

## Capítulo 2

# Interpolación polinomial, derivación e integración numérica

### Resumen

En este capítulo nos interesamos en tres temas importantes: la interpolación polinomial, la derivación e integración numéricas. Estos temas los abordamos como formas lineales definidas en apropiados espacios vectoriales reales, es decir, en el ámbito de los espacios duales. Es por esto que iniciamos el estudio de este capítulo con los espacios duales. A continuación posicionamos el problema de la interpolación polinomial y tratamos la existencia del polinomio interpolante de Lagrange, obtenemos una estimación del error de interpolación así como algunos tipos de polinomios de interpolación de Lagrange más usados. Mediante la aplicación de los polinomios de Taylor con error, obtenemos procedimientos de cálculo aproximado de las derivadas primera y segunda de funciones reales, procedimiento que se generaliza al cálculo numérico de derivadas de orden superior. Introducimos los operadores en diferencias finitas y luego se construyen fórmulas de aproximación de derivadas de funciones reales como formas lineales. Estos resultados se extienden para el cálculo de las derivadas parciales primeras, segundas y el laplaciano de funciones reales en dos variables. Posteriormente, tratamos la integración numérica de funciones reales en la que nos limitados a obtener fórmulas de integración numérica conocidas como regla del punto medio, regla de los trapecios y regla de Simpson así como sus generalizaciones y la estimación del error. Estos resultados son aplicados al cálculo numérico de integrales dobles sobre dominios de los tipos I y II, es decir como integrales reiteradas.

### 2.1. Espacios duales

Los problemas de interpolación polinomial, derivación e integración numérica serán tratados como formas lineales definidas en apropiados espacios funcionales. Para ello comenzamos precisamente con los espacios duales y muy particularmente los espacios vectoriales reales de dimensión finita y sus duales que también son de dimensión finita. Asumimos que el lector tiene algún conocimiento sobre las aplicaciones lineales. En el anexo se resumen algunos resultados importantes, y al final del capítulo se citan algunos textos de álgebra lineal en los que se podrá consultar estos tópicos.

**Definición 1** Sea  $V$  un espacio vectorial. Toda aplicación lineal  $f$  de  $V$  en  $\mathbb{R}$  se llama funcional lineal sobre  $V$  o también forma lineal en  $V$ .

De la definición se tiene que  $f$  es un funcional lineal en  $V$  si y solo si satisface las dos condiciones siguientes:

- i)  $f$  es una función de  $V$  en  $\mathbb{R}$ .
- ii)  $f$  es lineal, esto es, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in V$ , se tiene  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ .

La propiedad ii) de la linealidad de  $f$  se escribe en una sola, así: si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in V$ ,  $f$  es lineal si y solo si  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$  y esta a su vez es equivalente a  $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ .

El conjunto de todos los funcionales lineales en  $V$  se designa con  $V^*$ . Con las operaciones habituales de adición de funciones “+” siguiente:

$$\forall f, g \in V^*, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in V,$$

y el producto de escalares por funciones “ $\cdot$ ”:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in V^*, \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in V,$$

el conjunto  $V^*$  es un espacio vectorial real denominado espacio dual de  $V$ .

### Ejemplos

1. Sean  $V = \mathbb{R}^2$  y  $T$  la función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  definida como  $T(x, y) = 2x + y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Entonces  $T$  es una forma lineal en  $\mathbb{R}^2$ , esto es,  $T \in (\mathbb{R}^2)^*$ . Efectivamente, sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

y de la definición de la función  $T$  se sigue que

$$\begin{aligned} T(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha(2x_1 + y_1) + \beta(2x_2 + y_2) = \alpha T(x_1, y_1) + \beta T(x_2, y_2). \end{aligned}$$

2. Sean  $V = C([a, b])$  el espacio de funciones reales continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Se define la función  $I$  de  $C([a, b])$  en  $\mathbb{R}$  como sigue:  $I(u) = \int_a^b u(x) dx \quad u \in C([a, b])$ . Entonces  $I$  es un funcional lineal sobre  $C([a, b])$ . Pues de las propiedades de la integral de Riemann siguientes:

$$\begin{aligned} \int_a^b (u(x) + v(x)) dx &= \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx \quad u, v \in C([a, b]), \\ \int_a^b \alpha u(x) dx &= \alpha \int_a^b u(x) dx \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad u \in C([a, b]), \end{aligned}$$

se deduce la linealidad de  $I$ .

3. Sean  $V = C^1(]a, b[)$  el espacio de funciones que poseen derivada continua en el intervalo abierto  $]a, b[$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ . Se define el funcional  $F$  sobre  $C^1(]a, b[)$  como a continuación se indica:

$$F(u) = \frac{du}{dx}(x_0) \quad u \in C^1(]a, b[).$$

Por las propiedades de la derivada siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u + v)(x_0) &= \frac{du}{dx}(x_0) + \frac{dv}{dx}(x_0) \quad u, v \in C^1(]a, b[), \\ \frac{d}{dx}(\alpha u)(x_0) &= \alpha \frac{du}{dx}(x_0) \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad u \in C^1(]a, b[). \end{aligned}$$

Se deduce que  $F$  es un funcional lineal sobre  $C^1(]a, b[)$ .

**Teorema 1** Si  $V$  es un espacio vectorial real de dimensión  $n$ , entonces  $\dim V^* = n = \dim V$ .

**Demostración.** Para el efecto, construiremos un conjunto de funcionales lineales  $\{f_1, \dots, f_n\}$  sobre  $V$  y mostraremos que tal conjunto es una base de  $V^*$ .

- i) Existencia de funcionales lineales sobre  $V$ .

Sea  $B_v = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ordenada de  $V$  y  $x \in V$ . Existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , se define  $f_i$  de  $V$  en  $\mathbb{R}$  como sigue:

$$f_i(x) = f_i\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \alpha_i \quad x \in V,$$

entonces  $f_i \in V^*$ . En efecto, sean  $x, y \in V$ , existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, \quad y = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \quad x + y = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \lambda_k) v_k,$$

de la definición de la función  $f_i$  se sigue :

$$\begin{aligned} f_i(x + y) &= f_i\left(\sum_{k=1}^n (\alpha_k + \lambda_k) v_k\right) = \alpha_i + \lambda_i = f_i\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) + f_i\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) \\ &= f_i(x) + f_i(y). \end{aligned}$$

Sea  $\beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\beta x = \beta \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \beta \alpha_k v_k,$$

luego

$$f_i(\beta x) = f_i\left(\sum_{k=1}^n \beta \alpha_k v_k\right) = \beta \alpha_i = \beta f_i\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \beta f_i(x).$$

Así,  $f_i \in V^* \quad i = 1, \dots, n$ .

ii) Denotamos con  $B_* = \{f_1, \dots, f_n\}$ . Probemos que el conjunto  $B_*$  es una base de  $V^*$ . Para ello mostramos que  $B_*$  genera a  $V^*$  y es linealmente independiente.

a) Mostramos que  $B_*$  genera a  $V^*$ . Como  $B_* \subset V^*$  se sigue que el subespacio generado por  $B_*$ , que se denota con  $L(B_*) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}$  está contenido en  $V^*$ , esto es,  $L(B_*) \subset V^*$ .

Probemos que  $V^* \subset L(B_*)$ . Sea  $f \in V^*$  y  $x \in V$ . Existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ . Entonces

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(v_k),$$

y de la definición de  $f_i$ , se tiene

$$f_i(x) = f_i\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n,$$

luego

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f(v_k) f_k(x).$$

Ponemos  $\beta_k = f(v_k)$ . Resulta

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) \quad \forall x \in V,$$

que muestra que  $f$  es combinación lineal de los elementos de  $B_*$ . Así,  $f \in L(B_*)$ , o sea  $V^* \subset L(B_*)$ . En conclusión,  $V^* = L(B_*)$ .

b) Probemos que  $B_*$  es linealmente independiente. Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  y consideremos la combinación lineal nula  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ . Note que  $\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)$  es un funcional lineal sobre  $V$ .

Entonces,  $\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in V$ . Por la definición del funcional  $f_i$ , para  $x = v_j$  se tiene  $f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$  entonces para  $x = v_1$ , obtenemos

$$0 = \lambda_1 f_1(v_1) + \cdots + \lambda_n f_n(v_1) = \lambda_1,$$

para  $x = v_2$ , se deduce

$$0 = \lambda_1 f_1(v_2) + \cdots + \lambda_n f_n(v_2) = \lambda_2,$$

así sucesivamente, para  $x = v_n$  se obtiene

$$0 = \lambda_1 f_1(v_n) + \cdots + \lambda_n f_n(v_n) = \lambda_n.$$

Consecuentemente,

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

que prueba que el conjunto  $B_*$  es linealmente independiente.

De i) y ii) se tiene  $B_*$  es una base de  $V^*$ , por lo tanto  $\dim V^* = n$ . ■

El conjunto  $B_* = \{f_1, \dots, f_n\}$  se le llama base dual de  $V^*$ . Observe que  $f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$  Note además que si  $f \in V^*$ ,  $B_v = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $B_* = \{f_1, \dots, f_n\}$  la base dual de  $B_v$ . En la parte ii) a) precedente se obtuvo para  $f \in V^*$  la representación siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f(v_k) f_k(x) \quad \forall x \in V,$$

que lo denominamos representación de  $f$  con respecto de las bases  $B_v$  y  $B_*$ . Escribiremos

$$f = \sum_{k=1}^n f(v_k) f_k \quad \forall f \in V^*.$$

Esta representación de  $f$  la utilizaremos en las aplicaciones a los problemas de interpolación polinomial, derivación e integración numérica.

### Representación matricial

Sean  $B = \{f_1, \dots, f_n\}$  una base ordenada de  $V^*$  y  $f \in V^*$ . Existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ .

La matriz de  $f$  asociada a la base  $B$  viene dada por  $[f]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_{1 \times n}[\mathbb{R}]$ . En particular, si  $B_*$  es la base dual de la base  $B_v = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ , se tiene  $[f]_{B_*} = (f(v_1), \dots, f(v_n))$ .

### Ejemplo

Si  $V = \mathbb{R}^n$  y  $B_v = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ , entonces  $[f]_{B_*} = (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  y la función  $f$  se escribe como sigue:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f(\vec{e}_i) x_i.$$

Además, el espacio  $V^*$  es isomorfo a  $M_{1 \times n}[\mathbb{R}]$ , pues la función  $\Phi$  de  $V^*$  en  $M_{1 \times n}[\mathbb{R}]$  definida por  $\Phi(f) = [f]_B \quad \forall f \in V^*$  con  $B = \{f_1, \dots, f_n\}$  una base ordenada de  $V^*$ , es lineal biyectiva, es decir que se trata de un isomorfismo.

### Espacio Bidual

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $V^*$  el espacio dual de  $V$ . Sea  $x \in V$  fijo y  $h$  una función de  $V^*$  en  $\mathbb{R}$  definida como sigue:  $h(g) = g(x) \quad \forall g \in V^*$ . Se verifica que  $h$  es lineal. Efectivamente, sean  $g_1, g_2 \in V^*$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} h(g_1 + g_2) &= (g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x) = h(g_1) + h(g_2), \\ h(\alpha g_1) &= (\alpha g_1)(x) = \alpha g_1(x) = \alpha h(g_1). \end{aligned}$$

Resulta que  $h$  es un funcional lineal definido en  $V^*$ , o sea  $h \in (V^*)^*$ .

Escribimos  $V^{**}$  en vez de  $(V^*)^*$  y lo denominamos espacio bidual de  $V$ .

En el siguiente teorema se establece que si  $\dim V = n$ , los espacios  $V$  y  $V^{**}$  son isomorfos.

**Teorema 2** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ ,  $V^{**}$  el espacio bidual de  $V$ . La aplicación  $\varphi$  de  $V$  en  $V^{**}$  definida por  $\varphi(x) = h$  con  $h(g) = g(x) \quad \forall g \in V^*, \forall x \in V$  es un isomorfismo.

### **Demostración.**

Debemos mostrar que  $\varphi$  es lineal y biyectiva.

i) Probemos que  $\varphi$  es lineal.

Sean  $x, y \in V$ ,  $h_1, h_2 \in V^{**}$  tales que  $h_1(g) = g(x)$ ,  $h_2(g) = g(y) \quad \forall g \in V^*$ . Entonces

$$(h_1 + h_2)(g) = h_1(g) + h_2(g) = g(x) + g(y) = g(x + y).$$

Además, de la definición de la función  $\varphi$  se tiene  $\varphi(x) = h_1$ ,  $\varphi(y) = h_2$ ,  $\varphi(x + y) = h_3$  con

$$h_3(g) = g(x + y) = (h_1 + h_2)(g) \quad \forall g \in V^*,$$

luego

$$\varphi(x + y) = h_1 + h_2 = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Sea  $\alpha \in \mathbb{K}$ , de la definición de la función  $h_1$  y de  $\varphi$  se tiene

$$\begin{aligned} h_1(\alpha g) &= \alpha g(x) = \alpha h_1(g) \quad \forall g \in V^*, \\ \varphi(\alpha x) &= \alpha h_1 = \alpha \varphi(x) \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

ii) Mostremos que  $\varphi$  es biyectiva.

Comencemos con la inyectividad de  $\varphi$ . Sea  $B_v = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ordenada de  $V$  y  $B_* = \{f_1, \dots, f_n\}$  la base dual de  $V^*$ . Probemos que  $\ker(\varphi) = \{0\}$ .

Sea  $x \in \ker(\varphi)$ . Entonces  $\varphi(x) = 0$ . Supongamos que  $x \neq 0$ . Existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  y como  $x \neq 0$ , existe algún  $j$  tal que  $\alpha_j \neq 0$ . Sea  $h \in V^{**}$  definido por  $h(g) = g(x) \quad \forall g \in V^*$ . En particular, para  $g = f_j$  se tiene

$$h(f_j) = f_j(x) = f_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(v_i) = \alpha_j \neq 0.$$

Así,  $x \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$  o sea  $h = 0 \Rightarrow x = 0$ , de donde  $0 = g(0) = h(g) \quad \forall g \in V^*$ , por lo tanto

$$0 = \varphi(x) \Rightarrow x = 0,$$

y en consecuencia  $\varphi$  es inyectiva.

Probemos que  $\varphi$  es sobreyectiva. De la relación entre las dimensiones del núcleo y la imagen o recorrido de una aplicación lineal en espacios de dimensión finita, se tiene

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Rec}(\varphi)) = n,$$

y como  $\ker(\varphi) = \{0\}$ , se sigue que  $\dim(\text{Rec}(\varphi)) = n$  y siendo  $\text{Rec}(\varphi) \subset V^{**}$  se sigue que  $V^{**} = \text{Rec}(\varphi)$ . consecuentemente  $\varphi$  es biyectiva. De i) , ii) y iii) se concluye que  $\varphi$  es un isomorfismo. ■

## 2.2. Interpolación polinomial

En el capítulo primero ya se trataron dos problemas de interpolación polinomial, el primero mediante funciones interpolantes constantes a trozos y el segundo mediante funciones interpolantes que son funciones afines a trozos. En esta sección, ampliamos lo dicho, más aún, nuestra primera tarea será demostrar la existencia de la función interpolante, luego construir de manera general los polinomios de interpolación de Lagrange y se concluye con el estudio del error. Para ello aplicaremos los resultados previos de los espacios duales.

### Existencia del polinomio interpolante de Lagrange.

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f$  una función definida en  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Suponemos que el valor numérico de  $f$  es únicamente conocido en  $n + 1$  puntos distintos  $x_i \in [a, b]$   $i = 0, \dots, n$ , y sean  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  tales valores. Suponemos que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Esta información se recoge en el conjunto

$$S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 0, \dots, n\}$$

denominado conjunto de puntos base.

La interpolación es un método de aproximación que permite construir una función  $\varphi$  de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

y para todo  $x \in [a, b]$ ,  $\varphi(x)$  es un valor aproximado de  $f(x)$  llamado valor interpolado de  $f(x)$ . La función  $\varphi$  se llama interpolante de  $f$ . Más aún, si  $\varepsilon(x)$  denota el error cometido en la interpolación, se tiene

$$f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x) \quad x \in [a, b],$$

la función  $\varepsilon$  definida sobre  $[a, b]$  se llama error de interpolación.

Designamos con  $C([a, b])$  el espacio de las funciones reales continuas en  $[a, b]$ . Este espacio, como ya se ha señalado anteriormente, es de dimensión infinita. Sea  $V = \mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$  el espacio de polinomios de grado  $\leq n$ . Se designa con  $\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  con  $x_{i-1} < x_i$   $i = 1, \dots, n$  una partición de  $[a, b]$ . Consideremos el problema siguiente:

dato  $f \in C([a, b])$ , hallar un polinomio  $P \in \mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$  tal que  $P(x_i) = f(x_i)$   $i = 0, 1, \dots, n$ .

Denotamos con  $B_v = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ , donde  $v_0(x) = 1, \dots, v_n(x) = x^n$   $x \in \mathbb{R}$ .

Definimos  $n + 1$  funcionales  $f_i$  sobre  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$  como sigue:

$$f_i(P) = P(x_i) \quad i = 0, \dots, n, \quad P \in \mathbb{K}_n[\mathbb{R}].$$

Entonces cada funcional  $f_i$  es lineal sobre  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ . Mas aún,  $\{f_0, \dots, f_n\}$  es una base del espacio dual  $(\mathbb{K}_n[\mathbb{R}])^*$ .

Mostremos que  $\{f_0, \dots, f_n\}$  es linealmente independiente.

Sean  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  y supongamos que  $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ , esto es

$$\lambda_0 f_0(P) + \dots + \lambda_n f_n(P) = 0 \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[\mathbb{R}],$$

en particular para los elementos de la base  $B$  se  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ , obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_0 f_0(v_0) + \dots + \lambda_n f_n(v_0) &= 0 \iff \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0, \\ \lambda_0 f_0(v_1) + \dots + \lambda_n f_n(v_1) &= 0 \iff \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n = 0, \\ &\vdots \\ \lambda_0 f_0(v_n) + \dots + \lambda_n f_n(v_n) &= 0 \iff \lambda_0 x_0^n + \dots + \lambda_n x_n^n = 0, \end{aligned}$$

que en forma matricial se expresa como sigue

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$  se le conoce como matriz de Gram. Como  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  son puntos distintos del intervalo  $[a, b]$ , las columnas de la matriz  $A$  son linealmente independientes por lo tanto el rango de la matriz  $A$  es  $n + 1$ , con lo que el sistema de ecuaciones:

$$\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } A \vec{\lambda} = 0,$$

con  $A$  la matriz de Gram, tiene una única solución  $\vec{\lambda} = \vec{0}$ . Consecuentemente

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

que prueba que el conjunto  $\{f_0, \dots, f_n\}$  es linealmente independiente y siendo

$$\dim \mathbb{K}_n[\mathbb{R}] = \dim (\mathbb{K}_n[\mathbb{R}])^* = n + 1,$$

resulta que  $\{f_0, \dots, f_n\}$  es una base de  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ .

Determinemos una base  $B = \{P_0, \dots, P_n\}$  de  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$  tal que  $B_*$  sea la base dual de  $B$ . Esta debe satisfacer la condición  $f_i(P_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$  y por la definición de cada  $f_i$ , se tiene  $f_i(P_j) = P_j(x_i)$ , de donde  $P_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$  que se conoce como condición de interpolación.

Se definen los polinomios  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$  como sigue:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} & x \in \mathbb{R}, \\ P_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} & x \in \mathbb{R}, \\ &\vdots \\ P_n(x) &= \frac{(x - x_0)(x_0 - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Note que en el polinomio  $P_0$  no figura en el numerador el término  $x - x_0$ , en  $P_1$  no figura el término  $x - x_1$ , así sucesivamente, en  $P_n$  no figura el término  $x - x_n$ . Además,

$$\begin{aligned} P_0(x_0) &= 1, & P_0(x_j) &= 0 & \text{si } j = 1, \dots, n, \\ P_1(x_1) &= 1, & P_1(x_j) &= 0 & \text{si } j = 0, 2, \dots, n, \\ &\vdots \\ P_n(x_n) &= 1, & P_n(x_j) &= 0 & \text{si } j = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Los polinomios  $P_0, P_1, \dots, P_n$  son linealmente independientes, por lo tanto forman una base de  $\mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ . Estos polinomios se llaman polinomios de interpolación de Lagrange.

Dado  $P \in \mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ , existen  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$ , y para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x)$ , particularmente para  $x = x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x_j) = \alpha_j,$$

de donde

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P(x_k) P_k(x).$$

Sea  $f \in C([a, b])$ . En el problema de la interpolación polinomial, buscamos un polinomio  $P \in \mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$  tal que

$$P(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, \dots, n.$$

Definimos

$$\hat{P}(x_i) = \sum_{k=0}^n f(x_k) P_k(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene  $\hat{P}(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$ , es decir  $\hat{P}$  es el polinomio interpolante de  $f$ .

