

## Capítulo 8

# Valores y Vectores Propios

### Resumen

Este capítulo se inicia con una revisión de resultados importantes sobre el problema de valores y vectores propios. La primera aplicación que se da es a la geometría analítica plana, más precisamente a las formas cuadráticas y ecuaciones cuadráticas. Luego se considera el cálculo de valores y vectores propios de matrices de  $3 \times 3$  que se presenta con mucha frecuencia, sobre todo en los problemas de optimización de funciones reales en tres variables independientes. Se concluye este capítulo con el método de la potencia.

### 8.1. Introducción

En lo sucesivo consideraremos matrices reales de  $n \times n$  aunque algunos resultados aparezcan dentro del campo de los números complejos. Nos interesamos fundamentalmente en el caso real.

**Definición 1** Sea  $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ . Un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  se denomina valor propio de la matriz  $A$  si y solo si existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  no nulo tal que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . El vector  $\vec{x}$  se llama vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda$ .

Los términos de valor y vector propio que aquí hemos definido, en muchos textos se los encuentran como valor y vector característico, eigenvalor y eigenvector, autovalor y autovector.

Un valor propio  $\lambda$  puede ser cero, esto es,  $\lambda = 0$  pero un vector propio  $\vec{x}$  no puede ser  $\vec{0}$ . En el caso en que  $\lambda = 0$ , tenemos  $A\vec{x} = \vec{0}$  para algún  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  con  $\vec{x} \neq \vec{0}$  lo que significa que  $\vec{x} \in \ker(A)$ , donde  $\ker(A)$  denota el núcleo de la matriz  $A$  que se define como  $\ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ .

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ , denotamos con  $S_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \cup \{\vec{0}\}$ . Se prueba inmediatamente que el conjunto  $S_\lambda$  es un subespacio real que lo denominamos subespacio asociado al valor propio  $\lambda$  o simplemente subespacio propio de  $\lambda$ .

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$  y  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  un vector propio asociado a  $\lambda$ . De la definición de valor y vector propio de  $A$  se tiene

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$

El sistema de ecuaciones homogéneo  $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$  tiene soluciones no triviales ( $\vec{x} \neq \vec{0}$ ) si y solo si la matrix  $A - \lambda I$  es singular, que a su vez es equivalente a que  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Esta última ecuación se llama ecuación característica. Se define

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y se le denomina polinomio característico.

El conjunto de todos los valores propios de la matriz  $A$  se denota  $\sigma(A)$  y se le denomina espectro de la matriz  $A$ , esto es,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \text{ tal que } A\vec{x} = \lambda \vec{x}\}.$$

### Ejemplos

1. Los espacios  $M_{1 \times 2}[\mathbb{R}]$  y  $\mathbb{R}^2$  son isomorfos. Sea  $A = (1, 2)$ , calculemos  $\|A\|_2$  (véase el apéndice, normas de matrices). Tenemos  $A \in M_{1 \times 2}[\mathbb{R}]$  y  $A \in \mathbb{R}^2$ , en este último caso escribimos  $\vec{A} = (1, 2)$ . Resulta  $\|\vec{A}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ . Por otro lado,

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de  $A^T A$  está definido como  $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-5)$ , luego  $p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$  y  $\lambda = 5$ ;  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 5$  son los valores propios de  $A^T A$ . Resulta

$$\|A\|_2 = \sup_{\|\vec{x}\|_2 \leq 1} \|A\vec{x}\|_2 = (\max\{0, 5\})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

2. Sea  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Calculemos  $\|A\|_2$ . Para el efecto, calculemos  $A^T A$  y luego hallamos los valores propios de esta matriz. Tenemos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico  $p(\lambda)$  de la matriz  $A^T A$  está definido como

$$p(\lambda) = \det(A^T A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6).$$

Entonces  $p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$  o  $\lambda = 6$ . Los valores propios son  $\lambda = 1$ , y  $\lambda = 6$ . Por lo tanto  $\|A\|_2 = \sqrt{6}$ .

3. Sea  $A$  una matriz real de  $n \times n$  triangular superior (respectivamente triangular inferior), digamos  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ . Entonces

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

luego

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = a_{11}, \dots, \lambda_n = a_{nn}.$$

El sistema de ecuaciones  $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$  se escribe en forma explícita como

$$\begin{cases} a_{12}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ (a_{22} - \lambda_1)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ (a_{nn} - \lambda_1)x_n = 0, \end{cases}$$

y cualquier solución no nula de este sistema es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1$ . Así sucesivamente

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_n)x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ (a_{22} - \lambda_n)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ (a_{n-1n} - \lambda_n)x_n = 0. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales consta de  $n - 1$  ecuaciones, y cualquier solución no nula de este sistema es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_n$ .

Se tiene  $\sigma(A) = \{a_{ii} \mid i = 1, \dots, n\}$ . Como se puede apreciar, estos son los problemas más simples de cálculo de valores y vectores propios.

**Definición 2** Sean  $A, B \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ . Se dice que las matrices  $A, B$  son semejantes si y solo si existe una matriz invertible  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ .

Dos matrices que son semejantes tienen exactamente los mismos valores propios. Efectivamente, sea  $\lambda$  un valor propio de la matriz  $A$  y  $\vec{x}$  un vector propio asociado a  $\lambda$ , entonces  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , luego

$$\vec{0} = (A - \lambda I)\vec{x} = (PBP^{-1} - \lambda I)\vec{x} = P(B - \lambda I)P^{-1}\vec{x} = (B - \lambda I)\vec{y} = \vec{0},$$

con  $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ . Así,  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ .

