésima ecuación se escribe

$$a_{k1}x_1 + ... + a_{kk-1}x_k + a_{kk}x_k + a_{kk+1}x_{k+1} + ... + a_{kn}x_n = 0,$$

de donde

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j,$$

y de esta igualdad, tomando el valor absoluto, se tiene

$$|a_{kk}|\,|x_k| = |a_{kk}x_k| = \Big|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_k x_j \Big| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}} |a_{kj}|\,|x_j|\,,$$

y de esta desigualdad se obtiene la siguiente:

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|}.$$

Puesto que $|x_j| \leq |x_k| \quad j = 1, ..., n, \quad \dfrac{|x_j|}{|x_k|} \leq 1$. Luego $|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$, que contradice la hipótesis $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, esto es, $|a_{kk}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \quad k = 1, ..., n.$

ii) Se propone como ejercicio. ■

**Teorema 4** *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Supóngase que $a_{ii} > 0 \quad i = 1, ..., n, \quad a_{ij} \leq 0$ para $i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j$; y, $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, entonces $A$ es monótona.*

**Demostración.** Sea $D$ la matriz diagonal definida por $D = \text{diag}(a_{11}, ..., a_{nn})$. Puesto que $a_{ii} > 0, \ i = 1, ..., n, \ D$ es invertible y

$$D^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_{11}}, ..., \frac{1}{a_{nn}}\right).$$

Se define $B = I - D^{-1}A = (b_{ij})$. Entonces

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 0 \quad i = 1, ..., n, \\ b_{ij} &= -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \geq 0 \quad i, j = 1, ..., n, \ i \neq j. \end{aligned}$$

Como $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, $A$ es invertible. De la igualdad $B = I - D^{-1}A$ se sigue que $A = D(I - B)$ o bien $D^{-1}A = I - B$ que muesta que $I - B$ es invertible. Además,

$$A^{-1} = (I - B)^{-1} D^{-1}.$$

Por otro lado, $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, entonces

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \quad i = 1, ..., n,$$

de donde

$$1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij},$$

que muestra que la matriz $I-B$ es estrictamente diagonalmente dominante.

Sea $m \in \mathbb{Z}^{+}$, no es difícil probar que

$$\lim_{m\to\infty} (I-B)^{-1} B^{m+1} = 0.$$

Se define $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} B^k$. Entonces

$$\begin{aligned} S_m - BS_m &= I - B^{m+1} \Longleftrightarrow (I-B)\, S_m = I - B^{m+1} \\ S_m &= (I-B)^{-1}\left(I - B^{m+1}\right) = (I-B)^{-1} - (I-B)^{-1} B^{m+1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \lim_{m\to\infty} S_m = (I-B)^{-1} - \lim_{m\to\infty} (I-B)^{-1} B^{m+1} = (I-B)^{-1}.$$

Así,

$$A^{-1} = (I-B)^{-1} D^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k D^{-1} \geq 0.$$

■

### 6.3.3. Matsrices normales y ortogonales.

**Definición 5** *Sea* $Q = (q_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$.

*i) Se dice que* $Q$ *es una matriz normal si* $QQ^T = Q^T Q$.

*ii) Se dice que* $Q$ *es una matriz ortogonal si* $QQ^T = Q^T Q = I$.

**Ejemplos**

1. Toda matriz simétrica $A$ es una matriz normal. En efecto, como $A = A^T$ se sigue que

$$A^2 = AA = AA^T = A^T A.$$

2. Sea $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ y $Q = A^T A$. Entonces $Q$ es una matriz normal. Pués

$$Q^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A = Q,$$

que muestra que $Q$ es una matriz simétrica. En consecuencia, $Q$ es una matriz normal. Note que $Q \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. De manera similar, la matriz $Q = AA^T$ es simétrica luego $Q$ es una matriz normal. Note que $Q \in M_{m\times m}[\mathbb{R}]$.

3. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Entonces

$$Q(\theta)^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Como $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, resulta

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= Q(\theta)^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) & \\ & \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así, $Q(\theta)\, Q(\theta)^T = I$. De manera similar se obtiene $Q(\theta)^T Q(\theta) = I$. Por lo tanto $Q(\theta)$ es una matriz ortogonal.

La matriz $Q(\theta)$ se llama matriz de rotación.

4. Toda matriz de permutación $P$ es una matriz ortogonal. pues $P^T = P^{-1}$ o bien $PP^T = P^TP = I$.

5. Toda matriz ortogonal es una matriz normal, pero el recíproco, en general, no es cierto. Para ello considérese la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $Q = A^TA$. Resulta que $Q$ es una matriz simétrica, por lo tanto $Q$ es una matriz normal. Además

$$\begin{aligned} Q &= A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 2 \\ 14 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \\ QQ^T &= \begin{bmatrix} 14 & 14 & 2 \\ 14 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 14 & 2 \\ 14 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 396 & 396 & 60 \\ 396 & 396 & 396 \\ 60 & 396 & 12 \end{bmatrix} \neq I. \end{aligned}$$

6. Matriz de Householder. Sea $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$. La matriz

$$H = I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$$

es ortogonal. Esta matriz $H$ se conoce como matriz de Householder, quien la propuso en 1958. Mostremos que $H$ es ortogonal. En efecto,

$$\begin{aligned} HH^T &= \left(I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)\left(I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)^T = \left(I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)\left(I^T - 2\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)^T\right) \\ &= \left(I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)\left(I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right) = I - 2I\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right) - 2\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)I + 4\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right). \end{aligned}$$

Puesto que $I\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right) = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$, $\left(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^t\right)I = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$, y

$$1 = \|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u},$$

entonces

$$HH^T = I - 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^TI + 4\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{u}^T = I - 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T + 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T = I.$$

Además, la matriz $H$ es simétrica. Pués,

$$H^T = \left(I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\right)^T = I - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T = H.$$

En consecuencia,

$$H^2 = H^TH = HH^T = I.$$

La matriz de Householder $H$ es vital para el desarrollo del método de factorización $QR$ de Householder que se utiliza en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (véase el capítulo de mínimos cuadrado, método de Householder) y el cálculo de valores y vectores propios (véase el capítulo de valores y vectores propios). En la descomposición de Householder, $Q$ es una matriz ortogonal que se construye con la matrices $H$ y $R$ es una matriz triangular superior. Más adelante se verá esta factorización.

Observación.

De la definición de matriz ortogonal se desprende inmediatamente que si $Q$ es tal matriz, $Q$ es invertible y que $Q^{-1} = Q^T$. Como consecuencia de este último resultado, se deduce que la matriz de Householder es invertible, y,

$$H^{-1} = H^T = H.$$

**Teorema 5** *Sea $Q \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Entonces $Q$ es normal si y solo si*

$$\left\|Q^T\overrightarrow{x}\right\| = \|Q\overrightarrow{x}\| \qquad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Demostración.** Supongamos que $Q$ es normal. Entonces $QQ^T = Q^TQ$. Luego, para todo $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|Q^T\overrightarrow{x}\right\|^2 = \left(Q^T\overrightarrow{x}\right)^T Q^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T\left(Q^T\right)^T Q^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T QQ^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}Q^TQ\overrightarrow{x} = \left(Q\overrightarrow{x}\right)^T Q\overrightarrow{x} = \left\|Q\overrightarrow{x}\right\|^2.$$

Tomando en cuenta que la norma es no negativa, se sigue que

$$\left\|Q^T\overrightarrow{x}\right\| = \left\|Q\overrightarrow{x}\right\| \quad \forall\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Recíprocamente, supongamos que $\left\|Q^T\overrightarrow{x}\right\| = \left\|Q\overrightarrow{x}\right\| \quad \forall\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|Q^T\overrightarrow{x}\right\|^2 &= \left\|Q\overrightarrow{x}\right\|^2 \Leftrightarrow \left(Q^T\overrightarrow{x}\right)^T\left(Q^T\overrightarrow{x}\right) = \left(Q\overrightarrow{x}\right)^T Q\overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}^TQQ^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^TQ^TQ\overrightarrow{x} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{x}^T\left(QQ^T - Q^TQ\right)\overrightarrow{x} = 0.
\end{aligned}$$

Así, $\overrightarrow{x}^T\left(QQ^T - Q^TQ\right)\overrightarrow{x} = 0 \quad \forall\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, de donde

$$QQ^T - Q^TQ = 0 \Leftrightarrow QQ^T = Q^TQ.$$

■

**Teorema 6** *Sean $Q_1, Q_2$ dos matrices ortogonales. Entonces $Q_1Q_2$ es una matriz ortogonal.*

**Demostración.** Si $Q_1, Q_2$ son matrices ortogonales, se tiene

$$\begin{aligned}
Q_1Q_1^T &= Q_1^TQ_1 = I, \\
Q_2Q_2^T &= Q_2^TQ_2 = I.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(Q_1Q_2\right)^T Q_1Q_2 = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^T\left(Q_1^TQ_1\right)Q_2 = Q_2^TIQ_2 = Q_2^TQ_2 = I.$$

De manera similar se prueba que $Q_1Q_2\left(Q_1Q_2\right)^T = I$. Por lo tanto $Q_1Q_2$ es una matriz ortogonal. ■

**Nota:** Si $Q_1$, $Q_2$ son matrices normales, en general, $Q_1Q_2$ no es una matriz normal. Exhibimos dos ejemplos, uno en el que el resultado es verdadero y otro en el que el resultado es falso.

1. Consideremos $Q_1$, $Q_2$ las matrices $Q_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned}
Q_1Q_1^T &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 10I, \\
Q_1Q_1^T &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 10I.
\end{aligned}$$

Luego, $Q_1^TQ_1 = Q_1Q_1^T$, es decir, $Q_1$ es una matriz normal. De modo similar, tenemos

$$Q_2Q_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I = Q_2^TQ_2,$$

que muestra que $Q_2$ es normal.

Ahora,

$$Q_1Q_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{aligned}
\left(Q_1Q_2\right)^T Q_1Q_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} = 50I, \\
\left(Q_1Q_2\right)\left(Q_1Q_2\right)^T &= \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} = 50I.
\end{aligned}$$

Resulta que $Q_1Q_2$ es una matriz normal.

2. Sean $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} Q_1Q_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I, \\ Q_1^TQ_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I, \\ Q_2Q_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Q_2^TQ_2. \end{aligned}$$

Sea $A = Q_1Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Luego

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A^TA &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Claramente $AA^T \neq A^TA$. El producto de dos matrices normales, no es en general, una matriz normal como acabamos de comprobar.

**Teorema 7** *Sea $Q \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Las tres proposiciones siguientes son equivalentes:*

*i)* $Q^TQ = I$,

*ii)* $(Q\overrightarrow{x})^T Q\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y} \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$,

*iii)* $\|Q\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\| \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

**Demostración.** i) $\Rightarrow$ ii.) Supongamos que $Q^TQ = I$ sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$(Q\overrightarrow{x})^T Q\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}^TQ^TQ\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}^TI\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}.$$

ii) $\Rightarrow$ iii.) Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Si $(Q\overrightarrow{x})^T Q\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}$, en particular para $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$, se tiene

$$\|Q\overrightarrow{x}\|^2 = (Q\overrightarrow{x})^T Q\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{x}\|^2,$$

de donde

$$\|Q\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\| \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

iii) $\Rightarrow$ i.) Si $\|Q\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\| \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|Q\overrightarrow{x}\|^2 &= \|\overrightarrow{x}\|^2 \Leftrightarrow (Q\overrightarrow{x})^T Q\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}^TQ^TQ\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^TI\overrightarrow{x} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{x}^T\left(Q^TQ - I\right)\overrightarrow{x} = 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

de donde $Q^TQ = I$. ■

**Teorema 8** *Sea $Q \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Entonces, $Q$ es ortogonal si y solo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

*i) $Q$ es invertible.*

*ii)* $\|Q\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\| \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

**Demostración.** Supongamos que $Q$ es ortogonal. Entonces $Q^TQ = QQ^T = I$, de donde $Q^T = Q^{-1}$, esto es, $Q$ es una matriz invertible.

Sea $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|Q\overrightarrow{x}\|^2 = (Q\overrightarrow{x})^T Q\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T Q^T Q\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T I\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{x}\|^2,$$

con lo cual

$$\|Q\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\| \qquad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Así, si $Q$ es ortogonal, se tiene $i) \Rightarrow ii)$.

Recíprocamente, supongamos que se satisfacen i) y ii). Mostremos que $Q$ es ortogonal. Por i) se tiene que $Q$ es invertible y por ii)

$$\|Q\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\| \qquad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Por el teorema precedente se deduce que $Q^TQ = I$ que implica $Q^T = Q^{-1}$. Luego

$$QQ^T = QQ^{-1} = I = Q^TQ,$$

es decir que $Q$ es una matriz ortogonal. ■

## 6.4. Métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En lo sucesivo consideraremos sistemas de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, donde $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$ y $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. Como ya se indicó en el capítulo 1, llamamos método directo de resolución del sistema de ecuaciones lineales, un método que conduce a la solución del problema al cabo de un número finito de pasos, o bien en un número finito de operaciones aritméticas elementales (suma, resta, multiplicación , división y raíz cuadrada) que es función de la dimensión $n$ del sistema.

En cada método directo, se debe estimar: el número de operaciones elementales necesarias en la ejecución del algoritmo, y, la exactitud y precisión del método.

**i)** El número de operaciones elementales necesarias en la ejecución del algoritmo es una función que depende de la dimensión $n$ de la matriz cuadrada $A$, a esta función se le denota $Noper$: $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ que a cada $n \in \mathbb{Z}^+$ asocia $Noper\ (n)$ que expresa el número total de operaciones elementales.

**ii)** La exactitud y precisión del método dependen sobre todo del condicionamiento de la matriz y de la estabilidad del método, es decir que pequeños errores en los datos de entrada provocan pequeños errores en los datos de salida, o lo que es lo mismo, es insensible a la propagación de errores de redondeo. En el apéndice se muestra el número de condicionamineto.

Para cada método estudiado se debe elaborar un algoritmo numérico, en lo posible, el más óptimo.

En este capítulo se tratarán los métodos clásicos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

**1.-** Método de eliminación gaussiana simple, con pivoting parcial y con pivoting total.

**2.-** Método de facturación LU.

**3.-** Método de Choleski.

El método de Householder será estudiado en el capítulo de mínimos cuadrados, sin embargo, en este capítulo introducimos algunos resultados acerca de las matrices ortogonales.

Por otro lado, utilizando el método de eliminación gaussiana se propone un algoritmo de cálculo de la matriz inversa de $A$ y otro para el cálculo del determinante de $A$. Adicionalmente, par matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}[\mathbb{R}]$ no nulas, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, se consideran sistemas de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, y se buscan soluciones en mínimos cuadrados si el sistema de ecuaciones no tiene solución; y, en norma mínima si el sistema de ecuaciones posee infinitas soluciones.

La idea general de los métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es la factorización de la matriz $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ en la forma $LR$, donde $L$ es una matriz elegida apropiadamente, $R$ una matriz triangular superior. Además, $L$ y $R$ son matrices invertibles. Entonces

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow LR\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Sea $\overrightarrow{y} = R\overrightarrow{x}$, entonces $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$. Así,

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}, \\ R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}, \end{cases} \tag{15}$$

que muestra que si la matriz $A$ se factora en la forma $LR$, la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es equivalente a los siguientes:

$$L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b} \tag{16}$$

y a continuación

$$R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \tag{17}$$

Además, como $L$, $R$ son invertibles, se tiene

$$\overrightarrow{y} = L^{-1}\overrightarrow{b}$$

y

$$\overrightarrow{x} = R^{-1}\overrightarrow{y}.$$

Luego

$$\overrightarrow{x} = R^{-1}\overrightarrow{y} = R^{-1}\left(L^{-1}\overrightarrow{b}\right) = \left(R^{-1}L^{-1}\right)\overrightarrow{b} = (LR)^{-1}\overrightarrow{b} = A^{-1}\overrightarrow{b},$$

es decir que la solución $\overrightarrow{x}$ del par de sistemas de ecuaciones (16) y (17) es la solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ y recíprocamente. Por otro lado, los sistemas de ecuaciones 16) y 17) son muy sencillos de resolver. Más aún, comenzaremos nuestro estudio de solución de sistemas de ecuaciones lineales de los tipos (16) y (17) denominados triangulares inferiores y superiores, respectivamente. A continuación se describen los métodos de factorización de matrices $A$ en la forma $LR$.

### 6.4.1. Sistemas de ecuaciones lineales triangulares superiores e inferiores.

**Definición 6** *Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.*

*i) Se dice que $A$ es una matriz triangular superior si y solo si los coeficientes de $A$ satisfacen la siguiente condición:*

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i > j, \quad i = 2, ...n, \quad j = 1, ...n. \tag{18}$$

*ii) Si $A$ es una matriz triangular superior, se dice que el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es triangular superior.*

*iii) Se dice que $A$ es una matriz triangular inferior si y solo si los coefiecientes de $A$ satisfacen la condición siguiente:*

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad j > i, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 2, ...n. \tag{19}$$

*iv) Si $A$ es una matriz triangular inferior, el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ se llama sistema triangular inferior.*

**Ejemplos**

1. La matriz $A$ siguiente es triangular superior. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2. El siguiente es un sistema de ecuaciones triangular superior: $\begin{cases} 2x+ & 3y+ & 5z- & w & = & 1 \\ & y- & z+ & w & = & 2 \\ & & 3z- & w & = & -1 \\ & & & 5w & = & 20. \end{cases}$

   Note que la matriz $A$ del sistema de ecuaciones es $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ que es triangular superior.

3. El siguiente es un sistema de ecuaciones lineales triangular inferior: $\begin{cases} 4x & & & & = & 2 \\ 3x & -2y & & & = & -1 \\ x & +2y & +3z & & = & 0 \\ -x & -2y & -2z & -w & = & -2 \end{cases}$

   Observe que la matriz $A$ del sistema de ecuaciones es $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ que es triangular inferior.

**Resolución numérica.**

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz triangular superior, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales triangular superior:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b},$$

o en forma explícita

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & \\ & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Los valores $x_i$, $i = 1, ..., n$, de la solución $\overrightarrow{x} = (x_1, ...x_n)$, siempre que esta exista, se obtienen mediante el procedimiento de "vuelta atrás", siguiente:

$$\begin{array}{lcll} x_n & = & \frac{b_n}{a_{nn}} & a_{nn} \neq 0, \\ x_{n-1} & = & \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1,n-1}}, & a_{n-1,n-1} \neq 0, \\ & \vdots & & \\ x_j & = & \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum\limits_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k\right), & a_{jj} \neq 0, \\ & \vdots & & \\ x_1 & = & \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum\limits_{k=2}^{n} a_{1k}x_k\right), & a_{11} \neq 0. \end{array}$$

Del cálculo de $x_1, ..., x_n$, se deduce que el sistema de ecuaciones lineales triangular superior tiene solución única si y solo si $a_{ii} \neq 0, \ i = 1, ..., n$.

Para la resolución de este sistema de ecuaciones se requieren ejecutar los números siguientes de operaciones elementales:

$$\begin{array}{rcl} \text{Productos} & : & 0 + 1 + ... + n - 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}, \\ \text{Adiciones} & : & 0 + 1 + ... + n - 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}, \\ \text{Divisiones} & : & n. \end{array}$$

El número total de operaciones para el cálculo de $\overrightarrow{x}$ solución de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es

$$Noper(n) = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

**Ejemplo**

Resolver el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrrrrr} -3x & +2y & -z & +u & = & -1 \\ & 0{,}5y & +z & -u & = & 3 \\ & & -4z & +u & = & 0 \\ & & & 2u & = & 1. \end{array}\right.$ Aplicando el procedimiento de "vuelta atrás", tenemos

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} = 0{,}5, \\ z &= \frac{0 - 1 \times 0{,}5}{-4} = 0{,}125, \\ y &= \frac{3 - 0{,}125 - (-1) \times 0{,}5}{0{,}5} = 6{,}75, \\ x &= \frac{-1 - 2 \times 6{,}75 - (-1) \times 0{,}125 - 0{,}5}{-3} = 4{,}625. \end{aligned}$$

La solución es $\overrightarrow{x}^T = (4{,}625, 6{,}75, 0{,}125, 0{,}5)$.

Algoritmo

El procedimiento de "vuelta atrás" descrito precedentemente permite elaborar el siguiente algoritmo:

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Datos de salida: $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, Mensaje: "Matriz $A$ singular".

1. Si $a_{nn} \neq 0$, $x_n = \frac{b_{nn}}{a_{nn}}$.

   Caso contrario, imprimir mensaje. Continuar en 4).

2. Para $j = n - 1, ..., 1$

   Si $a_{jj} \neq 0.$,

   $S = 0.$

   $k = j + 1,\ n$

   $S = S + a_{jk}x_k$

   $x_j = \frac{(b_j - S)}{a_j}$

   Fin de bucle k.

   Caso contrario, imprimir mensaje. Continuar en 4)

   Fin de bucle j.

3. Imprimir $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$. Continuar en 5).

4. Mensaje: matriz singular.

5. Fin.

Tratamos continuación los sistemas de ecuaciones lineales triangulares inferiores.

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz triangular inferior, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el sistema de ecuaciones triangular inferior $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, o escrito en forma explícita

$$\left\{\begin{array}{llcl} a_{11}x_1 & & = & b_1, \\ & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +... + a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}\right.$$

cuya solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$, siempre que esta exista, puede calcularse con el procedimiento siguiente:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} & , \quad a_{11} \neq 0, \\ \\ x_j &= \frac{1}{a_{jj}} & \left( b_j - \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k \right), \quad a_{jj} \neq 0, j = 2, ..., n. \end{cases}$$

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Datos de salida: $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, Mensaje: "Matriz $A$ singular".

1. Si $a_{11} \neq 0$, $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$

   Caso contrario, imprimir mensaje. Continuar en 5).