**Definición 2** El operador de interpolación de Lagrange  $\Pi$  se define como sigue:

$$\Pi : \begin{cases} C([a, b]) \rightarrow \mathbb{K}_n[\mathbb{R}] \\ f \rightarrow \Pi(f), \end{cases}$$

$$\text{donde } \Pi(f) = \hat{P} = \sum_{j=0}^n f(x_j) P_j.$$

Sea  $\hat{x} \in [a, b]$  y  $F \in (\mathbb{K}_n[\mathbb{R}])^*$  el funcional definido por  $F(P) = P(\hat{x}) \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[\mathbb{R}]$ . Para cada  $f \in C([a, b])$ , de la composición de funciones, se tiene el siguiente resultado:

$$(F \circ \Pi)(f) = F(\Pi(f)) = F(\hat{P}) = F\left(\sum_{j=0}^n f(x_j) P_j\right) = \sum_{j=0}^n f(x_j) F(P_j) = \sum_{j=0}^n f(x_j) P_j(\hat{x}).$$

Así,  $G = F \circ \Pi$  es un funcional lineal sobre  $C([a, b])$ . Escribiremos

$$G(f) = \sum_{j=0}^n f(x_j) P_j(\hat{x})$$

al valor interpolado de  $f$  en el punto arbitrario  $\hat{x} \in [a, b]$ .

Este método de interpolación se conoce como interpolación polinomial de Lagrange.

**Nota:** En la práctica los polinomios de interpolación de Lagrange no son muy utilizados cuando el número de puntos base  $(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n$  es grande (más aún cuando los  $x_i$  son muy cercanos entre sí) ya que el grado del polinomio interpolante de Lagrange  $\hat{P}$  es igualmente grande dando lugar a la presencia de oscilaciones que afectan los resultados. Los polinomios de interpolación de Lagrange más utilizados son de grados  $n = 1, 2, 3$  y  $4$ .

En la figura siguiente se muestra la gráfica de una función  $f$  definida en  $[a, b]$  (línea continua), que suponemos es no negativa; y, la de un polinomio de interpolación de Lagrange construida sobre una partición  $\tau(m)$  de  $[a, b]$  (línea cortada).

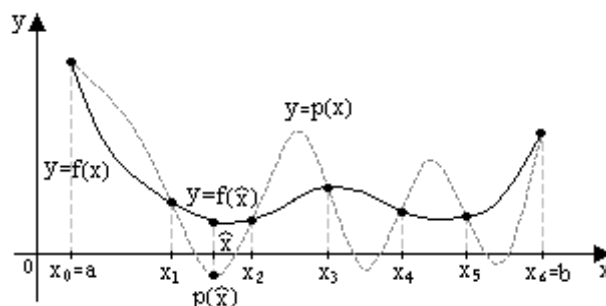


Figura 11



Note que en el punto  $\hat{x} \in [a, b[$ ,  $f(\hat{x}) > 0$  mientras que  $p(\hat{x}) < 0$ . Las fuertes oscilaciones de la función  $p$  conduce a resultados falsos.

Sean  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau(n) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Se denota con  $h_j = x_j - x_{j-1}$   $j = 1, \dots, n$ ,  $\hat{h} = \max\{h_j \mid j = 1, \dots, n\}$ . Cuando  $\tau(n)$  es la partición uniforme se tiene  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_j = jh$   $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\hat{h} = h$ .

Se define la función  $\omega$  en  $[a, b]$  como sigue:  $\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$   $x \in [a, b]$ . Claramente  $\omega$  es un polinomio de grado  $n+1$ , y  $\omega(x_i) = 0$   $i = 0, 1, \dots, n$ .

### Error de interpolación

**Teorema 3** Sean  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $f \in C^{n+1}([a, b])$ ,  $\tau(n) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Entonces, para cada  $\hat{x} \in [a, b]$ , existe  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (\hat{x} - x_j),$$

donde  $p$  es el polinomio de interpolación de Lagrange.

**Demostración.** Sea  $p$  el polinomio de interpolación de Lagrange. Se tiene  $p(x_j) = f(x_j)$   $j = 0, 1, \dots, n$ . Además, el grado del polinomio  $p$  es  $n$ .

Sea  $\hat{x} \in [a, b]$  un punto dado.

i) Si  $\hat{x} = x_j$  para algún  $j$ , esto es,  $\hat{x}$  es un punto de la partición  $\tau(n)$  entonces  $p(x_j) = f(x_j)$  y en este caso  $f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = 0$ .

ii) Supongamos que  $\hat{x} \neq x_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, n$ . Determinemos una constante  $k$  tal que la función  $\theta$  definida como  $\theta(x) = f(x) - p(x) - k\omega(x)$   $x \in [a, b]$ , se anule para  $x = \hat{x}$ , es decir,  $\theta(\hat{x}) = 0$ .

Para los puntos de la partición se tiene  $\theta(x_j) = f(x_j) - p(x_j) - k\omega(x_j) = 0$   $j = 0, 1, \dots, n$ , es decir que la función  $\theta$  tiene a cada  $x_j$  como raíz y como se busca  $k$  de modo que  $\theta(\hat{x}) = 0$ , entonces  $\theta$  tiene a  $n+2$  raíces en el intervalo  $[a, b]$ . Por el teorema de Rolle, la derivada  $\theta'$  tiene  $n+1$  raíces en el intervalo  $[a, b]$ , la derivada segunda  $\theta''$  tiene  $n$  raíces en el intervalo  $[a, b]$ , así sucesivamente,  $\theta^{(n+1)}$  tiene una raíz en el intervalo  $[a, b]$  y sea  $\xi$  tal raíz, esto es,  $\theta^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Por otro lado, para cada  $x \in [a, b]$  se tiene

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= f'(x) - p'(x) - k\omega'(x), \\ \theta''(x) &= f''(x) - p''(x) - k\omega''(x), \\ &\vdots \\ \theta^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x) - k\omega^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Como  $p$  es un polinomio de interpolación de grado  $n$ , entonces  $p^{(n+1)}(x) = 0$ . Además,  $\omega$  es un polinomio de grado  $n+1$ , luego  $\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ . Por lo tanto,

$$\theta^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k\omega^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)! \quad x \in [a, b].$$

En particular, para  $x = \xi$  se tiene  $\theta^{(n+1)}(\xi) = 0$  y en consecuencia

$$0 = \theta^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

de donde  $k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$  y la  $\theta$  queda definida como sigue:

$$\theta(x) = f(x) - p(x) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) \quad x \in [a, b].$$

Puesto que la constante  $k$  se elige de modo que  $\theta(\hat{x}) = 0$ , resulta

$$0 = \theta(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p(\hat{x}) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\hat{x})$$

de donde  $f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\hat{x})$ . ■

El resultado dado en el teorema se conoce como fórmula de error de interpolación de Lagrange, que lo notamos  $\xi(\hat{x})$ . Así,

$$\xi(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\hat{x}),$$

donde  $\xi \in [a, b]$  y  $\omega(\hat{x}) = \prod_{j=0}^n (\hat{x} - x_j)$ .

## Ejemplos de polinomios de interpolación de Lagrange

### 1. Interpolante constante a trozos.

Para  $n = 0$  se considera  $\tau = \left\{\frac{a+b}{2}\right\}$ . En este caso,  $\mathbb{K}_0[\mathbb{R}]$  es el espacio constituido por todas las funciones constantes en todo  $\mathbb{R}$ , esto es,

$$P \in \mathbb{K}_0[\mathbb{R}] \Leftrightarrow P(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

para alguna constante  $c \in \mathbb{R}$ .

La base de  $\mathbb{K}_0[\mathbb{R}]$  está constituida por  $B = \{v_0\}$  con  $v_0(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  y la base dual  $B_*$  de  $B$  es  $B_* = \{f_0\}$  con  $f_0(P) = P(x) \quad \forall P \in \mathbb{K}_0[\mathbb{R}]$ .

Para  $\hat{x} \in [a, b]$  y  $f \in C([a, b])$ , de la definición del valor interpolado de  $f$  en  $\hat{x} \in [a, b]$  se tiene

$$G(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) P_0(\hat{x}) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

El polinomio interpolante de  $f$  es la función  $p$  definida en  $[a, b]$  como

$$p(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad x \in [a, b].$$

En la figura siguiente se muestran las gráficas de la función  $f$  y de su interpolante lagrangeana  $p$ .

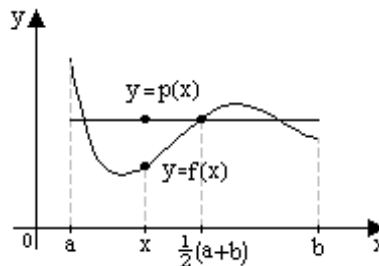


Figura 12

Sea  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau(m) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b\}$  con  $x_{i-1} < x_i \quad i = 1, \dots, m$  una partición de  $[a, b]$ . Se pone  $h_i = x_i - x_{i-1}$  la longitud del intervalo  $[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, m$ , y,  $\hat{h} = \max\{h_i \mid i = 1, \dots, m\}$ . Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . La función interpolante  $p$  de  $f$  está definida como

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{i=1}^m f(t_i) \chi_i(x) & x \in [a, b[, \\ p(b) = f(t_m), \end{cases}$$

donde  $\chi_i$  es la función indicatriz del intervalo  $[x_{i-1}, x_i[$  definida como  $\chi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_i[, \\ 1, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i[, \end{cases}$   
 $i = 1, \dots, m$ ,  $t_i = x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i$  el punto medio del intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$   $i = 1, \dots, m$ .

En la figura siguiente se muestra la gráfica de la función  $f$  y de su interpolante  $p$ , con  $m = 5$

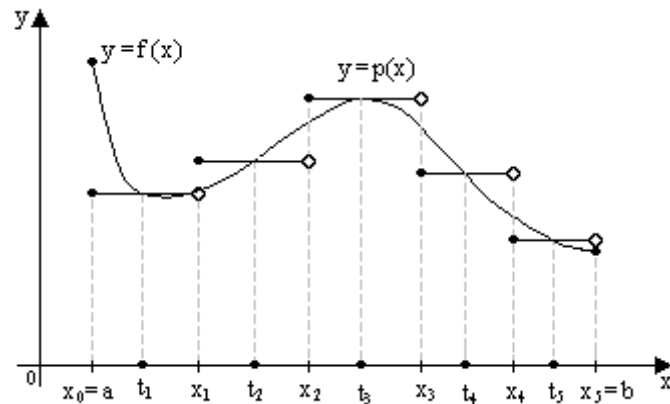


Figura 13

De la fórmula del error de interpolación de Lagrange, sea  $f \in C^1([a, b])$  y la partición del intervalo  $[a, b]$  se reduce al solo punto medio  $\frac{a+b}{2}$  de  $[a, b]$ , se tiene la siguiente estimación del error para  $\hat{x} \in [a, b]$ ;

$$\xi(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = f'(\xi) \left( \hat{x} - \frac{a+b}{2} \right)$$

para algún  $\xi \in [a, b]$ .

Sean  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau(m)$  una partición del intervalo  $[a, b]$ , aplicando el resultado precedente a  $\hat{x} \in [x_{j-1}, x_j]$   $j = 1, \dots, m$  se tiene

$$\varepsilon_j(\hat{x}) = f(\hat{x}) - f(t_j) = f'(\xi_j) (\hat{x} - t_j)$$

con  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ . Luego, si  $f \in C^1([a, b])$ , existe  $M > 0$  tal que  $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$  y en consecuencia

$$|f(\hat{x}) - f(t_j)| \leq |f'(\xi_j)| |\hat{x} - t_j| \leq Mh \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

### Ejemplo

Supongamos que  $f$  es la función definida como  $f(x) = 1 + e^x \quad x \in [0, 2]$ ,  $m = 10$  y  $\tau(10)$  la partición uniforme de  $[0, 2]$ ; esto es,  $h = \frac{2}{10} = 0,2$  y  $\chi_j = jh = 0,2j \quad j = 0, 1, \dots, 10$ ,  $h_j = h = 0,2$   $j = 1, \dots, 10$ . La función interpolante de  $f$  está definida como

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{j=1}^{10} f(t_j) \chi_j(x) & x \in [0, 2[, \\ p(2) = f(t_{10}), \end{cases}$$

donde  $t_j = x_{j-1} + \frac{1}{2}h_j = x_{j-1} + 0,1 \quad j = 1, \dots, 10$ .

Para  $x = 0,85$  se tiene

$$p(0,85) = \sum_{j=1}^{10} f(t_j) \chi_j(0,85) = 1 + e^{0,9},$$

pués  $0,85 \in [0,8, 1[$  para  $i = 5$ ,  $t_i = x_{i-1} + 0,5 = 0,9$ ,  $f(0,9) = 1 + e^{0,9}$ .

## 2. Interpolantes afines a trozos.

Para  $n = 1$ , se tiene  $\tau = \{a = x_0, x_1 = b\}$ . Entonces, los polinomios de interpolación de Lagrange son  $P_0, P_1 \in \mathbb{K}_1[\mathbb{R}]$  definidos como sigue:

$$P_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad x \in \mathbb{R}.$$

En la figura siguiente se muestran las gráficas de los polinomios  $P_0, P_1$ .

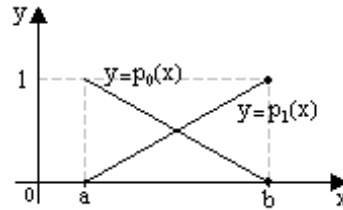


Figura 14

Para  $f \in C([a, b])$ , por la definición del valor interpolado de  $f$  en  $\hat{x} \in [a, b]$  se tiene

$$G(f) = \sum_{k=0}^1 f(x_k) P_k(x) = f(a) P_0(x) + f(b) P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad x \in [a, b],$$

es el valor interpolado de  $f$  en el punto  $x$ . Note que el polinomio interpolante de  $f$  está dado por

$$\Pi(f) = p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) P_k(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad x \in [a, b],$$

que representa la ecuación del segmento de recta que une los puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_1, f(x_1))$ .

En la figura siguiente se muestra las gráficas de  $f$  y del polinomio interpolante  $p$ .

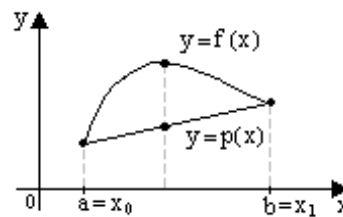


Figura 15

Para  $\hat{x} \in [a, b]$ , el error de interpolación  $\varepsilon(\hat{x})$  está definido como

$$\varepsilon(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f''(\xi)}{2!} (\hat{x} - a) (\hat{x} - b),$$

donde  $\xi \in [a, b]$  es elegido apropiadamente.

Sean  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau(m) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b\}$  con  $x_{i-1} < x_i$   $i = 1, \dots, m$ , una partición de  $[a, b]$ , se pone  $h_j = x_j - x_{j-1}$  y  $\hat{h} = \text{Max}\{h_j \mid j = 1, \dots, m\}$ . Apliquemos los resultados precedentes a cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$   $i = 1, \dots, m$ . Tenemos que la función interpolante  $v_h$  de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  está definida como

$$v(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) \varphi_i(x) \quad x \in [a, b],$$

y las funciones  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  están definidas como sigue:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{x-x_1}{h_1}, & x \in [a, x_1], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [a, x_1], \end{cases} \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}, & x \in ]x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_i] \end{cases} \quad i = 1, \dots, m-1,$$

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{m-1}}{h_m}, & x \in [x_{m-1}, b], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{m-1}, b]. \end{cases}$$

En las figuras siguientes se muestran las gráficas de  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_5$ , donde la partición de  $[a, b]$  está constituida por  $\tau(5) = \{x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = b\}$ .

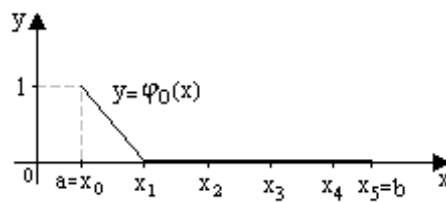


Figura 16

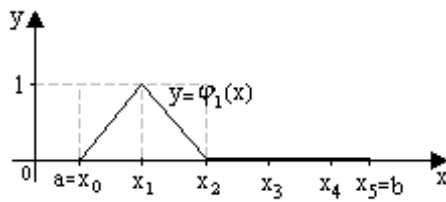


Figura 17

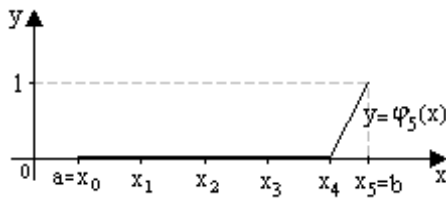


Figura 18

Note que  $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j, \end{cases}$  y  $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$   $x \in [a, b]$ . Las funciones  $\varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$  son similares a la función  $\varphi_1$ .

A las funciones  $\varphi_0, \dots, \varphi_m$  se les denomina funciones techo.

En la figura siguiente se muestra la gráfica de una función continua  $v$  definida en el intervalo  $[0, a]$  con  $a > 0$ , y la de una función interpolante  $v_h$  (segmentos de recta) de  $v$ . Se muestran también los

puntos de la partición de  $\tau(m)$  de  $[0, a]$ .

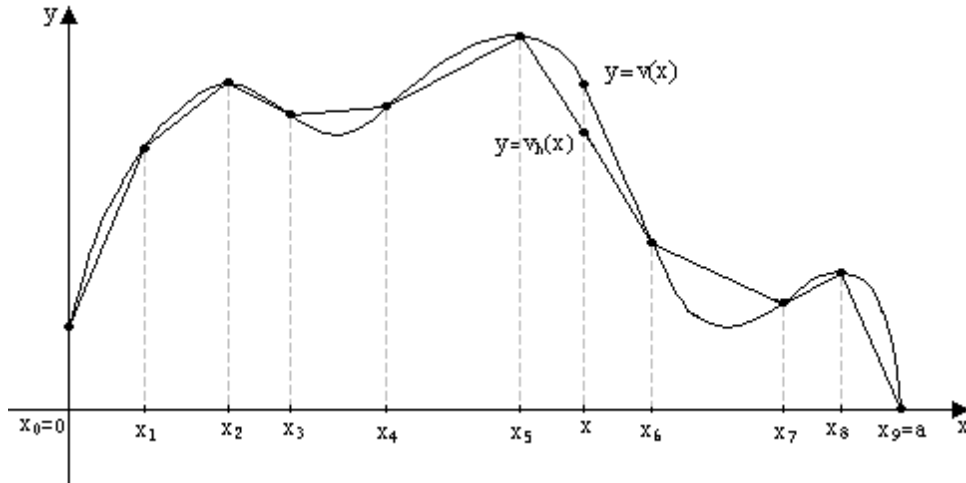


Figura 19

El error de interpolación se estima a partir de la fórmula

$$\varepsilon(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f''(\xi_j)}{2!} (\hat{x} - x_{j-1})(\hat{x} - x_j),$$

donde  $\hat{x} \in [x_{j-1}, x_j]$  y  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  elegido apropiadamente. Además,

$$|f(\hat{x}) - p(\hat{x})| \leq \frac{h_j^2}{2} |f''(\xi_j)| \leq \frac{M}{2} h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

donde  $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ .

### 3. Interpolantes cuadráticos a trozos.

Para  $n = 2$ , una partición del intervalo  $[a, b]$  es  $\tau = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$ . Los polinomios de interpolación de Lagrange  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{K}_2[\mathbb{R}]$  están definidos como a continuación se indican:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - b)}{(a - x_1)(a - b)} & x \in \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x) &= \frac{(x - a)(x - b)}{(x_1 - a)(x_1 - b)} & x \in \mathbb{R}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - a)(x - x_1)}{(b - a)(b - x_1)} & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestra las gráficas de las funciones  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  restringidas al intervalo  $[a, b]$ .

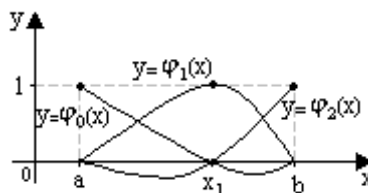


Figura 20

Sea  $f \in C([a, b])$ . El polinomio interpolante de  $f$  está dado por

$$\Pi(f) = p(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) \varphi_k(x) = f(a) \varphi_0(x) + f(x_1) \varphi_1(x) + f(b) \varphi_2(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

En la figura siguiente se muestra la gráfica de una función  $f$  y de su interpolante  $p$ .

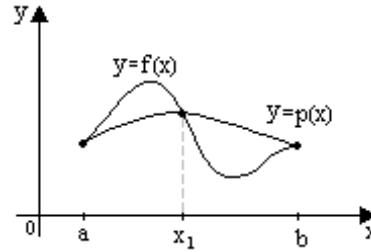


Figura 21

Para  $\hat{x} \in [a, b]$  y  $f \in C([a, b])$ , el valor interpolado de  $f$  está definido como sigue:

$$G(f) = p(\hat{x}) = f(a)\varphi_0(\hat{x}) + f(x_1)\varphi_1(\hat{x}) + f(b)\varphi_2(\hat{x}).$$

Sea  $f \in C^3([a, b])$ . El error de interpolación se define como

$$\varepsilon(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f'''(\xi)}{\xi!} (\hat{x} - a)(\hat{x} - x_1)(\hat{x} - b),$$

donde  $\xi \in [a, b]$ .

Sean  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau(n) = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Se pone  $h_j = x_j - x_{j-1}$   $j = 1, \dots, n$  y  $\hat{h} = \text{Max}\{h_j \mid j = 1, \dots, n\}$ . En el caso de una partición uniforme, se tiene  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_j = jh$   $j = 0, 1, \dots, n$  y  $\hat{h} = h$ .

La función interpolante  $v$  de  $f$  está definida como

$$v(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \psi_i(x) \quad x \in [a, b],$$

donde  $\psi_i$   $i = 0, 1, \dots, n$  son funciones que se obtienen de  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  aplicadas a cada intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  y que satisfacen las condiciones de interpolación  $\psi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$  A continuación se muestran las gráficas de las tres primeras funciones  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$ .