Sea  $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$  tal que  $A^T = A$ , es decir que la matriz  $A$  es simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Además, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un valor propio de multiplicidad  $2 \leq k \leq n$ , entonces  $\dim(S_\lambda) = k$ . Por otro lado, si  $\lambda_1, \lambda_2$  son valores propios de  $A$  tales que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , los vectores propios asociados  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  son ortogonales, es decir que si  $A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$ ,  $A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$ .

### Localización de los valores propios

Sea  $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$  y  $\|\cdot\|$  una norma submultiplicativa en  $M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ . Entonces, si  $\lambda$  es un valor propio de la matriz  $A$  y  $\vec{x}$  un vector propio asociado a  $\lambda$ , entonces  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , y en consecuencia

$$|\lambda| \|\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = \|A\vec{x}\| \leq \|A\| \|\vec{x}\|,$$

y siendo  $\vec{x}$  un vector propio, se tiene  $\|\vec{x}\| \neq 0$ , y de esta desigualdad se sigue que  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

Tenemos (véase el apéndice, normas de matrices),

$$\begin{aligned} |\lambda| &\leq \|A\|_1 = \sup_{\|\vec{x}\|_1 \leq 1} \|A\vec{x}\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \\ |\lambda| &\leq \sup_{\|\vec{x}\|_\infty \leq 1} \|A\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \\ |\lambda| &\leq \|A\|_2 = \sup_{\|\vec{x}\|_2 \leq 1} \|A\vec{x}\|_2 = \left( \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $A^T A$ , y  $A^T$  denota la matriz transpuesta de  $A$ .

### Ejemplos

1. Sea  $A = \begin{bmatrix} 2 & -20 & 200 \\ 0 & 5 & 100 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ , entonces  $|\lambda| \leq \|A\|_1 = 310$ ,  $|\lambda| \leq \|A\|_\infty = 222$ . Note que la

estimación  $|\lambda| \leq \|A\|_2$  requiere del cálculo de los valores propios de la matriz  $A^T A$ . Como la matriz  $A$  es real de  $3 \times 3$ , el polinomio característico  $p(\lambda)$  es de grado 3 y tiene coeficientes reales, al menos un valor propio de  $A$  es real. De las estimaciones anteriores, se tiene  $\lambda \in [-222, 222]$  que es un intervalo demasiado grande para localizar a esta raíz real. Este ejemplo muestra que se requieren de estimaciones más finas.

**Teorema 1** (de Gershgorin) Sea  $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ . Los valores propios  $\lambda$  de la matriz  $A$  están localizados en la unión de los discos  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|\}$ . Estos discos se llaman discos de Gershgorin. Además, si la unión de  $k$  discos de Gershgorin son disjuntos unos de otros, entonces la unión contiene exactamente  $k$  valores propios de la matriz  $A$ .

**Demostración.** Sea  $\lambda$  un valor propio de la matriz  $A$  y  $\vec{x}$  un vector propio asociado a  $\lambda$ , entonces  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . Elegimos  $\vec{x}$  tal  $\|\vec{x}\|_\infty = x_k = 1$ . Explícitamente, la fila  $k$  de  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  es la siguiente:

$$a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = \lambda x_k$$

de donde

$$|a_{kk} - \lambda| = |a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

Para la prueba de la segunda parte se propone como ejercicio. ■

### Ejemplo

Sea  $A = \begin{bmatrix} 2 & -20 & 200 \\ 0 & 5 & 100 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ . Los radios de los discos de Gershgorin están definidos como sigue:  
 $r_1 = |-20| + 200 = 220$ ,  $r_2 = 100$ ,  $r_3 = 2$ , luego los discos de Gershgorin son

$$B(2, 220) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 2| \leq 220\},$$

$$B(5, 100) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 5| \leq 100\},$$

$$B(10, 2) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 10| \leq 2\},$$

con lo  $\lambda \in B(2, 220) \cup B(5, 100) \cup B(10, 2)$ .

## 8.2. Formas cuadráticas y ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ .

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $c \neq 0$  y  $|a| + |b| > 0$ . Consideramos el subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  definido como

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 + cxy = d\}.$$

Se trata de determinar si  $C = \emptyset$  o  $C \neq \emptyset$ . En el caso  $C \neq \emptyset$ , determinar el tipo de conjunto que  $C$  representa, esto es, si es un punto, una recta, dos rectas, una cónica (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola), encontrar la ecuación canónica de dicha cónica, o de la recta o de las rectas; y, representar gráficamente el conjunto  $C$ . Proponer un algoritmo.

Sigamos la metodología propuesta en la resolución de problemas.

Analicemos la existencia de soluciones, es decir determinemos si  $C = \emptyset$  o  $C \neq \emptyset$ . Para el efecto definimos la forma cuadrática  $Q$  como sigue:

$$Q(x, y) = ax^2 + cxy + by^2 = (x, y) \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La matriz  $A$  de la forma cuadrática  $Q$  relativa a la base canónica  $B_1 = \{\vec{i}, \vec{j}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  está definida como

$A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & b \end{bmatrix}$ . La hipótesis  $c \neq 0$  y  $|a| + |b| > 0$  implica  $A \neq 0$  y claramente  $A$  es simétrica, esto es,  $A = A^T$ .

Calculemos los valores propios de  $A$ , es decir, determinamos  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \iff \begin{vmatrix} a - \lambda & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (a - \lambda)(b - \lambda) - \frac{1}{4}c^2 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - \frac{1}{4}c^2 = 0 \end{aligned}$$

es decir que los valores propios de  $A$  son soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$t \in \mathbb{C} \text{ tal que } t^2 + \alpha t + \beta = 0,$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , cuya solución se determina con la conocida fórmula

$$t = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$$

Sea  $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$ . Si  $\gamma \geq 0$ , las raíces son reales; y si  $\gamma < 0$ , las raíces son complejas.