2. Para $j = 2, ..., n$

   Si $a_{jj} \neq 0.$,

   $S = 0.$

   $k = 1, ..., j-1$

   $S = S + a_{jk} x_k$

   $x_j = \frac{(b_j - S)}{a_{jj}}$

   Fin de bucle k.

   Caso contrario, imprimir mensaje. Continuar en 5).

   Fin de bucle j.

4. Imprimir $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$. Continuar en 6).

5. Mensaje: matriz singular.

6. Fin.

El número de operaciones elementales, para hallar la solución de un sistema de ecuaciones triangular inferior es:

$$Noper\,(n) = n^2.$$

Debe notarse que si $A$ es una matriz triangular superior o inferior singular, el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ puede tener infinitas soluciones o ninguna solución. Se propone como ejercicio el estudio de estas dos situaciones y la implementación correspondiente en los algoritmos descritos precedentemente.

Nota**:** Si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es una matriz triangular superior, los elementos de la diagonal principal de $A$; $a_{jj}$, $j = 1, ..., n$, se llaman pivotes de la matriz triangular, y si $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, $a_{jj}$ se llaman pivotes del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

**Consecuencias**

El cálculo del determinante de una matriz $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ triangular superior se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 9** *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz triangular superior. Entonces,* $\det(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}$.

**Demostración.** Procedemos por inducción.

Si $n = 1$, $A = (a_{11})$ y en consecuencia $\det(A) = a_{11}$.

La hipótesis inductiva establece que si $A = (a_{ij}) \in M_{(n-1)\times(n-1)}[\mathbb{R}]$, entonces $\det(A) = \prod_{j=1}^{n-1} a_{jj}$.

Probemos que es cierto para $n \geq 1$. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz triangular superior.

Desarrollamos el determinante de $A$ por elementos de la primera columna. Se tiene

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + ... + a_{n1}A_{n1},$$

donde $A_{i1}, \quad i = 1, ..., n$, es el cofactor de $a_{i1}$, $i = 1, ..., n$. Puesto que $A$ es triagular superior, $a_{21} = ... = a_{n1} = 0$, y

$$a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^2 \det(A_{n-1}) = a_{11}\det(A_{n-1}),$$

donde $\det(A_{n-1})$ es el determinante de la matriz obtenida de $A$ al eliminar la primera fila y la primera columna. Por la hipótesis inductiva, $\det(A_{n-1}) = \prod_{j=2}^{n} a_{jj}$. Luego

$$\det(A_{n-1}) = a_{11}\prod_{j=2}^{n} a_{jj} = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

■

Un resultado similar se obtiene cuando $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es una triangular inferior. Se tiene $\det(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$.

En el siguiente teorema se establece un método para el cálculo de la matriz inversa de una matriz triangular superior invertible.

**Teorema 10** *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz triangular superior invertible. Entonces, la j-ésima columna de $A^{-1}$ es solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_j}$, donde $\{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y $\overrightarrow{e_j}^T = (0, ..., 1, ..., 0)$. Además, $A^{-1}$ es triangular superior.*

**Demostración.** Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz triangular superior invertible. Pongamos $A^{-1} = \left[A_1^{(-1)}, ..., A_n^{(-1)}\right]$, donde $A_j^{(-1)}$ denota la j-ésima columna de $A^{-1}$.

Sea $\overrightarrow{x}$ la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_j}, \quad j = 1, ..., n.$$

Multiplicando por $A^{-1}$, se tiene

$$A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{e_j},$$

y tomando en cuenta que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, se sigue que

$$\overrightarrow{x} = \left[A_1^{(-1)}, ..., A_n^{(-1)}\right]\overrightarrow{e_j} = A_j^{(-1)}.$$

Mostremos que $A^{-1}$ es triangular superior.

Sean $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{x}$ la solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Entonces

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ \quad\vdots \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right) \end{cases}$$

En particular, si $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_j} \quad j = 1, ..., n$, se tiene: para $j = 1$, $\overrightarrow{b}^T (1, 0, ..., 0)$, $x_2 = 0, ..., x_n = 0$, $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$

$$A_1^{(-1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Continuando con este procedimiento, para $j = n$ se tiene

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}, \\ \quad \vdots \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \left( 0 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \right), \end{cases}$$

con lo cual $A_n^{(-1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de donde $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}} \frac{a_{12}}{a_{22}} & & -\frac{1}{a_{11}} \sum\limits_{a=2}^{n} a_{1j} x_j \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ que muestra que $A^{-1}$ es triangular superior. ■

Un resultado similar se establece para matrices triangulares inferiores invertibles, esto es, si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es triangular inferior invertible, $A^{-1}$ es triangular inferior y cada columna de $A^{-1}$ es solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_j}$, $j = 1, ..., n$.

Si se toma en consideración que cada columna de $A^{-1}$ es solución de sistema de ecuaciones triangular superior $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_j}$, el número de operaciones elementales para calcular $\overrightarrow{x}$ es $n^2$. Luego, para calcular $A^{-1}$ se requieren de $n^3$ operaciones elementales, esto es,

$$Noper\,(n) = n^3.$$

El procedimiento descrito en el teorema precedente para el cálculo de $A^{-1}$ es práctico pero no óptimo. Si se observa la matriz $A^{-1}$, es claro que se puede elaborar un algoritmo óptimo y reducir el número de operaciones elementales. Un algoritmo de cálculo de $A^{-1}$, no óptimo, basado el el teorema precedente, es el siguiente:

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+, A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$.

Datos de salida: Mensaje 1: "$A$ no es triangular superior". Mensaje 2: "$A$ no es invertible", $B = A^{-1} = (b_{ij})$.

1. Para $i = 2, ..., n$,

   Para $j = 1, ..., n$

   Si $i > j$ y $|a_{ij}| > 0$, imprimir mensaje 1, continuar en 5)

   . Fin de bucle j.

   Fin de bucle i.

2. Para $i = 1, ..., n$

   Si $|a_{ii}| \leq 0$, imprimir mensaje 2, continuar en 5).

   Fin de bucle i.

3. Para $j = 1, ..., n$

   Resolver el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_j}$.

   Para $i = 1, ..., n$,

   $b_{ij} = x_i$

   Fin de bucle i.

Fin de bucle j.

4. Imprimir $A^{-1} = B$.

5. Fin

**Ejercicios**

1. Mejorar el algoritmo precedente en en punto 3.

2. Elaborar un algoritmo, el mejor posible, para calcular $A^{-1}$. Estimar $Noper\,(n)$.

## 6.5. Operaciones elementales con matrices.

La matriz identidad $I = (e_{pq}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ está definida como $e_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q, \quad p, q = 1, ..., n, \\ 0, & \text{si } \; p \neq q. \end{cases}$

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz no nula.

**i) Intercambio de dos filas de** $A$

Sea $F_{i,j} = (f_{pq}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ la matriz obtenida de $I$ al intercambiar la fila $i$ con la fila $j$, $\;i < j$, esto es,

$$f_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{si } \; p = q, \;\; p, q = 1, ..., n, \;\; p \neq i, j \;\; \text{o} \;\; p = j, \;\; q = i, \;\; \text{o} \;\; p = i, q = j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz $A_{i,j}$ que se obtiene de $A$ al intercambiar la fila $i$ con la fila $j$ de la matriz $A$ esta definida como

$$A_{i,.j} = F_{i,j}A.$$

**Ejemplo**

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $F_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$A_{2,3} = F_{2,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observe que la tercera fila de $A$ ha remplazado a la segunda fila de $A$ y esta ha ocupado la tercera fila. Note que la matriz $F_{i,j}$ es no singular y $\det(F_{i,j}) = -1$.

**ii) Intercambio de dos columnas de** $A$.

Sea $C_{i,j} = (C_{pq}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ la matriz definida como

$$c_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{si } \; p = q, \;\; p, q = 1, ..., n, \;\; \text{o} \;\; p = i, \;\; q = j, \;\; \text{o} \;\; p = j, q = i. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz $B_{ij}$ que se obtiene de $A$ al intercambiar la columna $i$ con la $j$ de la matriz $A$ está definida como:

$$B_{i,j} = AC_{i,j}, \quad i < j.$$

**Ejemplo**

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ y $C_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$B_{1,4} = AC_{1,4} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & -6 & -9 & -3 \\ 20 & 10 & 15 & 5 \\ 12 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz $B_{1,4}$ se obtiene al intercambiar la primera con la cuarta columna de $A$. La matriz $C_{i,j}$ es no singular y $\det(C_{i,j}) = -1$.

**iii) Producto de una constante $\alpha$ por una fila o columna de $A$.**

Sean $1 \leq p \leq n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Se define $C_p = (c_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ la matriz definida como

$$c_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \ i = j = p, \\ 1, & \text{si } \ i = j; \ \ i, j = 1, ..., n, \quad i \neq p, \ \ j \neq p, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El producto de la constante $\alpha$ por la fila $p$ de $A$ se define como $A_p = C_p A$, o sea

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \alpha & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha a_{p1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha a_{pn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

El producto de la constante $\alpha$ por la columna $p$ de $A$ se define como $B_p = AC_p$. Para $\alpha \neq 0$, la matriz $C_p$ es invertible.

**Ejemplo**

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 100 & 120 & 140 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Note que la segunda fila de $A_2$ se obtiene al multiplicar la constante $\alpha = 20$ con la segunda fila de $A$.

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 40 & 3 \\ 5 & 120 & 7 \\ 8 & 180 & 10 \end{bmatrix}.$$

Observe que la segunda columna de $B_2$ se obtiene al multiplicar la constante $\alpha = 20$ con los elementos de la seguna columna de $A$.

**iv) Producto de $\alpha$ por la fila $i$ y suma del resultado con la fila $j$ de $A$.**

Sean $1 \leq i \leq j \leq n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Se definen $K_{i,j} = (k_{pq}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ como sigue

$$k_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ p = q, \ \ p, q = 1, ..., n, \\ a, & \text{si } \ p = i, \ \ q = j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\widetilde{A}_{i,j} = K_{i,j} A.$$

La matriz $\widetilde{A}_{i,j}$ se obtiene al multiplicar la fila $i$ de $A$ por $\alpha$ y el resultado se suma con la fila $j$ de $A$.

**Ejemplo**

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & -20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\widetilde{A}_{1,3} = K_{1,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & -20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & -20 \\ 2\alpha+3 & 8\alpha+6 & -\alpha+9 & 2\alpha+12 \\ 0 & - & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que la tercera fila de $\widetilde{A}_{1,3}$ es el resultado de multiplicar la primera fila de $A$ por $\alpha$ y luego sumar con la tercera fila.

Sea $K_{2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\widetilde{A}_{2,4} = K_{2,4}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & -20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & -20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 5\alpha+1 & 10\alpha+-1 & 15\alpha & -20\alpha+1 \end{bmatrix}.$$

Observe que la cuarta fila de $\widetilde{A}_{2,4}$ es el resultado de multiplicar la segunda fila de $A$ por $\alpha$ y este resultado sumar con la cuarta fila de $A$.

## 6.6. Método de eliminación gaussiana.

Sean $A = (a_{ij})\, M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ no nula, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}. \tag{1}$$

La matriz ampliada $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ se define como

$$\widetilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si } i = 1, .., n \quad j = 1, ..., n, \\ b_i, & \text{si } i = 1, ..., n, \quad j = n+1. \end{cases} \tag{2}$$

Claramente $\widetilde{A} \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$. Esta matriz $\widetilde{A}$ se le representa como $\widetilde{A} = \left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$, que en forma explícita se escribe

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right], \tag{3}$$

y ponemos $\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}$.

En la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales solo los elementos de la matriz $A$ y los componentes del vector $\overrightarrow{b}$ intervienen. La idea general del método del eliminación gaussiana es la siguiente: partiendo de la matriz ampliada $\widetilde{A}_0$, construir en $n-1$ etapas una matriz $\widetilde{A}_{n-1}$ de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones lineales triangular superior

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}^{(n-1)}x_1 + \ldots \quad + a_{1n}^{(n-1)}x_n & = & b_1^{(n-1)} \\ & \vdots & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)} \end{array}\right. \tag{4}$$

que como se ha dicho, es muy sencillo de resolverlo.

Comenzamos con el método de eliminación gaussiana sin pivoting que se explica a continuación. Debemos enfatizar en esta parte que no estamos muy interesados en la precisión de la solución y lo que queremos es describir los elementos que intervienen en el algoritmo de la eliminación gaussiana.

### 6.6.1. Eliminación gaussiana sin pivoting.

Con el propósito de presentar las ideas fundamentales del método de eliminación gaussiana, consideramos primeramente en ejemplo.

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$. Formamos la matriz ampliada $\widetilde{A} = \left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$, esto es,

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right].$$

Para transformar la matriz $\widetilde{A}$ en $n-1$ etapas (en este caso 3 etapas) en una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(3)} & \cdots & a_{14}^{(3)} & b_1^{(3)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{44}^{(3)} & b_4^{(3)} \end{array}\right]$$

utilizamos las operaciones elementales con matrices, y particularmente, la de multiplicar a una fila por una constante y el resultado sumar a otra fila.

**Etapa 1**

Si $a_{11} \neq 0$, se define $k_{i1} = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2, 3, 4$, y $K_1$ es la matriz siguiente:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 1 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & 1 & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resulta que $K_1$ es una matriz triangular inferior invertible. Ponemos

$$\widetilde{A} = K_1\widetilde{A}_0 = K_1\left[A \mid \overrightarrow{b}\right] = \left[K_1 A \mid K_1\overrightarrow{b}\right].$$

Entonces

$$\widetilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 11 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & -9 & 5 & 7 & 16 \end{array}\right].$$

Esta matriz $\widetilde{A}_1$ lo notamos $\left[A_1 \mid \overrightarrow{b}_1\right]$ o también$\left(a_{ij}^{(1)}\right)$, esto es, $\widetilde{A} = \left[A_1 \mid \overrightarrow{b}_1\right] = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$, donde $A_1 = K_1 A$ y $\overrightarrow{b} = K_1 \overrightarrow{b}$.

Note que la construcción de la matriz $K_1$ conduce a que en la matriz $\widetilde{A}_1 = K_1 \widetilde{A}$ se hagan ceros los elementos de la primera columna bajo el primer elemento de la diagonal de $A$.

**Etapa 2**

Si $a_{22}^{(1)} \neq 0$, se define $k_{i2} = -\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $i = 3, 4$. En nuestro caso particular $a_{22}^{(1)} = -8$.

Se define $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_{34} & 1 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{8} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{8} & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz $K_2$ es triangular inferior invertible.

Se define

$$\widetilde{A}_2 = K_2 \widetilde{A}_1 = K_2 \left[A_1 \mid \overrightarrow{b}_1\right] = \left[K_2 A_1 \mid K_2 \overrightarrow{b}_1\right].$$

Entonces

$$\widetilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{8} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{8} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 11 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & -9 & 5 & 7 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{11}{4} & 7 & 7 \end{array}\right].$$

Ponemos $\widetilde{A}_2 = \left[A_2 \mid \overrightarrow{b}_2\right] = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$, donde $A_2 = K_2 A_1$, $\overrightarrow{b}_1 = K_1 \overrightarrow{b}_1$.

Observe que la construcción de la matriz $K_2$ hace que la matriz aumentada $\widetilde{A}_2 = K_2 \widetilde{A}_1$ conserve los ceros de la primera columna bajo el elemento de la diagonal y se hagan ceros los elementos de la segunda columna bajo el elemento de la diagonal de la matriz $A_1$.

**Etapa 3**

Si $a_{33}^{(2)} \neq 0$, se define $k_{i3} = -\dfrac{a_{i3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$, $i = 4$. En nuestro caso $a_{33}^{(2)} = -\frac{1}{4}$.

Sea $K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_{43} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz $K_3$ es triangular inferior invertible. Ponemos

$$\widetilde{A}_3 = K_2 \widetilde{A}_2 = K_3 \left[A_2 \mid \overrightarrow{b}_2\right] = \left[K_3 A_2 \mid K_3 \overrightarrow{b}_2\right].$$

Luego

$$\widetilde{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{11}{4} & 7 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 51 \end{array}\right].$$

Ponemos $\widetilde{A}_3 = \left[A_3 \mid \overrightarrow{b}_3\right]$, es decir que $A_3 = K_3 A_2$ y $\overrightarrow{b}_3 = K_3 \overrightarrow{b}_2$ que se indican a continuación:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 51 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{b}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \\ 51 \end{bmatrix}.$$

La matriz $A_3$ es triangular superior que lo notamos $R$. Entonces

$$\begin{aligned} R &= A_3 = K_3A_2 = K_3K_2A_1 = K_3K_2K_1A, \\ \overrightarrow{b}_3 &= K_3\overrightarrow{b}_2 = K_3K_2\overrightarrow{b}_1 = K_3K_2K_1\overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

Puesto que $K_1$, $K_2$, $K_3$ son matrices triangulares inferiores invertibles, el producto $K_3K_2K_1$ es una matriz triangular invertible. Ponemos $E = K_3K_2K_1$. Entonces $E^{-1}$ es una matriz triangular inferior, y $R = EA$, $\overrightarrow{b}_3 = E\overrightarrow{b}$ de donde $A = E^{-1}R$, $\overrightarrow{b} = E^{-1}\overrightarrow{b}_3$. Consecuentemente,

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow E^{-1}R\overrightarrow{x} = E^{-1}\overrightarrow{b}_3 \Longleftrightarrow R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_3,$$

es decir que la solución $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4$ de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es la solución de $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_3$ y recíprocamente. Además, es sistema de ecuaciones $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_3$ es triangular superior que en forma explícita se escribe:

$$\begin{cases} x_1 & +5x_2 & -5x_3 & & = & -3 \\ & -8x_2 & +2x_3 & & = & 8 \\ & & -\frac{1}{4}x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ & & & 51x_4 & = & 51, \end{cases}$$

cuya solución es $\overrightarrow{x}^T = (2, -1, 0, 1)$.

**Conclusión:** Si en cada etapa del proceso de eliminación gaussiana, no existe intercambio de filas o columnas, y los elementos pivotes $a_{11}$, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $a_{44}^{(3)}$ son no nulos, la matriz $A$ se factora en la forma $LR$, donde $L = E^{-1}$ es triangular inferior, $R$ triangular superior. Además, el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es equivalente al triangular superior $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_3$.

Generalicemos las ideas expuestas en el ejemplo.

**Etapa 1**

Supongamos que $a_{11} \neq 0$. Ponemos $a_{11}^{(0)} = a_{11}$. Se definen

$$k_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, ..., n,$$

y sea $K_1$ la matriz siguiente:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Definimos $\widetilde{A}_1 = K_1\widetilde{A}$. Entonces

$$\widetilde{A}_1 = K_1\widetilde{A} = K_1\left[A \mid \overrightarrow{b}\right] = \left[K_1A \mid K_1\overrightarrow{b}\right] = \left[A_1 \mid \overrightarrow{b}_1\right],$$

esto es

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{21}a_{12} + a_{22} & \cdots & k_{21}a_{1n} + a_{2n} & k_{21}b_1 + b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{n1}a_{12} + a_{n1} & \cdots & k_{n1}a_{1n} + a_{nn} & k_{n1}b_1 + b_n \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Note el efecto de la construcción de la matriz $K_1$ en $\widetilde{A}_1 = K_1\widetilde{A}$ al obtener en esta última ceros bajo el elemento de la diagonal en la primera columna.

**Etapa 2**

Ponemos $\widetilde{A}_2 = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$ y supongamos que $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Se define

$$k_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad i = 3, ..., n,$$

y sea $K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. Definimos $\widetilde{A}_{12} = K_2 \widetilde{A}_1$. Entonces

$$\widetilde{A}_2 = K_2 \widetilde{A}_1 = K_2 \left[A_1 \mid \overrightarrow{b}_1\right] = \left[K_2 A_1 \mid K_2 \overrightarrow{b}_1\right] = \left[A_2 \mid \overrightarrow{b}_2\right],$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_2 \quad &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{21}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & k_{32}a_{23}^{(1)} + a_{33}^{(1)} & \cdots & k_{32}a_{2n}^{(1)} + a_{3n}^{(1)} & k_{32}b_2^{(1)} + b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & k_{n2}a_{23}^{(1)} + a_{n3}^{(1)} & \cdots & k_{n2}a_{2n}^{(1)} + a_{nn}^{(1)} & k_{n2}b_2^{(1)} + b_n^{(1)} \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Ponemos $\widetilde{A}_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$.

**Etapa j-ésima**

Supongamos $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0 \quad j = 1, ..., n-1$. Se define

$$k_{ij} = -\frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \quad i = j+1, ..., n, \qquad K_j = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & k_{j+1,j} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{n,j} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

y $\widetilde{A}_j = K_j \widetilde{A}_{j-1}$. Entonces

$$\widetilde{A}_j = K_j \widetilde{A}_{j-1} = K_j \left[A_{j-1} \mid \overrightarrow{b}_{j-1}\right] = \left[K_j A_{j-1} \mid K_j \overrightarrow{b}_{j-1}\right] = \left[A_j \mid \overrightarrow{b}_j\right],$$

donde $\widetilde{A}_j$ tiene la forma siguiente:

$$\widetilde{A}_j = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} & \cdots & a_{1j}^{(j)} & \cdots & \cdots \; a_{1n}^{(j)} & b_1^{(j)} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{jj}^{(j)} & a_{jj+1}^{(j)} & a_{jn}^{(j)} & b_j^{(j)} \\ \vdots & & & 0 & a_{j+1,j+1}^{(j)} & a_{j+1,n}^{(j)} & b_{j+1}^{(j)} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,j+1}^{(j)} & a_{n,n}^{(j)} & b_n^{(1)} \end{array}\right].$$

**Etapa n-1**

Para $j = n-1$, si $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$, se define $k_{n,n-1} = -\dfrac{a_{nn-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}$, $K_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & k_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$,

$$\widetilde{A}_{n-1} = K_{n-1}\widetilde{A}_{n-2} = \left[K_{n-1}A_{n-2} \mid K_{n-1}\overrightarrow{b}_{n-2}\right] = \left[A_{n-1} \mid \overrightarrow{b}_{n-1}\right],$$

donde

$$\widetilde{A}_{n-1} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right].$$

La matriz $A_{n-1}$ es triangular superior, lo notaremos con $R$.