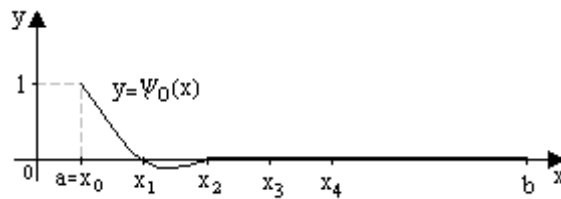


Figura 22

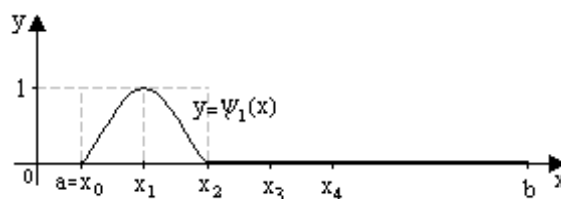


Figura 23

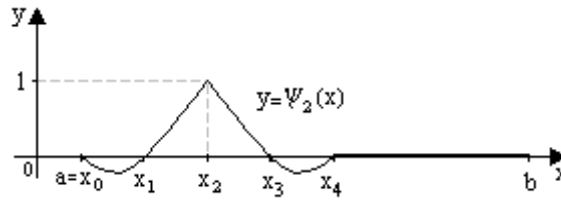


Figura 24

Note que  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  están definidas en  $[x_0, x_2]$  como sigue:

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \begin{cases} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, & x \in [x_0, x_2], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \psi_1(x) &= \begin{cases} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, & \text{si } x \in [x_0, x_2], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \psi_2(x) &= \begin{cases} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, & \text{si } x \in [x_0, x_2], \\ \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)}, & \text{si } x \in ]x_2, x_4[, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}\end{aligned}$$

Si  $f \in C^3([a, b])$ ,  $M = \text{Max}\{|f'''(x)| \mid x \in [a, b]\}$  y  $\hat{x} \in [a, b]$ , entonces se tiene la siguiente estimación del error:

$$\varepsilon_j = f(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \frac{f'''(\xi_j)}{3!} (\hat{x} - x_{j-1})(\hat{x} - x_j)(\hat{x} - x_{j+1})$$

donde  $\hat{x} \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$   $j = 1, \dots, n-1$ ; y, en consecuencia

$$|f(\hat{x}) - v(\hat{x})| \leq \frac{M}{6} \hat{h}^3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

### 2.3. Operadores de diferencias finitas y derivación numérica

Denotamos con  $C([a, b])$  es espacio de funciones reales continuas en  $[a, b]$ . Para  $m \in \mathbb{Z}^+$ , denotamos con  $C^m([a, b])$  es espacio de las funciones reales tales que la derivada m-ésima es continua en  $[a, b]$ .

Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $h \in \mathbb{R}$  con  $h \neq 0$  tal que  $\forall x \in ]a, b[, x+h \in [a, b]$ . En general,  $h$  es suficientemente pequeño. Las derivadas  $f'$  y  $f''$  en  $x \in ]a, b[$  se definen como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Para  $h \neq 0$  suficientemente pequeño, las derivadas  $f'(x)$  y  $f''(x)$  se aproximan mediante los siguientes cocientes:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{y} \quad f''(x) \simeq \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

más aún,  $f'(x)$  y  $f''(x)$  se escriben como

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + w_1(x, h), \quad f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + w_2(x, h),$$

con  $|w_1(x, h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ,  $|w_2(x, h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Es claro que cuando los residuos  $w_1(x, h)$ ,  $w_2(x, h)$  son suficientemente pequeños para  $h$  suficientemente pequeño, las dedivadas las podemos aproximar mediante los cocientes incrementales. Los numeradores de estos cocientes dan lugar a las denominadas diferencias finitas y por lo tanto a los operadores en diferencias finitas que a continuación se definen.



1. El operador de diferencia finita hacia adelante se nota y se define como sigue:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

2. El operador de diferencia finita hacia atrás se nota y se define como a continuación se indica:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h).$$

3. Operador de diferencia finita central de primer orden se nota y se define del modo siguiente:

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right).$$

### Aproximación de $f'(x)$ .

En el capítulo primero se propuso un método de cálculo de la derivada primera  $f'(x)$   $x \in ]a, b[$ . En esta parte, ampliamos dicho procedimiento de cálculo que incluye el error de aproximación. Además, veremos otros métodos similares de aproximación.

Supongamos que  $f \in C^3([a, b])$ . Por el desarrollo de Taylor, para  $h > 0$  se tiene,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1) \quad \text{con } \xi_1 \in [x, x+h], \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2) \quad \text{con } \xi_2 \in [x-h, x], \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(\xi_1), \\ \frac{\nabla f(x)}{h} &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(\xi_2), \\ \frac{\partial f(x)}{2h} &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)). \end{aligned}$$

Por hipótesis,  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  son acotadas en el intervalo  $[a, b]$ , luego existen  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$ ,  $M_3 > 0$  tales que  $|f'(x)| \leq M_1$ ,  $|f''(x)| \leq M_2$ ,  $|f'''(x)| \leq M_3$   $\forall x \in [a, b]$ , y  $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta f(x)}{h} - f'(x) \right| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = \left| \frac{h}{2!}f''(x) \right| \leq \frac{M}{2}h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \\ \left| \frac{\nabla f(x)}{h} - f'(x) \right| &= \left| \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - f'(x) \right| = \left| \frac{h}{2!}f''(x) \right| \leq \frac{M}{2}h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \\ \left| \frac{\partial f(x)}{2h} - f'(x) \right| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| = \left| \frac{h^2}{3!}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \right| \leq \frac{M}{3}h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Se observa que las diferencias finitas centrales aproximan mejor la derivada  $f'(x)$ , es decir que para  $h$  suficientemente pequeño y no nulo, el término  $\frac{M}{3}h^2$  va a cero más rápidamente que  $\frac{M}{2}h$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $x_0 \in ]a, b[$  y  $h \neq 0$ . Con frecuencia se presenta el problema de calcular  $f'(x_0)$ , con  $f$  una función en la que resulta difícil calcular la derivada o que únicamente se conocen los puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + h, y_1)$  y se requiere aproximar  $f'(x_0)$ . En este último caso se asume que  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_0 + h)$ .

Se define una aproximación de  $f'(x_0)$  como el cociente

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h},$$

y se denomina derivada numérica mediante una diferencia finita progresiva. Se tiene la siguiente estimación

$$|f'(x_0) - y'_0| \leq \frac{M}{2}h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Si  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_0 + h)$ , se define una aproximación  $f'(x_0)$  como el cociente

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h},$$

y se denomina derivada numérica mediante una diferencia finita regresiva. Tenemos la siguiente estimación

$$|f'(x_0) - y'_0| \leq \frac{M}{2}h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Si  $y_0 = f(x_0 - h)$ ,  $y_1 = f(x_0 + h)$ , se define  $y'_0$  como

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{2h},$$

y se denomina derivada numérica mediante una diferencia finita central. Se tiene

$$|f'(x_0) - y'_0| \leq \frac{M}{3}h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

### Ejemplo

Con el propósito de comparar las derivadas numéricas con la derivada de una función, asumimos que  $f$  es conocida.

Sea  $f(x) = \exp(\sin \sqrt{x})$   $x > 0$  y  $x_0 = 2$ . Entonces

$$f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \exp(\sin \sqrt{x}) \quad x > 0,$$

y en consecuencia  $f'(2) = \frac{\cos \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \exp(\sin \sqrt{2}) \simeq 0,148048539$ .

En la tabla siguiente se muestran aproximaciones de  $f'(2)$  con diferencias finitas progresivas (cálculos realizados con una calculadora de bolsillo)

$h$	$x_0 + h$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_0 + h)$	$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}$	$ f'(2) - y'_0 $
-0,001	1,999	2,68522882	2,685080592	0,148228	$1,79461 \times 10^{-4}$
-0,000001	1,999999	2,68522882	2,685228672	0,148000	$4,8539 \times 10^{-5}$
0,001	2,001	2,68522882	2,685376689	0,147869	$1,79539 \times 10^{-4}$
0,000001	2,000001	2,68522882	2,685228968	0,148	$4,8539 \times 10^{-5}$

Note que a medida que  $|h|$  se aproxima a cero,  $y'_0$  se aproxima a  $f'(2)$  y el error  $|f'(2) - y'_0|$  es cada vez más pequeño; sin embargo, con una calculadora de bolsillo, para  $h$  suficientemente pequeño y no nulo, se obtienen resultados como los siguientes: si  $h = 0,00000001$ ,  $x_0 + h = 2,000000001$ ,  $y_1 = f(x_0 + h) = 2,685228822$ , luego

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{2,685228822 - 2,68522882}{0,00000001} = 0,2,$$

que está muy alejado de  $f'(2)$ . Esto se debe a que  $y_0, y_1$  son valores aproximados con 9 cifras de precisión que es lo que se obtiene de la calculadora. Para mejorar los resultados se deben calcular en al menos doble precisión, o sea con al menos 16 cifras de precisión que es lo que se obtiene en un computador personal Pentium I o más avanzados.

En la tabla siguiente se muestran aproximaciones de  $f'(2)$  mediante el uso de diferencias finitas centrales. Los cálculos son realizados con una calculadora de bolsillo.

$h$	$x_0 - h$	$x_0 + h$	$y_0 = f(x_0 + h)$	$y_1 = f(x_0 - h)$	$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{2h}$	$ f'(2) - y'_0 $
0,001	1,999	2,001	2,685080592	2,685376689	0,1480485	$5,39 \times 10^{-8}$
0,0001	1,9999	2,0001	2,685214014	2,685243623	0,148045	$3,539 \times 10^{-6}$
0,00001	1,99999	2,00001	2,68522734	2,685230301	0,14805	$1,461 \times 10^{-6}$
0,000001	1,999999	2,000001	2,685228672	2,685228968	0,148	$4,8539 \times 10^{-5}$

Note que cuando  $h$  es muy pequeño, debido a los errores de redondeo y la representación en un punto fijo, el error tiende a aumentar ¿cuál es el valor de  $h$  a elegir para que  $\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \right|$  sea muy aceptable? Con una calculadora de bolsillo, obtener  $h$  para que la aproximación sea suficientemente buena (óptima) no es del todo evidente y depende de cada función  $f$ . En un computador personal se deben realizar los cálculos en al menos doble precisión y  $|h| \neq 0$  suficientemente pequeño.

### Aproximación de $f''(x)$ .

Los operadores de diferencias finitas de orden superior se definen por recurrencia en el sentido de la composición de operadores:

$$\Delta^{k+1} = \Delta^k \circ \Delta, \quad \nabla^{k+1} = \nabla^k \circ \nabla, \quad \delta^{k+1} = \delta^k \circ \delta \quad k \in \mathbb{N},$$

donde  $\Delta^0 = \nabla^0 = \delta^0 = I$  operador identidad.

Además, podemos construir operadores mixtos como los siguientes:  $\Delta \circ \nabla$ ,  $\nabla \circ \Delta$ ,  $\Delta \circ \delta$ ,  $\delta \circ \nabla$ , ..., que se escriben simplemente como  $\Delta \nabla$ ,  $\nabla \Delta$ ,  $\Delta \delta$ ,  $\delta \nabla$ , ... De manera general, si  $m, n \in \mathbb{N}$ , se define  $\Delta^m \circ \Delta^n = \Delta^m (\Delta^n)$  que se escribirá  $\Delta^m \Delta^n$ . De manera similar para las otras combinaciones.

Veamos algunos operadores de segundo orden. Se tiene los siguientes resultados.

1. Diferencia finita progresiva de segundo orden  $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ . Para toda  $f \in C([a, b])$ , se tiene

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \end{aligned}$$

obviamente, se supone que  $h > 0$  y  $x \in ]a, b[$  son tales que  $x+2h, x+h \in [a, b]$ .

2. Diferencia finita regresiva de segundo orden  $\nabla^2 = \nabla \circ \nabla$ . Para toda  $f \in C([a, b])$ , se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla(f(x) - f(x+h)) = f(x) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x+2h)) \\ &= f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h), \end{aligned}$$

con  $x, x+2h, x+h \in [a, b]$ ,  $h > 0$ .

3. Diferencia finita central de segundo orden  $\delta^2 = \delta \circ \delta$ . Para toda  $f \in C([a, b])$ , se tiene

$$\begin{aligned} \delta^2 f(x) &= \delta(\delta f(x)) = \delta\left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right) = f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h)) \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h), \end{aligned}$$

donde  $x, x+h, x-h \in [a, b]$ ,  $h > 0$ .

4. Operadores mixtos de diferencias finitas de segundo orden:  $\nabla \Delta = \nabla \circ \Delta$ ,  $\Delta \nabla = \Delta \circ \nabla$ ,  $\delta \Delta = \delta \circ \Delta$ , ... Para toda  $f \in C([a, b])$ , se tienen las siguientes diferencias finitas de segundo orden:

$$\begin{aligned} \nabla \Delta f(x) &= \nabla(\Delta f(x)) = \nabla(f(x+h) - f(x)) = f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h)) \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \delta^2 f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \nabla f(x) &= \Delta(f(x) - f(x-h)) = f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h)) \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \delta^2 f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\Delta f(x) &= \delta(f(x+h) - f(x)) = f\left(x + \frac{3h}{2}\right) - f\left(x + \frac{h}{2}\right) - \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right] \\ &= f\left(x + \frac{3h}{2}\right) - 2f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right),\end{aligned}$$

donde  $x, x + \frac{3h}{2}, x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2} \in [a, b]$ .

Se tiene  $\delta^2 = \nabla\Delta = \Delta\nabla$  a la que se le denomina diferencia finita central del segundo orden. Como ejercicio se proponen obtener otras diferencias finitas de segundo orden.

De la definición de derivada segunda de una función  $f$  en un punto  $x \in ]a, b[$ , se sigue que la derivada segunda  $f''(x)$  se aproxima como sigue:

$$\begin{aligned}f''(x) &\simeq \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}, \quad f''(x) \simeq \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}, \quad f''(x) \simeq \frac{\nabla^2 f(x)}{h^2}, \\ f''(x) &\simeq \frac{\delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{\Delta\nabla f(x)}{h^2} = \frac{\nabla\Delta f(x)}{h^2}.\end{aligned}$$

Supongamos que  $f \in C^4([0, L])$ . Se tiene

$$\frac{\Delta\nabla f(x)}{h^2} = \frac{\delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{\nabla\Delta f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{4!} (f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2)),$$

con  $\xi_1 \in [x, x+h]$ ,  $\xi_2 \in [x-h, x]$ , consecuentemente

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| = \frac{h^2}{4!} |f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2)| \leq \frac{M}{12} h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

### Ejemplo

Sea  $f$  la función real definida como  $f(x) = \exp(\sin \sqrt{x})$   $x > 0$ . Entonces, la derivada segunda de  $f$  está definida como

$$f''(x) = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 - \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} \right] \exp(\sin \sqrt{x}) \quad x > 0,$$

luego

$$f''(2) = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\cos \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2} + \cos \sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}} \right] \exp(\sin \sqrt{2}) \simeq -0,3603967624.$$

Aproximemos la derivada segunda mediante la aplicación de diferencias finitas centrales de segundo orden, esto es

$$f''(2) \simeq \frac{f(2+h) - 2f(2) + f(2-h)}{h} \quad h \neq 0,$$

y  $h$  suficientemente pequeño. Para realizar los cálculos usamos una calculadora de bolsillo.

Sea  $h = 0,02$ . Tenemos  $f(2,02) = 2,688117974$ ,  $f(2) = 2,68522882$ ,  $f(1,98) = 2,682195506$ . Luego

$$f'(2) \simeq \frac{f(2+h) - 2f(2) + f(2-h)}{h^2} = -0,3604.$$

Para  $h = 0,0001$ , se tiene  $f(2,0001) = 2,685243623$ ,  $f(2) = 2,68522882$ ,  $f(1,9999) = 2,685214014$ . Entonces

$$f'(2) \simeq \frac{f(2,0001) - 2f(2) + f(1,9999)}{(0,0001)^2} = -0,3.$$

Debido a la representación en punto fijo y a causa de los errores de redondeo se obtiene este resultado que es una aproximación no satisfactoria. Nuevamente, la pregunta es, ¿cómo elegir  $h \neq 0$  que nos rinda una buena aproximación de  $f''(2)$ ? Consideremos  $h = 0,005$ . Entonces

$$f'(2) \simeq \frac{f(2,005) - 2f(2) + f(1,995)}{(0,005)^2} = \frac{2,685964562 - 2 \times 2,68522882 + 2,684484068}{(0,005)^2} = -0,3604,$$

resultado que obtuvimos anteriormente. La explicación de este hecho es que en una calculadora de bolsillo se utiliza la representación en punto fijo, y por otro lado, los errores de redondeo y de truncamiento afectan el resultado.

### 2.3.1. Aproximación de derivadas de funciones reales como formas lineales

Sea  $\hat{x} \in [a, b]$  y  $f \in C^m([a, b])$ . Se nota  $D^m f = \frac{d^m f}{dx^m}(\hat{x})$  la derivada m-ésima de  $f$  en  $\hat{x}$ . Entonces  $D^m$  es un funcional lineal en  $C^m([a, b])$ .

Sean  $n \in \mathbb{Z}^+$  con  $n \geq m$ , y  $\tau(n) = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Se pone  $h_j = x_j - x_{j-1}$   $j = 1, \dots, n$  y  $\hat{h} = \max\{h_j \mid j = 1, \dots, n\}$ . En el caso de una partición uniforme, se tiene  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_j = jh$   $j = 0, 1, \dots, n$  y  $\hat{h} = h$ .

El operador de interpolación de Lagrange de  $f$  está definido como

$$\Pi(f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) P_k$$

y sea  $D_{num}^m = D^m \circ \Pi$ . Entonces, para todo  $f \in C^m([a, b])$  se tiene

$$D_{num}^m(f) = (D^m \circ \Pi)(f) = D^m(\Pi(f)) = D^m\left(\sum_{k=0}^n f(x_k) P_k\right) = \sum_{k=0}^n f(x_k) D^m P_k = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{d^m P_k}{dx^m}(\hat{x}).$$

Así,  $D_{num}^m$  es un funcional lineal sobre  $C^m([a, b])$ . Este funcional es la aproximación numérica de la derivada m-ésima de  $f$  en el punto  $\hat{x} \in [a, b]$ .

Sean  $n = m = 1$ , entonces  $\tau = \{a = x_0, x_1 = b\}$ ,  $\hat{x} \in [a, b]$  y

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x-b}{a-b} \Rightarrow \frac{dP_0}{dx}(x) = -\frac{1}{b-a}, \\ P_1(x) &= \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \frac{dP_1}{dx}(x) = \frac{1}{b-a}, \end{aligned}$$

luego

$$D_{num}^1(f) = \sum_{k=0}^1 f(x_k) \frac{dP_k}{dx}(\hat{x}) = f(a) \left(-\frac{1}{b-a}\right) + f(b) \left(\frac{1}{b-a}\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Observamos que la derivada de  $f$  en  $x = \hat{x}$  se aproxima como  $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ , cociente incremental arriba tratado.

Sean  $n = 2$ ,  $\tau(2) = \{x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b\}$  una partición uniforme de  $[a, b]$ , entonces  $h = \frac{b-a}{2}$ . Sea  $f \in C^2([a, b])$ . Para  $m = 1$ , se tiene

$$D_{num}^1(f) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) \frac{dP_k}{dx}(\hat{x}) = f(a) \frac{dP_0}{dx}(\hat{x}) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{dP_1}{dx}(\hat{x}) + f(b) \frac{dP_2}{dx}(\hat{x}).$$

En particular, para  $\hat{x} = \frac{a+b}{2}$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dx}\left(\frac{a+b}{2}\right) &= -\frac{1}{h}, \quad \frac{dP_1}{dx}\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad \frac{dP_2}{dx}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{h}, \\ D_{num}^1(f) &= \frac{f(b) - f(a)}{h}, \end{aligned}$$

que es la aproximación de la derivada mediante una diferencia finita central de primer orden. Escribiremos

$$\delta f(\hat{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{h}.$$

Para  $m = 2$ , obtenemos

$$D_{num}^2(f) = f(a) \frac{1}{h^2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{2}{h^2} + f(b) \frac{1}{h^2} = \frac{f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{h^2} = \frac{\delta^2 f}{h^2},$$

que corresponde a la aproximación de la derivada segunda mediante una diferencia finita central de segundo orden.

Mediante este proceso podemos construir otras formas lineales que son aproximaciones de las derivadas de una función real.

### 2.3.2. Aproximación numérica de derivadas parciales primeras, segundas y laplaciano

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $(a, b) \in \Omega$ ,  $h, k \in \mathbb{R}$  no nulos tales que  $(a + h, b)$ ,  $(a, b + k)$ ,  $(a + h, b + k) \in \Omega$ . Sea  $f$  una función real continua en  $\Omega$ . En un punto arbitrario  $(x, y)$  de  $\Omega$  notamos  $z = f(x, y)$ , a  $x$  lo denominamos primera variable, a  $y$  lo llamamos segunda variable de la función  $f$ .

Se define la derivada parcial de  $f$  respecto de  $x$  en el punto  $(a, b)$  que se nota  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  y se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

siempre que el límite exista. De manera similar, la derivada parcial de  $f$  respecto de  $y$  en el punto  $(a, b)$  se nota  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  y se define como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

siempre que el límite exista.