Puesto que la matriz  $A$  es simétrica, las raíces de la ecuación:

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - \frac{1}{4}c^2 = 0$$

son reales. En efecto, el discriminante de esta ecuación es no negativo, pues

$$\gamma = (a + b)^2 - 4\left(ab - \frac{1}{4}c^2\right) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + c^2 = (a - b)^2 + c^2.$$

Por hipótesis  $c \neq 0$  y  $|a| + |b| > 0$ , que significa que al menos dos de estos números son no nulos, luego  $\gamma = (a - b)^2 + c^2 \geq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + c^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + c^2}, \end{aligned}$$

son los valores propios de la matriz  $A$ .

Determinemos los vectores propios asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , es decir, hallamos las soluciones de los sistemas de ecuaciones  $A\vec{x} = \lambda_1\vec{x}$  y  $A\vec{x} = \lambda_2\vec{x}$ , que es equivalente al sistema de ecuaciones

$$(a - \lambda I)\vec{x} = 0 \iff \begin{cases} (a - \lambda)x + \frac{1}{2}cy = 0 \\ \frac{1}{2}cx + (b - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Para  $\lambda = \lambda_1$  obtenemo  $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  tal que  $\|\vec{u}\| = 1$  y para  $\lambda = \lambda_2$  obtenemos  $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$  con  $\|\vec{v}\| = 1$ . Estos dos vectores propios de  $A$  son ortogonales, esto es,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Escribimos  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Consecuentemente,  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  forman una base  $B_2$  de  $\mathbb{R}^2$ . Ponemos  $B_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

Note que

$$\begin{aligned} Q(\vec{u}) &= \vec{u}^T A \vec{u} = \vec{u}^T (\lambda_1 \vec{u}) = \lambda_1 \|\vec{u}\|^2 = \lambda_1, \\ Q(\vec{v}) &= \vec{v}^T A \vec{v} = \vec{v}^T (\lambda_2 \vec{v}) = \lambda_2 \|\vec{v}\|^2 = \lambda_2, \end{aligned}$$

pues  $\|\vec{u}\| = 1$  y  $\|\vec{v}\| = 1$ .

La forma bilineal simétrica  $F$  está definida como

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Se tiene  $Q(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{x})$   $x \in \mathbb{R}^2$ , y,  $F(\vec{u}, \vec{u}) = \lambda_1$ ,  $F(\vec{v}, \vec{v}) = \lambda_2$ ,  $F(\vec{u}, \vec{v}) = F(\vec{v}, \vec{u}) = 0$ . Así, la matriz de la aplicación bilineal simétrica  $F$  relativa a la base  $B_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  está definida como

$$[F]_{B_2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

a la que notamos  $D$ , esto es,  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ .

La matriz de cambio de base de  $B_2$  a  $B_1$  está definida como  $P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$  y se verifica que  $P^{-1}AP = D$ .

La matriz  $P$  es ortogonal, esto es,  $P^{-1} = P^T$ .

La forma cuadrática  $Q$  referida a la base  $B_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  se escribe como

$$Q(s, t) = (s, t) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + cxy + by^2 = d\} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d\}.$$

Puesto que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , se presenta los siguientes casos:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ;  $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ ;  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$  y  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ ;  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-$  y  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ;  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ .

1. Supongamos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ .

a) Si  $d < 0$  entonces  $C = \emptyset$ .

b) Si  $d = 0$  entonces  $C = \{(0, 0)\}$ .

c) Si  $d > 0$  entonces  $C \neq \emptyset$ .

En el caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  entonces la ecuación

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d \iff (s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } s^2 + t^2 = \frac{d}{\lambda},$$

corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $r = \sqrt{\frac{d}{\lambda}}$ .

En la figura siguiente se muestra el conjunto  $C$ , o sea una circunferencia de radio  $r = \sqrt{\frac{d}{\lambda}}$ .

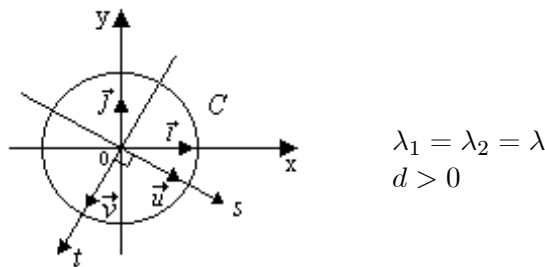


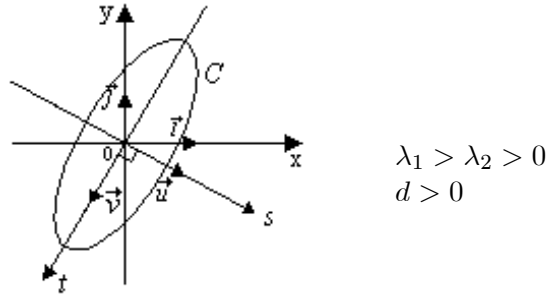
Figura 73

En el caso  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , la ecuación

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d \iff$$

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \left( \frac{s}{\sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}} \right)^2 + \left( \frac{t}{\sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}} \right)^2 = 1$$

que representa a una elipse de centro  $(0, 0)$ . En la figura siguiente se muestra este conjunto



$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0 \\ d > 0$$

Figura 74

2. Supongamos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ .

a) Si  $d > 0$ , resulta que  $C = \emptyset$ .

b) Si  $d = 0$ , entonces  $C = \{(0, 0)\}$ .

c) Si  $d < 0$ , multiplicando por  $-1$  a la ecuación:  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d$  se obtiene  $(\lambda_1) s^2 + (-\lambda_2) t^2 = -d$  que ha sido analizado en el caso 1) parte c) precedente.