Suponemos $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} R &= A_{n-1} = K_{n-1}A_{n-2} = \cdots = K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_1 A, \\ \overrightarrow{b}_{n-1} &= K_{n-1}\overrightarrow{b}_{n-2} = \cdots = K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_1\overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

Las matrices $K_1, ..., K_{n-1}$ son triangulares invertibles. Luego, el producto $K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_1$ es triangular inferior invertible que lo notamos $E$. Entonces, $E^{-1}$ es triangular inferior, y

$$R = EA, \qquad \overrightarrow{b}_{n-1} = E\overrightarrow{b},$$

de donde $A = E^{-1}R$, $\overrightarrow{b} = E^{-1}\overrightarrow{b}_{n-1}$. Notando $L = E^{-1}$, se tiene $A = LR$, $\overrightarrow{b} = L\overrightarrow{b}_{n-1}$.

Así, si todos los elementos pivotes $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$, $j = 1, ..., n-1$ con $a_{11}^{(0)} = a_{11}$, la matriz $A$ se factora en la forma $LR$, con $L$ una matriz triangular inferior invertible, $R$ matriz triangular superior invertible. Luego,

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow LR\overrightarrow{x} = L\overrightarrow{b}_{n-1} \Leftrightarrow R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1},$$

es decir que la solución $\overrightarrow{x}$ de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es solución de $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1}$ y recíprocamente.

El sistema de ecuaciones $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es triangular superior que en forma explícita se escribe:

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 + \cdots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

cuya solución se calcula mediante el algoritmo de resolución de sistemas de ecuaciones triangulares superiores.

### Algoritmo de la eliminación gaussiana sin pivoting

El procedimiento descrito precedentemente para transformar la matriz $A$ en una triangular superior $R$ y el vector $\overrightarrow{b}$ en $\overrightarrow{b}_{n-1}$ se recoge en el siguiente algoritmo denominado algoritmo de eliminación gaussiana sin pivoting para la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Algoritmo

Datos de Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Datos de Salida: Mensaje 1: "Error: matriz nula". Mensaje 2: "Pivote nulo". Solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. $S = 0$.

2. Para $i = 1, ..., n$

   Para $j = 1, ..., n$ Verificación de no nulidad de la matriz $A$.

   Si $|a_{ij}| \leq 0$,

   $S = S + j$

   Fin de bucle j.

   Fin de bucle i.

3. Si $S = n^2$, imprimir mensaje 1: "Error: matriz nula". Continuar en 9).

4. Para $i = 1, ..., n$ Matriz ampliada.

   $a_{i,n+1} = b_i$.

   Fin de bucle i.

5. Para $j = 1, ..., n-1$

   Si $a_{jj} \neq 0$ entonces Transformación en un sistema triangular superior.

   Para $i = j+1, ..., n$

   $k_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$

   Para $r = j+1, ..., n+1$

   $a_{ir} = k_{ij} a_{jr} + a_{ir}$

   Fin de bucle r.

   Fin de bucle i

   Caso contrario, continuar en 8).

   Fin de bucle j.

6. Resolver el sistema triangular superior $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1}$.

7. Escribir $\overrightarrow{x}$. Continuar en 9).

8. Escribir mensaje 2: "Pivote nulo".

9. Fin.

**Número de operaciones elementales.**

En la primera etapa se ejecutan las siguientes operaciones elementales:

$$\text{divisiones}: \ n-1, \quad \text{adiciones}: \ n \times (n-1), \quad \text{productos}: \ n \times (n-1).$$

En la segunda etapa se realizan las siguientes operaciones elementales:

$$\text{divisiones}: \ n-2, \quad \text{adiciones}: \ (n-2) \times (n,2), \quad \text{productos}: \ (n-2) \times (n-2).$$

En la j-ésima etapa, se tiene

$$\text{divisiones}: \ n-j, \quad \text{adiciones}: \ (n-j)(n-j+1), \quad \text{productos}: \ (n-j)(n-j+1).$$

En la última etapa se ejecutan las siguientes operaciones elementales:

$$\text{divisiones}: \ 1, \quad \text{adiciones}: \ 2, \quad \text{productos}: \ 2.$$

Total de operaciones elementales:

$$\begin{aligned}
\text{divisiones} &: \quad 1+2+...+n-1=\frac{(n-1)}{2}, \\
\text{adiciones} &: \quad 2+...+n\,(n-1)=\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,(n-j+1)\,, \\
\text{productos} &: \quad 2+...+n\,(n-1)=\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,(n-j+1)\,.
\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,(n-j+1) &= \sum_{j=1}^{n-1}\left[n^2+n-(2n+1)\,j+j^2\right] \\
&= \left(n^2+n\right)(n-1)-(2n+1)\,\frac{n\,(n-1)}{2}+\frac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(2n-1) \\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

La resolución del sistema de ecuaciones triangular superior involucra $n^2$ operaciones elementales. Consecuentemente, el número total de operaciones elementales que se requieren para resolver el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación gaussiana se denota con $Noper\,(n)$ dado por:

$$Noper\,(n)=\frac{n\,(n-1)}{2}+2\frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{3}+n^2=\frac{n}{6}\left(4n^2+9n-7\right).$$

Así, para $n=3$, $Noper\,(3)=28$, $Noper\,(4)=62$, $Noper\,(5)=115$.

### 6.6.2. Eliminación gaussiana con pivoting.

En el método de eliminación gaussiana sin pivoting descrito precedentemente, si el elemento $a_{jj}^{(j-1)}$ es nulo, el proceso se detiene $\left(j=1,...,n-1,\ \text{con}\ a_{11}^{(0)}=a_{11}\right)$. Una mejora al algoritmo es buscar en los elementos de la columna $a_{ij}^{(j-1)}$, $i=j+1,...,n$, aquel elemento no nulo y efectuar el intercambio de la fila i-ésima con la fila j-ésima, $i>j$.

En la práctica se muestra que este intercambio no basta pués no mejora la precisión de la solución. Para mejorar la precisión de la solución es preciso introducir la estrategia del pivoting parcial y total.

**Pivoting parcial**

Sean $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A\neq 0$, con $\overrightarrow{b}^T=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$; y consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$. Construimos la matriz ampliada $\widetilde{A}=\left[A\mid\overrightarrow{b}\right]$ y ponemos $\widetilde{A}_0=\widetilde{A}$.

**Etapa 1**

Sea $r$ el entero positivo tal que $1\leq r\leq n$ y $|a_{r1}|=\underset{i=1,...,n}{\mathrm{Max}}|a_{i1}|$.

Si $a_{r1}=0$ entonces $a_{i1}=0$, $i=1,...,n$, con loque la matriz $A$ es singular. El proceso de eliminación gaussiana concluye.

Si $|a_{r1}|>0$, intercambiamos las filas $i=1$ con la fila $i=r$ de la matriz $\widetilde{A}_0$. Este proceso se realiza mediante la operación elemental entre matrices que notamos

$$B_0=F_{1,r}\widetilde{A}_0=(b_{ij})\,,$$

donde $F_{1r}$ es la matriz obtenida de la matriz identidad al intercambiar la fila $i = 1$ con la fila $i = r$. A continuación definimos $k_{i1} = -\frac{b_{i1}}{b_{11}} \quad i = 2, ..., n$, la matriz $K_1$ siguiente:$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, y

$$\widetilde{A}_1 = K_1 B_0 = \left(a_{ij}^{(1)}\right).$$

**Etapa 2**

Sea $r$ el entero positivo tal que $2 \leq r \leq n$ y $\left|a_{r2}^{(1)}\right| = \underset{i=2,...,n}{\text{Max}} \left|a_{i2}^{(1)}\right|$.

Si $a_{r2}^{(1)} = 0$ entonces $a_{i2}^{(1)} = 0 \quad i = 2, ..., n$, con lo que la matriz $A$ es singular. El proceso de eliminación gaussiana concluye.

Si $\left|a_{r2}^{(1)}\right| > 0$, intercambiamos las filas $1 = 2$ con la fila $i = r$ de la matriz $\widetilde{A}_1$. Para el efecto, definimos

$$B_1 = F_{2,r} \widetilde{A}_1 = \left(b_{ij}^{(1)}\right),$$

donde $F_{2,1}$ es la matriz obtenida de la matriz identidad al intercambiar la fila 2 con la fila $r$, y a continuación definimos $k_{i2} = -\frac{b_{i2}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} \quad i = 3, ..., n, \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, y sea

$$\widetilde{A}_2 = K_2 B_1 = \left(a_{ij}^{(2)}\right).$$

Este proceso continua hasta la etapa $j = n - 1$.

**Etapa n-1**

Sea $r$ es entero positivo tal que $n - 1 \leq r \leq n$ y $\left|a_{r,n-1}^{(n-2)}\right| = \underset{i=n-1,n}{\text{Max}} \left|a_{i,n-1}^{(n-2)}\right|$.

Si $a_{r,n-1}^{(n-2)} = 0$, la matriz $A$ es singular. El procesos de eliminación gaussiana concluye.

Si $\left|a_{r,n-1}^{(n-2)}\right| > 0$, intercambiamos la fila $i = n - 1$ con $r$, definimos $B_{n-2} = F_{n-1,n} \widetilde{A}_{n-2} = \left(b_{ij}^{(n-1)}\right)$, $k_{n,n-1} = -\frac{b_{n,n-1}^{(n-2)}}{b_{n-1,n-1}}, \quad K_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & k_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$, y sea

$$\widetilde{A}_{n-1} = K_{n-1} B_{n-2} = \left(a_{ij}^{(n-1)}\right).$$

Resulta

$$\widetilde{A}_{n-1} = K_{n-1} \widetilde{B}_{n-2} = K_{n-2} F_{n-1,n} \widetilde{A}_{n-2} = \cdots = K_{n-2} F_{n-1,n} \cdots K_1 F_{1,r} \widetilde{A}.$$

Cada matriz $K_i \quad i = 1, ..., n - 1$ y cada $F_{i,r}, \ \ i = 1, ..., n - 1, \ \ r \in \{i, ..., n\}$, son invertibles.

Ponemos $E = K_{n-1} F_{n-1,n} ... K_1 F_{1,r}$. Entonces

$$\widetilde{A}_{n-1} = E\widetilde{A} = E\left[A \mid \overrightarrow{b}\right] = \left[EA \mid E\overrightarrow{b}\right]$$

y $\widetilde{A}_{n-1} = \left[ A_{n-1} \mid \overrightarrow{b} n-1 \right]$, donde $A_{n-1}$ es una matriz triangular superior que se le nota $R$.

Luego,

$$\begin{cases} A_{n-1} = EA \\ \overrightarrow{b}_{n-1} = E\overrightarrow{b}. \end{cases}$$

Así, $A = E^{-1}R$. Note que $E^{-1}$ es una matriz triangular inferior.

Si $a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0$, la matriz $R = A_{n-1}$ es invertible y en consecuencia $A$ es invertible. Adicionalmente, $A$ se factora en la forma $LR$, donde $L = E^{-1}$, y,

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow A_{n-1}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1}.$$

El sistema de ecuaciones lineales $A_{n-1}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1}$ es triangular superior, cuyo método de resolución ha sido descrito anteriormente.

Para la elaboración del algoritmo de eliminación gaussiana con pivoting parcial debemos tener en cuenta, en cada etapa, el proceso de intercambio de la fila $i$ con la fila $r$ de la matria $\widetilde{A}_{j-1}, \ \ j = 1, ..., n-1$.

Antes de proponer el algoritmo, exhibimos un ejemplo que muestre el proceso descrito en el método de eliminación gaussiana con pivoting parcial.

**Ejemplo**

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, y consideremos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

La solución de este ejemplo fue determinada con el método de eliminación gaussiana sin pivoting. La matriz ampliada $\widetilde{A}$ está dada por $\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right]$.

**Etapa 1**

Selección del pivoting: $3 = |a_{41}| = \underset{i=1,2,3,4}{\text{Max}} |a_{i,1}|, \quad r = 4$. Intercambio de las filas 1 con la 4 de $\widetilde{A}$. Se tiene $B_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$. Se definen las matrices siguientes: $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\widetilde{A}_1 = K_1B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right].$$

**Etapa 2**

Selección del pivoting: $5 = \left| a_{32}^{(1)} \right| = \underset{i=3,4}{\text{Max}} \left| a_{i,2}^{(1)} \right|, \quad r = 5$. Intercambio de las filas 2 con 3 de $\widetilde{A}_1$. Se tiene $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right]$. Se definen $K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\widetilde{A}_2 = K_2 B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{28}{15} & -\frac{113}{15} & -\frac{113}{15} \end{array}\right].$$

**Etapa 3**

Selección del pivoting. $\frac{28}{5} = \left|a_{43}^{(2)}\right| = \underset{i=4}{\text{Max}}\left|a_{i3}^{(2)}\right|, \quad r = 4$. Intercambiamos las filas 3 y 4 de $\widetilde{A}_2$. Tenemos $B_3 = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{28}{15} & -\frac{113}{15} & -\frac{113}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right]$. Se definen las matrices $K_3$ y $\widetilde{A}_3$ como sigue: $K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{14} & 1 \end{bmatrix}$, y

$$\widetilde{A}_3 = K_3 B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{14} & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{28}{15} & -\frac{113}{15} & -\frac{113}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{28}{15} & -\frac{113}{15} & -\frac{113}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 51 \end{array}\right].$$

De la matriz ampliada $\widetilde{A}_3$ se establece el sistema de ecuaciones lineales triangular superior siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +7x_4 & = & 7 \\ & 5x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & +\frac{26}{3}x_4 & = & \frac{11}{3} \\ & & -\frac{28}{15}x_3 & -\frac{113}{15}x_4 & = & -\frac{113}{15} \\ & & & 51x_4 & = & 51. \end{array}\right.$$

cuya solución es $\overrightarrow{x}^T = (2, -1, 0, 1)$.

**Algoritmo de eliminación gaussiana con pivoting parcial**

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij})\, M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Datos de salida: Mensaje 1: "Error: matriz nula". Mensaje 2: "Matriz singular". Solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)\, \mathbb{R}^n$.

1. $S = 0$.

2. Para $i = 1, ..., n$ — Verificación de no nulidad de la matriz $A$.

    Para $j = 1, ..., n$

    Si $|a_{ij}| \leq 0$,

    $S = S + j$

    Fin de bucle j.

  Fin de bucle i.

3. Si $S = n^2$. Continuar en 8).

4. Para $i = 1, ..., n$ — Matriz ampliada.

    $a_{i,n+1} = b_i$

Fin de bucle i.

5. Para $j = 1, ..., n-1$

$r = j$

Para $i = j+1, ..., n$ Selección del pivoting parcial en la etapa $j$, y de la fila $r$.

Si $|a_{ij}| > |a_{ij}|$,

$r = i$

Fin de bucle i.

Para $p = j, ..., n+1$ Intercambio de la fila $j$ con la fila $r$.

$t = a_{jp}$

$a_{jp} = a_{rp}$

$a_{rp} = t$

Fin de bucle p.

Si $|a_{jj}| \leq 0$, Continuar en 9).

Si $|a_{jj}| > 0$, entonces

Para $i = j+1, ..., n$ Transformación del sistema en un triangular superior

$k_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Para $p = j+1, ..., n+1$

$a_{ip} = k_{ij} a_{jp} + a_{ir}$

Fin de bucle p

Fin de bucle i.

Fin de bucle j.

6. Resolver el sistema triangular superior $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1}$.

7. Escribir $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$. Continuar en 10).

8. imprimir mensaje 1. Continuar en 10).

9. Imprimir mensaje 2.

10. Fin.

**Pivoting total.**

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$ y $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n)\,\mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

**Etapa 1**

Sean $r, s \in \mathbb{Z}^+$ tales que $1 \leq r \leq n,\ \ 1 \leq s \leq n,\ \ |a_{rs}| = \underset{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,n}}{\text{Max}} |a_{ij}|$.

Si $a_{rs} = 0$, la matriz $A$ es nula y el proceso concluye. Supongamos que $a_{rs} \neq 0$. Intercambiamos las filas 1 con $r$ y luego las columnas 1 con $s$. Este proceso se realiza mediante la operación entre matrices que notamos

$$B_0 = F_{1,r} A C_{1,s} = (b_{ij}),$$

donde $F_{1,r}$ es la matriz obtenida de la matriz identidad al intercambiar la fila 1 con la fila $r$, y $C_{1,s}$ es la matriz que se obtiene de la matriz identidad al intercambiar la columna 1 con la columna $s$.

Nótese que el intercambio de columnas provoca un intercambio de las incógnitas $x_1$ con $x_s$.

A continuación se procede como en el caso del pivoting parcial.

Se definen $k_{i1} = -\frac{b_{i1}}{b_{11}}$ $\quad i = 2, ..., n$ ($b_{11}$ es el elemento $a_{rs}$), $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, y

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 B_0 = \left(a_{ij}^{(1)}\right), \\ \overrightarrow{b}_1 &= K_1 F_{1,r} \overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

Debe observarse que no se está utilizando la matriz ampliada $\widetilde{A}$.

**Etapa 2**

Sean $r, s \in \mathbb{Z}^+$ tales que $2 \leq r \leq n,\ \ 2 \leq s \leq n,\quad \left|a_{rs}^{(1)}\right| = \underset{\substack{i=2,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}}{\text{Max}} \left|a_{ij}^{(1)}\right|.$

Si $a_{rs}^{(1)} = 0$, la matriz $A$ es singular. Concluir el proceso.

Si $a_{rs}^{(1)} \neq 0$, intercambiamos la fila 2 con la fila $r$, y la columna 2 con la columna $s$ de $A_1$, o sea

$$B_1 = F_{2,1} A_1 C_{2,s} = \left(b_{ij}^{(1)}\right),$$

donde $F_{2,r}$ es la matriz obtenida de la matriz identidad al intercambiar la fila 2 con la fila $r$; y, $C_{2,s}$ es la matriz obtenida también de la identidad al intercambiar la columna 2 con la $s$. Note que este último intercambio provoca el intercambio de las incógnitas $x_2$ con $x_s$.

Se definen $A_2 = K_2 B_1$, y, $\overrightarrow{b}_2 = K_2 F_{2r} \overrightarrow{b}_1$,donde

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad k_{i2} = -\frac{b_{ij}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} \quad i = 3, ..., n.$$

Continuando con este proceso hasta la etapa $n-1$, se obtiene

$$B_{n-2} = F_{n-1,n} A_{n-2} C_{n-1,n} = \left(b_{ij}^{(n-2)}\right),$$

con $F_{n-1,n},\ \ C_{n-1,n}$ matrices con similares significados que en las etapas 1 y 2.

Se definen $A_{n-1} = K_{n-1} B_{n-2}$, y , $\overrightarrow{b}_{n-1} = K_{n-1} F_{n-1,n} \overrightarrow{b}_{n-2}$, donde

$$K_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & -\frac{b_{n,n-1}}{b_{n-1,n-1}^{(n-2)}} & 1 \end{bmatrix},$$

siempre que $b_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$.

La matriz $A_{n-1}$ es triangular superior. Se tiene

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= K_{n-1}B_{n-1} = K_{n-1}F_{n-1,n}A_{n-2}C_{n-1,n} \\ &\vdots \\ &= K_{n-1}F_{n-1,n}\cdots K_2B_1C_{2,s}\cdots C_{n-1,n} \\ &= K_{n-1}F_{n-1,n}\cdots K_1F_{1,r}AC_{1,s}\cdots C_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Ponemos

$$\begin{aligned} E &= K_{n-1}F_{n-1,n}\cdots K_1F_{1,r}, \\ C &= C_{1,s}\cdots C_{n-1,n}, \end{aligned}$$

entonces

$$A_{n-1} = EAC.$$

Las matrices $E$ y $C$ son invertibles. Resulta que

$$AC = E^{-1}A_{n-1}.$$

Poniendo $L = E^{-1}$, $R = A_{n-1}$, se tiene la siguiente factorización $AC = LR$.

Por otro lado,

$$\overrightarrow{b}_{n-1} = K_{n-1}F_{n-1,n}\overrightarrow{b}_{n-2} = \cdots = K_{n-1}F_{n-1,n}\cdots K_1F_{1,r}\overrightarrow{b} = E\overrightarrow{b}.$$

Además,

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow E^{-1}RC^{-1}\overrightarrow{x} = E^{-1}\overrightarrow{b}_{n-1} \Longleftrightarrow RC^{-1}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_{n-1} \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = CR^{-1}\overrightarrow{b}_{n-1}.$$

Sea $\overrightarrow{y} = R^{-1}\overrightarrow{b}_{n-1}$, entonces $R\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}_{n-1}$. En el método de eliminación gaussiana con pivoting total, se resuelve primeramente el sistema de ecuaciones lineales triangular superior $R\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}_{n-1}$ y luego $\overrightarrow{x} = C\overrightarrow{y}$, pués se deben recuperar las variable originales.

**Ejemplo**

Consideremos nuevamente el ejemplo propuesto en el método de eliminación gaussiana con pivoting parcial.

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

**Etapa 1**

Selección del pivoting total. Observemos que $7 = |a_{44}| = \underset{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,4}}{\text{Max}} |a_{ij}|$. Tenemos $r = 4$, $s = 4$. Intercambiamos la fila 1 con la 4 y luego la columna 1 con la 4 en la matriz $A$. Resulta

$$B_0 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denotamos con $\overrightarrow{d}$ al vector que se obtiene de $\overrightarrow{b}$ al intercambiar la fila 1 con la 4, esto es, $\overrightarrow{d}^T = (7, 2, -1, -3)$.