Note que fijado  $(a, b) \in \Omega$ , se define la función  $u$  como  $u(x) = f(x, b)$  con  $(x, b) \in \Omega$  y la derivada de  $u$  en  $x = a$  está definida como

$$u'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a + h) - u(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Así, si  $u(x) = f(x, b)$  donde  $(x, b) \in \Omega$  con  $b$  fijo, se tiene  $u'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ .

En forma análoga, fijado  $(a, b) \in \Omega$  se define la función  $v$  como  $v(y) = f(a, y)$  con  $(a, y) \in \Omega$ . Luego

$$v'(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(b + k) - v(b)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Así, si  $v(y) = f(a, y)$  donde  $(a, y) \in \Omega$  con  $a$  fijo, entonces  $v'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ .

Supongamos  $f \in C^3(\Omega)$  y  $h, k \in \mathbb{R}$  no nulos tales que  $(a + h, b)$ ,  $(a - h, b)$ ,  $(a, b + k)$ ,  $(a, b - k) \in \Omega$ . De estas dos observaciones y tomando en consideración los métodos de aproximación de la derivada de una función real en un punto, se tienen los siguientes resultados que permiten aproximar  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(a, b)}{h} &= \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1, b), \\ \frac{\nabla f(a, b)}{h} &= \frac{f(a - h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_2, b), \\ \frac{\delta f(a, b)}{h} &= \frac{f(a + h, b) - f(a - h, b)}{2h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{h^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi_1, b) + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi_2, b) \right), \end{aligned}$$

donde  $\xi_1$  se encuentra entre  $a$  y  $a + h$ ,  $\xi_2$  se encuentra en  $a$  y  $a - h$ , que corresponde a la aplicación de diferencias finitas progresivas, regresivas y centrales, respectivamente.

Resultados similares obtenidos para aproximar  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  que lo presentamos en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, \eta_1), \\ -\frac{f(a, b - k) - f(a, b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, \eta_2), \\ \frac{f(a, b + k) - f(a, b - k)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \frac{k^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, \eta_1) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, \eta_2) \right), \end{aligned}$$

con  $\eta_1$  entre  $b$  y  $b + k$ ,  $\eta_2$  entre  $b$  y  $b - k$ .

i) Para  $h \neq 0$  suficientemente pequeño, ponemos  $z_0 = f(a, b)$ ,  $z_1 = f(a + h, b)$ . El cociente

$$\tilde{f}_x(a, b) = \frac{z_1 - z_0}{h}$$

es una aproximación de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  mediante una diferencia finita progresiva.

ii) Si  $z_0 = f(a, b)$ ,  $z_1 = f(a - h, b)$  con  $h \neq 0$  suficientemente pequeño, el cociente

$$\tilde{f}_x(a, b) = -\frac{z_1 - z_0}{h}$$

es una aproximación de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  mediante una diferencia finita regresiva.

iii) Si  $h \neq 0$  suficientemente pequeño,  $z_1 = f(a + h, b)$ ,  $z_2 = f(a - h, b)$ , el cociente

$$\tilde{f}_x(a, b) = \frac{z_1 - z_2}{2h}$$

es una aproximación de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  mediante una diferencia finita central.

Obviamente las diferencias finitas centrales son las más utilizadas, por lo tanto  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  se aproximan con el uso de diferencias finitas centrales. A menos que se diga lo contrario supondremos que las derivadas parciales son aproximadas mediante el uso de las diferencias finitas centrales.

### Ejemplo

Considérese la función  $f$  definida como  $f(x, y) = x^3 y^4 \sin^2(xy)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 y^4 \sin^2(xy) + x^3 y^4 [2y \sin(xy) \cos(xy)] \\ &= (3 \sin(xy) + 2xy \cos(xy)) x^2 y^4 \sin(xy) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4x^3 y^3 \sin^2(xy) + x^3 y^4 (2x \sin(xy) \cos(xy)) \\ &= (4 \sin(xy) + 2xy \cos(xy)) x^3 y^3 \sin(xy) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Aproximemos  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$  mediante diferencias finitas centrales.

Primeramente, calculemos  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) &= (3 \sin(6) + 12 \cos(6)) \times 4 \times 81 \sin(6) = -967,2107771, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) &= (4 \sin(6) + 12 \cos(6)) \times 8 \times 27 \sin(6) = -627,9434139. \end{aligned}$$

Calculemos aproximaciones de  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$  mediante diferencias finitas centrales, esto es, calculemos

$$\tilde{f}_x(2, 3) = \frac{f(2 + h, 3) - f(2 - h, 3)}{2h},$$

para  $h = 0,002$ ,  $h = 0,00015$ ,  $h = 0,000001$ .

Para  $h = 0,002$ , se tiene

$$\tilde{f}_x(2, 3) = \frac{f(2,002, 3) - f(1,999, 3)}{2 \times 0,002} = \frac{48,67057704 - 52,53621459}{0,004} = -967,1593875.$$

Para este valor de  $h$ , se tiene la siguiente estimación del error:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) - \tilde{f}_x(2, 3) \right| = |-967,2107771 - (-967,1593875)| = 0,0513896.$$

Para  $h = 0,00015$  se tiene

$$\tilde{f}_x(2, 3) = \frac{f(2,00015, 3) - f(1,99985, 3)}{2 \times 0,00015} = \frac{50,44631203 - 50,7364752}{0,0003} = -967,2105667,$$

con lo que el error de aproximación es

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) - \tilde{f}_x(2, 3) \right| = |-967,2107771 - (-967,2105667)| = 0,0002104 = 2,104 \times 10^{-4}.$$

Para  $h = 0,000001$ , se tiene

$$\tilde{f}_x(2, 3) = \frac{f(2,000001, 3) - f(1,999999, 3)}{2 \times 0,000001} = \frac{50,59034995 - 50,59243632}{0,000002} = -1043,185,$$

en consecuencia, se tiene la siguiente estimación del error

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) - \tilde{f}_x(2, 3) \right| = |-967,2107771 - (-1043,185)| = 75,9742229.$$

Notamos que para este valor de  $h$ , el error ha aumentado significativamente. Esto se debe a los errores de redondeo y de truncamiento en el cálculo de  $f(2+h, 3)$  y de  $f(2-h, 3)$ , operaciones que se realizan en punto fijo con una precisión  $\varepsilon = 10^{-9}$ . Si se trabaja con doble precisión mejoran los resultados. No incluimos estos resultados y proponemos que los comprueben.

Pasemos ahora al cálculo aproximado de  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$  con diferencias finitas centrales, esto es

$$\tilde{f}_y(2, 3) = \frac{f(2, 3+k) - f(2, 3-k)}{2k} \quad k \neq 0.$$

Para  $k = 0,05$  se tiene

$$\tilde{f}_y(2, 3) = \frac{f(2, 3,05) - f(2, 2,95)}{2 \times 0,05} = \frac{22,97245043 - 84,69051462}{0,1} = -617,1806419,$$

y el error de aproximación

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) - \tilde{f}_y(2, 3) \right| = |-627,9434139 - (-617,1806419)| = 10,762772.$$

Se constata que esta aproximación no es aceptable.

Calculemos con  $k = 0,0015$ . Tenemos

$$\tilde{f}_y(2, 3) = \frac{f(2, 3,0015) - f(2, 2,9985)}{2 \times 0,0015} = \frac{49,65232798 - 51,53612921}{0,003} = -627,9337433,$$

y el error de aproximación

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) - \tilde{f}_y(2, 3) \right| = |-627,9434139 - (-627,9337433)| = 9,6706 \times 10^{-3},$$

con lo que se muestra que esta es una aproximación aceptable.

Sea  $k = 0,00011$ . Entonces

$$\tilde{f}_y(2, 3) = \frac{f(2, 3,00011) - f(2, 2,99989)}{2 \times 0,00011} = \frac{50,52225955 - 50,66040683}{0,00022} = -627,9421818,$$



y el error de aproximación

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) - \tilde{f}_y(2, 3) \right| = |-627,9434139 - (-627,9421818)| = 1,2321 \times 10^{-3},$$

lo que muestra que es una mejor aproximación que la anterior.

Las derivadas parciales segundas  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$  pueden ser aproximadas siguiendo la misma metodología empleada para el cálculo aproximado de las derivadas segundas de funciones reales de una sola variable. Así, para  $h \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$  puede aproximarse con diferencias finitas centrales, esto es,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \simeq \tilde{f}_{xx}(a, b) = \frac{f(a+h, b) - 2f(a, b) + f(a-h, b)}{2h} \quad h \neq 0,$$

$h$  suficientemente pequeño.

De manera similar, tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \simeq \tilde{f}_{yy}(a, b) = \frac{f(a, b+k) - 2f(a, b) + f(a, b-k)}{2k} \quad k \neq 0,$$

$k$  suficientemente pequeño.

Sea  $f \in C^2(\Omega)$  y  $(a, b) \in \Omega$ . El laplaciano de  $f$  en el punto  $(a, b) \in \Omega$  se denota  $\Delta f(a, b)$  y se define como

$$\Delta f(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b),$$

el mismo que puede ser aproximado como sigue:

$$\tilde{\Delta} f(a, b) = \frac{f(a+h, b) - 2f(a, b) + f(a-h, b)}{2h} + \frac{f(a, b+k) - 2f(a, b) + f(a, b-k)}{2k}$$

con  $h \neq 0$ ,  $k \neq 0$  suficientemente pequeño.

### Ejemplo

Sea  $f$  la función definida como  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \end{aligned}$$

luego

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0).$$

Las funciones  $f$  tales que  $\Delta f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$  se llaman funciones armónicas.

Calculemos valores aproximados de  $\tilde{\Delta} f(1, 2)$  aproximación de  $\Delta f(1, 2)$ .

Sea  $h = 0,002$ ,  $k = 0,0015$ . Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{xx}(1, 2) &= \frac{f(1,002, 2) - 2f(1, 2) + f(0,998, 2)}{2h} \\ &= \frac{1,610238392 - 2 \times 1,609437912 - 1,608638393}{0,004} = 0,00024, \\ \tilde{f}_{yy}(1, 2) &= \frac{f(1, 2,0015) - 2f(1, 2) + f(1, 1,9985)}{0,003} \\ &= \frac{1,610637642 - 3,218875825 + 1,608237642}{0,003} = -1,80333 \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

luego

$$\tilde{\Delta}f(1,2) = \tilde{f}_{xx}(1,2) + \tilde{f}_{yy}(1,2) = 0,00024 - 1,80333 \times 10^{-4} = 5,966667 \times 10^{-5},$$

es una aproximación  $\Delta f(1,2) = 0$ .

Para  $h = k = 0,00012$ , tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{xx}(1,2) &= \frac{f(1,00012,2) - 2f(1,2) + f(0,99988,2)}{2 \times 0,00012} = \frac{3,15 \times 10^{-9}}{0,00024} = 0,000013125, \\ \tilde{f}_{yy}(1,2) &= \frac{f(1,2+k) - 2f(1,2) + f(1,2-k)}{2 \times 0,00012} = -\frac{3,3 \times 10^{-9}}{0,00024} = -0,00001375,\end{aligned}$$

con lo que

$$\tilde{\Delta}f(1,2) = \tilde{f}_{xx}(1,2) + \tilde{f}_{yy}(1,2) = 6,25 \times 10^{-7},$$

que es una mejor aproximación de  $\tilde{\Delta}f(1,2)$  precedente. Así,  $\Delta f(1,2) \simeq \tilde{\Delta}f(1,2) = 6,25 \times 10^{-7}$ .

## 2.4. Integración numérica

Según la Historia de la Matemática, fue el Cálculo Integral el que primero se desarrolló. Obviamente las primeras funciones que se integraron sobre un intervalo  $[a, b]$  fueron las polinomiales. Estas son en realidad las más simples de integrarse. Otras funciones sencillas de integrarse son las funciones trigonométricas seno y coseno. Pronto aparecieron otra clase de funciones continuas  $f$  que no se integran mediante funciones elementales, el cálculo de  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  resulta imposible (en algunos casos es posible mediante la integración de funciones de variable compleja), por lo que dicha integral tendrá que ser aproximada numéricamente. Con este propósito, consideramos un problema más sencillo que es el cálculo de la integral definida de un polinomio interpolante de la función  $f$ . Más aún, en esta sección tratamos la fórmula de Newton-Cotes y de esta se desprenden la regla del rectángulo o conocida también como fórmula del punto medio, la regla del trapecio o fórmula del trapecio, la regla de Simpson que son las más utilizadas. Obtenemos estimaciones de errores para cada una de estos métodos y luego se generalizan a particiones regulares del intervalo  $[a, b]$  en consideración, lo que da lugar a las reglas generalizadas del rectángulo  $R_n(f)$ , del trapecio  $T_n(f)$  y de Simpson  $S_n(f)$ . Estas son aplicadas al cálculo de integrales dobles sobre regiones en las que las integrales pueden calcularse como integrales reiteradas, a tales regiones se los denomina del tipo I o II.

La integración de funciones que se representan como series de potencias se estudian en el siguiente capítulo.

### 2.4.1. Fórmula de Newton-Cotes

Se define el funcional  $I$  sobre  $C([a, b])$  como sigue:  $I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \forall f \in C([a, b])$ . Entonces  $I$  es funcional lineal en  $C([a, b])$ .

El operador de interpolación de Lagrange  $\Pi$  es lineal. Se define el operador  $G = I \circ \Pi$ . entonces  $G$  es lineal, y

$$G(f) = (I \circ \Pi)(f) = I(\Pi(f)) = I(\hat{P}) = I\left(\sum_{k=0}^n f(x_k) P_k\right) = \sum_{k=0}^n f(x_k) I(P_k) \quad \forall f \in C([a, b]).$$

Así,

$$G(f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) I(P_k) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b P_k(x) dx \quad \forall f \in C([a, b]),$$

que se conoce como la fórmula de Newton-Cotes. De esta fórmula se desprenden algunos resultados que tratamos a continuación.

**Fórmula del rectángulo**

Para  $n = 0$ ,  $\tau = \{\frac{a+b}{2}\}$ , una partición del intervalo  $[a, b]$  construida únicamente por el punto medio. El polinomio interpolante está definido como  $P_0(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$ , entonces

$$G(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

que se conoce como fórmula del rectángulo para aproximar  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Fórmula de los trapecios**

Para  $n = 1$ ,  $\tau = \{a = x_0, x_1 = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$ . Una interpolante de la función  $f$  está definida como  $v(x) = f(a)P_0(x) + f(b)P_1(x) \quad x \in [a, b]$ , donde  $P_0, P_1$  están definidos como

$$P_0(x) = \frac{x-b}{a-b}, \quad P_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resulta

$$\begin{aligned} I(P_0) &= \int_a^b P_0(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{b-a}{2}, \\ I(P_1) &= \int_a^b P_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$G(f) = \sum_{k=0}^1 f(x_k) I(P_k) = f(a) \frac{b-a}{2} + f(b) \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Así,

$$G(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)),$$

que se conoce con el nombre de fórmula de los trapecios para aproximar  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Regla de Simpson**

Para  $n = 2$  y  $\tau = \{a = x_0, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b\}$ ,  $h = \frac{b-a}{2}$ ,  $\tau$  es una partición de  $[a, b]$ . Una interpolante de  $f$  está definida como  $v(x) = f(a)P_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)P_1(x) + f(b)P_2(x) \quad x \in [a, b]$  donde  $P_0, P_1, P_2$  son los polinomios de interpolación de Lagrange. Tenemos

$$G(f) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) I(P_k) = f(a) I(P_0) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) I(P_1) + f(b) I(P_2),$$

con

$$\begin{aligned} I(P_0) &= \int_a^b P_0(x) dx = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{h}{3}, \\ I(P_1) &= \int_a^b P_1(x) dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = \frac{4h}{3}, \\ I(P_2) &= \int_a^b P_2(x) dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Luego,

$$G(f) = \frac{h}{3} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

que se conoce como la regla de Simpson para aproximar  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

## 2.5. Regla de los trapecios generalizada. Estimación del error

Sea  $f \in C([a, b])$  y consideremos como problema  $(P)$  el cálculo de la integral  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ .

Sean  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau(n) = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Se pone  $h_j = x_j - x_{j-1}$   $j = 1, \dots, n$  y  $\hat{h} = \max\{h_j \mid j = 1, \dots, n\}$ . Suponemos que existe  $\sigma \geq 1$  tal que  $h_j \leq \sigma \frac{b-a}{n}$   $j = 1, \dots, n$ . En el caso de una partición uniforme, se tiene  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_j = jh$   $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\hat{h} = h$  y  $\sigma = 1$ .

El polinomio de interpolación de la función  $f$  en el  $j$ -ésimo subintervalo  $[x_{j-1}, x_j]$  de  $[a, b]$  es la función afín denotada  $g_j$  y definida como sigue:

$$g_j(x) = f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j}(x - x_{j-1}) \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, n,$$

La función interpolante  $g$  sobre  $[a, b]$  está definida como

$$g(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \varphi_j(x) \quad x \in [a, b],$$

donde  $\varphi_j$   $j = 1, \dots, n$ , son las funciones techo antes definidas en los interpolantes afines a trozos. Note que  $g(x_i) = f(x_i)$   $i = 0, 1, \dots, n$ . En la figura siguiente se muestra la discretización de  $[a, b]$ , la gráfica de la función  $f$  y de la de su interpolante  $g$ .

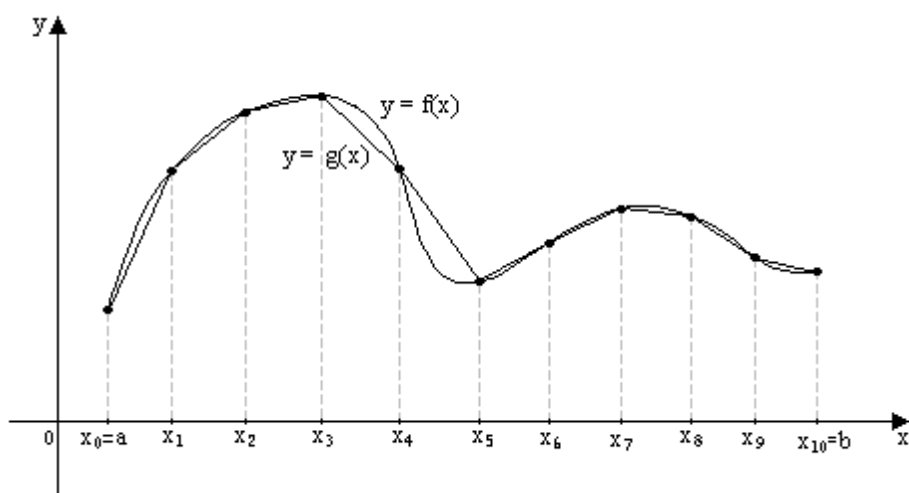


Figura 25

Como problema  $(\tilde{P}_n)$  consideramos el siguiente:  $I(g) = \int_a^b g(x)dx$ . De la definición de la función  $g$ , se tiene

$$\begin{aligned} I(g) &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} g_j(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j}(x - x_{j-1}) \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left( f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [f(x_{j-1}) + f(x_j)] \\ &= \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j). \end{aligned}$$

La aproximación que hemos construido se conoce con el nombre de regla de los trapecios generalizada. Escribiremos

$$T_n(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j),$$

Así,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq T_n(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j).$$

Esta aproximación se completa con una estimación del error entre  $I(f)$  y  $T_n(f)$  que tratamos a continuación.

Se prueba inmediatamente que el funcional  $T_n$  de  $C([a, b])$  en  $\mathbb{R}$  definido como

$$T_n(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \quad \forall f \in C([a, b]),$$

es lineal, es decir que  $T_n$  es un elemento del espacio dual de  $C([a, b])$ .

De la fórmula de los trapecios generalizada para una partición uniforme se observa que para su aplicación se requiere disponer de la siguiente información: extremos del intervalo  $[a, b]$  en el que la función  $f$  está definida y la propia función  $f$ , número de puntos de la partición  $\tau(n)$ . Con esta información se tiene el siguiente algoritmo de aproximación de una integral definida mediante la regla de los trapecios generalizada.

#### Algoritmo

Datos de entrada:  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , función  $f$ .

Datos de salida:  $n$ ,  $T_n(f)$ , mensaje.

1. Verificar  $a < b$ . Caso contrario continuar en 7).

2. Hacer  $h = \frac{b-a}{n}$ .

3.  $S = 0$ .

4. Para  $j = 1, \dots, n-1$

$$S = S + f(a + jh),$$

Fin de bucle  $j$ .

5.  $T_n(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + hS$ .

6. Imprimir  $n$ ,  $T_n(f)$ . Continuar en 8).

7. Mensaje:  $a < b$ .

8. Fin.

#### **Ejemplo**

Sea  $f$  la función real definida como  $f(x) = x^2 e^x$   $x \in [0, 2]$ . Calculemos  $I(f) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 e^x dx$  y aproximemos a  $I(f)$  mediante la regla de los trapecios generalizada  $T_n(f)$ .

Primeramente calculamos el valor exacto de la integral  $I(f)$ . Aplicando el método de integración por partes, tenemos

$$I(f) = \int_0^2 x^2 e^x dx = [x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)] \Big|_0^2 = 2(e^2 - 1) \simeq 12,7781122.$$

En la tabla siguiente se muestra la aplicación del algoritmo precedente, esto es, la regla de los trapecios generalizada para una partición uniforme del intervalo  $[0, 2]$ .