Supongamos  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$  y  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ .

a) Si  $d = 0$ , la ecuación

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = 0 \iff (s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } t^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} s^2.$$

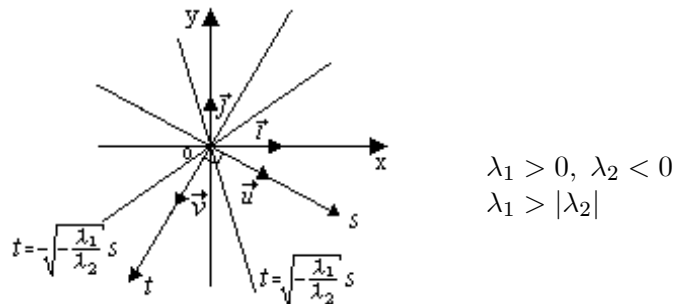
De la última relación se obtienen las dos siguientes

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} t = -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s, \\ t = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s. \end{cases}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} C &= \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = 0\} \\ &= \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s \right\} \cup \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s \right\}. \end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestran los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y las rectas de ecuaciones  $t = -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s$ ,  $t = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s$  con  $s \in \mathbb{R}$ .



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1 > |\lambda_2|$$

Figura 75

b) Si  $d \neq 0$ , la ecuación

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d$$

representa a una hipérbola.

En la figura siguiente se muestran los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y la hipérbola  $C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d\}$  con  $d > 0$ .

Note que la ecuación

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d \iff$$

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \left( \frac{s}{\sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}} \right)^2 - \left( \frac{t}{\sqrt{-\frac{d}{\lambda_2}}} \right)^2 = 1$$

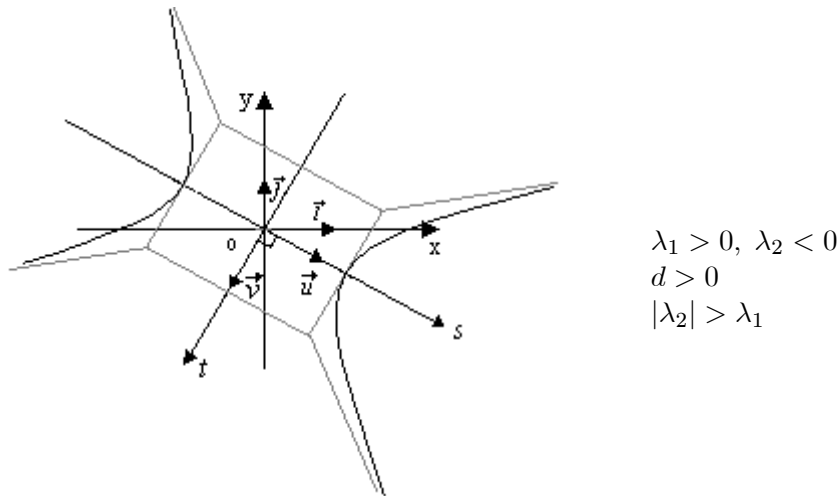


Figura 76

Si  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 \neq 0$ , entonces el conjunto  $C$  se escribe como sigue

$$C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_2 t^2 = d\} = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 = \frac{d}{\lambda_2} \right\}.$$

Se tiene los siguientes casos:  $\frac{d}{\lambda_2} < 0$ ,  $d = 0$ ,  $\frac{d}{\lambda_2} > 0$ .

a) En el caso  $\frac{d}{\lambda_2} < 0$ , la ecuación  $t^2 = \frac{d}{\lambda_2}$  es contradictoria con lo que  $C = \emptyset$ .

b) En el caso  $d = 0$ , el conjunto  $C$  se expresa como sigue

$$C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = 0\} = \{s(1, 0) \mid s \in \mathbb{R}\},$$

es decir que en el sistema de referencia  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ,  $C$  representa una recta que es paralela a  $\vec{u}$ . En la figura siguiente se muestra este conjunto.

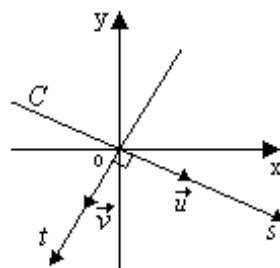


Figura 77



En el caso  $\frac{d}{\lambda_2} > 0$ , se tiene la ecuación  $t^2 = \frac{d}{\lambda_2}$ , de donde  $t = -\sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$ , o,  $t = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$  con lo que

$$\begin{aligned} C &= \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 = \frac{d}{\lambda_2} \right\} \\ &= \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = -\sqrt{\frac{d}{\lambda_2}} \right\} \cup \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}} \right\}. \end{aligned}$$

Se define  $L_1 = \left\{ \left( s, -\sqrt{\frac{d}{\lambda_2}} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $L_2 = \left\{ \left( s, \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ . Los conjuntos  $L_1$  y  $L_2$  representan rectas paralelas al vector  $\vec{u}$ . En la figura siguiente se ilustran los conjuntos  $L_1$ ,  $L_2$ .

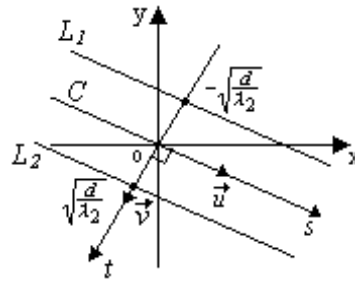


Figura 78

El caso  $\lambda_1 \neq 0$  y  $\lambda_2 = 0$  se analiza en forma parecida al caso 4).