Se definen $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y

$$A_1 = K_1 B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{15}{7} & -\frac{26}{7} \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{b}_1 = K_1 \overrightarrow{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

**Etapa 2**

Seleccionamos el pivoting. Tenemos

$$S = \left| a_{4,2}^{(1)} \right| = \underset{\substack{i=2,3,4 \\ j=2,3,4}}{\text{Max}} \left| a_{ij}^{(1)} \right|, \quad r = 4, \quad s = 2.$$

Intercambiamos la fila 2 con la 4 de $A_1$. Como $s = 2$ y $j = 2$, no se requiere de intercambio de columnas, en este caso se tiene la matriz identidad.

Igualmente, intercambiamos la fila 2 con la 4 de $\overrightarrow{b}_1$. Tenemos

$$B_1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{15}{7} & -\frac{26}{7} \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C_{2,2} = I.$$

Sean $K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{35} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A = K_2 B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{35} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{15}{7} & -\frac{26}{7} \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{92}{35} & -\frac{113}{35} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{b}_2 = K_2 \overrightarrow{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{35} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -\frac{226}{35} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix}.$$

**Etapa 3**

Seleccionamos el pivoting. Tenemos

$$\frac{113}{35} = \left| a_{3,4}^{(2)} \right| = \underset{\substack{i=3,4 \\ j=3,4}}{\text{Max}} \left| a_{ij}^{(2)} \right|, \quad r = 3, \quad s = 4.$$

Intercambiamos la columna 3 con la 4.

$$B_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{113}{35} & -\frac{92}{35} \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d}_2 = \overrightarrow{b}_2, \quad C_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definimos $K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{113} & 1 \end{bmatrix}$,

$$A_3 = K_3 B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{113} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{113}{35} & -\frac{92}{35} \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{113}{35} & -\frac{92}{35} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{102}{113} \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{b}_3 = K_3 \overrightarrow{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{113} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -\frac{226}{35} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -\frac{226}{35} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones triangular superior es: $\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 7y_1 & +6y_2 & +3y_3 & +2y_4 & = & 7 \\ & 5y_2 & +y_3 & -y_4 & = & -3 \\ & & -\frac{113}{35}y_3 & -\frac{92}{35}y_4 & = & -\frac{226}{35} \\ & & & -\frac{102}{113}y_4 & = & 0, \end{array} \right.$ cuya solución es $\overrightarrow{y}^T = (1, -1, 2, 0)$.

Como $C = C_{1,4} I C_{3,4}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= C\overrightarrow{y} = C_{1,4} I C_{3,4} \overrightarrow{y} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se define el vector $V = (S_1, S_2, ..., S_{n-1})$, donde $S_j \in \{1, ..., n\}$, $j = 1, ..., n-1$. El componente $S_1$ significa que, en la primera etapa, se intercambian la columna 1 con la $S_1$; el componente $S_2$ significa que, en la segunda etapa, se intercambian las columnas 2 con la $S_2$, así sucesivamente. Si en la etapa $j$, $S_j = j$ no hay intercambio.

En el ejemplo tenemos $V = (4, 2, 4)$. Se han realizado los siguientes intercambios:

| | | |
|---|---|---|
| primera etapa | : | la columna 1 con la 4. |
| segunda etapa | : | permanece invariante: $j = 2$, $S_2 = 2$. |
| tercera etapa | : | la columna 3 con la 4. |

Para recuperar las variables originales hacemos referencia a los componentes de $V$ y de la solución $Y$. Ponemos $\overrightarrow{y}_3 = \overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como el tercer componente de $V$ es 4, se realizó el intercambio de la columna 3 con la 4, en $\overrightarrow{y}$ realizamos este intercambio, tenemos $\overrightarrow{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo componente de $V$ es 2, no hay intercambio, ponemos $\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{y}_2$. El primer componente de $V$ es 4, se realizó el intercambio de la columna 1 con la 4, en $\overrightarrow{y}_1$ se realiza este intercambio, tenemos $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. la solución.

**Ejercicio**

Elaborar un algoritmo para la resolución numérica de un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación gaussiana con pivoting total.

**Observación**

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., B_n) \in \mathbb{R}^n$. Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Supongamos que en la k-ésima etapa de la eliminación gaussiana con pivoting total (parcial), se tiene

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \cdots & a_{1,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,k}^{(k)} & a_{nk+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{b}_k = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Para realizar la nueva etapa, debemos seleccionar el pivoting:

$$\left|a_{rs}^{(k)}\right| = \underset{\substack{i=k,\dots,n \\ j=k,\dots,n}}{\text{Max}} \left|a_{ij}^{(k)}\right|, \text{ con } \quad k \leq r \leq n, \ \ k \leq s \leq n.$$

Si $a_{rs}^{(k)} = 0$, entonces $a_{ij}^{(k)} = 0$, $i = k, ..., n$, $\ j = k, ..., n$, con lo cual la matriz $A$ es singular; y, el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones o ninguna solución.

i) El sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ no tiene solución si en la k-ésima etapa $a_{rs}^{(k)} = 0 = \underset{\substack{i=k,\dots,n \\ j=k,\dots,n}}{\text{Max}} \left|a_{ij}^{(k)}\right|$ y si algún $b_i^{(k)} \neq 0$ para algún $i = k.,,,n$.

ii) El sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene infinitas soluciones si en la k-ésima etapa $a_{rs}^{(k)} = 0 = \underset{\substack{i=k,\dots,n \\ j=k,\dots,n}}{\text{Max}} \left|a_{ij}^{(k)}\right|$ y $b_i^{(k)} = 0$ par todo $i = k, ..., n$.

En este análisis no se ha considerado los errores de redondeo.

Se deja como ejercicio la elaboración de un algoritmo para la resolución numérica de un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación gaussiana con pivoting parcial o total, y que en el caso de ser la matriz $A$ singular, permita identificar si el sistema tiene infinitas soluciones o ninguna solución.

### 6.6.3. Cálculo de la matriz inversa $A^{-1}$ y del determinante de la matriz $A$.

**Cálculo de la matriz inversa.**

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$. El método de eliminación gaussiana con pivoting parcial o total puede ser utilizado para calcular la matriz inversa $A^{-1}$ de $A$, siempre que $A^{-1}$ exista.

Sean $\left\{\overrightarrow{e}_1^T, ..., \overrightarrow{e}_n^T\right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $B_j$ la j-ésima columna de $A^{-1}$. La matriz identidad se nota $I$. Puesto que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, entonces $AA^{-1}\overrightarrow{e}_j = I\overrightarrow{e}_j = \overrightarrow{e}_j$, y $A^{-1}\overrightarrow{e}_j = B_j$, $\quad j = 1, ..., n$, se sigue que $AB_j = \overrightarrow{e}_j$, $\quad j = 1, ..., n$, es decir que $B_j$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_j$, $\quad j = 1, ..., n$.

**Ejemplo**

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallemos $A^{-1}$. Para el efecto, apliquemos el método de eliminación gaussiana al sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_j$, $\quad j = 1, 2, 3$, con $\overrightarrow{e}_1^T = (1, 0, 0)$, $\ \overrightarrow{e}_2^T = (0, 1, 0)$, $\ \overrightarrow{e}_3^T = (0, 0, 1)$.

Cálculo de la primera columna de $A^{-1}$ : se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente, vía eliminación gaussiana, al siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

cuya solución es $B_1^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Cálculo de la segunda columna de $A^{-1}$ : se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que mediante el método de eliminación gaussiana, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

cuya solución es $B_2^T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Cálculo de la tercera columna de $A^{-1}$. Esta es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y procediendo en forma similar a los precedentes, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuya solución es $B_3^T = \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Luego

$$A^{-1} = [B_1, B_2, B_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Observe que la parte común de los sistemas triangulares superiores que se obtienen para el cálculo de las respectivas columnas $B_1, B_2, B_3$.

**Cálculo de** $\det(A)$.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$. El método de eliminación gaussiana con pivoting parcial o total permite calcular el determinante de la matriz $A$. Si aplicamos el método de eliminación gaussiana con pivoting parcial a la matariz $A$, obtenemos $\begin{cases} B_j = F_{j,S_j} A_{j-1}, & j = 1, ..., n, \\ A_j = K_j B_j, \end{cases}$ donde $A_0 = A$ y $F_j, S_j$ es la matriz obtenida de la identidad al intercambiar la fila $j$ con la $s_j \in \{j, ..., n\}$. Si $s_j = j$, no existe intercambio de filas, en tal caso $F_{j,s_j} = I$ matriz identidad.

Denotamos con $m$ el número de intercambios de filas, es decir, $m$ es el número de matrices $F_{j,s_j} \neq I$.

Por otro lado, $K_j$ es la matriz definida como $K_j = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & k_{j+1,j} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{n,j} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ con $K_{i,j} = -\frac{b_{ij}^{(j)}}{b_{jj}^{(j)}}$, $b_{jj}^{(j)} \neq 0, \quad i = j+1, ..., n.$

Se tiene que $A_{n-1} = \left(a_{ij}^{(n-1)}\right)$ es triangular superior. Luego $\det(A_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(n-1)}$, $\det(K_j) = 1, \quad j = 1, ..., n-1, \ \det\left(F_{j,S_j}\right) = \begin{cases} 1, & si \quad F_{j,S_j} = I, \\ -1, & si \quad F_{j,S_j} \neq I. \end{cases}$ Como

$$A_{n-1} = K_{n-1} \times F_{n-1,S_{n-1}} \times ... \times K_1 F_{1,S_1} A,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \det(A_{n-1}) &= \det(K_{n-1}) \times \det\left(F_{n-1,S_{n-1}}\right) \times ... \times \det(K_1) \times \det(F_{1,S_1}) \det(A) \\ &= \det\left(F_{n-1,S_{n-1}}\right) \times ... \times \det(F_{1,S_1}) \det(A) \\ &= (-1)^m \det(A), \end{aligned}$$

de donde

$$\det(A) = (-1)^m \det(A_{n-1}) = (-1)^m \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(n-1)}.$$

Si utilizamos el método de eliminación gaussiana con pivoting total, se tiene

$$A_{n-1} = K_{n-1} F_{n-1,n} ... K_1 F_{1,r} A C_{1,S_1} ... C_{n-1,n},$$

donde $A_{n-1} = \left(a_{ij}^{(n-1)}\right)$ es una matriz triangular superior, $K_i$ y $F_{j,s_j}$ son matrices del tipo descrito en el pivoting parcial y $C_{j,S_j} = I$, es decir que no existe intercambio de columnas.

Denotamos con $m_1$ el número de intercambio de filas, esto es, el número de matrices $F_{j,S_j} \neq I$; y $m_2$ el número de intercambios de columnas, es decir que $m_2$ es el número de matrices $C_{j,S_j} \neq I$. Entonces

$$\det(A) = (-1)^{m_1+m_2} \prod_{j=1}^{n} a_{jj}^{(n-1)}.$$

## 6.7. Método de Choleski.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz simétrica, definida positiva, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Se considera el problema siguiente:

$$\text{hallar } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ solución de } A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Por ser la matriz $A$ simétrica, definida positiva, $A$ es no singular y en consecuencia (1) admite una única solución $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte, existe una matriz $L = (l_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ triangular inferior tal que $A = LL^T$.

El sistema de ecuaciones (1) es equivalente a los siguientes: $\begin{cases} L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}, \\ L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}. \end{cases}$

Primeramente se resuelve el sistema $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$. Calculado el vector $\overrightarrow{y}$, se resuelve a continuación el sistema de ecuaciones $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$, que permite calcular $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ solución de $(1)$.

Describamos el algoritmo de factorización de la matriz $A$ en la forma $LL^T$. Como $A = LL^T = (a_{ij})$, se sigue de la definición de producto de dos matrices que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{kj}^t, \quad i.j = 1, ..., n,$$

donde $L^T = \left(l_{ij}^t\right)$ y $l_{ij}^t = l_{ji}, \quad i, j = 1, ..., n.$

La igualdad (4) así como la definición de la matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$ serán utilizados sucesivamente par construir cada columna de la matriz $L$.

Primera columna**:** $j = 1$. Se tiene

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{k1}^t = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{1k} = l_{i1} l_{11}, \quad i = 1, ..., n,$$

ya que $l_{1k} = 0$ para $k = 2, ..., n$. Así,

$$a_{i1} = l_{i1} l_{11}, \quad i = 1, ..., n.$$

Para $i = 1$, se tiene $a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ ($l_{11} = -\sqrt{a_{11}}$ no es posible porque $A$ es simétrica, definida positiva).

Para $i = 2, ..., n$, se tiene$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$

Segunda columna: $j = 2$. Tenemos

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{k2}^t = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{2k} = l_{i1} l_{21} + l_{i2} l_{22}, \quad i = 2, ..., n,$$

pués $l_{2k} = 0$ para $k = 3, ..., n$.

Los elementos $l_{i1}, \ \ i = 1, ..., n$ son calculados en la etapa precedente. Debemos calcular $l_{i2}, \ \ i = 2, ..., n$.

Para $i = 2$, se tiene $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$ y para $i = 3, ..., n$, se obtiene $l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} l_{21}}{l_{22}}$.

j-ésima columna: $1 < j \leq n$.

Supongamos conocidas las $j - 1$ columnas de $L$. La j-ésima columna de $L$ se determina como sigue:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{kj}^t = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}, \quad i = j, ..., n.$$

Note que $l_{ij+1} = 0, ..., \quad l_{in} = 0$.

Para $i = j$,

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk} l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 + l_{jj}^2$$

de donde

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \tag{9}$$

y para $i = j + 1, ..., n$, se tiene

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} + l_{ij} l_{jj}$$

con lo cual

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}} \tag{10}$$

Note que $a_{jj} > \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$, luego $l_{jj} > 0$. Además $l_{jj} \leq \sqrt{a_{jj}}$ para $j = 1, ..., n$.

Hacemos notar que en la práctica, dada una matriz simétrica $A$, el algoritmo de Choleski permite identificar si $A$ es definida positiva o no por lo que en cada etapa del algoritmo de Choleski se verifica si

$$a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 > 0,$$

y en consecuencia $l_{jj} > 0, \quad j = 1, ..., n.$

En el procedimiento de factorización de $A$ en la forma $LL^T$ descrito, no se consideran los errores de redondeo.

Por otro lado, en el algoritmo se asume que la matriz $A$ es simétrica. En realidad, la primera tarea es verificar que la matriz $A$ sea simétrica.

Con todos estos elementos se establece el siguiente algoritmo de factorización de Choleski.

**Algoritmo de factorizacion $LL^T$**

<u>Algoritmo</u>

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+, \quad A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$,

Datos de salida: Mensaje 1: "La matriz no es simétrica". Mensaje 2: "La matriz $A$ no es definida positiva". Matriz $L = (l_{ij})$

1. Verificar que la matriz $A$ es simétrica.
2. Si $a_{11} > 0$, entonces

   $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$,

   caso contrario, continuar en 6).
3. Para $i = 2, ..., n$

   $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}}$

   Fin de bucle i
4. Para $j = 2, ..., n$

   $S = 0$

   Para $k = 1, ..., j-1$

   $S = S + l_{jk} \times l_{jk}$

   Si $a_{jj} - S > 0$ entonces

   $l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - S}$,

   Caso contrario, continuar en 6).

   Fin de bucle k.

   Para $i = j+1, ..., n$

   $S = 0$

   Para $k = 1, ..., j-1$

   $S = S + l_{ik} \times l_{jk}$

$$l_{ij} = \frac{(a_{ij} - S)}{l_{jj}}$$

Fin de bucle k

Fin de bucle i.

Fin de bucle j.

5. Escribir $L = (l_{ij})$. Continuar en 7).
6. Escribir mensaje 2: "La matriz no es definida positiva".
7. Fin.

Observación**:** Para $j = n$, se tiene

$$a_{in} = \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} l_{kn}^t + l_{in} l_{kn}^t = \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} l_{kk} + l_{in} l_{nn},$$

y para $i = n$,

$$a_{nn} = \sum_{k=1}^{n-1} l_{kk}^2 + l_{nn}^2 \Rightarrow l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}.$$

Para $j = n$, el bucle $i = n+1, ..., n$ no se realiza.

**Ejercicio**

Elaborar un algoritmo para verificar si una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es no simétrica. Si $A \neq A^T$, imprimir mensaje "La matriz $A$ no es simétrica". Concluir.

Para la resolución numérica de un sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ mediante el método de Choleski, se propone el siguiente algoritmo en el que se supone se realiza la factorización $LL^T$ descrito en el algoritmo precedente.

**Algoritmo del método de Choleski**

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Datos de salida: Mensaje: "$A$ no es simétrica, definida positiva". Solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$.

1. Aplicar el algoritmo de la factorización $LL^T$.

   Si $A$ no es simétrica, definida positiva, continuar en 5).
2. Resolver el sistema de ecuaciones $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$.
3. Resolver el sistema de ecuaciones $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.
4. Escribir la solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$. Continuar en 6).
5. Escribir mensaje: "$A$ no es simétrica, definida positiva".
6. Fin.

**Ejemplo**

Hallar la solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 14 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Apliquemos el método de Choleski. Observamos primeramente que la matriz $A$ es simétrica, esto es $A = A^T$. Pasemos al algoritmo de factorización de Choleski.

Etapa 1 $(j = 1)$. Tenemos los siguientes resultados

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } i &= 2,3,4: \;\; l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1, \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2, \\
l_{41} &= \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{3}{1} = 3.
\end{aligned}$$

Etapa 2 $(j = 2)$

$$\begin{aligned}
l_{22}\sqrt{a_{22} - l_{21}^2} &= \sqrt{2-1} = 1, \\
\text{Para } \; i &= 3,4: \;\; l_{i,2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}l_{21}}{l_{22}}, \\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{4 - 2 \times 1}{1} = 2, \\
l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{1 - 3 \times 1}{1} = -2.
\end{aligned}$$

Etapa 3 $(j = 3)$

$$\begin{aligned}
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{9-4-4} = 1, \\
\text{Para } i &= 4: \quad l_{i3} = \frac{a_{i3} - l_{i1}l_{31} - l_{i2}l_{32}}{l_{33}}, \\
l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41}l_{31} - l_{42}l_{32}}{l_{33}} = \frac{2 - 3 \times 2 - (-2) \times 2}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Etapa 4 $(j = 4)$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{14 - 9 - 4 - 0} = 1.$$

En consecuencia $L$ y $L^T$ son las matrices $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad L^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se verifica inmediatamente que $A = LL^T$.

Pasamos a la resolución de los sistemas de ecuaciones $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ y $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

El sistema de ecuaciones $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ es el siguiente: $\begin{cases} y_1 & & & & = 3 \\ y_1 & +y_2 & & & = 2 \\ 2y_1 & +2y_2 & +y_3 & & = 3 \\ 3y_1 & -2y_2 & & +y_4 & = 11, \end{cases}$ cuya solución es $\overrightarrow{y}^T = (3, -1, -1, 0)$.

El sistema de ecuaciones $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ es el siguiente: $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 3 \\ & x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & & = & -1 \\ & & & x_4 & = & 0, \end{cases}$ cuya solución es $\overrightarrow{x}^T = (4, 1, -1, 0)$.

**Número de operaciones elementales.**

Asumimos que la raíz cuadrada de un número real no negativo es una operación elemental. Con esta suposición, determinemos el número de operaciones elementales (adiciones, productos, divisiones, raíces cuadradas) necesarias para la construcción de la matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$. Tenemos

$j = 1$,

$$\begin{array}{rc}
\text{raíz cuadrada:} & 1, \\
\text{divisiones:} & n-1, \\
\text{productos:} & 0, \\
\text{adiciones:} & 0,
\end{array}$$

$j = 2$,

$$\begin{aligned}
\text{raíz cuadrada} &: \quad 1, \\
\text{divisiones} &: \quad n-2, \\
\text{productos} &: \quad 1+n-2 = n-1, \\
\text{adiciones} &: \quad 1+n-2 = n-1,
\end{aligned}$$

$j = n-1$,

$$\begin{aligned}
\text{raíz cuadrada} &: \quad 1, \\
\text{divisiones} &: \quad 1, \\
\text{productos} &: \quad n-2+n-2 = 2\left(n-2\right), \\
\text{adiciones} &: \quad n-2+n-2 = 2\left(n-2\right),
\end{aligned}$$

$j = n$,

$$\begin{aligned}
\text{raíz cuadrada} &: \quad 1, \\
\text{productos} &: \quad n-1, \\
\text{adiciones} &: \quad n-1.
\end{aligned}$$

Luego, en todas las etapas se realizan las siguientes operaciones elementales:

$$\begin{aligned}
\text{raíces cuadradas} &: \quad n \\
\text{divisiones} &: \quad n-1+n-2+...+1 = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \frac{n\left(n-1\right)}{2}, \\
\text{productos} &: \quad 0+n-1+...+2\left(n-2\right)+m-1 = \sum_{j=1}^{n}\left(n-j+1\right)\left(j-1\right) = \frac{n\left(n^2-1\right)}{6} \\
\text{adiciones} &: \quad 0+n-1+...+2\left(n-2\right)+n-1 = \sum_{j=1}^{n}\left(n-j+1\right)\left(j-1\right) = \frac{n\left(n^2-1\right)}{6}
\end{aligned}$$

Total de operaciones elementales requeridas para la factorización de la matriz $A$:

$$N = n + \frac{n\left(n^2-1\right)}{6} + \frac{n\left(n^2-1\right)}{6} + \frac{n\left(n-1\right)}{2} = \frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1\right).$$

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ y $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ se requieren de $2n^2$ operaciones elementales. Entonces

$$Noper\left(n\right) = 2n^2 + \frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1\right) = \frac{n}{6}\left(2n^2+15n+1\right).$$

Así, para $n = 4$, $\quad Noper\left(4\right) = 62$, para $n = 5$, $\quad Noper\left(5\right) = 105$. Para $n \geq 5$, el número de operacione elementales requerido para resolver un sistema de ecuaciones lineales con el método de Choleski es inferior al utilizado en el método de eliminación gaussiana $\left(Noper\left(n\right) = \frac{n}{6}\left(4n^2+9n-7\right)\right)$.