$n$	$T_n(f)$	Error= $ I(f) - T_n(f) $
10	12,9748064291	$1,966942312 \times 10^{-1}$
20	12,8273508376	$4,9238639741 \times 10^{-2}$
40	12,7904259325	$1,2313734634 \times 10^{-2}$
80	12,7811908863	$3,0786884382 \times 10^{-2}$
160	12,7788818859	$7,6968803500 \times 10^{-4}$
320	12,7783046208	$1,9242300412 \times 10^{-4}$
640	12,7781603037	$4,8105813249 \times 10^{-5}$
1280	12,7781242243	$1,2026457201 \times 10^{-5}$

### Estimación del error de integración con la fórmula de los trapecios

Primeramente estableceremos una estimación del error de integración con la fórmula de los trapecios y a continuación usaremos este resultado para obtener una estimación del error de integración con la fórmula de los trapecios generalizada.

Sea  $f \in C^2([a, b])$ . Consideremos el problema  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Esta integral se aproxima con la denominada regla de los trapecios  $T(f)$  definida como

$$T(f) = \int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)),$$

donde  $P(x) = f(a)\varphi_0(x) + f(b)\varphi_1(x)$   $x \in [a, b]$  es el polinomio de interpolación de  $f$ ,  $\varphi_0, \varphi_1$  son los polinomios de interpolación de Lagrange antes definidos (véase interpolación de Lagrange). El error de interpolación polinomial de Lagrange está definido como

$$\varepsilon(x) = f(x) - P(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x-a)(x-b) \quad x \in [a, b],$$

$\xi \in [a, b]$ .

El error de integración con la regla de los trapecios se nota  $\varepsilon_f$  y se define como  $\varepsilon_f = I(f) - T(f)$ . Nos interesamos en obtener una estimación del error  $\varepsilon_f$  y en una mayoración de  $|\varepsilon_f|$ . De la definición de  $I(f)$  y  $T(f)$  se sigue que

$$\varepsilon_f = I(f) - T(f) = \int_a^b (f(x) - P(x)) dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!} (x-a)(x-b) dx.$$

Sean  $m = \min_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ ,  $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ . Entonces

$$m \leq |f''(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in [a, b],$$

de donde

$$\frac{m}{2} |(x-a)(x-b)| \leq \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x-a)(x-b)| \leq \frac{M}{2} |(x-a)(x-b)|$$

e integrando sobre  $[a, b]$ , resulta

$$\frac{m}{2} \int_a^b |(x-a)(x-b)| dx \leq \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2!} |(x-a)(x-b)| dx \leq \frac{M}{2} \int_a^b |(x-a)(x-b)| dx.$$

Puesto que  $\omega(x) = (x-a)(x-b) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b \omega(x) dx = \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{6},$$

con lo que la desigualdad precedente se expresa como

$$\frac{m}{12} (b-a)^3 \leq \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x-a)(x-b)| dx \leq \frac{M}{12} (b-a)^3,$$

y de esta a su vez se obtiene la siguiente:

$$m \leq \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x-a)(x-b)| dx \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio (véase en Calculus I de Apostol, página 177), existe  $\lambda \in [a, b]$  tal que

$$|f''(\lambda)| = \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x-a)(x-b)| dx$$

con lo cual

$$\int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x-a)(x-b)| dx = \frac{(b-a)^3}{12} |f''(\lambda)|.$$

Consecuentemente

$$|\varepsilon_f| = |I(f) - T(f)| = \left| \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2} (x-a)(x-b) dx \right| \leq \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x-a)(x-b)| dx \leq \frac{(b-a)^3}{12} |f''(\lambda)|.$$

En conclusión,  $|\varepsilon_f| \leq \frac{(b-a)^3}{12} |f''(\lambda)|$  para algún  $\lambda \in [a, b]$ . En la práctica resulta difícil obtener  $\lambda \in [a, b]$ , y como  $|f''(\lambda)| \leq M$  se sigue que  $|\varepsilon_f| \leq \frac{M}{12} (b-a)^3$ .

Obtengamos una estimación del error para la fórmula de los trapecios generalizada.

Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau(n) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$  con  $x_{i-1} < x_i$ ,  $h_i = x_i - x_{i-1}$   $i = 1, \dots, n$ ,  $\hat{h} = \max_{i=1, \dots, n} h_i$ . Suponemos que existe  $\sigma \geq 1$  tal que  $h_i \leq \sigma \frac{b-a}{n}$   $i = 1, \dots, n$ . A las particiones que satisfacen esta propiedad se les conoce como particiones regulares. En el caso de una partición uniforme se tiene  $h = h_i = \frac{b-a}{n}$   $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\sigma = 1$ .

La fórmula de los trapecios generalizada está definida como

$$T_n(f) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

Note que el polinomio de interpolación de  $f$  de grado 1 en el  $k$ -ésimo subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $[a, b]$  está definido como

$$P_k(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} (x - x_{k-1}) \quad x \in [x_{k-1}, x_k],$$

consecuentemente

$$T_n(f) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

El error de integración con la fórmula de los trapecios generalizada se nota  $\varepsilon_f$  y se define como  $\varepsilon_f = I(f) - T_n(f)$ .

Apliquemos el error de integración con la regla de los trapecios a cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, \dots, n$ . Resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= I(f) - T_n(f) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - P_k(x)] dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi_k)}{2} (x - x_{k-1})(x - x_k) dx, \end{aligned}$$

y  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, \dots, n$ .

De la estimación del error de integración con la regla de los trapecios antes obtenida, resulta

$$\begin{aligned} |\varepsilon_f| &= |I(f) - T_n(f)| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi_k)}{2} (x - x_{k-1})(x - x_k) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{|f''(\xi_k)|}{2} |(x - x_{k-1})(x - x_k)| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{12} |f''(\lambda_k)| = \sum_{k=1}^n \frac{h_k^3}{12} |f''(\lambda_k)|. \end{aligned}$$

Puesto que  $h_k \leq \sigma \frac{b-a}{n}$   $k = 1, 2, \dots, n$ , entonces  $h_k^3 \leq h_k \hat{h}^2 \leq \sigma \frac{b-a}{n} \hat{h}^2$ , luego

$$|\varepsilon_f| \leq \sum_{k=1}^n \frac{h_k^3}{12} |f''(\lambda_k)| \leq \sigma \frac{b-a}{n} \hat{h}^2 \sum_{k=1}^n |f''(\lambda_k)|.$$

Además,  $m \leq |f''(\lambda_k)| \leq M$   $k = 1, \dots, n$ , de donde

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f''(\lambda_k)| \leq M,$$

y por el teorema del valor intermedio, existe  $\lambda \in [a, b]$  tal que  $|f''(\lambda)| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f''(\lambda_k)|$ , con lo cual

$$|\varepsilon_f| \leq \sigma \frac{b-a}{n} \hat{h}^2 \sum_{k=1}^n |f''(\lambda_k)| = \frac{\sigma(b-a)}{12} \hat{h}^2 |f''(\lambda)| \leq \frac{\sigma(b-a)}{12} M \hat{h}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

pués  $h_k \leq \sigma \frac{b-a}{n}$   $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\hat{h} = \max_{k=1, \dots, n} h_k \leq \sigma \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

En el caso de una partición uniforme se tiene  $\sigma = 1$  y  $\hat{h} = h$ . entonces

$$|\varepsilon_f| \leq \frac{b-a}{12} M h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En cualquiera de los casos, el método de integración aproximado de los trapecios generalizado es convergente, esto es

$$T_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f).$$

## 2.6. Regla de Simpson generalizada

Sean  $f \in C([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  con  $n > 1$  y  $\tau(n) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$ , esto es  $x_{i-1} < x_i$   $i = 1, \dots, n$ ,  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\hat{h} = \max\{h_i \mid i = 1, \dots, n\}$ . En el caso de una partición uniforme, se define  $h = \frac{b-a}{n}$  y  $x_j = a + jh$   $j = 0, 1, \dots, n$ , entonces  $\hat{h} = h$ . Suponemos que existe  $\sigma \geq 1$  tal que  $h_i \leq \sigma \frac{b-a}{n}$   $i = 1, \dots, n$ . A las particiones que satisfacen esta propiedad, como ya hemos dicho anteriormente, se les conoce como particiones regulares. En el caso de la partición uniforme se tiene  $\sigma = 1$ .

Consideramos el  $k$ -ésimo intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, \dots, n$  y aplicamos la regla de Simpson a este intervalo. Tenemos

$$I_k = \frac{h_k}{6} \left[ f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{3}\right) + f(x_k) \right].$$



Luego

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{6} \left[ f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right],$$

se llama fórmula de Simpson generalizada.

Se prueba inmediatamente que fijados  $n \in \mathbb{Z}^+$  con  $n > 1$  y  $\tau(n)$  una partición regular del intervalo  $[a, b]$ , el funcional  $S_n$  de  $C([a, b])$  en  $\mathbb{R}$  definido como  $S_n(f) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{6} \left[ f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right]$  es lineal.

En el caso de una partición uniforme, se tiene

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n \frac{h}{6} \left[ f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right] \\ &= \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] + \frac{4h}{6} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \\ &= \frac{h}{6} (f(a) + f(b)) + \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{2}{3} h \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right). \end{aligned}$$

De la fórmula de Simpson generalizada para una partición uniforme se observa que para su aplicación se requieren de los siguientes datos: número de puntos de la partición  $\tau(n)$ , extremos del intervalo  $[a, b]$  en el que la función  $f$  está definida y la propia función  $f$ . Con esta información se tiene el siguiente algoritmo de aproximación de una integral definida mediante el método de Simpson con la fórmula generalizada.

#### Algoritmo

Datos de entrada:  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , función  $f$ .

Datos de salida:  $n$ ,  $S_n(f)$ , mensaje.

1. Verificar  $a < b$ . Caso contrario continuar en 9)
2. Hacer  $h = \frac{b-a}{n}$ .
3.  $S_1 = 0$ .
4.  $S_2 = 0$ .
5. Para  $j = 1, \dots, n-1$

$$S_1 = S_1 + f(a + jh),$$

$$S_2 = S_2 + f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h\right).$$

Fin de bucle  $j$ .

$$6. S_2 = S_2 + f\left(a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right).$$

$$7. S_n(f) = \frac{h}{6} (f(a) + f(b)) + \frac{h}{3} S_1 + \frac{2h}{3} S_2.$$

8. Imprimir  $n$ ,  $S_n(f)$ . Continuar en 10).

9. Mensaje:  $a < b$ .

10. Fin.

#### **Ejemplo**

Sea  $f$  la función real definida como  $f(x) = x^2 e^x$   $x \in [0, 2]$ . Calculemos  $I(f) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 e^x dx$  y aproximemos a  $I(f)$  mediante la fórmula de Simpson generalizada  $S_n(f)$ .

Aplicando el método de integración por partes, tenemos

$$I(f) = \int_0^2 x^2 e^x dx = [x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)] \Big|_0^2 = 2(e^2 - 1) \simeq 12,7781122.$$

Esta integral ya fue calculada en la sección precedente y fue aproximada con la regla de los trapecios generalizada. En la tabla siguiente se muestra la aplicación del algoritmo precedente, esto es, la fórmula de Simpson generalizada para una partición uniforme del intervalo  $[0, 2]$ .

$n$	$S_n(f)$	$Error :  I(f) - S_n(f) $
10	12,7781989738	$8,677590441 \times 10^{-5}$
20	12,7781176308	$5,4329327987 \times 10^{-6}$
40	12,7781125376	$3,3970602331 \times 10^{-7}$
80	12,7781122191	$2,123393727516 \times 10^{-8}$
160	12,7781121992	$1,3271588273 \times 10^{-9}$

Comparando estos resultados con los obtenidos con la fórmula de los trapecios generalizada podemos constatar que con la regla de Simpson generalizada se tiene una convergencia cuadrática mientras que con la de los trapecios generalizada se tiene únicamente una convergencia del tipo lineal. Obviamente que con la fórmula de Simpson generalizada se realizan  $n$  evaluaciones adicionales de la función  $f$  que las que se realizan en la de los trapecios generalizada.

## 2.7. Estimación del error en la regla de Simpson

Supongamos  $f \in C^4([a, b])$ . Ponemos  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Para aproximar  $I(f)$  aplicamos la regla de Simpson  $G(f)$  arriba definida como

$$G(f) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right),$$

y denotamos con  $\varepsilon_f$  el error de aproximación cometido entre la solución exacta  $I(f)$  y su valor aproximado  $G(f)$ , esto es,  $\varepsilon_f = I(f) - G(f)$ . Determinemos  $\varepsilon_f$ .

i) Recordemos que si  $f(x)$  es un polinomio de grado 2, entonces  $f(x)$  se escribe como

$$f(x) = f(a)\varphi_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_1(x) + f(b)\varphi_2(x) \quad x \in [a, b],$$

donde  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  son los polinomios de interpolación de Lagrange antes definidos (véase la sección interpolación polinomial). Resulta que  $I(f) = \int_a^b f(x) dx = G(f)$ , y

$$\varepsilon_f = \int_a^b f(x) dx - G(f) = 0.$$

ii) Mostremos que si  $f$  es un polinomio de grado 3, también se tiene  $\varepsilon_f = 0$ . En efecto, de la fórmula del error de interpolación de Lagrange tenemos

$$\varepsilon(x) = f(x) - P(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) \quad x \in [a, b]$$

y  $\xi \in ]a, b[$ .

Sea  $t = \frac{x-a}{h}$  con  $h = \frac{b-a}{2}$ , entonces

$$\varepsilon(x) = h^2 t(t-1)(t-2) \frac{f'''(\xi)}{3!}.$$

Puesto que  $f$  es un polinomio de grado 3,  $f'''(x)$  es una constante, sea  $f'''(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$ . Resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b \varepsilon(x) dx &= \int_a^b (f(x) - P(x)) dx = \int_0^2 h^2 t(t-1)(t-2) \frac{c}{3!} dt \\ &= \frac{h^2 c}{3!} \int_0^2 t(t-1)(t-2) dt = \frac{h^2 c}{3!} \left( \frac{1}{4} t^4 - t^3 + t^2 \right) \Big|_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon_f = I(f) - G(f) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P(x) dx = \int_a^b \varepsilon(x) dx = 0.$$

iii) Sea  $f \in C^4([a, b])$  cualquiera. El resultado que acabamos de obtener en la parte ii) muestra que la fórmula de cuadratura dada por la regla de Simpson es exacta para polinomios de grado 3, por lo que podemos construir un polinomio de interpolación de grado 3 que mejore la precisión de  $I(f)$ . Busquemos un polinomio  $P$  de grado 3 que verifique las siguientes condiciones:

$$P(a) = f(a), \quad P\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad P(b) = f(b), \quad P'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Sea  $Q$  el polinomio de interpolación de  $f$  que pasa por los puntos  $(a, f(a))$ ,  $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ,  $(b, f(b))$ , es decir que

$$Q(x) = f(a) \varphi_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \varphi_1(x) + f(b) \varphi_2(x) \quad x \in [a, b],$$

donde  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  son los polinomios de interpolación de Lagrange.

Se define  $P(x) = Q(x) + \alpha \omega(x) \quad x \in [a, b]$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  se debe determinar por la condición  $P'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , y  $\omega$  es la función definida como  $\omega(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \quad x \in [a, b]$ .

De la definición de  $P$ , es claro que

$$P(a) = f(a), \quad P\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad P(b) = f(b).$$

Derivando la función  $P$ , se tiene  $P'(x) = Q'(x) + \alpha \omega'(x)$  con

$$\omega'(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + (x-a)(x-b) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \omega'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = -\frac{(b-a)^2}{4}, \\ P'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha \omega'\left(\frac{a+b}{2}\right) = Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\alpha}{4}(b-a)^2. \end{aligned}$$

Puesto que  $\alpha \in \mathbb{R}$  es tal que  $P'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , entonces  $\alpha \in \mathbb{R}$  satisface la igualdad

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\alpha}{4}(b-a)^2,$$

lo que a su vez permite elegir  $\alpha$  como sigue:

$$\alpha = -4 \frac{\left(f' \left(\frac{a+b}{2}\right) - Q' \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2} = \frac{4}{(b-a)^2} \left(Q' \left(\frac{a+b}{2}\right) - f' \left(\frac{a+b}{2}\right)\right),$$

entonces

$$P'(x) = Q'(x) + \frac{4}{(b-a)^2} \left(Q' \left(\frac{a+b}{2}\right) - f' \left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \omega(x) \quad x \in [a, b].$$

Se verifica inmediatamente que  $P' \left(\frac{a+b}{2}\right) = f' \left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

Determinemos el error de interpolación  $\varepsilon(x)$  para este polinomio de interpolación, esto es  $\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$   $x \in [a, b]$ . Con este propósito definimos la función  $\psi$  siguiente:

$$\psi(t) = u(x) [f(t) - P(t)] - u(t) [f(x) - P(x)] \quad t \in [a, b],$$

donde  $x \in [a, b]$  es fijo y  $u(t) = (t-a) \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 (t-b)$ .

Puesto que  $P(a) = f(a)$ ,  $P \left(\frac{a+b}{2}\right) = f \left(\frac{a+b}{2}\right)$ ,  $P(b) = f(b)$ , se verifica inmediatamente que  $\psi(a) = \psi \left(\frac{a+b}{2}\right) = \psi(b) = \psi(x) = 0$ . Así, la función  $\psi$  tiene cuatro raíces en el intervalo  $[a, b]$ . Por el teorema de Rolle (véase en Calculus I de Apostol, página 224),  $\psi'(t)$  tiene cuatro raíces, pues en  $t = \frac{a+b}{2}$  también se anula;  $\psi''(t)$  tiene tres raíces,  $\psi'''(t)$  tiene dos raíces,  $\psi^{iv}(t)$  tiene una raíz y sea  $\xi \in [a, b]$  tal que  $\psi^{iv}(\xi) = 0$ . Puesto que

$$\psi^{iv}(t) = u(x) [f^{iv}(t) - P^{iv}(t)] - u^{iv}(t) [f(x) - P(x)] \quad t \in [a, b].$$

De la definición del polinomio  $P$  se tiene  $P^{iv}(t) = 0$ , de la definición del polinomio  $u$ ,  $u^{iv}(t) = 4!$ . Entonces

$$\begin{aligned} \psi^{iv}(t) &= u(x) f^{iv}(t) - 4! (f(x) - P(x)), \\ 0 &= \psi^{iv}(\xi) = u(x) f^{iv}(\xi) - 4! (f(x) - P(x)), \end{aligned}$$

de donde

$$\varepsilon(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{iv}(\xi)}{4!} u(x) \quad x \in [a, b].$$

Calculemos el error de integración de  $f$  usando la fórmula de cuadratura dada por la regla de Simpson:

$$\varepsilon_f = I(f) - G(f).$$

Como  $f \in C^4([a, b])$ , sea  $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{iv}(x)|$ ,  $m = \min_{x \in [a, b]} |f^{iv}(x)|$ . Entonces

$$\varepsilon_f = \int_a^b \varepsilon(x) dx = \int_a^b \frac{f^{iv}(\xi)}{4!} u(x) dx.$$

Además,  $m \leq |f^{iv}(\xi)| \leq M$  y  $\xi$  depende de  $x$ , en consecuencia

$$\frac{u(x)}{4!} m \leq \frac{|f^{iv}(\xi)|}{4!} |u(x)| \leq \frac{M}{4!} |u(x)|$$

e integrando sobre el intervalo  $[a, b]$  se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{m}{4!} \int_a^b |u(x)| dx \leq \int_a^b \frac{|f^{iv}(\xi)|}{4!} |u(x)| dx \leq \frac{M}{4!} \int_a^b |u(x)| dx.$$

Para calcular  $\int_a^b u(x) dx$  realizamos el siguiente cambio de variable:  $t = \frac{x-a}{h}$  con  $h = \frac{b-a}{2}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= (x-a) \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) = h^4 t (t-1)^2 (t-2) \\ &= h^4 (t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t) \quad t \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_a^b u(x) dx = h^4 \int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t) dt = -\frac{4}{15} h^5,$$

y siendo  $u(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , entonces  $|u(x)| = -u(x) \quad x \in [a, b]$  con lo que  $\int_a^b |u(x)| dx = \frac{4}{15} h^5$ .

Resulta que

$$\begin{aligned} \frac{m}{4!} \frac{4}{15} h^5 &\leq \int_a^b \frac{|f^{iv}(\xi)|}{4!} |u(x)| dx \leq \frac{M}{4!} \frac{4}{15} h^5, \\ m \frac{h^5}{90} &\leq \int_a^b \frac{1}{4!} |f^{iv}(\xi) u(x)| dx \leq M \frac{h^5}{90}, \end{aligned}$$

y de esta desigualdad se obtiene la siguiente:

$$m \leq \frac{90}{h^5} \int_a^b \frac{1}{4!} |f^{iv}(\xi) u(x)| dx \leq M.$$

Aplicando el teorema del valor intermedio, existe  $\lambda \in [a, b]$  tal que

$$|f^{iv}(\lambda)| = \frac{90}{h^5} \int_a^b \frac{1}{4!} |f^{iv}(\xi) u(x)| dx,$$

de donde

$$|\varepsilon_f| = |I(f) - G(f)| = \left| \int_a^b \frac{1}{4!} f^{iv}(\xi) u(x) dx \right| \leq \int_a^b \frac{1}{4!} |f^{iv}(\xi) u(x)| dx = \frac{h^5}{90} |f^{iv}(\lambda)|.$$

Puesto que  $h = \frac{b-a}{2}$ , entonces

$$|\varepsilon_f| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} |f^{iv}(\lambda)| \leq \frac{M}{2880} (b-a)^5.$$

Aplicamos este resultado para estimar el error en la aproximación de  $I(f)$  mediante la fórmula de Simpson generalizada, que se trata a continuación.