Con todo el análisis realizado sabemos en que condiciones  $C = \emptyset$ , y en cuáles  $C \neq \emptyset$ . En este último caso podemos identificar si se trata de una circunferencia, elipse, hipérbola o simplemente rectas; y, estamos en condiciones de proponer un algoritmo que permita identificar todos estos casos.

#### Algoritmo

Datos de entrada:  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Datos de salida: Mensaje 1 :  $C \neq \emptyset$ ; Mensaje 2 :  $C = \{(0, 0)\}$ ; Mensaje 3 : Datos no cumplen con la hipótesis;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .

1. Si  $c = 0$ , o  $a = 0$  y  $b = 0$ . Continuar en 13)

2. Calcular  $u = \frac{1}{2}(a + b)$

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + c^2}$$

$$\lambda_1 = u - \alpha$$

$$\lambda_2 = u + \alpha$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} (a - \lambda_2)x + \frac{1}{2}cy = 0 \\ \frac{1}{2}cx + (b - \lambda_1)y = 0. \end{cases}$$

Obtener  $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  tal que  $\|\vec{u}\| = 1$ .

Resolver el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} (a - \lambda_2)x + \frac{1}{2}cy = 0 \\ \frac{1}{2}cx + (b - \lambda_1)y = 0. \end{cases}$$

Obtener  $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$  tal que  $\|\vec{v}\| = 1$ .

4. Graficar sistema de coordenadas rectangulares  $x$ ,  $y$ , y respecto de  $B_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  el sistema de coordenadas  $s$ ,  $t$ .

5. Si,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

Si  $d < 0$ , continuar en 11).

Si  $d = 0$ , continuar en 12).

Si  $d > 0$

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Calcular  $p = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ ,  $q = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$ .

Graficar la elipse  $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{p}\right)^2 + \left(\frac{t}{q}\right)^2 = 1 \right\}$ .

Continuar en 14).

Si  $\lambda_1 = \lambda_2$

Calcular  $r = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ .

Graficar la circunferencia  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 = r^2\}$ .

Continuar en 14).

6. Si,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

Si  $d > 0$ , continuar en 11).

Si  $d = 0$ , continuar en 12).

Si  $d < 0$ .

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Calcular  $p = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ ,  $q = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$ .

Graficar la elipse  $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{p}\right)^2 + \left(\frac{t}{q}\right)^2 = 1 \right\}$ .

Continuar en 14).

Si  $\lambda_1 = \lambda_2$

Calcular  $r = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ .

Graficar la circunferencia  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 = r^2\}$ .

Continuar en 14).

7. Si,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

Si  $d > 0$ ,

Calcular  $p = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_1}}$ ,  $q = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$ .

Graficar la hipérbola  $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{p}\right)^2 - \left(\frac{t}{q}\right)^2 = -1 \right\}$ .

Continuar en 14).

Si  $d < 0$ ,

Calcular  $p = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ ,  $q = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_2}}$ .

Graficar la hipérbola  $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{p}\right)^2 - \left(\frac{t}{q}\right)^2 = 1 \right\}$ .

Continuar en 14).

Si  $d = 0$ ,

Calcular  $m = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ .

Graficar  $C_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = -ms\}$ ,

$C_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = ms\}$ .

Continuar en 14).

8. Si,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

Si  $d > 0$ ,

Calcular  $p = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ ,  $q = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_2}}$ .

Graficar la hipérbola  $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{p}\right)^2 - \left(\frac{t}{q}\right)^2 = 1 \right\}$ .

Continuar en 14).

Si  $d < 0$ ,

Calcular  $p = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_1}}$ ,  $q = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$ .

Graficar la hipérbola  $\left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{p}\right)^2 + \left(\frac{t}{q}\right)^2 = -1 \right\}$ .

Continuar en 14).

Si  $d = 0$ ,

Calcular  $m = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ .

Graficar  $C_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = -ms\}$ ,

$C_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = ms\}$ .

Continuar en 14).

9. Si  $\lambda_1 = 0$

Calcular  $p = \frac{d}{\lambda_2}$ .

Si  $p < 0$ , continuar en 11)

Si  $d = 0$ ,

Graficar la recta  $C = \{s(1, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ .

Continuar en 14).

Si  $p > 0$ ,

Graficar las recta  $L_1 = \{(s, -\sqrt{p}) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ,

$$L_2 = \{(s, \sqrt{p}) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Continuar en 14).

10. Si  $\lambda_2 = 0$

Calcular  $p = \frac{d}{\lambda_1}$ .

Si  $p < 0$ , continuar en 11)

Si  $d = 0$ ,

Graficar la recta  $C = \{t(0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Continuar en 14).

Si  $p > 0$ ,

Graficar las recta  $L_1 = \{(-\sqrt{p}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ,

$$L_2 = \{(\sqrt{p}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Continuar en 14).

11. Mensaje 1 :  $C = \emptyset$ . Continuar en 14).

12. Mensaje 2 :  $C = \{(0, 0)\}$ . Continuar en 14).

13. Mensaje 3 : Datos no cumplen con la hipótesis.

14. Fin

El algoritmo concluye en un número finito de pasos. Note que se realizan las 4 operaciones aritméticas y raíz cuadrada. Se realizan algunas comparaciones.

Para verificar el algoritmo proponemos tres ejemplos.

1. Consideremos el subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  definido como

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 2xy + 4y^2 = 1\}.$$

Tenemos  $a = 4$ ,  $b = 4$ ,  $c = 2$  y  $d = 1$ . Claramente  $c \neq 0$ ,  $|a| + |b| > 0$ . Según el algoritmo (punto 2), pasamos a calcular los valores propios de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ . Tenemos  $u = \frac{1}{2}(a + b) = 4$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + c^2} = 1.$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = u - \alpha = 3$  y  $\lambda_2 = u + \alpha = 5$ .