**Cálculo del determinante**

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es una matriz simétrica, definida positiva, existe una matriz $L = (l_{ij})$ triangular inferior tal que $A = LL^T$. Entonces, el determinante de $L$ denotado $\det(L)$ se calcula como el producto de los elementos de la diagonal, esto es,

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}.$$

Por otro lado,

$$\det(A) = \det\left(LL^T\right) = \det(L)\det\left(L^T\right) = [\det(L)]^2$$

de modo que

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2.$$

El número de operaciones elementales que se requieren para la factorización de la matriz $A$ es:

$$N = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right),$$

el número de operaciones elementales para el cálculo de $\prod\limits_{i=1}^{n} l_{ii}^2$ es $n^2$ productos. Luego, el número de operaciones elementales requeridas para el cálculo de $\det(A)$ es

$$Noper(n) = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) + n^2 = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 9n + 1\right).$$

## 6.8. Método de Crout.

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ no nula, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el problema siguiente: hallar $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, si existe, solución de

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}. \tag{1}$$

En el método de factorización de Crout se buscan, si existen, dos matrices $L = (l_{ij})$, $U = (u_{ij})$ se $M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ tales que

$$\begin{aligned} l_{ij} &= 0 \quad si \quad j > i, \quad i = 1, ..., n, \ \ j = 2, ..., n, \\ u_{ij} &= 0 \quad si \quad i > j, \quad i = 2, ..., n, \ \ j = 1, ..., n, \\ u_{ii} &= 1, \quad i = 1, ..., n \end{aligned}$$

y

$$A = LU. \tag{2}$$

En definitiva, la matriz $L$ es triangular inferior, la matriz $U$ es triangular superior y cuyos elementos de la diagonal son todos 1. De la factorización de $A$, es sistema de ecuaciones (1) es equivalente a los siguientes:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow LU\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}, \\ U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}. \end{array} \right.$$

El primero $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ es un sistema triangular inferior, y el segundo $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es un sistema triangular superior. Por lo tanto, queda describir un algoritmo para determinar las matrices $L$ y $U$.

De la definición de producto de matrices, se tiene

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} \quad i = 1, ..., n, \ \ j = 1, ..., n. \tag{3}$$

Etapa 1 $(j = 1)$. De la definición de las matrices $L$ y $U$, se tiene

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{k1} = l_{i1} u_{11} = l_{i1} \quad i = 1, ..., n.$$

Así,

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, ..., n. \tag{4}$$

Para $i = 1$,

$$a_{1j} = \sum_{k=1}^{n} l_{1k} u_{kj} = l_{11} u_{1j},$$

de donde

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad l_{11} \neq 0, \quad j = 2, ..., n. \tag{5}$$

Etapa 2 $(j = 2)$

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{k2} = l_{i1} u_{12} + l_{i2} u_{22} = l_{i1} u_{12} + l_{i2},$$

de donde

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1} u_{12} \quad i = 2, ..., n.$$

Para $i = 2$,

$$\begin{aligned} a_{2j} &= \sum_{k=1}^{n} l_{2k} u_{kj} = l_{21} u_{1j} + l_{22} u_{2j} \\ u_{2j} &= \frac{a_{2j} + l_1 u_{1j}}{l_{22}} \quad si \;\; l_{22} \neq 0, \;\; j = 3, ..., n. \end{aligned}$$

Note que en la primera etapa se construye la primera columna de $L$ y luego la primera fila de $U$. En la segunda etapa se construye la segunda columna de $L$ y a continuación la segunda fila de $U$. Continuando con este procedimiento, para $1 \leq j \leq n$ fijo,

$$a_{ij} = ss_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} = l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j} + ... + l_{ij} u_{ii} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ij}$$

de donde

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad i = j, ..., n. \tag{6}$$

Para $1 \leq i \leq n-1$ fijo, se tiene

$$\begin{aligned} a_{ij} &= ssk = 1^n l_{ik} u_{kj} = l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j} + ... + l_{ii} u_{ij}, \\ u_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{jj}}, \quad l_{jj} \neq 0, \quad j = i+1, ..., n. \end{aligned}$$

Antes de proceder a la descripción del algoritmo de factorización de $A$ mediante el método de Crout, consideremos un ejemplo.

**Ejemplo**

Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, con $A$ la matriz y $\overrightarrow{b}$ el vector que se dan a continuación. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad \overrightarrow{b} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Apliquemos el método de Crout.Para ello, comencemos con el pricedimiento de factorización $LU$ descrito precedentemene.

Etapa 1 $(j=1)$. En esta etapa se determinan los elementos de la primera columna de $A$ :

$$\begin{aligned}
l_{1i} &= a_{i1} \quad i=j,...,n \\
l_{11} &= a_{11}=2, \\
l_{21} &= a_{21}=1, \\
l_{31} &= a_{31}=-1, \\
l_{41} &= a_{41}=2, \\
l_{51} &= a_{51}=0.
\end{aligned}$$

Inmediatamente, se pasa a la construcción de los elementos de la primera fila de $U$ :

$$l_{11}\neq 0, \quad u_{1k}=\frac{a_{1k}}{l_{11}}, \quad k=j+1,...,n$$

Resulta,

$$\begin{aligned}
u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}}=\frac{-2}{2}=-1, \\
u_{13} &= \frac{a_{13}}{l_{11}}=\frac{0}{2}=0, \\
u_{14} &= \frac{a_{14}}{l_{11}}=\frac{2}{2}=1, \\
u_{15} &= \frac{a_{15}}{l_{11}}=\frac{0}{2}=0.
\end{aligned}$$

Etapa 2 $(j=2)$. Se tiene $l_{i2}=a_{i2}-l_{i1}u_{12}, \quad i=j,...,n,$ con lo que se construye la segunda columna de $L$. Resulta,

$$\begin{aligned}
l_{22} &= a_{22}-l_{21}u_{12}=0-1\times(-1)=1, \\
l_{32} &= a_{32}-l_{31}u_{12}=2-(-1)\times(-1)=1, \\
l_{42} &= a_{42}-l_{41}u_{12}=-3-2\times(-1)=-1, \\
l_{52} &= a_{52}-l_{51}u_{12}=-1-0\times(-1)=-1.
\end{aligned}$$

Se pasa inmediantemente a la obtención de los elementos de la segunda fila de $U$. Para $k=j+1,...,n$ o sea $k=3,4,5,$

$$u_{jk}=\frac{a_{jk}-l_{j1}u_{1k}}{l_{jj}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
u_{23} &= \frac{a_{23}\,-_{21}u_{13}}{l_{22}}=\frac{-1-1\times 0}{1}=1, \\
u_{24} &= \frac{a_{24}-l_{21}u_{14}}{l_{22}}=\frac{2-1\times 1}{1}=1, \\
u_{25} &= \frac{a_{25}-l_{21}u_{15}}{l_{22}}=\frac{0-1\times 0}{1}=0.
\end{aligned}$$

Etapa 3 $(j=3)$. Se construye la tercera columna de $L$. Se tiene

$$l_{i3}=a_{i3}-l_{i1}u_{13}-l_{i2}u_{23}, \quad i=j,...,n,$$

es decir que

$$\begin{aligned}
l_{33} &= a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=1-(-1)\times 0-1\times(-1)=2, \\
l_{43} &= a_{43}-l_{41}u_{13}-l_{42}u_{23}=0-2\times 0-(-1)(-1)=-1, \\
l_{53} &= a_{53}-l_{51}u_{13}-l_{52}u_{23}=1-0\times 0-(-1)(-1)=0.
\end{aligned}$$

Construimos la tercera fila dae $U$. Tenemos $l_{jj}\neq 0$, y

$$u_{jk}=\frac{a_{jk}-l_{j1}u_{1k}-l_{j2}u_{2k}}{l_{jj}} \quad k=j+1,...,n,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} u_{34} &= \frac{a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}}{l_{33}} = \frac{4-(-1)\times 1 - 1\times 1}{2} = 2, \\ u_{35} &= \frac{a_{35} - l_{31}u_{15} - l_{32}u_{25}}{l_{33}} = \frac{-2-(-1)\times 0 - 1\times 0}{2} = -1. \end{aligned}$$

Etapa 4 $(j=4)$. Se construye la cuarta columna de $L$.

$$l_{i4} = a_{i4} - l_{i1}u_{14} - l_{i2}u_{24} - l_{i3}u_{34}, \quad i = j, ..., n,$$

$$\begin{aligned} l_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = 1 - 2\times 1 - (-1)\times 1 - (-1)\times 2 = 2, \\ l_{54} &= a_{54} - l_{51}u_{14} - l_{52}u_{24} - l_{53}u_{34} = 0 - 0\times 1 - (-1)\times 1 - 0\times 2 = 1. \end{aligned}$$

Inmediatamente se construye la cuarta fila de $U$.

$$\begin{aligned} u_{4k} &= \frac{a_{4k} - \sum\limits_{r=1}^{j-1} l_{4r}u_{rk}}{l_{44}}, \quad k = j+1, ..., n, \\ u_{45} &= \frac{a_{45} l_{41}u_{15} - l_{42}u_{25} - l_{43}u_{35}}{l_{44}} = \frac{1 - 2\times 0 - (-1)\times 0 - (-1) - (-1)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Etapa 5 $(j=5)$. Note que $n=5$, o sea $j=n$. En esta etapa se construye únicamente el elemento $l_{nn}$. Se tiene

$$l_{i5} = a_{i5} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}u_{r5} \quad i = j, ..., n,$$

como $j = n = 5, \quad i = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} l_{55} &= a_{55} - l_{51}u_{15} - l_{52}u_{25} - l_{53}u_{35} - l_{54}u_{45} \\ &= -1 - 0\times 0 - (-1)\times 0 - 0\times(-1) - 1\times 0 = -1. \end{aligned}$$

Obtenemos

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es equivalente a los dos siguientes: $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ y $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

Comencemos con la resolución del sistema triangular inferior $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$. Tenemos

$$\begin{cases} 2y_1 & & & & & = 0 \\ y_1 & +y_2 & & & & = 0 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & & & = 0 \\ 2y_1 & -y_2 & -y_3 & 2y_4 & & = -2 \\ & -y_2 & & +y_4 & -y_5 & = 1, \end{cases}$$

cuya solución es $\overrightarrow{y}^T = (0,0,0,-1,-2)$.

Concluimos con la resolución numérica del sisteam de ecuaciones triangular superior $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ siguiente:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 0 \\ & & x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & & & x_4 & & = & -1 \\ & & & & x_5 & = & -2. \end{cases}$$

La solución es $\overrightarrow{x}^T = (2, 1, 0, -1, 2)$.

**Algoritmo de factorización** $LU$

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$.

Datos de salida: $L, U$.

1. Para $i = 1, ..., n$

   $l_{i1} = a_{i1}$.

   Fin de bucle i.

2. Si $l_{11} \neq 0$,

   Para $k = 2, ..., n$

   $$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}}$$

   Fin de bucle k.

   Caso contrario, continuar en 5).

3. Para $j = 2, ..., n$

   Para $i = j, ..., n$

   $S = 0$

   Para $k = 1, ..., j - 1$

   $S = S + l_{ik} \times u_{kj}$

   $l_{ij} = a_{ij} - S$

   Fin de bucle k.

   Si $l_{jj} \neq 0$,

   Para $k = j + 1, ..., n$

   $S = 0$

   Para $i = 1, ..., j - 1$

   $S = S + l_{ki} \times u_{ij}$

   $$u_{jk} = \frac{a_{jk} - S}{l_{jj}}$$

   Fin de bucle i.

   Fin de bucle k.

   Caso contrario, continuar en 5)

   Fin de bucle j.

4. Imprimir $L.U$. Continuar en 6).

5. Imprimir mensaje: “Matriz singular o no se factora en la forma $LU$”

6. Fin.

Una vez que se ha procedido a la factoración de la matriz $A$ en la forma $LU$, se pasa inmediatamente a la resolución del sistema de ecuaciones lineales que se recoje en el algoritmo de Crout.

**Algoritmo de Crout**

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Datos de salida: Mensaje : "Matriz singular". Solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$.

1. Aplicar el algoritmo de factorización $LU$.

   Si $A$ es singular, continuar en 5).

2. Resolver el sistema de ecuaciones $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$.

3. Resolver el sistema de ecuaciones $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

4. Escribir la solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$. Continuar en 6).

5. Escribir mensaje: "$A$ es singular o no se factora en la forma $LU$".

6. Fin.

**Observaciones**

1. Si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ se factora en la forma $LU$, esta es única.

   En efecto, supongamos que $A$ admite otra factorización $L_1U_1$, donde $L_1$ es triangular inferior, $U$ triangular superior

   Si $A$ es no singular entonces $L, L_1, U, U_1$ son no singulares, y

$$LU = L_1U_1 \Leftrightarrow L_1^{-1}L = U_1U^{-1}.$$

   Como $U$ y $U_1$ son triangulares superiores, $U_1U^{-1}$ es triangular superior que posee unos en la diagonal. Por otro lado $L, L_1$ son triangulares inferiores, $L_1^{-1}L$ es triangular inferior. Para que se tenga la igualdad $L_1^{-1}L = U_1U^{-1}$ debe ser $U_1U_{-1} = I$, de donde $U_1 = U$, y $L_1^{-1}L = I$ implica $L = L_1$. Así, la factorización es única.

2. La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ no se factora en la forma $LU$. La matriz $A$ es claramente no singular.

   Supongamos que $A = LU$ con $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Luego,

$$l_{11} = 0, \quad 1 = l_{11}u_{12} = 0 \times u_{12} = 0 \quad \text{que es absurdo.}$$

3. Si una matriz singular $A$ se factora en la forma $LU$, esta no es única. Por ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \alpha & \alpha^3 - \alpha \end{bmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

## 6.9. Sistemas de ecuaciones lineales con matrices tridiagonales.

**Definición 7** *Sea* $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ *tal que* $A \neq 0$. *Se dice que* $A$ *es tridiagonal si*

$$a_{ij} = 0 \quad para \quad |i-j| > 1, \quad i,j = 1,...,n.$$

Como hemos visto, essta clase de matrices se presentaron en la discretización de problemas de valores de frontera $1d$, en la construcción de splines de interpolación. Además, aparecen en la discretización mediante diferencias finitas y elementos finitos de muchos problemas del tipo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\frac{\partial u}{\partial x} + qu = f, \\ + \text{ Condición inicial}, \\ + \text{ Condiciones de frontera}, \end{cases}$$

donde $f$, $p$, $q$, $v$ son funciones dadas que cumplen cierta regularidad en $[0,L]\times[0,T]$, con $L > 0$, $T > 0$.

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$ y $A$ tridiagonal, $\overrightarrow{b}^T = (b_1,...,b_n) \in \mathbb{R}^n$. Se considera el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

De la definición de matriz tridiagonal, la matriz $A$ tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, en forma explícita se escribe:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & & & = & b_2 \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & a_{nn-1}x_{n-1} & +a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Esta clase de problemas involucra el almacenamiento adecuado de los datos y una simplificación del algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Comenzamos con el almacenamiento de los datos.

Para almacenar los elementos $a_{ij}$, $i,j = 1,...,n$ de $A$ se requieren $n^2$ espacios de memoria, que para $n$ grande, $n^2$ puede ser muy significativo. Por ejemplo para $n = 1000$, $n^2 = 1{,}000{,}000$. Es claro que en la actualidad una cifra como esta es muy modesta frente a la capacidad de almacenamiento de datos que poseen los modernos equipos de computación. Sin embargo, por grande que sea esta capacidad de almacenamiento, es preciso tratar de optimizar el espacio de memoria utilizado. Con este propósito, para almacenar los datos de una matriz tridiagonal, únicamente se requieren de aquellos elementos $a_{ij}$ para los que $|i-j| \leq 1$, $i,j = 1,...,n$, y no todos los $n^2$ elementos de la matriz $A$.

Se define la matriz $B = (b_{ik}) \in M_{n\times 3}[\mathbb{R}]$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{n3} = 0, \\ b_{i1} &= a_{ii-1}, \;\; i = 2,...,n, \\ b_{i2} &= a_{ii}, \;\; i = 1,...,n, \\ b_{i3} &= a_{ii+1}, \;\; i = 1,...,n-1, \end{aligned}$$

es decir que la matriz $B$ es de la forma

$$B=\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & \vdots & \\ a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que los elementos de la diagonal principal de $A$ está localizados en la segunda columna de $B$. Los elementos de la diagonal superior adyacente a la principal de $A$ están localizados en la tercera columna de $B$, los elementos de la diagonal inferior adyacente a la principal de $A$ están localizados en la primera columna de $B$.

Note que la matriz $B$ requiere de $3n$ espacios de memoria. Por ejemplo para $n = 1000$, solo se requieren de 3000 espacios de memoria. Adicionalmente, el tiempo de máquina y la precisión de la solución, son dos situaciones importantes a considerar. En cuanto se refiere a la precisión de la solución, posponemos el análisis correspondiente.

En lo que se refiere al tiempo de máquina utilizado en la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$, se buscan algoritmos cuyos tiempos de máquina, sean en lo posible, los más pequeños. Se logra este objetivo utilizando la hipótesis $A$ es una matriz tridiagonal y elaborando algoritmos que eviten realizar cálculos innecesarios con elementos $a_{ij}=0$ para $|i-j|>1,\ i,j=1,...,n$. El arreglo de elementos de $A$ en la matriz $B$ conduce al propósito antes precisado.

Para esta clase de matrices tridiagonales y con hipótesis suplementarias sobre la matriz $A$, proponemos tres algoritmos de resolución numérica de los sistemas de ecuaciones lineales.

**Eliminación gaussiana sin pivoting.**

Supongamos que $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es una matriz tridiagonal y estrictamente diagonalmente dominante; $\overrightarrow{b}^T=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$.

Con la hipótesis $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, debemos mostrar que las matrices $A_1=\left(a_{ij}^{(1)}\right),...,A_{n-1}=\left(a_{ij}^{(n-1)}\right)$ correspondientes a cada etapa de la eliminación gaussiana, son estrictamente diagonalmente dominantes.

Etapa 1. Como $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, se tiene $|a_{11}|>|a_{12}|,\quad |a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|$. Resulta $|a_{11}|>0$. Sean $k_{21}=-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, y

$$a_{22}^{(1)}=k_{21}a_{12}+a_{22}=-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}+a_{22}=-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}+a_{22}.$$

1. Como $|a_{11}|>|a_{12}|$ se sigue que $\left|\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right|<1$. Luego $\left|a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|<|a_{21}|$. Entonces

   $$|a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|>\left|a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|+|a_{22}|$$

   de donde

   $$|a_{22}|-\left|a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|>|a_{23}|.$$

   Utilizando la desigualdad $||x|-|y||\leq|x-y|,\ \forall x,\,y\in\mathbb{R}$. Se tiene

   $$\left|a_{22}^{(1)}\right|=\left|a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|\geq|a_{22}|-\left|a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|>|a_{23}|.$$

Así,

$$\left|a_{22}^{(1)}\right| > \left|a_{23}^{(1)}\right| = |a_{23}|.$$

Como las otras filas de la matriz $A$ quedan inalteradas, se tiene

$$|a_{ii}| > |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}|, \quad i = 3, ..., n.$$

Se pone $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ para $i = 1, 3, ..., n$, $j = 1, ..., n$, $a_{23}^{(1)} = a_{23}$, $a_{2j}^{(1)} = 0$, $j = 1, 4, ..., n$, y $A_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$. Consecuentemente, $A_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$ es estrictamente diagonalmente dominante.

Etapa 2. Como $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Se define $k_{32} = -\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, y

$$a_{33}^{(2)} = k_{32}a_{23}^{(1)} + a_{33}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{23}^{(1)} + a_{33}^{(1)} = -a_{32}^{(1)}\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} + a_{33}^{(1)}.$$

Puesto que $\left|a_{22}^{(1)}\right| > \left|a_{23}^{(1)}\right|$ y razonando en forma similar a la realizada en la etapa 1, se muestra que $\left|a_{33}^{(2)}\right| > \left|a_{34}^{(2)}\right|$. Denotamos con $A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$, donde

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} \quad i = 1, ..., n, \ i \neq 3, \ j = 1, ..., n, \\ a_{32}^{(2)} &= 0, \ a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)}, \ a_{3j}^{(2)} = 0, \ j = 4, ..., n. \end{aligned}$$

Continuando con este proceso llegamos a la etapa $n-1$ siguiente.

Etapa $n-1$. Se tiene

$$\left|a_{n-1,n-1}^{(n-2)}\right| > \left|a_{n-1,n}^{(n-2)}\right| = |a_{n-1,n}| \geq 0.$$

Se define

$$k_{n.n-1} = -\frac{a_{nn-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}},$$

y

$$a_{nn}^{(n-1)} = k_{n,n-1}a_{n-1,n}^{(n-2)} + a_{nn}^{(n-2)}.$$

Mostremos que $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. Como $\left|a_{n-1,n-1}^{(n-2)}\right| > \left|a_{n-1,n}^{(n-2)}\right|$ se sigue $\left|\dfrac{a_{n-1,n}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}\right| < 1$ y

$$\left|a_{n,n-1}^{(n-2)}\frac{a_{n-1,n}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}\right| < \left|a_{nn-1}^{(n-2)}\right| < \left|a_{nn}^{(n-2)}\right|.$$

Luego,

$$\left|a_{nn}^{(n-1)}\right| = \left|-\frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}a_{n-1,n}^{(n-2)} + a_{n,n}^{(n-2)}\right| \geq \left|a_{nn}^{(n-2)}\right| - \left|a_{nn-1}^{(n-2)}\frac{a_{n-1,n}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}\right| > 0.$$

En términos de los elementos de la matriz $B$ y el vector $\overrightarrow{b}$, el procedimiento de eliminación gaussiana para la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ se escribe en los siguientes términos.