### Error de aproximación con la fórmula de Simpson generalizada

Sean  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau(n)$  una partición del intervalo  $[a, b]$  con  $x_{k-1} < x_k \quad k = 1, \dots, n$ ,  $h_k = \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})$ ,  $\hat{h} = \max_{k=1, \dots, n} h_k$ . Entonces, para cada  $k = 1, \dots, n$  se tiene

$$\left| \varepsilon_f^{(k)} \right| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^5}{2880} |f^{iv}(\lambda_k)| \leq \frac{M_k}{2880} (x_k - x_{k-1})^5,$$

con  $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{iv}(x)|$ .

Además,

$$\varepsilon_f = I(f) - S_n(f) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} G_k(f) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - G(x)) dx = \sum_{k=1}^n \varepsilon_f^{(k)},$$

donde  $G_k(f) = \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \left( f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{3}\right) + f(x_k) \right)$   $k = 1, \dots, n$ , es la regla de Simpson aplicada a cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ , y

$$\left| \varepsilon_f^{(k)} \right| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - G(f)) dx \right| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^5}{2880} |f^{iv}(\lambda_k)| \leq \frac{M_k}{2880} (x_k - x_{k-1})^5.$$

Entonces

$$|\varepsilon_f| = |I(f) - S_n(f)| \leq \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon_f^{(k)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^5}{2880} |f^{iv}(\lambda_k)| = \sum_{k=1}^n \frac{h_k^5}{90} |f^{iv}(\lambda_k)| \leq \frac{\widehat{h}^5}{90} \sum_{k=1}^n |f^{iv}(\lambda_k)|.$$

Puesto que  $m \leq |f^{iv}(\lambda_k)| \leq M$   $k = 1, \dots, n$ , se sigue que

$$nm \leq \sum_{k=1}^n |f^{iv}(\lambda_k)| \leq nM$$

y por el teorema del valor intermedio, existe  $\lambda \in [a, b]$  tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f^{iv}(\lambda_k)| = |f^{iv}(\lambda)|,$$

luego

$$\frac{\widehat{h}^5}{90} \sum_{k=1}^n |f^{iv}(\lambda_k)| = \frac{n}{90} \widehat{h}^5 |f^{iv}(\lambda)| \leq \frac{n}{90} \widehat{h}^5 M.$$

Así,

$$|\varepsilon_f| \leq \frac{n}{90} \widehat{h}^5 |f^{iv}(\lambda)| \leq \frac{n}{90} \widehat{h}^5 M.$$

En el caso de una partición uniforme,  $\widehat{h} = h = \frac{b-a}{2n}$  se tiene la siguiente estimación del error de integración:

$$|\varepsilon_f| \leq \frac{n}{90} h^5 |f^{iv}(\lambda)| = \frac{n}{90} h^4 \frac{b-a}{2n} |f^{iv}(\lambda)| = \frac{b-a}{2n} h^4 |f^{iv}(\lambda)| \leq \frac{(b-a)M}{180} h^4,$$

y de esta estimación resulta

$$|\varepsilon_f| = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{180} h^4 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

o lo que es lo mismo  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx$ , que muestra que el método de integración mediante la fórmula de Simpson generalizada es convergente.

En el caso de la estimación

$$|\varepsilon_f| = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{n}{90} \widehat{h}^5 M,$$

con  $\widehat{h} = \max_{k=1, \dots, n} h_k$ , se requiere de una hipótesis suplementaria sobre cada  $h_k$ , esto es, la partición del intervalo  $[a, b]$  debe ser regular, es decir que existe  $\sigma \geq 1$  tal que  $h_k \leq \sigma \frac{b-a}{2n}$   $k = 1, \dots, n$ , entonces  $\widehat{h} \leq \sigma \frac{b-a}{2n}$  y en consecuencia

$$|\varepsilon_f| = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \sigma \frac{b-a}{190} \widehat{h}^4 M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

que prueba la convergencia del método de integración numérica.

## 2.8. Integrales dobles

Sea  $\Omega$  un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^2$  y  $f \in C(\Omega)$ . Se desea calcular  $I(f) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ .

En el caso de dominios sencillos como un disco o un rectángulo y funciones  $f$  aparentemente simples, el cálculo de  $I(f)$  puede resultar muy dificultoso y en muchas situaciones imposible, más aún, para dominios muy generales y funciones que no se integran mediante funciones elementales, el cálculo de  $I(f)$  resulta imposible, por lo que dicha integral tendrá que ser aproximada numéricamente. Con este propósito, consideramos las regiones o dominios  $\Omega$  de los tipos I y II que se indican a continuación.

1. Sea  $[a, b]$  un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ . Se dice que  $\Omega$  es una región o dominio del tipo I si

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), x \in [a, b]\},$$

donde  $\varphi_1, \varphi_2$  son funciones continuas en  $[a, b]$  tales que  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ . En la figura siguiente se muestra una región  $\Omega$  del tipo I.

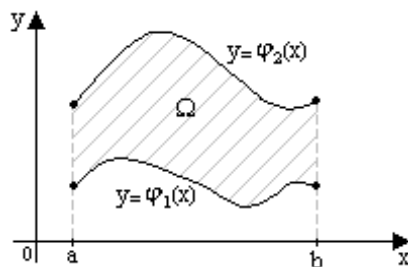


Figura 26

2. Sea  $[c, d]$  un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ . Se dice que  $\Omega$  es un dominio o región del tipo II si

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y), y \in [c, d]\},$$

donde  $\Psi_1, \Psi_2$  son funciones continuas en  $[c, d]$  tales que  $\Psi_1 \leq \Psi_2$ . En la figura siguiente se muestra una región  $\Omega$  del tipo II.

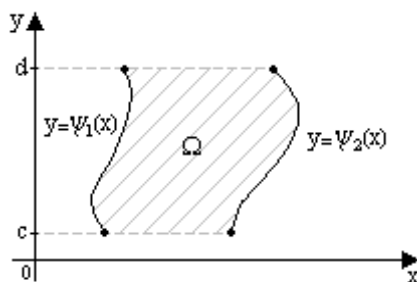


Figura 27

Los dominios  $\Omega$  muy complejos pueden descomponerse en forma apropiada en subdominios que correspondan a uno de estos tipos precisados, por lo que el cálculo aproximado de  $I(f)$  se reduce al cálculo de la integral doble de la función  $f$  sobre cada subdominio de la descomposición de  $\Omega$  que se haya establecido. Por otro lado, para dominios  $\Omega$  como un rectángulo o regiones del plano del tipo I o II puede aplicarse la regla de los trapecios generalizada, la regla de Simpson generalizada. Nos limitamos a la aplicación de la regla de los trapecios para regiones del tipo I. Para regiones  $\Omega$  del tipo II se procede en forma muy similar. Igualmente la aplicación de la regla de Simpson generalizada se aplica en forma muy parecida a la de los trapecios generalizada.

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  una región del tipo I, esto es,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \quad x \in [a, b]\},$$

donde  $\varphi_1, \varphi_2$  son funciones continuas en  $[a, b]$  tales que  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

Sea  $f \in C(\Omega)$  e  $I(f) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ . esta integral lo expresamos como una integral reiterada siguiente:

$$I(f) = \int_a^b \left( \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Definimos  $g(x) = \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad x \in [a, b]$ . Entonces  $I(f) = \int_a^b g(x) dx$ . Apliquemos la fórmula de los trapecios generalizada con una partición uniforme del intervalo  $[a, b]$ . Para el efecto, sea  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Ponemos  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_j = a + h \quad j = 0, 1, \dots, n$ . La regla de los trapecios generalizada para aproximar la integral  $I(f) = \int_a^b g(x) dx$  se escribe como sigue:

$$T_n(g) = \frac{h}{2} (g(a) + g(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} g(x_j).$$

Además, de la definición de la función  $g$  se tiene

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} f(a, y) dy, \\ g(x_j) &= \int_{\varphi_1(x_j)}^{\varphi_2(x_j)} f(x_j, y) dy \quad j = 1, \dots, n-1, \\ g(b) &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} f(b, y) dy. \end{aligned}$$

Todas estas integrales las expresaremos en la forma

$$I_j(f) = \int_{\varphi_1(x_j)}^{\varphi_2(x_j)} f(x_j, y) dy \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

las mismas que a su vez pueden ser aproximadas con la regla de los trapecios generalizada como se muestra a continuación.

Sea  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Se define  $h_j = \frac{1}{m} (\varphi_2(x_j) - \varphi_1(x_j))$  y  $y_k = \varphi_1(x_j) + kh_j \quad k = 0, 1, \dots, m$ . Entonces

$$T_m^{(j)}(f) = \frac{h_j}{2} \left( f(x_j, \varphi_1(x_j)) + f(x_j, \varphi_2(x_j)) + h_j \sum_{k=1}^{m-1} f(x_j, y_k) \right) \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

en consecuencia.  $I_j(f) \simeq T_m^{(j)}(f)$ , y

$$T_n(g) \simeq \frac{h}{2} (T_m^{(0)}(f) + T_m^{(n)}(f)) + h \sum_{j=1}^{n-1} T_m^{(j)}(f).$$

Así,

$$I(f) \simeq \frac{h}{2} (T_m^{(0)}(f) + T_m^{(n)}(f)) + h \sum_{j=1}^{n-1} T_m^{(j)}(f).$$

Ponemos  $T_{mn}(f) = \frac{h}{2} (T_m^{(0)}(f) + T_m^{(n)}(f)) + h \sum_{j=1}^{n-1} T_m^{(j)}(f)$  que es la formulación de la regla de los trapecios generalizada para regiones del tipo  $I$ . Esta es una forma lineal en  $C(\Omega)$ .

Mediante un procedimiento similar se establece la formulación de la regla de los trapecios generalizada para regiones del tipo  $II$ , la misma que se propone como ejercicio.



Para elaborar el algoritmo para el cálculo aproximado de una integral doble de una función sobre una región  $\Omega$  del tipo  $I$  con la regla de los trapecios generalizada requiere de la siguiente información: intervalo  $[a, b]$  y en consecuencia los extremos  $a$  y  $b$  de dicho intervalo, las funciones continuas  $\varphi_1, \varphi_2$  en  $[a, b]$  de modo que  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad x \in [a, b]$ , la función continua a integrar  $f$  definida en  $\Omega$ , el número de puntos  $n$  de la partición uniforme del intervalo  $[a, b]$  que lo llamaremos partición horizontal, el número de puntos  $m$  de la partición del intervalo  $[\varphi_1(x_j), \varphi_2(x_j)] \quad j = 0, 1, \dots, n$  a la que lo llamaremos particiones verticales.

### Algoritmo

Datos de entrada:  $m, n \in \mathbb{Z}^+, a, b \in \mathbb{R}$ , funciones  $\varphi_1, \varphi_2, f$ .

Datos de salida:  $T_{mn}(f)$ , mensaje.

1. Verificar  $a < b$ , caso contrario continuar en 7).

$$2. \quad h = \frac{b - a}{n}.$$

$$3. \quad S = 0.$$

4. Para  $j = 0, \dots, n$

$$x_j = a + jh$$

$$h_j = \frac{1}{m} (\varphi_2(x_j) - \varphi_1(x_j))$$

$$S_1 = 0$$

Para  $k = 1, \dots, m - 1$

$$y_k = \varphi_1(x_j) + kh_j$$

$$S_1 = S_1 + f(x_j, y_k)$$

Fin de bucle  $k$ .

$$S_1 = h_j S_1 + \frac{1}{2} h_j (f(x_j, \varphi_1(x_j)) + f(x_j, \varphi_2(x_j)))$$

$$\text{Si } j = 0, \quad z_1 = S_1.$$

$$\text{Si } j = n, \quad z_2 = S_1.$$

$$\text{Si } 0 < j < n,$$

$$S = S + S_1$$

Fin de bucle  $j$ .

$$5. \quad S = \frac{1}{2} h (z_1 + z_2) + hS.$$

6. Imprimir  $T_{mn}(f) = S$ . Continuar en 8).

7. Mensaje:  $a < b$ .

8. Fin.

### Ejemplos

1. Consideremos el problema (P) siguiente:  $I = \int_0^1 \left( \int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy$ . Notemos que  $I$  podemos calcularlo exactamente. Pués

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy = \int_0^1 e^{xy} \Big|_0^1 dy = \int_0^1 (e^y - 1) dy = e^y - y \Big|_0^1 = e - 2 \simeq 0,718281828.$$

Apliquemos la regla de los trapecios generalizada para aproximar  $I$ . Para el efecto, sean  $m = 5$ ,  $h_x = \frac{1}{m} = 0,2$ ,  $x_j = jh_x$ ,  $j = 0, 1, \dots, 5$ ;  $n = 5$ ,  $h_y = \frac{1}{n} = 0,2$ ,  $y_k = kh_y$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ ; y definimos la función  $g$  como sigue:  $g(y) = \int_0^1 ye^{xy}dx$ . Se tiene  $I = \int_0^1 g(y)dy$  y utilizando la fórmula de los trapecios generalizada, resulta

$$I(g) = \int_0^1 g(y)dy \simeq \frac{h_y}{2}(g(0) + g(1)) + h_y(g(0,2) + g(0,4) + g(0,6) + g(0,8)).$$

Calculemos  $g(y_k)$  para  $k = 0, 1, \dots, 5$ , y aproximemos usando la regla de los trapecios generalizada. Tenemos los siguientes resultados:

$$g(0) = 0,$$

$$g(0,2) = \int_0^1 0,2e^{0,2x}dx \simeq 0,1 [0,2(1 + 2(e^{0,04} + e^{0,08} + e^{0,12} + e^{0,16}) + e^{0,2})] \simeq 0,2214322787,$$

$$g(0,4) = \int_0^1 0,4e^{0,4x}dx \simeq 0,1 [0,4(1 + 2(e^{0,08} + e^{0,16} + e^{0,24} + e^{0,32}) + e^{0,4})] \simeq 0,492086976,$$

$$g(0,6) = \int_0^1 0,6e^{0,6x}dx \simeq 0,1 [0,6(1 + 2(e^{0,12} + e^{0,24} + e^{0,36} + e^{0,48}) + e^{0,6})] \simeq 0,8231051064,$$

$$g(0,8) = \int_0^1 0,8e^{0,8x}dx \simeq 0,1 [0,8(1 + 2(e^{0,16} + e^{0,32} + e^{0,48} + e^{0,64}) + e^{0,8})] \simeq 1,228154301,$$

$$g(1) = \int_0^1 e^x dx \simeq 0,1 [1 + 2(e^{0,2} + e^{0,4} + e^{0,6} + e^{0,8}) + e] \simeq 1,72400562.$$

Luego, utilizando la fórmula de los trapecios generalizada, resulta

$$I \simeq 0,1(g(0) + g(1)) + 0,2[g(0,2) + g(0,4) + g(0,6) + g(0,8)] \simeq 0,7253562942.$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo para diferentes valores de  $m = n$ , y la estimación del error.

$n$	$m$	$T_{mn}(f)$	Error: $ I(f) - T_{mn}(f) $
5	5	$7,2535629421 \times 10^{-1}$	$7,074465748 \times 10^{-3}$
10	10	$7,2003851477 \times 10^{-1}$	$1,7566863064 \times 10^{-3}$
20	20	$7,1872025130 \times 10^{-1}$	$4,3842284012 \times 10^{-4}$
40	40	$7,1839138732 \times 10^{-1}$	$1,0955886528 \times 10^{-4}$
80	80	$7,1830921525 \times 10^{-1}$	$2,7386787759 \times 10^{-5}$
160	160	$7,1828867497 \times 10^{-1}$	$6,8465138930 \times 10^{-6}$
320	320	$7,1828354008 \times 10^{-1}$	$1,7116170327 \times 10^{-6}$
640	640	$7,1828225636 \times 10^{-1}$	$4,2790354282 \times 10^{-7}$
1280	1280	$7,1828193543 \times 10^{-1}$	$1,0697584074 \times 10^{-7}$
2560	2560	$7,1828185520 \times 10^{-1}$	$2,6743957271 \times 10^{-8}$

- Calculemos la integral doble  $I = \int_1^2 \int_x^{x^2} (x^2 + xy + y^2) dx dy$ . Para el efecto, primeramente identificamos el tipo de región  $\Omega$  sobre la que tenemos que integrar la función  $f$  definida como  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ . Tenemos  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x^2 \quad x \in [1, 2]\}$  que corresponde a una región del tipo I. Ponemos  $\varphi_1(x) = x$ ,  $\varphi_2(x) = x^2$   $x \in [1, 2]$ . En la figura siguiente se muestra el

dominio  $\Omega$ .

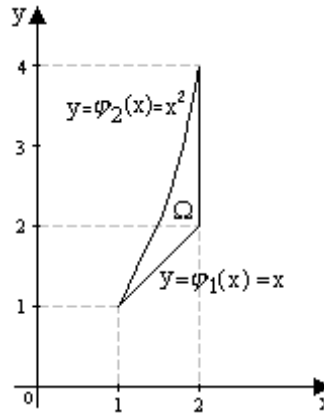


Figura 28

Calculemos  $I$  exactamente. Tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \int_x^{x^2} (x^2 + xy + y^2) dx dy = \int_1^2 \left( \int_x^{x^2} (x^2 + xy + y^2) dy \right) dx \\
 &= \int_1^2 \left( x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_x^{x^2} dx = \int_1^2 \left( x^4 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{1}{3} x^6 - x^3 - \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{3} x^3 \right) dx \\
 &= \int_1^2 \left( x^4 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{1}{3} x^6 - \frac{11}{6} x^3 \right) dx = \left( \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{12} x^6 + \frac{1}{21} x^7 - \frac{11}{24} x^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{8923}{840}, \\
 I &= 10,62261904 \dots
 \end{aligned}$$

Sea  $g(x) = \int_x^{x^2} (x^2 + xy + y^2) dy$   $x \in [1, 2]$ . Entonces  $I = \int_1^2 g(x) dx$ . Apliquemos el método de los trapecios generalizada con  $m = 5$ . Sea  $h_x = \frac{2-1}{5} = 0,2$ ,  $x_j = 1 + jh_x = 1 + 0,2j$  para  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Luego

$$I \simeq \frac{h_x}{2} \sum_{j=1}^5 [g(x_{j-1}) + g(x_j)] = \frac{h_x}{2} (g(1) + g(2)) + h_x (g(1,2) + g(1,4) + g(1,6) + g(1,8)),$$

donde

$$\begin{aligned}
 g(1) &= \int_1^1 (x + y + y^2) dy = 0, & g(1,2) &= \int_{1,2}^{1,41} (1,44 + 1,2y + y^2) dy, \\
 g(1,4) &= \int_{1,4}^{1,96} (1,96 + 1,4y + y^2) dy, & g(1,6) &= \int_{1,6}^{2,56} (2,56 + 1,6y + y^2) dy, \\
 g(1,8) &= \int_{1,8}^{3,24} (3,24 + 1,8y + y^2) dy, & g(2) &= \int_2^4 (4 + 2y + y^2) dy.
 \end{aligned}$$

Apliquemos nuevamente el método de los trapecios para aproximar  $g(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ .

Sea  $n = 5$ ,  $h_j = \frac{x_j^2 - x_j}{5}$  y  $y_x = x_j + kh_j$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ , luego

$$\begin{aligned}
 g(x_j) &\simeq \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^5 [f(x_j, y_{x-1}) + f(x_j, y_x)] \\
 &= \frac{h_j}{2} [f(x_j, y_0) + f(x_j, y_5)] + h_j [f(x_j, y_1) + f(x_j, y_2) + f(x_j, y_3) + f(x_j, y_4)],
 \end{aligned}$$

donde  $f(x_j, y) = x_j^2 + x_j y + y^2 = x_j^2 + y(x_j + y)$ .