Continuando con el algoritmo (punto 3), determinamos los vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda_1$  y

$$\lambda_2, \text{ esto es, determinamos } \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} (a - \lambda)x + \frac{1}{2}cy = 0, \\ \frac{1}{2}cx + (b - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

$$\text{Con } \lambda_1 = 3 \text{ se tiene } \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Luego  $\vec{x} = (x, y) = (x, -x) = x(1, -1) \quad x \in \mathbb{R}$ .

Los vectores propios normalizados de  $A$  son (punto 4 del algoritmo)  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$  y  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ . se verifica inmediatamente que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, esto es,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Puesto que  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  y  $d > 0$  (punto 5 del algoritmo) entonces

$$p = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,577, \quad q = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \simeq 0,447.$$

Entonces  $C = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{s}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right)^2 + \left( \frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{5}} \right)^2 = 1 \right\}$  es una elipse.

En la figura siguiente se muestran los vectores ortogonales  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y la elipse  $C$ .

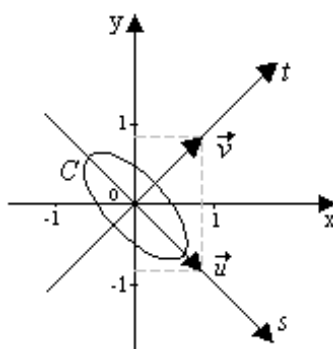


Figura 79

2. Sean  $d \in \mathbb{R}^2$  y  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 4xy + 2y^2 = d\}$ . Tenemos  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $c = 4$ . Se verifica inmediatamente que  $|a| + |b| > 0$  y  $c \neq 0$  (punto 1 del algoritmo).

Calculemos los valores propios de la matriz  $a = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  (punto 2 del algoritmo). Tenemos

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(a + b) = 2, & \alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + c^2} = 2, \\ \lambda_1 &= u - \alpha = 0, & \lambda_2 &= u + \alpha = 4. \end{aligned}$$

Determinemos los vectores propios de la matriz  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Con  $\lambda_1 = 0$ , hallar  $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  solución de  $\begin{cases} (2 - \lambda_1)x + 2y = 0, \\ 2x + (2 - \lambda_1)y = 0. \end{cases}$  La solución de este sistema conduce a la ecuación  $x + y = 0$ , luego  $\vec{x} = (x, y) = (x, -x) = x(1, -1) \quad x \in \mathbb{R}$ .

Con  $\lambda_2 = 4$ , hallar  $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  solución de  $\begin{cases} (2 - \lambda_2)x + 2y = 0, \\ 2x + (2 - \lambda_2)y = 0. \end{cases}$

Resulta  $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = y$ . Luego

$$\vec{x} = (x, y) = (x, x) = x(1, 1) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponemos  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ ,  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ . Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores propios de  $A$ , esto es,  $A\vec{u} = \lambda_1\vec{u}$  y  $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$ ; y,  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Siguiendo con el algoritmo (punto 9) se tiene

$$C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = d\} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 4t^2 = d\}.$$

Si  $d < 0$ , la ecuación  $4t^2 = d$  es absurda, luego  $C = \emptyset$ .

Si  $d = 0$ , la ecuación  $4t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ , luego  $c = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = 0\} = \{s(1, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ .

Si  $d > 0$ , la ecuación  $t^2 = \frac{d}{4}$  tiene dos raíces  $t_1 = -\frac{\sqrt{d}}{2}$  y  $t_2 = \frac{\sqrt{d}}{2}$  con lo que

$$C = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 = \frac{d}{4} \right\} = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = -\frac{\sqrt{d}}{2} \right\} \cup \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \frac{\sqrt{d}}{2} \right\}.$$

Ponemos  $L_1 = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = -\frac{\sqrt{d}}{2} \right\} = \left\{ \left( s, -\frac{\sqrt{d}}{2} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $L_2 = \left\{ \left( s, \frac{\sqrt{d}}{2} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ .

En la figura de la izquierda se representa el conjunto  $C = \{s(1, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$  y en el de la derecha se representa el conjunto  $C = L_1 \cup L_2$ .

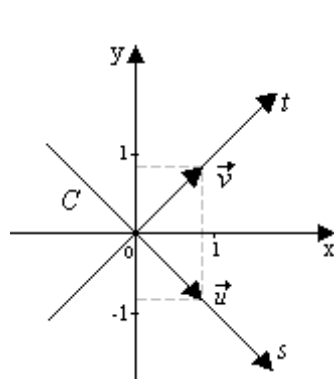


Figura 80

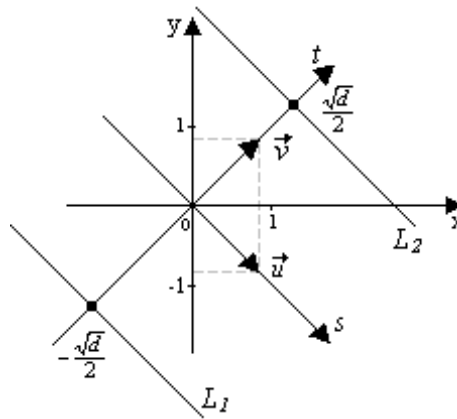


Figura 81

Note que  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 4xy + 2y^2 = d\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)^2 = \frac{d}{2} \right\}$ .