Etapa 1. Se pone $c = -\dfrac{b_{21}}{b_{12}}$. Luego $b_{22} = cb_{13} + b_{22}, b_2 = cb_1 + b_2$.

Etapa 2. Se pone

$$c = -\frac{b_{31}}{b_{22}}, \qquad b_{32} = cb_{23} + b_{32}, \qquad b_3 = cb_2 + b_3.$$

Continuando con este procedimiento, en la etapa $n-1$, se tiene

Etapa $n-1$

1.
$$c = -\frac{b_{n1}}{b_{n-1,2}}, \quad b_{n2} = cb_{n-1,3} + b_{n2}, \quad b_n = cb_{n-1} + b_n.$$

La resolución del sistema de ecuaciones se describe en el siguiente procedimiento:

$$x_n = \frac{b_n}{b_{n^2}},$$

y para $i = n-1, ..., 1,$

$$x_i = \frac{(b_i - b_{i3}x_{i+1})}{b_{i,2}}.$$

Se establece el siguiente algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Se asume que la matriz $A$ es tridiagonal con lo que los elementos de $A$ son almacenados en la matriz $B$.

Algoritmo

Datos de entrada: $n \in \mathbb{Z}^+, \quad B = (b_{ij}) \in M_{n\times 3}[\mathbb{R}], \quad \overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n.$

Datos de salida: Mensaje: "$A$ no es estrictamente diagonalmente dominante", solución $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$.

1. Para $i = 1, ..., n,$

   Si $|b_{i2}| \leq |b_{i1}| + |b_{i3}|$, continuar en 6).

   Fin de bucle i.

2. Para $j = 1, ..., n-1$

   $c = -\dfrac{b_{j+1,1}}{b_{j2}}$ Proceso de eliminación gaussiana

   $b_{j+1,2} = c \times b_{j3} + b_{j+1,2}$

   $b_{j+1} = c \times b_j + b_{j+1}$

   Fin de bucle j.

3. $x_n = \dfrac{b_n}{b_{n2}}$ Resolución del sistema triangular superior

4. Para $j = n-1, ..., 1$

   $$x_j = \frac{(b_j - b_{j,3} \times x_{j+1})}{b_{j2}}$$

   Fin de bucle j.

5. Imprimir $\overrightarrow{x}^T = (x_1, ..., x_n)$. Continuar en 7).

6. Imprimir mensaje: "$A$ no es estrictamente diagonalmente dominante".

7. Fin.

Nota**:** Se puede probar que el número total de operaciones elementales en la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es $Noper^{(c)}(n) = 8n - 7$.

**Ejemplos**

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ que en forma explícita se escribe

$$\begin{cases} 5x_1 & -x_2 & & & & = & 11 \\ -2x_1 & +4x_2 & +x_3 & & & = & -8 \\ & x_2 & +3x_3 & +x_4 & & = & 0 \\ & & 2x_3 & +5x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ & & & 3x_4 & +4x_5 & = & -5. \end{cases}$$

Apliquemos el algoritmo precedente. Primeramente, la matriz $A$ es tridiagonal, consecuentemente los elementos de $A$ son dispuestos en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Observamos que la matriz $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, lo que equivale a observar que en cada fila de $B$ se satisface la condición

$$|b_{j2}| > |b_{j1}| + |b_{j3}|, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Pasemos al proceso de eliminación gaussiana descrito en el punto 2) del algoritmo precedente. Para $j = 1, 2, 3, 4$. Se tiene
$j = 1$,

$$\begin{aligned} c &= -\frac{b_{21}}{b_{12}} = -\frac{-2}{5} = \frac{2}{5}, \\ b_{22} &= c \times b_{13} + b_{22} = \frac{2}{5} \times (-1) + 4 = \frac{18}{5}, \\ b_2 &= c \times b_1 + b_2 = \frac{2}{5} - 11 + (-8) = -\frac{18}{5}, \end{aligned}$$

$j = 2$,

$$\begin{aligned} c &= -\frac{b_{31}}{b_{22}} = -\frac{1}{\frac{18}{5}} = -\frac{5}{18}, \\ b_{3,2} &= c \times b_{23} + b_{32} = -\frac{5}{18} \times 1 + 3 = \frac{49}{18}, \\ b_3 &= c \times b_2 + b_3 = -\frac{5}{18} \times \left(-\frac{18}{5}\right) + 0 = 1, \end{aligned}$$

$j = 3$,

$$\begin{aligned} c &= -\frac{b_{41}}{b_{32}} = -\frac{2}{\frac{49}{18}} = -\frac{36}{49}, \\ b_{42} &= c \times b_{33} + b_{42} = -\frac{36}{49} \times 1 + 5 = \frac{109}{49}, \\ b_4 &= c \times b_3 + b_4 = -\frac{36}{49} \times 1 + 1 = \frac{13}{49}, \end{aligned}$$

$j = 4$,

$$\begin{aligned} c &= -\frac{b_{51}}{b_{42}} = -\frac{3}{\frac{209}{49}} = -\frac{147}{209}, \\ b_{52} &= c \times b_{43} + b_{52} = -\frac{147}{209} \times 2 + 4 = \frac{542}{209}, \\ b_5 &= c \times b_4 + b_5 = -\frac{147}{209} \times \frac{13}{49} + (-5) = -\frac{53116}{10241}. \end{aligned}$$

3. Pasamos a la resolución del sistema de ecuaciones triangular superior:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= \frac{b_5}{b_{52}} = \frac{-\frac{53116}{10241}}{\frac{542}{209}} = -2,\\
x_4 &= \frac{b_4 - b_{43}x_5}{b_{42}} = \frac{\frac{13}{49} - 2\times(-2)}{\frac{209}{49}} = 1,\\
x_3 &= \frac{b_3 - b_{33}x_4}{b_{32}} = \frac{1 - 1\times 1}{\frac{49}{18}} = 0,\\
x_2 &= \frac{b_2 - b_{23}x_3}{b_{22}} = \frac{-\frac{18}{5} - 1\times 0}{\frac{18}{5}} = -1,\\
x_1 &= \frac{b_1 - b_{13}x_2}{b_{12}} = \frac{11 - (-1)\times(-1)}{5} = 2.
\end{aligned}
$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales es $\overrightarrow{x}^T = (2, -1, 0, 1, -2)$.

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 6 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0\\ 9\\ 14\\ 3\\ 0 \end{bmatrix}$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ Apliquemos el algoritmo precedente.

Etapa 1

$$
\begin{aligned}
A_1 &= K_1A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 6 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0\\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{36}{5} & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},\\
\overrightarrow{b}_1 &= K_1\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\ 9\\ 14\\ 3\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 9\\ 14\\ 3\\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Etapa 2

$$
\begin{aligned}
A_2 &= K_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{6}{17} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{5}{34} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0\\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{36}{5} & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{132}{17} & \frac{28}{17} & -1\\ 0 & 1 & -\frac{38}{17} & \frac{209}{34} & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},\\
\overrightarrow{b}_2 &= K_2\overrightarrow{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{6}{17} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{5}{34} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\ 9\\ 14\\ 3\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 9\\ \frac{292}{17}\\ \frac{57}{34}\\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Etapa 3

$$A_3 = K_3A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{66} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{132} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{132}{17} & \frac{28}{17} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{38}{17} & \frac{209}{34} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{132}{17} & \frac{28}{17} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{437}{66} & \frac{113}{66} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{73}{33} & \frac{545}{132} \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{b}_3 = K_3\overrightarrow{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{66} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{132} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ \frac{292}{17} \\ \frac{57}{34} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ \frac{292}{17} \\ \frac{437}{66} \\ -\frac{73}{33} \end{bmatrix}.$$

Etapa 4

$$A_4 = K_4A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{146}{437} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{132}{17} & \frac{28}{17} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{437}{66} & \frac{113}{66} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{73}{33} & \frac{545}{132} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{8}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{132}{17} & \frac{28}{17} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{437}{66} & \frac{113}{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8217}{1748} \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{b}_4 = K_4\overrightarrow{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{146}{437} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ \frac{292}{17} \\ \frac{437}{66} \\ -\frac{73}{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ \frac{292}{17} \\ \frac{437}{66} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema de ecuaciones triangular superior es $\overrightarrow{x} = (0,1,2,1,0)^T$. Adicionalmente para la resolución del sistema de ecuaciones lineales se realizaron 47 operaciones elementales para transformar el sistema en uno triangular superior y 19 operaciones para resolver este último sistema. La resolución de este sistema de ecuaciones requiere de 66 operaciones elementales.

### Método de Choleski

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ tridiagonal, simétrica, definida positiva, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

La hipótesis $A$ es una matriz simétrica, definida positiva implica la existencia de una matriz triangular inferior $L = (l_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ tal que $A = LL^T$. En inmediato verificar que

$$l_{ij} = 0 \quad si \quad |i-j| > 1, \;\; i,j = 1, ..., n,$$

esto es, $L$ es una matriz de la forma

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como se ha dicho, los coeficientes de la matriz $A$ se disponen en la matriz $B = (b_{jk}) \in M_{n\times 3}[\mathbb{R}]$.

De la estructura de la matriz $L$, se sigue que los coeficientes de interés $l_{ij}$ son únicamente $l_{ii}$, $i = 1, ..., n$, $l_{i,i-1}$, $i = 2, ..., n$; lo que conduce a definir una matriz $C = (c_{ij}) \in M_{n\times 2}[\mathbb{R}]$ siguiente:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0, \\ c_{i1} &= l_{ii-1}, \quad i = 2, ..., n, \\ c_{i2} &= l_{ii}, \quad i = 1, ..., n, \end{aligned}$$

es decir que $C$ es la matriz de la forma siguiente: $C = \begin{bmatrix} 0 & l_{11} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{31} & l_{33} \\ \vdots & \vdots \\ l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$.

Con la hipótesis $A$ es una matriz tridiagonal, realizamos las simplificaciones en el algoritmo de Choleski. Tenemos el procedimiento siguiente.

1. $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
2. $l_{21} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}}$.
3. Para $j = 2, ..., n-1$

   $$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - l_{jj-1}^2}$$

   $$l_{j+1,j} = \frac{a_{jj+1}}{l_{jj}}$$

   Fin de bucle j
4. $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - l_{nn-1}^2}$.

En términos de los elementos de las matrices $B$ y $C$, el procedimiento precedente se escribe de la manera que a continuación se indica.

1. $c_{12} = \sqrt{b_{12}}$
2. $c_{21} = \frac{b_{13}}{c_{12}}$
3. Para $j = 2, ..., n-1$

   $$cj2 = \sqrt{b_{j2} - c_{j1}^2}$$

   $$c_{j+1,1} = \frac{b_{j3}}{c_{j2}}$$

   Fin de bucle j.
4. $c_{n2} = \sqrt{b_{n2} - c_{n1}^2}$.

Por otro lado, la resolución del sistema de ecuaciones triangular inferior $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ se describe en el siguiente procedimiento:

1. $y_1 = \frac{b_1}{L_{11}} = \frac{b_1}{c_{12}}$.

2. Para $j = 2, ..., n$

$$y_i = \frac{b_j - L_{jj-1}y_{j-1}}{L_{jj}} = \frac{b_j - c_{j1}y_{j-1}}{c_{j2}}.$$

Fin de bucle j.

La resolución del sistema de ecuaciones triangular superior $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ se expresa en el siguiente procedimiento.

1. $x_n = \frac{y_n}{L_{nn}} = \frac{y_n}{c_{n2}}$.

2. Para $j = n-1, ..., 1$

$$x_j = \frac{y_j - L_{jj-1}x_{j-1}}{L_{jj}} = \frac{y_j - c_{j1}x_{j-1}}{c_{j2}}.$$

Fin de bucle j.

**Ejemplo**

Apliquemos el algoritmo precedente al sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 16 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Primeramente, los elementos de la matriz $A$ se disponen en la matriz $B$ siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & -6 \\ -6 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

En el método de Choleski (sin considerar los errores de redondeo) y para matrices tridiagonales, si se tiene $A^T = A$, y

$$a_{jj} > L^2_{jj-1} \quad j = 1, 2, ..., n,$$

la matriz $A$ es simétrica, definida positiva.

Apliquemos el pricedimiento de resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ arriba descrito. Tenemos:

1. $L_{11}\sqrt{b_{12}} = \sqrt{4} = 2$,

2. $c_{21} = L_{21} = \dfrac{b_{13}}{c_{12}} = \frac{2}{2} = 1$,

3. Para $j = 2, 3, 4, 5$

$j = 2, \;\; c_{22} = \sqrt{b_{22} - c^2_{21}} = \sqrt{5-1} = 2,$

$c_{31} = \frac{b_{23}}{c_{22} = -\frac{2}{2}} = -1,$

$j = 3, \;\; c_{32} = \sqrt{b_{32} - c^2_{31}} = \sqrt{2-1} = 1,$

$c_{41} = \frac{b_{33}}{c_{32}} = \frac{1}{1} = 1,$

$j = 4,\ c_{42} = \sqrt{b_{42} - c_{41}^2} = \sqrt{10-1} = 1,$

$c_{51} = \frac{b_{43}}{c_{42}} = -\frac{6}{3} = -2,$

$j = 5,\ c_{52} = \sqrt{b_{52} - c_{51}^2} = \sqrt{5-4} = 1,$

$c_{61} = \frac{b_{53}}{c_{52}} = \frac{1}{1} = 1,$

4. $c_{62} = \sqrt{b_{62} - c_{61}^2} = \sqrt{5-1} = 2.$

Los elementos de la matriz $L = (l_{ij})$ se disponen en la matriz $C$ siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & l_{11} \\ l_2 & l_{22} \\ l_{32} & l_{33} \\ l_{43} & l_{44} \\ l_{54} & l_{55} \\ l_{65} & l_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ en términos de la matriz $C$ tiene la forma siguiente:

$$\begin{array}{llcl} c_{12}y_1 & & = & b_1 \\ c_{21}y_1 & +c_{22}y_2 & = & b_2 \\ c_{31}y_2 & +c_{32}y_3 & = & b_3 \\ c_{41}y_3 & +c_{42}y_4 & = & b_4 \\ c_{51}y_4 & +c_{52}y_5 & = & b_5 \\ c_{61}y_5 & c_{62}y_6 & = & b_6 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 2y_1 & & = & 2 \\ y_1 & +2y_2 & = & 1 \\ -y_2 & +y_3 & = & 4 \\ y_3 & +3y_4 & = & 16 \\ -2y_4 & +y_5 & = & -7 \\ y_5 & +2y_6 & = & 1 \end{array} \right.$$

cuya solución es $\overrightarrow{y}^T = (1, 0, 4, 4, 1, 0)$.

El sistema de ecuaciones $L^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ expresado en términos de la matriz $C$ tiene la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{llcl} c_{12}x_1 & +c_{21}x_2 & = & y_1 \\ c_{22}x_2 & +c_{31}x_3 & = & y_2 \\ c_{32}x_3 & +c_{41}x_4 & = & y_3 \\ c_{42}x_4 & +c_{51}x_5 & = & y_4 \\ c_{52}x_5 & +c_{61}x_6 & = & y_5 \\ & c_{62}x_6 & = & y_6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 2x_1 & x_2 & = & 1 \\ 2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_3 & +x_4 & = & 4 \\ 3x_4 & -2x_5 & = & 4 \\ x_5 & +x_6 & = & 1 \\ & 2x_6 & = & 0 \end{array} \right.$$

cuya solución es $\overrightarrow{x}^T = (0, 1, 2, 2, 1, 0)$.

**Observación**

Se propone como ejercicio la elaboración de un algoritmo completo para la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, donde $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es tridiagonal, simétrica, definida positiva.

El número total de operaciones elementales en la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, mediante el algoritmo arriba descrito es

$$Noper^{(c)}(n) = 10n - 7,\ \ n \in \mathbb{Z}^+,$$

es decir que $Noper > Noper = 8n - 7$. El método de eliminación gaussiana es mucho mejor que el método de Choleski, visto respecto del número de operaciones.

**Método de Crout para matrices tridiagonales**

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz tridiagonal no nula, $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

En el método de Crout se busca (si existen) una factorización de la matriz $A$ en la forma $LU$, es decir, $A = LU$, donde

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como se ha dicho anteriormente, los elementos de interés de la matriz $A$ se guardan en la matriz $B$. De acuerdo a la estructura que presentan las matrices $L$ y $U$, se definen las matrices $\widetilde{L} = \left(\widetilde{l}_{ik}\right)$, $\widetilde{U} = (\widetilde{u}_{ik})$ de $M_{n\times 2}[\mathbb{R}]$ siguientes

$$\begin{aligned} \widetilde{l}_{11} &= 0 \\ \widetilde{l}_{i1} &= l_{ii-1}, \quad i = 2, ..., n, \\ \widetilde{l}_{i2} &= l_{ii}, \quad i = 1, ..., n, \\ \widetilde{u}_{i1} &= 1, \quad i = 1, ..., n, \\ \widetilde{u}_{i2} &= u_{ii+1}, \quad i = 1, ..., n-1, \\ \widetilde{u}_{n2} &= 0, \end{aligned}$$

o sea, las matrices $\widetilde{L}$, $\widetilde{U}$ tienen la forma

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & l_{11} \\ l_{21} & l_{22} \\ \vdots & \vdots \\ l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 1 & u_{23} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{n-1,n} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El algoritmo de factorización $LU$ para matrices tridiagonales se reduce al siguiente:

1. $l_{11} = a_{11}$
2. $u_{12} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}}$.
3. Para $i = 2, ..., n-1$

   $l_{i,i-1} = a_{ii-1}$

   $l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$

   $u_{ii+1} = \dfrac{a_{ii+1}}{l_{ii}}$.

   Fin de bucle i.

4.$l_{n,n-1} = a_{nn-1}$.

5. $l_{nn} = a_{nn} - l_{nn-1}u_{n-1,n}$.

Este algoritmo en términos de las matrices $B$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{U}$ se expresa en los siguientes términos.

1. $\widetilde{l}_{12} = b_{12}$.
2. $\widetilde{u}_{12} = \dfrac{b_{13}}{\widetilde{l}_{12}}$.
3. Para $i = 2, ..., n-1$

   $\widetilde{l}_{i1} = b_{i1}$

$$\widetilde{l}_{i2} = b_{i2} - \widetilde{l}_{i1}\widetilde{u}_{i-1,2}$$

$$\widetilde{u}_{i2} = \frac{b_{i3}}{\widetilde{l}_{i2}}.$$

Fin de bucle i.

4. $\widetilde{l}_{n1} = b_{n1}$.
5. $\widetilde{l}_{n2} = b_{n2} - \widetilde{l}_{n1} * \widetilde{u}_{n-1,2}$.

El sistema de ecuaciones triangular inferior $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ expresado en términos de la matriz $\widetilde{L}$ es:

$$\begin{cases} \widetilde{l}_{12}y_1 & & = b_1 \\ \widetilde{l}_{21}\widetilde{y}_1 & \widetilde{l}_{22}y_2 & = b_2 \\ \widetilde{l}_{31}\widetilde{y}_2 & +l_{32}y_3 & = b_3 \\ & & \vdots \\ l_{n1}y_{n-1} & +l_{n2}y_n & = b_n, \end{cases}$$

cuya solución es

1. $y_1 = \dfrac{b_1}{\widetilde{l}_{12}}$.
2. Para $i = 2, ..., n$

$$y_i = \frac{(b_i - l_{i1}y_{i-1})}{l_{i2}}.$$

Fin de bucle i.

El sistema de ecuaciones triangular superior $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ expresado en términos de la matriz $\widetilde{U}$ es

$$\begin{cases} x_1 & +u_{12}x_2 & = & y_1 \\ x_2 & +u_{22}x_2 & = & y_2 \\ & & \vdots & \\ & x_n & = & y_n. \end{cases}$$

cuya solución es:

1. $x_n = y_n$.
2. Para $i = n-1, ..., 1$

$$x_i = y_i - u_{i2}x_{i+1}.$$

Fin de bucle i.

El número de operaciones elementales para la resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ mediante el método de Crout, con $A$ matriz tridiagonal, es

$$Noper\,(n) = 8n - 7, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Se observa que el número de operaciones elementales para la resolución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, con $A$ una matriz tridiagonal, estrictamente diagonalmente dominante, mediante los métodos de eliminación gaussiana y Crout, coinciden.

**Ejemplo**

Considerar el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ -42 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

La matriz $B$ está definida como

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \\ 4 & 13 & 3 \\ -3 & -11 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comenzamos con la contrucción (si existen) de las matrices $\widetilde{L}$ y $\widetilde{U}$ usando el algoritmo arriba presentado.