Para  $j = 1$ ,  $h_1 = 0,048$ ,  $y_x = 1,2 + kh_1$   $k = 0, \dots, 5$ , los puntos  $y_x$  de la partición vertical son  $y_x = 1,2, 1,248, 1,296, 1,344, 1,392, 1,44$ . La función  $f$  en el punto  $(1,2, y)$  está definida como:

$$f(1,2, y) = 1,44 + y(1,2 + y),$$

luego para  $y = y_x = 1,2, 1,248, 1,296, 1,344, 1,392, 1,44$ , se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} f(1,2, 1,2) &= 4,32, & f(1,2, 1,248) &= 4,495104, & f(1,2, 1,296) &= 4,674816, \\ f(1,2, 1,344) &= 4,859136, & f(1,2, 1,392) &= 5,048064, & f(1,2, 1,44) &= 5,2416, \end{aligned}$$

y por la regla de los trapecios generalizada y la definición de  $g(1,2)$ , resulta

$$g(1,2) \simeq 0,021 \times 9,5116 + 0,048 \times 19,07712 = 1,14518016.$$

Para  $j = 2$ ,  $x_2 = 1,4$ ,  $h_2 = \frac{1,96 - 1,4}{5} = 0,112$ ,  $y_x = 1,4 + kh_2$   $k = 0, \dots, 5$ , los puntos  $y_x$  de la partición vertical son  $y_x = 1,4, 1,512, 1,624, 1,736, 1,848, 1,96$ . La función  $f$  en el punto  $(1,4, y)$  está definida como:

$$f(1,4, y) = 1,96 + y(1,4 + y),$$

y en consecuencia para  $y = y_x = 1,4, 1,512, 1,624, 1,736, 1,848, 1,96$ , se tiene

$$\begin{aligned} f(1,4, 1,4) &= 5,88, & f(1,4, 1,512) &= 6,362944, & f(1,4, 1,624) &= 6,870976, \\ f(1,4, 1,736) &= 7,404056, & f(1,4, 1,848) &= 7,962304, & f(1,4, 1,96) &= 8,5456, \end{aligned}$$

por la regla de los trapecios generalizada y la definición de  $g(1,4)$ , resulta

$$g(1,4) \simeq 0,056 \times 14,4256 + 0,112 \times 28,60032 = 4,01106944.$$

Para  $j = 3$ ,  $x_3 = 1,6$ ,  $h_3 = \frac{2,56 - 1,6}{5} = 0,192$ ;  $y_x = 1,6 + kh_3$   $k = 0, \dots, 5$ , los puntos de la partición vertical son  $y_x = 1,6, 1,792, 1,984, 2,176, 2,368, 2,56$ . La función  $f$  en el punto  $(1,6, y)$  está definida como:

$$f(1,6, y) = 2,56 + y(1,6 + y),$$

y para  $y = y_x = 1,6, 1,792, 1,984, 2,176, 2,368, 2,56$ , se obtienen los siguientes resultados

$$\begin{aligned} f(1,6, 1,6) &= 7,68, & f(1,6, 1,792) &= 8,638464, & f(1,6, 1,984) &= 9,679656, \\ f(1,6, 2,176) &= 10,776576, & f(1,6, 2,368) &= 11,956224, & f(1,6, 2,56) &= 13,2096. \end{aligned}$$

Por la regla de los trapecios generalizada y la definición de  $g(1,6)$ , se obtiene

$$g(1,6) \simeq 0,096 \times 20,8896 + 0,192 \times 41,04192 = 9,88545024.$$

Procediendo como en los casos anteriores, para  $j = 4$ ,  $x_4 = 1,8$ ,  $h_4 = \frac{3,24 - 1,8}{5} = 0,288$ , los puntos de la partición vertical son:  $y_x = 1,8, 2,088, 2,376, 2,664, 2,952, 3,24$ . La función  $f$  en el punto  $(1,8, y)$  está dada como:

$$f(1,8, y) = 3,24 + y(1,8 + y),$$

$$\begin{aligned} f(1,8, 1,8) &= 9,72, & f(1,8, 2,088) &= 11,358144, & f(1,8, 2,376) &= 13,162176, \\ f(1,8, 2,664) &= 15,132096, & f(1,8, 2,952) &= 17,267904, & f(1,8, 3,24) &= 19,5696, \end{aligned}$$

$$g(1,8) \simeq 0,144 \times 29,2896 + 0,288 \times 56,92032 = 20,61075456.$$

Finalmente, para  $j = 5$ ,  $x_5 = 2$ ,  $h_5 = \frac{4 - 2}{5} = 0,4$ ,  $y_x = 2, 2,4, 2,8, 3,2, 3,6, 4$ , y  $f$  en el punto  $(1,2, y)$  está dada como:

$$f(2, y) = 4 + y(2 + y),$$

entonces

$$\begin{aligned} f(2, 2) &= 12, & f(2, 2, 4) &= 14, 56, & f(2, 2, 8) &= 17, 44, \\ f(2, 3, 2) &= 20, 64, & f(2, 3, 6) &= 24, 16, & f(2, 4) &= 28, \end{aligned}$$

y en consecuencia, por la regla de los trapecios generalizada y la definición de  $g(2)$  resulta.

$$g(2) \simeq 0,2 \times 40 + 0,4 \times 76,8 = 38,72.$$

El valor aproximado de la integral doble  $I = \int_1^2 \int_x^{x^2} (x^2 + xy + y^2) dx dy$  mediante la aplicación de la regla de los trapecios generalizada  $T_{mn}(f)$  a la región del tipo I con  $m = n$ , es:

$$T_{mn}(f) = 0,1 \times 38,72 + 0,2 \times 35,6524544 = 11,00249088.$$

Este ejemplo pone de manifiesto dos aspectos: el volumen de cálculos a ejecutar y la precisión del cálculo. El primero conduce a la elaboración de un programa computacional y el segundo a una discretización más fina que permita mejorar la precisión. Este segundo punto se lo alcanza con la ejecución del programa computacional para discretizaciones más finas que a la mano son muy largas de ejecutarse. En la tabla siguiente se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo.

$n$	$m$	$T_{mn}(f)$	Error= $ I(f) - T_{mn}(f) $
5	5	11,0024908800	$3,7987183238 \times 10^{-1}$
10	10	10,7176023425	$9,4983294881 \times 10^{-2}$
20	20	10,6463657751	$2,3746727449 \times 10^{-2}$
40	40	10,6285557851	$5,9367374871 \times 10^{-3}$
80	80	10,6241032355	$1,4841878349 \times 10^{-3}$
160	160	10,6229900948	$3,7104717497 \times 10^{-4}$
320	320	10,6227118094	$3,2761807254 \times 10^{-5}$
640	640	10,6226422381	$2,3190452660 \times 10^{-5}$

**Nota:** Parecería razonable que con particiones horizontales y verticales muy finas, esto es, que tengan un gran número de puntos y que a su vez sean regulares, se podría aproximar tanto como se quiera la integral de una función continua. Lastimosamente, debido a los errores de redondeo, errores de truncamiento y de aproximación que intervienen en el cálculo de una integral doble, esto no es del todo cierto, pues para particiones con un número elevado de puntos, todos estos tipos de errores intervienen y deterioran los resultados. Por lo tanto, no es recomendable calcular aproximaciones de integrales con particiones regulares que tengan un gran número de puntos. Por este motivo que buscan otros métodos de aproximación que combinen con los métodos estudiados. Uno de estos métodos recomendables es la integración adaptativa que tiene muchas versiones. En la bibliografía se citan algunos textos en los que puede encontrar estos tópicos.

## 2.9. Ejercicios

- Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación lineal definida por  $T(x, y, z) = ax + by + cz$   $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  distintos entre sí y no todos nulos.
  - Determine  $\ker(T)$  para las distintas posibilidades de  $a, b, c$  e interprete geoméricamente el resultado.
  - Determine  $[T]_B$ , donde  $B$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Probar que todas las aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$  son de la forma  $T(x, y, z) = ax + by + cz$ .
  - Generalizar a) y b) a  $\mathbb{R}^n$ .
- Sea  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$  no nulo.
  - Pruebe que  $0 < \dim(\ker(f)) < n$ .
  - Sea  $B_n = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , halle  $[f]_{B_n}$ .
  - Sea  $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  la base de  $\mathbb{R}^n$  definida como sigue:  $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \dots, \vec{v}_n = \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n$ . Halle una base dual de  $B$ .

3. Para los datos  $S$  que en cada ítem se propone, hallar el polinomio de interpolación de Lagrange  $P_h(x)$  y calcular el valor interpolado  $P_h(\hat{x})$  de una función  $f$  en el punto  $\hat{x}$  que se indica.
  - a)  $S = \{(0,1, 5), (0,2, 8)\}$ ,  $\hat{x} = 0,16$ .    b)  $S = \{(0, 2), (0,15, 4,1)\}$ ,  $\hat{x} = 0,0016$ .
  - c)  $S = \{(-1,1, 0,25), (-1,02, 2,8)\}$ ,  $\hat{x} = -1,08$ .    d)  $S = \{(2,1, 5,5), (2,25, 3,8)\}$ ,  $\hat{x} = 2,19$ .
4. Para los datos  $S$  que en cada ítem se propone, hallar el polinomio de interpolación de Lagrange  $P_h(x)$  y calcular el valor interpolado  $P_h(\hat{x})$  de una función  $f$  en el punto  $\hat{x}$  que se indica.
  - a)  $S = \{(1, 4), (1,2, 5), (1,5, 6,5)\}$ ,  $\hat{x} = 1,4$ .    b)  $S = \{(-1,1, 3,5), (-0,8, 4,5), (-0,5, 3,5)\}$ ,  $\hat{x} = -0,94$ .    c)  $S = \{(0,1, 1,4), (0,22, 2,5), (0,25, 1,56)\}$ ,  $\hat{x} = 0,145$ .
  - d)  $S = \{(1,8, -4,2), (2,2, -3,5), (2,5, -4,5)\}$ ,  $\hat{x} = 1,995$ .
5. Considerar la función  $f$  definida en cada ítem. Calcule  $f'(x_0)$  para el punto  $x_0$  que se indica. Calcule aproximaciones de  $f'(x_0)$  mediante diferencias finitas centrales de primer orden para cada  $h$  que se indica, esto es  $y'_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ . Estime el error  $|f'(x_0) - y'_0|$ .
  - a)  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $h = -0,0025$ ,  $h = -0,000025$ ,  $h = 0,003$ ,  $h = 0,00003$ .
  - b)  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $h = -0,002$ ,  $h = -0,0002$ ,  $h = 0,0032$ ,  $h = 0,000032$ .
  - c)  $f(x) = \sqrt{x^4 - 16}$   $|x| > 4$ ,  $x_0 = 5$ ,  $h = -0,0001$ ,  $h = -0,00001$ ,  $h = 0,00011$ ,  $h = 0,000011$ .
  - d)  $f(x) = \sin(x^3 + 2)$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \left(\frac{\pi}{3} - 2\right)^{\frac{1}{3}}$ ,  $h = -0,004$ ,  $h = -0,0004$ ,  $h = 0,00041$ ,  $h = 0,00001$ .
  - e)  $f(x) = \cos^2(\sqrt{x+1})$   $x > -1$ ,  $x_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$ ,  $h = -0,0011$ ,  $h = -0,00011$ ,  $h = 0,0002$ ,  $h = 0,00002$ . Sugerencia: aproxime  $\pi$  con 9 cifras de precisión.
  - f)  $f(x) = \ln(16 - x^2)$   $|x| < 4$ ,  $x_0 = 1$ ,  $h = -0,004$ ,  $h = -0,0004$ ,  $h = 0,0005$ ,  $h = 0,00002$ .
  - g)  $f(x) = 2\ln(x) + 3\ln^2(x) + 4\ln^3(x)$   $x > 0$ ,  $x_0 = e$ ,  $h = -0,01$ ,  $h = -0,0001$ ,  $h = 0,001$ ,  $h = 0,00001$ . Sugerencia: aproxime  $e$  con 9 cifras de precisión.
6. Considerar el polinomio  $P$  de segundo grado definido como  $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \lambda$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$  con  $\alpha \neq 0$ ; y, el polinomio de interpolación de Lagrange de  $P_h$  definido como  $P_h(x) = p(a)\varphi_0(x) + p\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_1(x) + p(b)\varphi_2(x)$   $x \in [a, b]$ , donde  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  son los polinomios de interpolación de Lagrange de segundo grado definidos en  $[a, b]$ . Se prueba que  $P(x) = P_h(x)$   $\forall x \in [a, b]$ . En cada ítem se da un polinomio  $p$  de segundo grado y se restringe al intervalo  $[a, b]$  que se indica. Hallar  $P_h$  y probar que  $p(x) = P_h(x)$   $\forall x \in [a, b]$ .
  - a)  $p(x) = x^2 - 1$   $x \in [-1, 1]$ .    b)  $p(x) = 2x^2 + 5$   $x \in [0, 2]$ .    c)  $p(x) = -x^2 + x + 1$   $x \in [-1, 2]$ .
  - d)  $p(x) = 5x^2$   $x \in [0, 3]$ .    e)  $p(x) = -3x^2 + 4x$   $x \in [1, 10]$ .    f)  $p(x) = 5x^2 + 7x - 1$   $x \in [2, 4]$ .
7. En cada ítem se define una función  $u$ . Calcular  $u''(x_0)$  en el punto  $x_0$  que se indica. Aproximar  $u''(x_0)$  mediante el uso de diferencias finitas centrales de segundo orden para cada  $h > 0$  que se da.
  - a)  $u(x) = -x^3 + x^2 - 1$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $h = 0,01$ ,  $h = 0,001$ ,  $h = 0,0001$ .
  - b)  $u(x) = \sin^4(x)$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $h = 0,002$ ,  $h = 0,0002$ ,  $h = 0,00002$ .
  - c)  $u(x) = x^2 \exp(-x^2 + 3)$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \sqrt{3}$ ,  $h = 0,0025$ ,  $h = 0,0002$ ,  $h = 0,00001$ .
  - d)  $u(x) = x^3 \sqrt{x^2 - 2}$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \sqrt{2}$ ,  $h = 0,005$ ,  $h = 0,0025$ ,  $h = 0,00005$ .
  - e)  $u(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = -\sqrt{8}$ ,  $h = 0,03$ ,  $h = 0,003$ ,  $h = 0,00003$ .
  - f)  $u(x) = \cos(\pi x^2)$   $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $h = 0,001$ ,  $h = 0,0001$ ,  $h = 0,00001$ .

8. En cada ítem se dan los valores  $f(a+h)$  y  $f(a-h)$  de una cierta función  $f$  en  $x=a$  y  $h \neq 0$ . Calcular el valor aproximado de la derivada  $f'(a)$ .
- a)  $f(1,005) = 2,8117482$ ,  $f(0,9995) = 3,114231$ .  
 b)  $f(5,00012) = -1,252231$ ,  $f(4,99988) = 0,00123112$ .  
 c)  $f(-1,11231) = 587,22314$ ,  $f(-1,11211) = 495,231427$ .  
 d)  $f(-11,32145) = 10,369725$ ,  $f(11,32111) = 42,223583$ .
9. En cada literal se dan los valores  $f(a+h)$ ,  $f(a)$ ,  $f(a-h)$  de una cierta función  $f$  y  $h \neq 0$ . Calcular el valor aproximado de la derivada segunda  $f''(a)$  mediante diferencias finitas centrales.
- a)  $f(0,0022) = 3,852224$ ,  $f(0) = 1,8211253$ ,  $f(-0,0022) = 2,852536$ .  
 b)  $f(1,3561) = 8,923824$ ,  $f(1,355) = 15,162234$ ,  $f(1,3490) = 25,8542321$ .  
 c)  $f(-10,4583) = 0,312112$ ,  $f(-10,4572) = 4,852011$ ,  $f(-10,4561) = 3,2581423$ .  
 d)  $f(20,34823) = -13,4585252$ ,  $f(20,348) = -32,4525321$ ,  $f(20,34777) = -52,85343211$ .
10. Sea  $f$  una función real continua en  $[a, b]$ ,  $h = \frac{b-a}{3}$  y  $\tau_3 = \{a+jh \mid j=0,1,2,3\}$  una partición uniforme de  $[a, b]$ .
- a) Escriba los polinomios de interpolación de Lagrange  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  definidos en  $[a, b]$ .  
 b) Sea  $x \in [a, b]$ . Escribir el polinomio interpolante  $P_h(x)$  de  $f$  en  $[a, b]$ .  
 c) Suponga  $f \in C^4([a, b])$ . Escriba el error de interpolación de Lagrange.  
 d) Sea  $f$  la función definida como  $f(x) = x^3$   $x \in [0, 3]$ . Aplique el resultado obtenido en b) y halle  $P_h(x)$ . Calcule  $f(1,5)$  y  $P_h(1,5)$  y verifique que  $f(1,5) = P_h(1,5)$ . Demuestre que  $f(x) = P_h(x) \quad \forall x \in [0, 3]$ .  
 e) Sea  $f$  la función definida como  $f(x) = e^x$   $x \in [-1, 2]$ . Aplique el resultado de la parte b) y halle  $P_h(x)$ . Calcule  $f(-0,5)$  y  $P_h(-0,5)$  así como  $f(0,5)$  y  $P_h(0,5)$ .
11. En cada literal se define una función real  $w$  en dos variables. Calcular las derivadas parciales  $\frac{\partial w}{\partial x}(a, b)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}(a, b)$  en el punto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  que se indica. Calcular valores aproximados de  $\frac{\partial w}{\partial x}(a, b)$  y  $\frac{\partial w}{\partial y}(a, b)$  mediante el uso de diferencias finitas centrales para cada  $h \neq 0$ ,  $k \neq 0$  que se dan.
- a)  $w(x, y) = 2x^2 - xy - y^2$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  $a = 1$ ,  $b = 1$ ;  $h = 0,02$  y  $k = 0,01$ ;  $h = 0,002$  y  $k = 0,001$ ;  $h = 0,0001$  y  $k = 0,0002$ .  
 b)  $w(x, y) = x^3 - 10xy^2 + \frac{1}{1+xy}$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $y \neq -\frac{1}{x}$ ;  $a = -1$ ,  $b = -1$ ;  $h = k = 0,01$ ;  $h = k = 0,0002$ ;  $h = 0,00005$ ,  $k = 0,0002$ .  
 c)  $w(x, y) = x \cos(y) + y \cos(x)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  $a = \frac{\pi}{6}$ ,  $b = -\frac{\pi}{3}$ ;  $h = 0,003$  y  $k = 0,002$ ;  $h = 0,0003$  y  $k = 0,0002$ ;  $h = 0,00005$  y  $k = 0,00004$ .  
 d)  $w(x, y) = \ln(1+x^2+y^2)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{3}$ ;  $h = k = 0,02$ ;  $h = k = 0,003$ ;  $h = k = 0,0004$ ;  $h = k = 0,00005$ .  
 e)  $w(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ;  $a = -1$ ,  $b = 1$ ;  $h = k = 0,003$ ;  $h = k = 0,0004$ ;  $h = k = 0,00002$ .  
 f)  $w(x, y) = x \ln(1+y) + y \ln(1+x)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x > -1$ ,  $y > -1$ ;  $a = b = 2$ ;  $h = \frac{1}{2}k = 0,02$ ;  $h = \frac{1}{3}k = 0,001$ ;  $h = \frac{1}{4}k = 0,0001$ .
12. Supóngase que  $f$  posee derivadas de todos los órdenes en un entorno del punto  $x=a$ . Se desea calcular valores aproximados  $\tilde{y}_a'''$  de  $f'''(a)$ . Escriba en forma explícita cada uno de los cocientes que se indican y determine el error de aproximación, donde  $h \neq 0$  suficientemente pequeño.
- a)  $\tilde{y}_a''' = \frac{\delta \Delta^2 f(a)}{\alpha_1 h^3}$ .   b)  $\tilde{y}_a''' = \frac{\delta^3 f(a)}{\alpha_2 h^3}$ .   c)  $\tilde{y}_a''' = \frac{\nabla \delta \Delta f(a)}{\alpha_3 h^3}$ .   d)  $\tilde{y}_a''' = \frac{\nabla \Delta \delta f(a)}{\alpha_4 h^3}$ .

e)  $\tilde{y}_a''' = \frac{\delta\Delta\delta f(a)}{\alpha_5 h^3}$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  con  $\alpha_i \neq 0$  escogido en cada caso apropiadamente,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . El polinomio de Taylor de grado 3 con error está definido como  $f(a+k) = f(a) + kf'(a) + \frac{k^2}{2!}f''(a) + \frac{k^3}{3!}f'''(a) + \frac{k^4}{4!}f^{iv}(\xi)$  con  $\xi$  entre  $a$  y  $a+k$  con  $k \neq 0$ .

13. Sea  $v$  la función definida como  $v(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$   $x \in [0, 4]$ . Calcule valores aproximados de  $v'''(2)$  mediante los siguientes cocientes:

a)  $\frac{\delta\Delta\delta v(2)}{\alpha_1 h^3}$ . b)  $\frac{\delta\Delta^2 v(2)}{\alpha_2 h^3}$ . c)  $\frac{\delta^3 v(2)}{\alpha_3 h^3}$ . d)  $\frac{\nabla\delta\nabla v(2)}{\alpha_4 h^3}$ . e)  $\frac{\nabla\Delta\delta v(2)}{\alpha_5 h^3}$ . f)  $\frac{\Delta\nabla^2 v(2)}{\alpha_6 h^3}$ ,

donde  $h \neq 0$  y  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  con  $\alpha_i \neq 0$  escogido apropiadamente  $i = 1, \dots, 6$ .

14. Considerar la función real  $u$  definida con  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

a) Hallar las derivadas parciales  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)$ , el laplaciano  $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$  con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ .

b) Calcular aproximaciones de  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  y  $\Delta u(a, b)$  mediante diferencias finitas centrales en el punto  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  así como en  $(4, 3)$ , con  $h \neq 0$ ,  $k \neq 0$  pequeños que usted elige y compare los resultados con los valores exactos.

15. En cada ítem se define una función que posee derivadas parciales segundas en todo punto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Calcule valores aproximados  $\tilde{\Delta}u(a, b)$  del laplaciano  $\Delta u(a, b)$  en el punto  $(a, b)$  y  $h \neq 0$ ,  $k \neq 0$  que se indican. Calcule el error de aproximación, esto es,  $|\Delta u(a, b) - \tilde{\Delta}u(a, b)|$ .

a)  $f(x, y) = x^3 y^4 - x^2 y^2 + y^3$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $h = k = 0,0015$  y  $h = k = 0,00025$ .

b)  $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a = b = \frac{1}{2}$ ,  $h = k = 0,001$  y  $h = k = 0,00012$ .

c)  $f(x, y) = x e^{xy} + y e^x$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $h = k = 0,002$  y  $h = k = 0,00011$ .

d)  $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a = 10$ ,  $b = 20$ ,  $h = 0,001$ ,  $k = 0,002$ ; y,  $h = 0,00025$  y  $k = 0,00012$ .