Si  $d < 0$ , resulta  $C = \emptyset$ . Si  $d = 0$ , se obtiene  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$  que representa una recta de ecuación cartesiana  $y = -x$ . Si  $d > 0$ , se tiene  $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = -\frac{\sqrt{2d}}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = \frac{\sqrt{2d}}{2} \right\}$ . Las ecuaciones cartesianas de las rectas son:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x + y = -\frac{\sqrt{2d}}{2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x + y = \frac{\sqrt{2d}}{2}.$$

### 8.3. Valores y vectores propios de matrices de $3 \times 3$

Sea  $A = (a_{ij}) \in M_{3 \times 3}[\mathbb{R}]$ . Determinemos  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  no nulo tal que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . En este caso el polinomio característico está definido como sigue:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Los valores propios se obtienen como solución de la ecuación  $p(\lambda) = 0$ . Como el polinomio característico es de grado 3, existe al menos una raíz real la misma que puede ser calculada como solución aproximada

mediante el método de Newton. Los vectores propios son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### Ejemplo

1. Consideramos la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Apliquemos los resultados obtenidos, el algoritmo de búsqueda del cambio de signo y el método de Newton para calcular todos los valores propios de  $A$ .

Primeramente, la matriz  $A$  es simétrica luego sus valores propios son reales, tenemos  $|\lambda| \leq \|A\|_\infty = 4$ . Así  $\lambda \in [-4, 4]$ . Una estimación más fina la obtenemos si determinamos los discos de Gershgorin. Tenemos  $|\lambda - 2| \leq 2$ ,  $|\lambda - 2| \leq 1$ ,  $|\lambda - 2| \leq 1$  entonces  $|\lambda - 2| \leq 2 \iff \lambda \in [0, 4]$ .

Determinemos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para este ejemplo los valores propios se calculan fácilmente y así podemos comparar con los métodos a utilizar. Se tiene

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}, \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Sea  $h = 0,5$ . La aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo en el intervalo  $[-0,3, 4]$  nos da los resultados que se indican en la tabla siguiente:

$x$	$p(x)$
-0,3	7,567
0,2	2,232
0,7	-0,403
1,2	-1,088
1,7	-0,573
2,2	0,392
2,7	1,057
3,2	0,672
3,7	-1,513
4,0	-4,0

Como se observa, la aplicación del algoritmo de búsqueda del cambio de signo muestra la existencia de tres raíces reales:  $C_1 \in [0,2, 0,7]$ ,  $C_2 \in [1,7, 2,2]$ ,  $C_3 \in [3,3, 3,7]$ .

En realidad el algoritmo de búsqueda del cambio de signo se aplica en el intervalo  $[0, 4]$ .

Apliquemos el método de Newton para calcular cada una de estas raíces. Tenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^3 + 6x^2 - 10x + 4 = 4 + x(-10 + x(6 - x)), \\ p'(x) &= -3x^2 + 12x - 10 = -10 + x(12 - 3x), \end{aligned}$$

y el esquema de Newton está definido como

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} \quad n = 0, 1, \dots, N_{\text{máx.}} \end{cases}$$

Cálculo de  $C_1 \in [0, 2, 0, 7]$ . Ponemos  $x_0$  el punto medio del intervalo, esto es  $x_0 = 0,45$ . En la tabla siguiente se encuentran los resultados de la aplicación del método de Newton

Iteración	$x_j$	$p(x_j)$
0	0,45	0,623875
1	0,569803	0,065021
2	0,585522	0,0010563
3	0,585786	0,0000003
4	0,585786	$2,33 \times 10^{-14}$

La raíz es  $C_1 = 0,5857864376$ .

Procediendo en forma similar a la precedente, elegimos  $x_0$  el punto medio del intervalo  $[1, 7, 2, 2]$ , es decir  $x_0 = 1,95$ . En la tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del método de Newton.

Iteración	$x_j$	$p(x_j)$
0	1,95	-0,099875
1	2,000125	0,0002509
2	1,9999999	$-0,39 \times 10^{-11}$
3	2,0	0.

La raíz es  $C_2 = 2$ .

Sea  $x_0$  el punto medio del intervalo  $[3, 3, 3, 7] : x_0 = 3,45$ . Entonces,

Iteración	$x_j$	$p(x_j)$
0	3,45	-0,148625
1	3,415496	-0,00513764
2	3,41421530	-0,000006965
3	3,414213562	$-1,28 \times 10^{-11}$

La raíz es  $C_3 = 3,414213562$ .

Calculemos los vectores propios de  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$ . Tenemos

$$(A - \lambda I) \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x - y + z = 0, \\ -x + (2 - \lambda)y = 0, \\ x + (2 - \lambda)z = 0. \end{cases}$$

Para  $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$  se tiene 
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y + z = 0 \\ -x + \sqrt{2}y = 0 \\ x + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

Aplicando el método de eliminación gaussiana se obtiene el siguiente sistema 
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y + z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0, \end{cases}$$

de donde

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \vec{x}^T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_1 I) \vec{x} = \vec{0} \right\} = \left\{ z(-\sqrt{2}, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para  $\lambda = 2$  se obtiene el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x = 0 \\ x = 0, \end{cases} \text{ luego}$$

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I) \vec{x} = \vec{0} \right\} = \{y(0, 1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Se deja como ejercicio determinar  $S_{\lambda_3}$ .



## 8.4. Método de las Potencias

En muchas situaciones no estamos interesados en calcular todos los valores propios y todos los vectores propios, sino algunos de ellos, por ejemplo el más grande o el más pequeño en valor absoluto de los valores propios con sus respectivos vectores propios. Este método puede adaptarse en forma apropiada para calcular otros valores y vectores propios.

Suponemos que la matriz  $A$  es diagonalizable, es decir que existe una matriz invertible  $P$  tal que  $D = P^{-1}AP$ , donde  $D = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  una matriz diagonal con los valores propios de la matriz  $A$  en su diagonal. Consecuentemente existen  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  vectores propios asociados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Tenemos  $A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$   $i = 1, \dots, n$ . Adicionalmente, suponemos que  $|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_1|$ , y asumimos que el conjunto  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ . Al valor propio  $\lambda_1$  lo denominaremos valor propio dominante de la matriz  $A$ .