1. $\widetilde{l}_{12} = b_{12} = 1.$
2. $\widetilde{u}_{12} = \dfrac{b_{13}}{\widetilde{l}_{12}} = \frac{1}{1} = 1,$
3. Para $i = 2, 3, 4$

   $i = 2, \quad \widetilde{l}_{21} = b_{21} = -2,$
   $\widetilde{l}_{22} = b_{22} - \widetilde{l}_{21}\widetilde{u}_{12} = 0 - (-2) - 1 = 2,$
   $\widetilde{u}_{22} = \dfrac{b_{23}}{\widetilde{l}_{22}} = \frac{6}{2} = 3,$

   $i = 3, \quad \widetilde{l}_{31} = b_{31} = 4$
   $\widetilde{l}_{32} = b_{32} - \widetilde{l}_{31}\widetilde{u}_{22} = 13 - 4 \times 3 = 1,$
   $\widetilde{u}_{32} = \dfrac{b_{33}}{\widetilde{l}_{32}} = \frac{3}{1} = 3,$

   $i = 4, \quad \widetilde{l}_{41} = b_{41} = -3,$
   $\widetilde{l}_{42} = b_{42} - \widetilde{l}_{41\times}\widetilde{u}_{32} = -11 - (-3) \times 3 = -2,$
   $u_{42} = \dfrac{b_{43}}{\widetilde{l}_{42}} = -\frac{-2}{-2} = 1,$
4. $\widetilde{l}_{51} = b_{51} = 1$
5. $\widetilde{l}_{52} = b_{52} - b_{51} \times \widetilde{u}_{42} = -2 - 1 \times 1 = -3.$

Así,

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, es por lo tanto, $\overrightarrow{x}^T = (-2, -1, 0, 2, 10)$.

**Observación**

Los métodos de eliminació gaussiana, Choleski y Crout descritos para la resolución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, con $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ matriz tridiagonal más hipótesis suplementarias sobre $A$, pueden aplicarse, en general, a matrices $A = (a_{ij})$ en banda, con longitud de banda $lb = 1, 2, ...,$ de modo que $lb < n$ y $lb$ no muy grande $\left(lb < \frac{n}{2}\right)$, donde

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i - j| > lb, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Cuando $n$ es grande y $lb < n$ es grande, se debe pensar en guardar los datos $a_{ij}$ con $|i - j| \leq lb$, $i, j = 1, ..., n$, en arreglos (matrices) o archivos adecuados y con estos arreglos o archivos elaborar algoritmos adecuados de resolución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Si $n$ es muy grande, $lb < n$ es pequeño con respecto de $n$, en este caso es recomendable los métodos iterativos que serán presentados más adelante.

## 6.10. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales en norma mínima.

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}[\mathbb{R}]$ tal que $R(A) = m < n$, y $\overrightarrow{b}^T = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. El sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ posee una infinidad de soluciones. Denotamos con $S$ el conjunto de todas estas soluciones, esto es,

$$S = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R} \,| A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \right\}.$$

Consideramos el problema (P) siguiente: hallar $\widehat{x} \in S$, si existe, tal que

$$\|\widehat{x}\|^2 = \operatorname*{Min}_{\overrightarrow{x}\in S} \|\widehat{x}\|^2 ,$$

o lo que es lo mismo $\|\widehat{x}\|^2 \leq \|\overrightarrow{x}\|^2 \quad \forall \overrightarrow{x} \in S$, que a su vez puede escribirse como

$$\|\widehat{x}\|^2 = \operatorname*{Min}_{\substack{\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n \\ A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}}} \|\overrightarrow{x}\|^2 .$$

Este es un problema de extremos condicionados en el que se busca minimizar la función $g$ definida por

$$g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x}, \quad \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,$$

sujeta a la restricción $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. El método de los multiplicadores de Lagrange proporciona una condición necesaria de extremo. Sea $\overrightarrow{\lambda}^T = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ con $\overrightarrow{\lambda} \neq 0$ y definimos la finción $\Phi$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ como

$$\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) = g(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{\lambda}^T\left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} + \overrightarrow{\lambda}^T\left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right), \quad \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Las componentes de $\overrightarrow{\lambda}$ : $\lambda_1, ..., \lambda_m$ se llaman multiplicadores de Lagrange y $\overrightarrow{\lambda}$ se llama vector multiplicador de Lagrange. Las condiciones necesarias de extremo establecen que

$$\nabla_{\overrightarrow{x}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) = 0, \qquad \nabla_{\overrightarrow{\lambda}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) = 0,$$

donde $\nabla_{\overrightarrow{x}}, \nabla_{\overrightarrow{\lambda}}$ denotan los operadores gradiente con respecto de $\overrightarrow{x}$ y con respecto de $\overrightarrow{\lambda}$, respectivamente.

Para el efecto, determinemos la derivada direccional de $\Phi$ con respecto de $\overrightarrow{x}$ y de $\overrightarrow{\lambda}$ según las direcciones $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ que se escriben $D_{\overrightarrow{y}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right)$ y $D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right)$, esto es,

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{y}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi\left(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\lambda}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right)}{t}, \\ D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda} + t\overrightarrow{\alpha}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right)}{t}. \end{aligned}$$

Comencemos con el cálculo de la derivada direccional $D_{\overrightarrow{y}}\Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right)$ en $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ según la dirección $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$.

Sean $t \neq 0$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\overrightarrow{y} \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Phi\left(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\lambda}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) &= (\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y})^T(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y}) + \overrightarrow{\lambda}^T\left(A(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y}) - \overrightarrow{b}\right) \\ &\quad - \left(\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} + \overrightarrow{\lambda}^T\left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right)\right) \\ &= t\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y} + t\overrightarrow{y}^T\overrightarrow{x} + t^2\overrightarrow{y}^T\overrightarrow{y} + t\overrightarrow{\lambda}^TA\overrightarrow{y}. \end{aligned}$$

Puesto que $\overrightarrow{y}^T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}$, y $\overrightarrow{y}^T\overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{y}\|^2$, resulta

$$\Phi\left(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\lambda}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}\right) = 2t\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y} + t^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + t\overrightarrow{\lambda}^TA\overrightarrow{y} = t\left(2\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y} + \overrightarrow{\lambda}^TA\overrightarrow{y} + t\|\overrightarrow{y}\|^2\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{y}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi\left(\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y},\overrightarrow{\lambda}\right)-\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(2\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}+\overrightarrow{\lambda}^TA\overrightarrow{y}+t\left\|\overrightarrow{y}\right\|^2\right) \\ &= 2\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y}+\overrightarrow{\lambda}^TA\overrightarrow{y} = \left(2\overrightarrow{x}^T+\overrightarrow{\lambda}^TA\right)\overrightarrow{y}. \end{aligned}$$

Como la derivada direccional $D_{\overrightarrow{y}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)$ existe en toda dirección $\overrightarrow{y}$ y es continua en $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{\lambda}$, entonces

$$D_{\overrightarrow{y}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = \left(\nabla_{\overrightarrow{x}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)\right)^T\overrightarrow{y},$$

es decir

$$\left(\nabla_{\overrightarrow{x}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)\right)^T\overrightarrow{y} = \left(2\overrightarrow{x}^T+\overrightarrow{\lambda}^TA\right)\overrightarrow{y},$$

de donde

$$\nabla_{\overrightarrow{x}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = 2\overrightarrow{x}+A^T\overrightarrow{\lambda}.$$

Calculemos la derivada direccional $D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)$ en $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{\lambda}\in\mathbb{R}^m$ según la dirección $\overrightarrow{\alpha}\in\mathbb{R}^m$. Para el efecto, sean $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{\alpha}\in\mathbb{R}^m$ con $\overrightarrow{\alpha}\neq 0$, y $t\neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}+t\overrightarrow{\alpha}\right)-\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) &= \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x}+\left(\overrightarrow{\lambda}+t\overrightarrow{\alpha}\right)^T\left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right)-\left(\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x}+\overrightarrow{\lambda}^T\left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right)\right) \\ &= t\overrightarrow{\alpha}^T\left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}+t\overrightarrow{\alpha}\right)-\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\overrightarrow{\alpha}^T\left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right) \\ &= \overrightarrow{\alpha}^T\left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right) = \left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right)^T\overrightarrow{\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = \left(A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right)^T\overrightarrow{\alpha}.$$

De la existencia de $D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)$ en $\overrightarrow{\alpha}\in\mathbb{R}^m$ y la continuidad en $\overrightarrow{\lambda}$, se sigue que

$$D_{\overrightarrow{\alpha}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = \left(\nabla_{\overrightarrow{\lambda}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right)\right)^T\overrightarrow{\alpha},$$

de donde

$$\nabla_{\overrightarrow{\lambda}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}.$$

Consecuentemente, las condiciones necesarias de extremo

$$\begin{cases} \nabla_{\overrightarrow{x}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = 2\overrightarrow{x}+A^T\overrightarrow{b} = 0, \\ \nabla_{\overrightarrow{\lambda}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b} = 0. \end{cases}$$

Note que $\nabla_{\overrightarrow{\lambda}}\Phi\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda}\right) = 0$ es equivalente a introducir la restricción $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

De la ecuación $2\overrightarrow{x}+A^T\overrightarrow{\lambda} = 0$, obtenemos $\overrightarrow{x} = -\frac{1}{2}A^T\overrightarrow{\lambda}$ con lo cual

$$0 = A\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b} = A\left(-\frac{1}{2}A^T\overrightarrow{\lambda}\right)-\overrightarrow{b} = -\frac{1}{2}AA^T\overrightarrow{\lambda}-\overrightarrow{b}$$

de donde

$$AA^T\overrightarrow{\lambda} = -2\overrightarrow{b}.$$

Como $R(A) = m$ y $AA^T \in M_{m\times m}[\mathbb{R}]$, se tiene que el rango de $AA^T$ es también $m$, esto es, $R\left(AA^T\right) = m$, con lo cual $AA^T$ es invertible. Luego

$$\overrightarrow{\lambda} = -2\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b}$$

y

$$\overrightarrow{x} = -\frac{1}{2}A^T\overrightarrow{\lambda} = -\frac{1}{2}A^T\left[-2\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b}\right] = A^T\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b}.$$

Así,

$$\widehat{x} = A^T\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b} \text{ es solución de } \underset{\overrightarrow{x}\in S}{\text{Min}}\|\overrightarrow{x}\|^2.$$

Verifiquemos que $\widehat{x} \in S$ y que $\|\widehat{x}\|^2 \leq \|\overrightarrow{x}\|^2 \quad \forall \overrightarrow{x} \in S$. Se tiene

$$A\widehat{x} = A\left(A^T\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b}\right) = AA^T\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b} = I\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b},$$

donde $I \in M_{m\times m}[\mathbb{R}]$ es la identidad. Así, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ que muestra $\widehat{x} \in S$.

Sea $\overrightarrow{x} \in S$. Entonces $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Se propone como ejercicio mostrar que $\|\widehat{x}\|^2 \leq \|\overrightarrow{x}\|^2 \quad \forall\overrightarrow{x} \in S$.

Algoritmo.

Para el cálculo de $\widehat{x} = A^T\left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b}$ se utiliza el algoritmo siguiente que evita la inversión directa de la matriz $AA^T$.

Sea $\overrightarrow{z} = \left(AA^T\right)^{-1}\overrightarrow{b}$ entonces $AA^T\overrightarrow{z} = \overrightarrow{b}$. Luego $\overrightarrow{x} = A^T\overrightarrow{z}$.

1. Calcular $B = AA^T$.
2. Aplicar el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones lineales $B\overrightarrow{z} = \overrightarrow{b}$.
3. Calcular $\widehat{x} = A^T\overrightarrow{z}$.

**Ejemplos**

1. Sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ con $a_i \neq 0, \quad i = 1, ..., n, \quad b \neq 0$. Consideramos la ecuación

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b.$$

Esta ecuación admite una infinidad de soluciones. Resolvemos el problema en norma mínima. Ponemos $A = (a_1, ..., a_n)$, $\overrightarrow{b} = b$, $\overrightarrow{x}^T(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_1x_1 + ... + a_nx_n = b.$$

Se tiene

$$B = AA^T = (a_1, ..., a_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

La solución de la ecuación $Bz = b$ es $z = \dfrac{b}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}$. Luego

$$\widehat{x} = A^Tz = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\frac{b}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2} = \begin{bmatrix} \frac{a_1b}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2} \\ \vdots \\ \frac{a_nb}{\sum\limits_{i}=1}{}^n a_i^2 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo la solución de la ecuación $x + 2y + z = 1$ es$\widehat{x}^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

2. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{r} 3x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 0. \end{array} \right.$ Tenemos $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Luego $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema de ecuaciones $B\overrightarrow{z} = \overrightarrow{b}$ :

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es $\overrightarrow{z}^T = \left[\frac{1}{11}, \frac{1}{6}\right]$.

Entonces $\widehat{x} = A^T\overrightarrow{z} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{66} \\ \frac{17}{66} \\ \frac{28}{66} \end{bmatrix}$.

## 6.11. Condicionamiento.

Sean $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz invertible, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el problema (P) siguiente: hallar $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

En general, los coeficientes de la matriz $A$ y los componentes del vector $\overrightarrow{b}$ son redondeados antes de ingresar al computador. Esto hace que no tratemos el problema (P) sino el sistema de ecuaciones lineales siguiente, llamado problema $(\widetilde{\mathrm{P}})$: $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$, de donde $\widetilde{A}$ es la matriz obtenida de $A$ por redondeo de sus coeficientes, $\widetilde{b}$ es obtenido de $\overrightarrow{b}$ por redondeo de sus componentes.

Un método aproximado para resolver $(\widetilde{\mathrm{P}})$ es el de eliminación gaussiana. Usando este método, hallamos un vector $\widetilde{x}$ que, en general, es diferente de $\overrightarrow{x}$. La pregunta que nos ponemos es: ¿cómo influencian estas perturbaciones en la solución del problema?.Consideramos dos casos:

Los coeficientes de la matriz $A$ son números de máquina y perturbamos el vector $\overrightarrow{b}$.

Los componentes de vector $\overrightarrow{b}$ son números de máquina y perturbamos los coeficientes de la matriz $A$.

Supongamos que $\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales $A(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} + \Delta\overrightarrow{b}$.

Las normas de matrices que utilizaremos a continuación son submultiplicativas, véase en el apéndice normas en $\mathbb{R}^n$ y normas de matrices. La norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ que utilizaremos, es la norma euclídea y la norma de matrices submultiplicativa es cualesquiera.

Puesto que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, se tiene entonces $A\Delta\overrightarrow{x} = \Delta\overrightarrow{b}$, o bien $\Delta\overrightarrow{x} = A^{-1}\Delta\overrightarrow{b}$. Resulta que $\|\Delta\overrightarrow{x}\| \leq |||A^{-1}||| \left\|\Delta\overrightarrow{b}\right\|$.

Como $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, entonces $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \|A\overrightarrow{x}\| \leq |||A||| \, \|\overrightarrow{x}\|$. Por lo tanto el error relativo de $\overrightarrow{x}$ definido por la relación $\frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|}$ se mayora por

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq \frac{|||A^{-1}||| \left\|\Delta\overrightarrow{b}\right\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq |||A^{-1}||| \, |||A||| \frac{\left\|\Delta\overrightarrow{b}\right\|}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|}.$$

El condicionamiento de la matriz $A$ se nota con $cond(A)$ y se define como sigue: $cond(A) = |||A^{-1}||| \, |||A|||$. El condicionamiento de una matriz es muy importante en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales así como en el cálculo de los valores y vectores propios. La calidad de las soluciones numéricas de los sistemas de ecuaciones lineales está ligado al condicionamiento de la matriz.

1. Puesto que $I = AA^{-1}$, entonces $1 \geq |||A||| \, \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| = cond\,(A)$. El condicionamiento de $A$ mide la sensibilidad del error relativo de la solución del sistema de ecuaciones a cambios o perturbaciones en el vector $\overrightarrow{b}$. Se dice que el sistema de ecuaciones lineales está mal condicionado si la matriz $A$ está mal condicionada, es decir que el número $cond\,(A)$ es muy grande.

2. Sea $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ una matriz invertible, $\widetilde{A}$ la matriz perturbada de $A$. Consideramos los sistemas de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, y, $\widetilde{A}\widetilde{x} = \overrightarrow{b}$. Tenemos entonces que

$$0 = A\overrightarrow{x} - \widetilde{A}\widetilde{x} = \left(A - \widetilde{A}\right)\overrightarrow{x} + \widetilde{A}\left(\overrightarrow{x} - \widetilde{x}\right),$$

con lo cual

$$\widetilde{A}\left(\overrightarrow{x} - \widetilde{x}\right) = \left(\widetilde{A} - A\right)\overrightarrow{x}.$$

Notamos $\Delta\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - \widetilde{x}$, $\Delta A = \widetilde{A} - A$. Por la igualdad precedente, se tiene $\widetilde{A}\Delta\overrightarrow{x} = \Delta A\overrightarrow{x}$. Para estimar el error relativo $\frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|}$, probemos primeramente el teorema siguiente:

**Teorema 11** *Sea $B \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ tal que $|||B||| < 1$. Entonces $(I+B)^{-1}$ existe, y*

$$\left|\left|\left|(I+B)^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{1 - |||B|||}.$$

**Demostración.** Sea $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal definida por $T_B = (\overrightarrow{x}) = (I+B)\overrightarrow{x}$. Probemos que el núcleo de la transformación $T$, esto es $\ker(T_B) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid T_B(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$ se reduce al vector nulo, es decir $\ker(T_B) = \{\overrightarrow{0}\}$ y de esta igualdad se deduce que $T_B$ es inyectiva. Utilizando la desigualdad

$$|\|\overrightarrow{x}\| - \|\overrightarrow{y}\|| \leq \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|, \quad \forall\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n,$$

y poniendo $\overrightarrow{y} = -B\overrightarrow{x}$, para $\overrightarrow{x} \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \|T_B(\overrightarrow{x})\| &= \|(I+B)\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x} + B\overrightarrow{x}\| \geq \|\overrightarrow{x}\| - \|B\overrightarrow{x}\| \\ &\geq \|\overrightarrow{x}\| - |||B|||\,\|\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\|\,(1 - |||B|||) > 0, \end{aligned}$$

pues $|||B||| < 1$ y $\|\overrightarrow{x}\| > 0$. Luego $\ker(T_B) = \{0\}$, es decir que $T_B$ es invertible o sea $T_B^{-1}$ existe y como la matriz asociada a $T_B^{-1}$ relativa a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es $(I+B)^{-1}$. Se tiene entonces la existencia de $(I+B)^{-1}$.

Probemos que $\left|\left|\left|(I+B)^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{1-|||B|||}$. Sea $C = (I+B)^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= |||I||| = |||(I+B)\,C||| = |||C + BC||| \geq |||C||| - |||BC||| \\ &\geq |||C||| - |||B|||\,|||C||| = |||C|||\,(1 - |||B|||), \end{aligned}$$

de donde $|||C||| \leq \frac{1}{1-|||B|||}$. ■

**Teorema 12** *Sea $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ no singular, $B = A(I+F)$, donde $F \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ tal que $|||F||| < 1$ y $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. Sean $\overrightarrow{x}$, $\Delta\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ las soluciones respectivamente de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, y, $B(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$. Se tiene entonces las siguientes estimaciones:*

*i)* $$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq \frac{|||F|||}{1 - |||F|||}.$$

*ii)* $$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq \frac{cond\,(A)}{1 - cond\,(A)\,\frac{|||B-A|||}{|||A|||}}, \quad si\ cond\,(A) = \frac{|||B-A|||}{|||A|||} < 1.$$

**Demostración.** Por definición de $\overrightarrow{x}$ y $\Delta\overrightarrow{x}$, tenemos

$$\begin{aligned} B\Delta\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} - B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} - BA^{-1}\overrightarrow{b} = \left(I - BA^{-1}\right)\overrightarrow{b} = \left(I - BA^{-1}\right)AA^{-1}\overrightarrow{b} = (A-B)\,A^{-1}\overrightarrow{b} \\ &= (A-B)\,\overrightarrow{x}. \end{aligned}$$

Resulta que $B$ es una perturbación de $A$.

i. Por el teorema precedente, la matriz $I+F$ es no singular y por hipótesis $A$ es igualmente no singular, se tiene entonces que $B = A(I+F)$ es no singular. Además $\Delta\overrightarrow{x} = B^{-1}(A-B)\,\overrightarrow{x}$. Entonces $\dfrac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq \left|\left|\left|B^{-1}(A-B)\right|\right|\right|$. Pero

$$\begin{aligned} B^{-1}(A-B) &= (I+F)^{-1}A^{-1}(A-B) = (I+F)^{-1}\left(I - A^{-1}B\right) = (I+F)^{-1}(I-(I+F)) \\ &= -(I+F)^{-1}F, \end{aligned}$$

$$\left|\left|\left|B^{-1}(A-B)\right|\right|\right| = \left|\left|\left|(I+F)^{-1}F\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|(I+F)^{-1}\right|\right|\right|\,|||F||| \leq \frac{|||F|||}{1-|||F|||}.$$

Así $\dfrac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq \dfrac{|||F|||}{1-|||F|||}$.

ii. Puesto que $F = A^{-1}B - I = A^{-1}(B-A)$, entonces $|||F||| \leq \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|\,|||B-A|||$. Resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} &\leq \frac{|||F|||}{1-|||F|||} \leq \frac{\left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|\,|||B-A|||}{1-|||A^{-1}|||\,|||B-A|||} \\ &= \frac{\left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|\,|||A|||}{1-|||A^{-1}|||\,|||A|||\,\frac{|||B-A|||}{|||A|||}}\,\frac{|||B-A|||}{|||A|||} = \frac{cond\,(A)}{1-cond\,(A)\,\frac{|||B-A|||}{|||A|||}}\,\frac{|||B-A|||}{|||A|||}. \end{aligned}$$

Observe que si $B$ es una perturbación de $A$ tal que $|||B-A||| = \frac{1}{|||A^{-1}|||}$, entonces $cond\,(A) = \dfrac{|||A|||}{|||B-A|||}$.