16. Sea  $v$  una función que posee derivadas parciales de todos los órdenes en un entorno de  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Se desea calcular valores aproximados de  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(a, b)$  mediante cocientes de diferencias finitas que se indican a continuación, donde  $h \neq 0$ ,  $k \neq 0$  suficientemente pequeños, y,  $\alpha_i \neq 0$  escogidos apropiadamente,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

a)  $\frac{\nabla^2 v(a, b)}{\alpha_1 h k}$ . b)  $\frac{\alpha \nabla v(a, b)}{\alpha_2 h k}$ . c)  $\frac{\Delta \nabla v(a, b)}{\alpha_3 h k}$ . d)  $\frac{\delta^2 v(a, b)}{\alpha_4 h k}$ . e)  $\frac{\Delta \delta v(a, b)}{\alpha_5 h k}$ .

Estime en cada caso el error de aproximación y analice los resultados.

17. En cada ítem se define una función real continua  $f$  en  $[a, b]$ . Calcular  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Calcular valores aproximados de  $I(f)$  con la regla del rectángulo  $R_n(f)$  con particiones uniformes  $\tau(n)$  con  $n = 4$  y luego con  $n = 8$ . Calcular  $|I(f) - R_n(f)|$ .

a)  $f(x) = x^2$   $x \in [0, 4]$ . b)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$   $x \in [-1, 2]$ . c)  $f(x) = \sqrt{x}$   $x \in [1, 9]$ .

d)  $f(x) = x e^x$   $x \in [-2, 2]$ . e)  $f(x) = x \ln(x)$   $x \in [1, e]$ . f)  $f(x) = \arctan(x)$   $x \in [0, 1]$ .

18. Con cada función  $f$  que se define en cada ítem, calcular  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  y calcular valores aproximados de dicha integral con la regla de los trapecios  $T_n(f)$  con particiones uniformes  $\tau(n)$  con  $n = 5$  y luego con  $n = 10$ . Calcular el error  $|I(f) - T_n(f)|$ .

a)  $f(x) = x^2 - 1$   $x \in [-1, 3]$ . b)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$   $x \in [0, 2]$ . c)  $f(x) = \sqrt{2x+1}$   $x \in [0, 4]$ .

d)  $f(x) = 2x e^{x^2}$   $x \in [0, 2]$ . e)  $f(x) = x \ln(x) + x^2$   $x \in [1, e]$ . f)  $f(x) = x \arctan(x)$   $x \in [0, 1]$ .



19. Con cada función  $f$  que se define en cada ítem, calcular  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Aplicar la regla de Simpson  $S_n(f)$  para calcular aproximaciones de  $I(f)$  con particiones uniformes  $\tau(n)$  con  $n = 4$ , y  $n = 8$ . Calcule el error  $|I(f) - S_n(f)|$ .
- a)**  $f(x) = x^2 + 1 \quad x \in [-1, 1]$ . **b)**  $f(x) = x^3 \quad x \in [-1, 1]$ . **c)**  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad x \in [0, 1]$ .  
**d)**  $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}} \quad x \in [0, 7]$ . **e)**  $f(x) = x \sin(x) \quad x \in [0, \pi]$ . **f)**  $f(x) = x \cos^2(x) \quad x \in [0, \pi]$ .
20. Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau(n) = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ ,  $h_i = x_i - x_{i-1}$   $i = 1, \dots, n$ . Se supone que  $\tau(n)$  es regular, esto es, existe  $\sigma \geq 1$  talq ue  $h_i \leq \sigma \frac{b-a}{n} \quad i = 1, \dots, n$ . Se define  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  y  $R_n(f) = \sum_{k=1}^n h_k f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$ .
- a)** Demuestre que  $R_n(f)$  es una forma lineal sobre  $C([a, b])$  que se conoce como regla de los rectángulos generalizada.
- b)** Demuestre que existe  $\lambda \in [a, b]$  tal que  $|I(f) - R_n(f)| \leq \frac{h}{2}(b-a)|f'(\lambda)| \leq \frac{(b-a)}{2} Mh$ , con  $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .
21. El área del círculo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$  es  $a(C) = 4\pi$  (círculo de centro  $(0, 0)$  y radio  $r = 2$ ). Se define  $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad x \in [0, 2]$ , calcule  $I(f) = 4 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$  y verifique que  $a(C) = I(f)$ .
- a)** Aplique la regla del rectángulo generalizado para calcular aproximaciones de  $a(C)$  con particiones  $\tau(n)$  uniformes con  $n = 5$  y  $n = 10$ . Calcule el error  $|a(C) - R_n(f)|$ .
- b)** Aplique la regla de los trapecios generalizada  $T_n(f)$  para calcular aproximaciones de  $a(C)$  con particiones  $\tau(n)$  uniformes con  $n = 5$  y  $n = 10$ . Calcule  $|a(C) - T_n(f)|$ .
- c)** Aplique la regla de Simpson generalizada  $S_n(f)$  con particiones  $\tau(n)$  uniformes con  $n = 4$  y  $n = 8$ . Calcule  $|S_n(f) - I(f)|$ .
- Compare los resultados de a), b) y c).
22. Sea  $f$  la función real definida como  $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$  e  $I(f) = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(x) dx$ . Calcule  $I(f)$ . Aplique la regla del rectángulo  $R_n(f)$ , de los trapecios  $T_n(f)$ , de Simpson  $S_n(f)$  generalizadas para calcular aproximaciones de  $I(f)$  con particiones  $\tau(n)$  regulares que en cada ítem se indican. Calcule el error con cada método y cada partición.
- a)**  $\tau_1(5) = \{x_0 = 0,25, x_1 = 0,3, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8, x_5 = 1\}$ .
- b)**  $\tau_2(5) = \{x_0 = 0,25, x_1 = 0,4, x_2 = 0,55, x_3 = 0,7, x_4 = 0,85, x_5 = 1\}$ .
- c)**  $\tau_1(10) = \{x_0 = 0,25, x_2 = 0,28, x_3 = 0,32, x_4 = 0,36, x_5 = 0,4, x_6 = 0,5, x_7 = 0,6, x_8 = 0,7, x_9 = 0,85, x_{10} = 1\}$ .
- d)**  $\tau_2(10) = \{x_j = 0,25 + 0,075j \mid j = 0, 1, \dots, 10\}$ .
- e)** Compare los resultados obtenidos con la regla del rectángulo generalizada en a) y b), luego en c) y d); concluya. Proceda en forma similar con la regla de los trapecios generalizada en a) y b) luego en c) y d). Concluya
- f)** Compare los resultados obtenidos con la regla de Simpson generalizada en a) y b); luego en c) y d). Compare estos con los anteriores y concluya.
23. Considere la función  $u$  definida como  $u(x) = \exp(-10x^2) \quad x \in [-2, 2]$ .
- a)** Trace la gráfica de la función  $u$ .
- b)** Aplique la regla de los trapecios generalizada para calcular valores aproximados de  $I(u) = \int_{-2}^2 u(x) dx$  con cada una de las particiones  $\tau_1(6)$ ,  $\tau_2(8)$ ,  $\tau_3(10)$  siguientes:
- $\tau_1(6) = \{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -0,5, x_3 = 0, x_4 = 0,5, x_5 = 1, x_6 = 2\}$ ,
- $\tau_2(8) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -0,5, x_3 = -0,25, x_4 = 0, \\ x_5 = 0,25, x_6 = 0,5, x_7 = 1, x_8 = 2 \end{array} \right\}$ ,

$$\tau_3(10) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -2, \ x_1 = -1, \ x_2 = -0,6, \ x_3 = -0,3, \ x_4 = -0,1, \ x_5 = 0, \\ x_6 = 0,1, \ x_7 = 0,3, \ x_8 = 0,6, \ x_9 = 1, \ x_{10} = 2 \end{array} \right\}.$$

c) Calcule valores aproximados de  $I(u) = \int_{-2}^2 u(x) dx$  con particiones uniformes  $\tau(n)$  y  $n = 6, 8, 10$ . Compare con los resultados obtenidos en la parte b) precedente.

24. Sean  $f, g \in C([a, b])$ . Supongamos que  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ ,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq g(x) \quad x \in [a, b]\}.$$

El área de la región  $\Omega$  está definida como  $a(\Omega) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$ . En cada ítem se dan las funciones continuas  $f, g$  en  $[a, b]$ . Represente gráficamente la región  $\Omega$ , calcule  $a(\Omega)$  y calcule aproximaciones de  $a(\Omega)$  con la regla de Simpson generalizada con una partición uniforme  $\tau(n)$  con  $n = 5$ . Compare los resultados obtenidos.

a)  $f(x) = 0, g(x) = x \quad x \in [0, 4]$ .    b)  $f(x) = -1, g(x) = x^2 \quad x \in [0, 4]$ .

c)  $f(x) = -x^2 + 1, g(x) = x^3 + 1 \quad x \in [0, 3]$ .    d)  $f(x) = x^2 - 4, g(x) = x^2 + x + 1 \quad x \in [0, 4]$ .

e)  $f(x) = x - \frac{\pi}{2}, g(x) = \cos(x) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .    f)  $f(x) = x^2, g(x) = e^x \quad x \in [0, 2]$ .

25. En cada literal se define una función  $f$  que es impar en el intervalo  $[-a, a]$  con  $a > 0$  que se indica. Demuestre que  $I(f) = 0$  y aplique la regla del rectángulo, trapecios y Simpson generalizadas para calcular aproximaciones de  $I(f)$  con particiones uniformes  $\tau(n)$  con  $n = 5$  y  $n = 6$ . Analice los resultados.

a)  $f(x) = x^3 \quad x \in [-2, 2]$ .    b)  $f(x) = \sin(x) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .    c)  $f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1, 1]$ .

d)  $f(x) = x \cos^2(\pi x) \quad x \in [-1, 1]$ ,    e)  $f(x) = 2 \sin^3(\pi x) \cos^2(\pi x) \quad x \in [-1, 1]$ .

26. Sean  $f \in C([a, b])$ ,  $\tau(n)$  una partición regular del intervalo  $[a, b]$ . Elabore un algoritmo para aproximar  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  con la regla del rectángulo generalizada.

27. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  una región del tipo II,  $f \in C(\Omega)$ . Elabore un algoritmo para calcular aproximaciones de  $I(f) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  con la regla de los trapecios generalizada.

28. a) Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  una región de tipo I,  $f \in C(\Omega)$ . Elabore un algoritmo para calcular aproximaciones de  $I(f) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  con la regla de Simpson generalizada.

b) Suponga ahora  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  región de tipo II,  $f \in C(\Omega)$ . Elabore un algoritmo para calcular aproximaciones de  $I(f) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  con la regla de Simpson generalizada.

29. En cada ítem se define una función continua  $f$  sobre  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  que se indica. Calcule  $I(f) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ . Aplique la regla de los trapecios generalizada para calcular aproximaciones de  $I(f)$  con  $n = m = 5$ . Estime el error

a)  $f(x, y) = xy \quad (x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$ .    b)  $f(x, y) = x^3 y + xy^4 \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

c)  $f(x, y) = 10\sqrt{xy} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .    d)  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (x, y) \in [0, 4] \times [0, 4]$ .

e)  $f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{x}} \quad (x, y) \in [0, 4] \times [0, 2]$ .    f)  $f(x, y) = \frac{4}{1 + xy} \quad (x, y) \in [1, 4] \times [1, 4]$ .

30. Calcular  $I(f) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$  para cada función  $f \in C(\Omega)$  que se define sobre  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ . Aplique la regla de Simpson generalizada para calcular aproximaciones de  $I(f)$  con  $m = n = 5$ . Estime el error.

a)  $f(x, y) = x^2 + xy \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ .    b)  $f(x, y) = xe^y + ye^x \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

c)  $f(x, y) = \sin(x + y) \quad (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .    d)  $f(x, y) = (x + y)^{\frac{1}{3}} \quad (x, y) \in [0, 4] \times [0, 4]$ .

e)  $f(x, y) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [1, 4]$ .    f)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (x, y) \in [0, 4] \times [1, 4]$ .

31. En cada ítem se define una función  $u$  sobre  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ . Calcule  $I(f) = \int_c^d \left( \int_a^b u(x, y) dx \right) dy$ . Calcule aproximaciones de  $I(u)$  con  $m, n$  que se indican; y, estime el error  $|I(u) - T_{mn}(u)|$ .
- $u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad m = n = 5.$
  - $u(x, y) = \sqrt{x + y} \quad (x, y) \in [0, 2] \times [1, 4], \quad m = n = 6.$
  - $u(x, y) = ye^{xy} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [-1, 0], \quad m = n = 5.$
  - $u(x, y) = x^4 \quad (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \times [-1, 1], \quad m = n = 8.$
- De modo análogo, calcule aproximaciones de  $I(u)$  usando la regla de Simpson generalizada  $S_{mn}(u)$  con  $m = n = 4$ ; y, estime el error  $|I(u) - S_{mn}(u)|$ .
32. Sean  $V = C([a, b])$  el espacio vectorial real de funciones continuas en  $[a, b]$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , y  $\Delta$  el funcional definido sobre  $C([a, b])$  que en cada ítem se define. Pruebe que  $\Delta$  es lineal.
- $\Delta(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)$  (fórmula de los trapecios generalizada), donde  $h = \frac{b-a}{n}$  y  $x_j = a + jh \quad j = 0, 1, \dots, n.$
  - $\Delta(f) = \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2}{3}h \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + \frac{4}{3}h \sum_{j=1}^n f(x_{2j-1})$  (fórmula de Simpson generalizada), donde  $h = \frac{b-a}{2n}$ ,  $x_j = a + jh \quad j = 0, 1, \dots, 2n$
33. Aplique la regla de los trapecios generalizada para aproximar las siguientes integrales con una discretización de 10 puntos igualmente espaciados:
- $\int_0^1 \sqrt{x} dx.$
  - $\int_0^1 x^{1/4} dx.$
  - $\int_0^2 xe^{-x} dx.$
  - $\int_0^{0.5} \sin(x^2) dx.$
  - $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$
  - $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$
- Para los literales a), b) y c) halle el valor exacto de la integral y compare con el valor aproximado.
34. En cada ítem se define una función  $f$  sobre una región  $\Omega$ . Calcular  $I(f) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ . Aplicar la regla de los trapecios generalizada  $T_{mn}(f)$  para calcular una aproximación de  $I(f)$  con  $m = n = 4$ .
- $f(x, y) = x, y \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1\}.$
  - $f(x, y) = (x - y)^2 \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1]\}.$
  - $f(x, y) = \sin(x + y) \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0, 2]\}$
  - $f(x, y) = \frac{x}{y} \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} \leq y \leq 1 + x, \quad x \in [1, 2]\}.$
35. En cada ítem se define una función  $w$  sobre una región  $\Omega$ . Calcular  $I(w) = \iint_{\Omega} w(x, y) dx dy$ . Aplicar la regla de Simpson generalizada  $S_{mn}(w)$  para calcular una aproximación de  $I(w)$  con  $m = n = 4$ .
- $w(x, y) = \frac{1}{6}(x + y)^2 \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + y \leq x \leq 1 + y^2, \quad y \in [1, 2]\}.$
  - $w(x, y) = \frac{y}{x + 4} \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 1 \leq x \leq 1 - y^2, \quad y \in [0, 1]\}.$
  - $w(x, y) = \frac{4}{1 + x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , escoja apropiadamente  $\Omega_1 \subset \Omega$  región del tipo  $I$  y proceda con el cálculo. Asimismo, escoja otra región de  $\Omega_2 \subset \Omega$  del tipo  $II$  y proceda con el cálculo. Compare los resultados.
  - $w(x, y) = \cos^2(x - y) \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \frac{\pi}{2} \leq y \leq x, \quad y \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$
  - $w(x, y) = x^4 + y^4 \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Escoja apropiadamente  $\Omega_1 \subset \Omega$  del tipo  $I$  y calcule  $S_{mn}(w)$ . De manera similar, escoja  $\Omega_2 \subset \Omega$  del tipo  $II$  y calcule  $S_{mn}(w)$ . Compare los resultados.

36. Considerar la integral impropia  $I = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ , y sea  $I_1 = \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ .

a) Demuestre que  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \simeq 0,4431134628$ .

b) Muestre que

$$I_2 = \int_1^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{5/2}} dt.$$

c) Aplique la fórmula de los trapecios con  $n = 4$  para aproximar  $I_1$ ,  $I_2$  consecuentemente  $I$  (tome en cuenta la singularidad en  $I_2$ ). Compare el resultado con a).

d) Repita la parte b) con  $n = 10$ . Compare el resultado con a) y c).

37. Considerar la integral doble  $I = \int_0^1 \left( \int_{x^3}^x (x^2 + y) dy \right) dx$ .

a) Muestre que  $I = \frac{5}{28}$ .

b) Sean  $g(x) = \int_{x^3}^x (x^2 + y) dy$ ,  $x \in [0, 1]$ ;  $h = 0,2$  y  $x_k = kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Calcule  $g(x_k)$  y aproxime  $g(x_k)$  usando la regla de los trapecios con  $m = 5$ .

c) Aplique la regla de los trapecios para aproximar  $I = \int_0^1 g(x) dx$  y compare con a).

38. Sea  $I = \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2) dx dy$ .

a) Calcule  $I$ .

b) Aplique la regla de los trapecios para aproximar  $I$  con  $m = n = 5$ .

39. Sea  $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{x^2+y^2} dx dy$ .

a) Pruebe que  $I = 4 \left( \int_0^1 e^{x^2} dx \right)^2$ .

b) Utilice la fórmula de los trapecios para aproximar el valor de  $I$  con  $n = 10$ , y luego con  $n = 20$ .

c) Utilice la serie de Taylor de  $e^x$  y aproxime  $I$  mediante una suma finita  $S_n$  de modo que

$$|I - S_n| < 10^{-5},$$

donde  $n$  es el más pequeño número entero positivo que satisface dicha condición. De los resultados de b) y c) ¿qué algoritmo es más costoso numéricamente?

40. Considerar la integral  $I = \int_0^2 \left( \int_0^{2-y} \sqrt{1+x} dx \right) dy$ .

a) Calcular  $I$ .

b) Sean  $g(y) = \int_0^{2-y} \sqrt{1+x} dx$ ,  $y \in [0, 2]$ . Aplique la regla de los trapecios para aproximar  $I$  con particiones de 6 puntos igualmente espaciados.

41. Considerar la integral  $I = \int_0^4 \left( \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} (xy)^3 dx \right) dy$ .

a) Calcule  $I$ . b) Aproxime  $I$  con particiones de 5 puntos igualmente espaciados.

## 2.10. Lecturas complementarias y bibliografía

1. Tom M. Apostol, Análisis Matemático, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.
2. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 1, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1977.
3. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 2, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.
4. N. Bakhvalov, Métodos Numéricos, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
5. R. M. Barbolla, M. García, J. Margalef, E. Outerelo, J. L. Pinilla, J. M. Sánchez, Introducción al Análisis Real, Editorial Alambra Universidad, Madrid, 1981.

6. Richard H. Bartels, John C. Beatty, Brian A. Barsky, An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Medeling, Editorial Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Mateo, California, 1987.
7. Jérôme Bastien, Jean-Noël Martin, Introduction à l'Analyse Numérique, Editorial Dunod, París, 2003.
8. E. K. Blum, Numerical Analysis and Computation. Theory and Practice, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1972.
9. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México, 2002.
10. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.
11. Elaine Cohen, Richard F. Riesenfeld, Gershon Elber, Geometric Modeling with Splines, Editorial A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2001.
12. S. D. Conte, Carl de Boor, Análisis Numérico, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México, 1981.
13. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. Cálculo Numérico Fundamental, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.
14. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. S. Schuwalowa, Métodos Numéricos de Análisis, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
15. Ferruccio Fontanella, Aldo Pasquali, Calcolo Numerico. Metodi e Algoritmi, Volumi I, II Pitagora Editrice Bologna, 1983.
16. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, Algebra Lineal, Editorial Publicaciones Cultural, S. A., México, 1982.
17. Waltson Fulks, Cálculo Avanzado, Editorial Limusa, México, 1973.
18. Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, Análisis Numérico con Aplicaciones, Sexta Edición, Editorial Pearson Educación de México, México, 2000.
19. Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, Numerical Mathematics, Editorial Springer-Verlag, New York, 1991.
20. Kenneth Hoffman, Ray Kunze, Algebra Lineal, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1987.
21. Robert W. Hornbeck, Numerical Methods, Quantum Publishers, Inc., New York, 1975.
22. David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.
23. Rodolfo Luthe, Antonio Olivera, Fernando Schutz, Métodos Numéricos, Editorial Limusa, México, 1986.
24. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.
25. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.
26. Antonio Nieves, Federico C. Dominguez, Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, Tercera Reimpresión, Compañía Editorial Continental, S. A. De C. V., México, 1998.
27. S. Nikolski, Fórmulas de Cuadratura, Editorial Mir, Moscú, 1990.

28. Ben Noble, James W. Daniel, *Algebra Lineal Aplicada*, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1989.
29. Anthony Ralston, *Introducción al Análisis Numérico*, Editorial Limusa, México, 1978.
30. A. A. Samarski, *Introducción a los Métodos Numéricos*, Editorial Mir, Moscú, 1986.
31. Michelle Schatzman, *Analyse Numérique*, Inter Editions, París, 1991.
32. Francis Scheid, *Theory and Problems of Numerical Analysis*, Schaum's Outline Series, Editorial McGraw-Hill, New York, 1968.
33. Michael Spivak, *Calculus*, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1996.
34. J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Editorial Springer-Verlag, 1980.
35. Gilbert Strang, *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*, Editorial Fondo Educativo Interamericano, México, 1982.
36. E. A. Volkov, *Métodos Numéricos*, Editorial Mir, Moscú, 1990.