■

Consideremos nuevamente el problema (P): $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Se perturban los datos $A$ y $\overrightarrow{b}$ respectivamente por $\Delta A$ y $\Delta\overrightarrow{b}$, lo que da un resultado perturbado $\Delta\overrightarrow{x}$ de $\overrightarrow{x}$. Se tiene entonces $(A+\Delta A)(\overrightarrow{x}+\Delta\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} + \Delta\overrightarrow{b}$. Por el teorema precedente, si $1 - cond\,(A)\,\frac{|||B-A|||}{|||A|||} > 0$, y como $B$ es una perturbación de $A$, esto es, $B - A = \Delta A$, entonces $1 - \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|\,|||\Delta A||| > 0$ de donde $|||\Delta A||| < \frac{1}{|||A^{-1}|||}$. Se prueba entonces que

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{x}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \leq \frac{cond\,(A)}{1-cond\,(A)\,\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}}\left(\frac{\left\|\Delta\overrightarrow{b}\right\|}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|} + \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}\right).$$

**Ejemplo**

Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \varepsilon x + 1000y = 1 \\ x + 1000y = 2, \end{cases}$ donde $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq 1$. Apliquemos el método de eliminación gaussiana sin pivoting. Tenemos $\begin{cases} \varepsilon x + 1000y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)1000y = 2 - \frac{1}{\varepsilon} = 2 - \varepsilon^{-1}, \end{cases}$ de donde

$$\begin{aligned} y &= \frac{2-\varepsilon^{-1}}{(1-\varepsilon^{-1})\,1000} \\ x &= \frac{1-1000y}{\varepsilon} = \frac{1-1000\left(\frac{2-\varepsilon^{-1}}{(1-\varepsilon^{-1})1000}\right)}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon^{-1}-2+\varepsilon^{-1}}{\varepsilon\,(1-\varepsilon^{-1})} = -\frac{1}{\varepsilon-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Así, para $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon \neq 1$, la solución del sistema de ecuaciones es $\left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{1-\varepsilon}, \\ y = \frac{2-\varepsilon^{-1}}{(1-\varepsilon^{-1})} 10^{-3}. \end{array} \right.$ Para $\varepsilon = 10^{-4}$, calculamos la solución $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ con tres cifras de precisión:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2-\varepsilon^{-1}}{(1-\varepsilon^{-1})\,10^3} = \frac{2-10^4}{(1-10^4)\,10^3} = \frac{-9998}{-9999 \times 10^3} \simeq 0{,}999 \times 10^{-3}, \\ x &= \frac{1-10^3 y}{\varepsilon} \simeq \frac{1-10^3 \times \left(0{,}999 \times 10^{-3}\right)}{10^{-4}} = \frac{1-0{,}999}{10^{-4}} = \frac{10^{-3}}{10^{-4}} = 10. \end{aligned}$$

Apliquemos ahora el pivoting parcial. Tenemos

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 1000y = 2 \\ \varepsilon x + 1000y = 1, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x + 1000y = 2, \\ 1000\,(1-\varepsilon)\,y = 1 - 2\varepsilon, \end{array} \right.$$

de donde $y = \frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)10^3}$, con lo que $x = 2 - 1000y = 2 - 10^3 \left(\frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)10^3}\right) = 2 - \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Para $\varepsilon = 10^{-4}$, tenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-2\varepsilon}{10^3\,(1-\varepsilon)} = \frac{1-2\times 10^{-4}}{10^3\,(1-10^{-4})} = \frac{0{,}9998}{999{,}9} \simeq 10^{-3}, \\ x &= 2 - 10^3 y = 2 - 10^3 \times 10^{-3} \simeq 2. \end{aligned}$$

Luego $x \simeq 2, \quad y \simeq 10^{-3}$.

La solución exacta es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1}{1-10^{-4}} = \frac{1}{0{,}9999} = 1{,}000111 \simeq 1{,}001, \\ y &= \frac{2\varepsilon - 1}{(\varepsilon - 1)\,10^3} = \frac{0{,}0002-1}{(0{,}0001-1)\,10^3} = \frac{0{,}9998}{999{,}9} \simeq 0{,}9999 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

En resumen, la solución del sistema de ecuaciones lineales con $\varepsilon = 10^{-4}$ se indica a continuación

$$\begin{array}{rcl} \text{Sin pivoting} & : & x \simeq 10, \quad y \simeq 0{,}999 \times 10^{-3}, \\ \text{Con pivoting} & : & x \simeq 2, \quad y \simeq 10^{-3} \\ \text{Exacta} & : & x = 1{,}0001, \quad y \simeq 0{,}9999 \times 10^{-3}. \end{array}$$

Vemos que la solución con pivoting parcial es más próxima de la solución exacta. Este fenómeno se debe al condicionamiento de la matriz $A$ del sistema, esto es, si $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1000 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}$, tenemos $\|A\|_1 = 10001$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon-1} & -\frac{1}{\varepsilon-1} \\ -\frac{10^{-3}}{\varepsilon-1} & \frac{\varepsilon\times 10^{-3}}{\varepsilon-1} \end{bmatrix}$, y $\left\|A^{-1}\right\|_1 = \frac{1}{1-\varepsilon}$. El condicionamiento de la matriz $A$ está definido como

$$cond\,(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = \frac{10001}{1-\varepsilon}$$

luego $cond\,(A) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 10001, \quad cond\,(A) \underset{\varepsilon\longrightarrow 1}{\longrightarrow} -\infty$.

El número de condicionamiento depende de la norma de matriz elegida. Este número de condicionamiento es bastante grande lo que nos dice que la matriz $A$ está mal condicionada. En esta clase de problemas es preciso resolver es sistema de ecuaciones lineales sea con el empleo del pivoting parcial o bien el pivoting total que mejora la precisión de la solución. Es importante también trabajar con más precisión: doble precisión y doble precisión extendida.

## 6.12. Ejercicios

1. Halle la solución de cada sistema de ecuaciones triangular superior.

**a)** $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 2y+5z=-1 \\ -4z=8. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 10x+3y-5z=4 \\ 8y+15z=-1 \\ 5z=-3. \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -x+2y-3z-2w=2 \\ -y+z=-3 \\ z+8w=0 \\ -4w=3. \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ -2x_2+x_3-x_4=1 \\ \frac{1}{3}x_3+x_4=-1 \\ \frac{1}{5}x_4=1. \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=0 \\ -2x_2+5x_3-x_4=1 \\ \frac{2}{7}x_3+\frac{12}{5}x_4=-1 \\ \frac{3}{5}x_4=1. \end{cases}$

2. Halle la solución de cada sistema de ecuaciones triangular inferior.

**a)** $\begin{cases} \frac{1}{5}x=-3 \\ x+3y=0 \\ 2x+y-6z=0. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x=0 \\ 5x+4y=-10 \\ -2x-3y-4z=2. \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2{,}3x=4{,}8 \\ 1{,}5x-2y=1{,}5 \\ -0{,}5x+3{,}2y-0{,}8z=2{,}3 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} 8x=72 \\ 3x+9y=93 \\ -5x+2y-z=15. \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 10x=20{,}2 \\ -2x-y=30{,}5 \\ 4x+7y+2z=90{,}3 \\ 5x-2{,}3y-z+4{,}5w=185. \end{cases}$

**f)** $\begin{cases} \frac{2}{3}x=-1 \\ 1{,}5x-\frac{1}{4}y=0 \\ 3{,}2x+4{,}8y+z=0 \\ x+1{,}5y+3z-4{,}5w=1. \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 0{,}25x=-1 \\ 1{,}5x-0{,}4y=0 \\ 8{,}2x-0{,}8y+2{,}2z=0 \\ 2{,}5x+3{,}5y-3{,}2z-4{,}8w=1. \end{cases}$

3. Con cada matriz triangular superior invertible $A$ que se propone, aplique el método de eliminación gaussiana para calcular $A^{-1}$

**a)** $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. **b)** $A=\begin{bmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. **c)** $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

**d)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$. **e)** $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

4. Aplique el método de eliminación gaussiana para calcular $A^{-1}$ con cada matriz triangular inferior invertible que en cada item se da.

**a)** $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$. **b)** $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$. **c)** $A=\begin{bmatrix} 2{,}3 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & -2 & 0 \\ -0{,}5 & 3{,}2 & -0{,}8 \end{bmatrix}$.

**d)** $A=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ 5 & -2{,}3 & -1 & 4{,}5 \end{bmatrix}$. **e)** $A=\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2{,}3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Con cada matriz $A$ que se da calcule $\det(A)$. Para el efecto, aplique el método de eliminación gaussiana y transforme la matriz $A$ en una triangular superior.

**a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. **c)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

**d)** $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. **e)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. **f)** $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. En cada item se propone un conjunto $S$. Calcule $\widehat{x} \in S$ tal que $\|\widehat{x}\|^2 = \min\limits_{\overrightarrow{x} \in S} \|\overrightarrow{x}\|^2$.

   **a)** $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$. **b)** $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - \dfrac{1}{4}y = -1\right\}$.

   **c)** $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 4\}$. **d)** $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 5\}$.

   **e)** $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - 2z + w = -2\}$.

   **f)** $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z + 2w = 10\}$.

7. En cada item se da un sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Aplicar el método de Crout para factorar $A$ en la forma $A = LU$. Verifique el resultado. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales equivalente $\begin{cases} L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b} \\ U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \end{cases}$. Verifique que $\overrightarrow{x}$ es solución del sistema de ecuaciones propuesto. Contabilice el número de operaciones elementales que realiza.

   **a)** $\begin{cases} x - 2z = 8 \\ 2x + y - z = 15 \\ 3x - y - 10z = 27, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (4, 5, -2)$. **b)** $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 10 \\ 3x + 4y - 7z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 60, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (3, 7, 5)$.

   **c)** $\begin{cases} 3x - 3y + 6z = -18 \\ x + y + 8z = -2 \\ -x - 4z = 3, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (1, 5, -1)$.

   **d)** $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 34 \\ x + 4y + 7z + 10w = 62 \\ x + 4y + 10z + 16w = 74 \\ x + 4y + 10z + 20w = 74, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (10, 6, 4, 0)$.

   **d)** $\begin{cases} 4x + \quad + 20w = 48 \\ y - z + 3w = 5 \\ -2y + 5z - 12w = -22 \\ 3x + 3y - 2z + 21w = 44, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (-3, -2, 2, 3)$.

   **f)** $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 \\ 3x_2 + 16x_3 + 28x_4 = 16 \\ 5x_2 + 26x_3 + 44x_4 = 26 \\ 2x_1 - 2x_2 + 32x_3 + 45x_4 + 2x_5 = 33, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (-1, 0, 1, 0, -1)$.

   **g)** $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 26 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 8x_4 + 15x_5 = 24 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 + 20x_5 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 11x_4 + 20x_5 = 32 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 24x_5 = 48, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T = (2, 1, 1, 1, 1)$.

8. En cada literal se da una matriz $A$. Pruebe que $A$ no se factora en la forma $LU$, con $L$ una matriz triangular inferior, $U$ matriz triangular superior tal que $u_{ii} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$.

   **a)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. **b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

**d)** $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. **e)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

9. Aplicar el método de Choleski para factorar la matriz $A$ del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ en la forma $A=L^TL$. Resuelva el sistema de ecuaciones equivalente $\begin{cases} L^T\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b} \\ L\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y} \end{cases}$. Compare con el vector $\overrightarrow{x}$ que se propone. Contabilice el número de operaciones elementales que realiza.

**a)** $\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 2x+5y+5z=19 \\ 3x+5y+11z=33, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T=(2,1,2)$. **b)** $\begin{cases} 4x+6y+8z=-8 \\ 6x+10y+12z=-10 \\ 8x+12y+80z=-336, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T=(5,2,-5)$

**c)** $\begin{cases} x+y+z+w=5 \\ x+5y+5z+5w=9 \\ x+5y+14z+14w=9 \\ x+5y+14z+30w=25, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T=(4,1,-1,1)$.

**d)** $\begin{cases} 16x_1+12x_4=-100 \\ x_2-2x_3+3x_4=15 \\ -2x_2+13x_3-3x_4=-15 \\ 12x_1+3x_2-3x_3+20x_4=-20, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T=(-10,0,0,5)$.

**e)** $\begin{cases} 4x_1+2x_2-4x_5=52 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4+5x_5=52 \\ 3x_2+25x_3+39x_4+53x_5=135 \\ 5x_2+39x_3+65x_4+85x_5=217 \\ -4x_1+5x_2+53x_3+85x_4+122x_5=231, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T=(12,7,3,1,0)$.

**f)** $\begin{cases} 4x_1+4x_2+2x_3+4x_4+4x_5+2x_6=0 \\ 4x_1+5x_2+7x_4+5x_5+3x_6=-3 \\ x_1+14x_3-4x_4-x_6=5 \\ 4x_1+7x_2-4x_3+22x_4+11x_5+5x_6=-14 \\ 2x_1+5x_2+11x_4+13x_5+5x_6=-1 \\ 2x_1+3x_2-x_3+5x_4+5x_5+28x_6=-1, \end{cases}$ $\overrightarrow{x}^T=(1,-1,0,-1,1,0)$.

10. En cada item se da una matriz $A$. Determine $A^TA$. Aplique el método de eliminación gaussiana para determinar los rangos $R(A)$ y $R\left(A^TA\right)$ de las matrices $A$ y $A^TA$. Compruebe que $R(A)=R\left(A^TA\right)$ es el que se indica.

**a)** $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $R(A)=3$. **b)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $R(A)=2$.

**c)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $R(A)=3$. **d)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $R(A)=2$.

**e)** $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $R(A)=3$. **f)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $R(A)=3$.

**g)** $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $R(A)=2$. **h)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, $R(A)=3$.

**i)** $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $R(A)=4$. **j)** $A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $R(A)=3$.

11. En cada item se propone un sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Estudie a la matriz $A$ del sistema para determinar si es estrictamente diagonalmente dominante, simétrica, definida positiva, monótona, etc. Aplique el método de eliminación gaussiana, el de factorización de Crout $LU$ y siempre que sea posible el de Choleski $L^TL$ y halle la solución del sistema. Contabilice el número de operaciones elementales que realiza con cada método.

**a)** $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^T = (5,8,8,5)\,.$$

**b)** $$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^T = (2,3,4,2)\,.$$

**c)** $$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 16 \\ 14 \\ 22 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^T = (2,3,3,2,1)$$

**d)** $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^T = (5,4,3,4,5)\,.$$

**e)** $$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -9 \\ 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^T = (-2,-1,0,1,2)\,.$$

**f)** $$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 6 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 7 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 21 \\ 13 \\ 19 \\ 45 \\ 79 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^T = (10,8,6,6,8,10)\,.$$

12. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ que satisface las dos condiciones siguientes: $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 2$ para $i,j = 1,\ldots,n$ y que $a_{ii} > |a_{i\,i-2}| + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + |a_{i\,i+2}|, \quad i = 1,\ldots,n, \ \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$.

**a)** Demuestre que el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene una única solución.

**b)** Defina una matriz $\widetilde{A}$ de $n \times 5$ de modo que contenga la información relevante de la matriz $A$.

**c)** Aplique el método de eliminación gaussiana y la definición de $\widetilde{A}$ para elaborar un algoritmo para hallar la solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

**d)** Aplique el método de factorización $LU$ y $\widetilde{A}$ para escribir un algoritmo para hallar la solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Defina matrices $\widetilde{L}$ y $\widetilde{U}$ apropiadas de modo que se reduzca significativamente el número de elementos a almacenar.

**e)** Suponga adicionalmente que $A$ es simétrica, ¿es $A$ definida positiva? En caso de ser, aplique la factorización de Choleski $L^TL$ y la definición de $\widetilde{A}$ para elaborar un algoritmo que permita calcular la solución del sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

**f)** Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 25 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Verifique las hipótesis de la matriz $A$. Definida $\widetilde{A}$ y aplique sus algoritmos para hallar la solución de dicho sistema y compare con $\overrightarrow{x}^T = (2, 5, 8, 5, 3)$.

13. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 18 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 21 \\ 96 \\ 66 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

**a)** Demuestre que la matriz $A$ de este sistema es simétrica, definida positiva y estrictamente diagonalmente dominante.

**b)** Aplique los métodos de eliminación gaussiana, factorización $LU$ de Crout y de Choleski para hallar la solución de tal sistema. Contabilice con cada método el número de operaciones elementales. Compare la solución con $\overrightarrow{x}^T = (0, 2, 5, 3, 1)$.

14. Considere el conjunto $S$ que se define. Halle $\widehat{x} \in S$ tal que $\|\widehat{x}\|^2 = \min\limits_{\overrightarrow{x} \in S} \|\overrightarrow{x}\|^2$.

**a)** $S = \left\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2. \end{array} \right. \right\}.$

**b)** $S = \left\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + z = 0 \\ x \quad - 2z = 1. \end{array} \right. \right\}$

**c)** $S = \left\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} x \quad - z = 2 \\ 2y + 3z = -1. \end{array} \right. \right\}.$

**d)** $S = \left\{ \overrightarrow{x}^T = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \right\}$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

**e)** $S = \left\{ \overrightarrow{x}^T = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \right\}$, con $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

## 6.13. Lecturas complementarias y bibliografía


1. Owe Axelsson, Iterative Solution Methods, Editorial Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

2. N. Bakhvalov, Métodos Numéricos, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.

3. Richard H. Bartels, John C. Beatty, Brian A. Barsky, An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Medeling, Editorial Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Mateo, California, 1987.

4. Jérõme Bastien, Jean-Noël Martin, Introduction à L'Analyse Numérique, Editorial Dunod, París, 2003.

5. Abraham Berman, Robert J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia,1994.

6. Rajendra Bhatia, Matrix Analysis, Editorial Springer-Verlag, New York, 1997.

7. E. K. Blum, Numerical Analysis and Computation. Theory and Practice, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1972.

8. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México,2002.

9. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.

10. P. G. Ciarlet, Introduction á L'Analyse Numérique Matricielle et á l'Optimisation, Editorial Masson, París, 1990.

11. Elaine Cohen, Richard F. Riesenfeld, Gershon Elber, Geometric Modeling with Splines, Editorial A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2001.

12. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. Cálculo Numérico Fundamental, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.

13. James W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.

14. J. E. Dennis, Jr., Robert B. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1996.

15. V. N. Faddeva, Métodos de Cálculo de Algebra Lineal, Editorial Paraninfo, Madrid, 1967.

16. Francis G. Florey, Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1980.

17. Ferruccio Fontanella, Aldo Pasquali, Calcolo Numerico. Metodi e Algoritmi, Volumi I, II Pitagora Editrice Bologna, 1983.

18. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, Algebra Lineal, Editorial Publicaciones Cultural, S. A., México, 1982.

19. Noel Gastinel, Análisis Numérico Lineal, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1975.

20. M. K. Gavurin, Conferencias sobre los Métodos de Cálculo, Editorial Mir, Moscú, 1973.

21. Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, Análisis Numérico con Aplicaciones, Sexta Edición, Editorial Pearson Educación de México, México, 2000.

22. Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Matrix Computations, Second Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.

23. Günther Hǎmmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, Numerical Mathematics, Editorial Springer-Verlag, New York, 1991.

24. I. N. Herstein, J. Winter, Algebra Lineal y Teoría de Matrices, Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1989.

25. Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

26. Kenneth Hoffman, Ray Kunze, Algebra Lineal, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1987.

27. Franz E. Hohn, Algebra de Matrices, Editorial Trillas, México, 1979.

28. Roger A. Horn, Charles R. Johnson, Matrix Analysis, Editorial Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

29. Robert W. Hornbeck, Numerical Methods, Quantum Publishers, Inc., New York, 1975.

30. David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.

31. Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, Introducción al Algebra Lineal, Editorial Limusa, Noriega Editores, México, 1995.

32. P. Lascaux, R. Théodor, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Tome 1, Editorial Masson, París, 1986.

33. P. Lascaux, R. Théodor, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Tome 2, Editorial Masson, París, 1987.

34. Charles L. Lawson, Richard J. Hanson, Solving Least Squares Problems, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1995.

35. L. Lebart, A. Morineau, J.-P. Fénelon, Tratamiento Estadístico de Datos, Editorial Marcombo Boixareu Editores, Barcelona, 1985.

36. Peter Linz, Theoretical Numerical Analysis, Editorial Dover Publications, Inc., New York, 2001.

37. Rodolfo Luthe, Antonio Olivera, Fernando Schutz, Métodos Numéricos, Editorial Limusa, México, 1986.

38. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.

39. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.

40. Antonio Nieves, Federico C. Dominguez, Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, Tercera Reimpresión, Compañía Editorial Continental, S. A. De C. V., México, 1998.

41. Ben Noble, James W. Daniel, Algebra Lineal Aplicada, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1989.

42. Anthony Ralston, Introducción al Análisis Numérico, Editorial Limusa, México, 1978.

43. Fazlollah Reza, Los Espacios Lineales en la Ingeniería, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1977.

44. A. A. Samarski, Introducción a los Métodos Numéricos, Editorial Mir, Moscú, 1986.

45. Michelle Schatzman, Analyse Numérique, Inter Editions, París, 1991.

46. Francis Scheid, Theory and Problems of Numerical Analysis, Schaum's Outline Series, Editorial McGraw-Hill, New York, 1968.

47. M. Sibony, J. Cl. Mardon, Analyse Numérique I, Systèmes Linéaires et non Linéaires, Editorial Hermann, París, 1984.

48. Helmuth Späth, One Dimensional Spline Interpolation algorithms, Editorial A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

49. G. W. Stewart, Matrix Algotithms, Volume I: Basic Decomposition, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1998.

50. J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Editorial Springer-Verlag, 1980.

51. Gilbert Strang, Algebra Lineal y sus Aplicaciones, Editorial Fondo Educativo Interamericano, México, 1982.

52. V. Voïévodine, Principes Numériques D'Algèbre Linéaire, Editions Mir, Moscú, 1976.

53. E. A. Volkov, Métodos Numéricos, Editorial Mir, Moscú, 1990.

54. David S. Watkins, Fundamentals of Matrix Computations, Editorial John Wiley & Sons, New York, 1991