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  no nulo. Existen  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$ , luego

$$\begin{aligned}\vec{y}_1 &= A\vec{x} = A \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i \vec{x}_i, \\ \vec{y}_2 &= A^2\vec{x} = A \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^2 \vec{x}_i, \\ &\vdots \\ \vec{y}_m &= A^m\vec{x} = A \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^{m-1} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^m \vec{x}_i.\end{aligned}$$

La última igualdad se expresa como

$$\vec{y}_m = A^m\vec{x} = \lambda_1^m \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \vec{x}_i.$$

Por otro lado, de la relación  $|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_1|$  se tiene  $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|^m \leq \dots \leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m \leq 1$ , de donde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right|^m = 0 \quad \text{si} \quad \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1 \quad k = 2, \dots, n.$$

El principio del método de la potencia está en la relación de cada valor propio con el valor propio dominante de la matriz  $A$ , es decir, de la razón  $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1$   $k = 2, \dots, n$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} A^m\vec{x} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \vec{x}_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m \left(\beta_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \vec{x}_i\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m \beta_1 \vec{x}_1, \quad \text{si} \quad \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1 \quad k = 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Es claro que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m = 0$  si y solo si  $|\lambda_1| < 1$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m = 1$  si y solo si  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m$  no existe si y solo si  $|\lambda_1| > 1$  o  $\lambda_1 = -1$ .

Elegimos  $\vec{x}$  de modo  $\beta_1 \neq 0$ .

i) Si  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , se tiene

$$\vec{y}_m = \lambda_1^m \left(\beta_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \vec{x}_i\right) \iff \frac{\vec{y}_m}{\lambda_1^m} = \beta_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \vec{x}_i,$$

luego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\vec{y}_m}{\lambda_1^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \beta_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \vec{x}_i \right) = \beta_1 \vec{x}_1.$$

Este límite es a su vez equivalente a los siguientes, expresados en términos de sus componentes:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_i^m}{\lambda_1^m} = \beta_1 x_i^{(1)} \quad i = 1, \dots, n,$$

con  $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ,  $\vec{y}_m = (y_1^m, \dots, y_n^m)$ . Se define  $q_i^m = \frac{y_i^m}{y_i^{m-1}}$   $y_i^{m-1} \neq 0$ , y de la existencia del límite precedente se tiene  $\lim_{m \rightarrow \infty} q_i^m = \lambda_1$ .

ii) Supongamos  $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_k|$  con  $2 \leq k < n$ . Para comprender mejor la situación, supongamos  $k = 2$  y que  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entonces

$$\vec{y}_m = \lambda_1^m \left( \beta_1 \vec{x}_1 - \beta_2 \vec{x}_2 + \sum_{i=3}^n \beta_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \vec{x}_i \right) \iff \frac{\vec{y}_m}{\lambda_1^m} = \beta_1 \vec{x}_1 - \beta_2 \vec{x}_2 + \sum_{i=3}^n \beta_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \vec{x}_i.$$

Se consideran dos casos:  $m = 2N$ , y  $m = 2N+1$  para  $N \in \mathbb{Z}^+$ . Se muestra que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_i^{m+2}}{y_i^m} = \lambda_1^2$  siempre que  $y_i^m \neq 0$ .

En la práctica, el método de la potencia se aplica del siguiente modo.

1. A menos que se tenga una buena estimación del vector  $\vec{x}$ , elegimos  $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ . Calculamos  $\vec{y}_1 = A\vec{x}$ , sea  $p_1 = \|\vec{y}_1\|_\infty$  y se define  $\vec{z}_1 = \frac{1}{\|\vec{y}_1\|_\infty} \vec{y}_1$ .

2. Calculamos  $\vec{y}_2 = A\vec{z}_1$ ,  $p_2 = \|\vec{y}_2\|_\infty$  y  $\vec{z}_2 = \frac{1}{\|\vec{y}_2\|_\infty} \vec{y}_2$ .

El proceso continua  $m$  veces. Cuando el número de iteraciones aumenta,  $p_m$  se aproxima al más grande valor propio en valor absoluto y  $\vec{z}_m = \frac{1}{\|\vec{y}_m\|_\infty} \vec{y}_m$  se aproxima al vector propio asociado al valor propio dominante.

### Ejemplos

1. Consideremos la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Tenemos  $\|\lambda\| \leq \|A\| = 3$ . Además, los discos de Gershgorin muestran que  $\lambda \in [-2, 3]$ . Por otro lado, el polinomio característico está definido como

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2\lambda - 8 \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{luego, } p(\lambda) = 0 \iff \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_1 = 2.$$

El vector propio asociado al valor propio dominante es  $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Apliquemos el método de las potencias para aproximar al valor dominante y consecuentemente al vector propio asociado.

$$\text{Sea } \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Primera iteración: calculamos } \vec{y}_1 = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$p_1 = \|\vec{y}_1\|_\infty = 3,$$

$$\vec{z}_1 = \frac{1}{p_1} \vec{y}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Segunda iteración: calculamos } \vec{y}_2 = A\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix},$$

$$p_2 = \|\vec{y}_2\|_\infty = 3,$$

$$\vec{z}_2 = \frac{1}{p_2} \vec{y}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Tercera iteración: calculamos } \vec{y}_3 = A\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{9} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{19}{9} \end{bmatrix},$$

$$p_3 = \|\vec{y}_3\|_\infty = \frac{25}{9} = 2,77777778,$$

$$\vec{z}_3 = \frac{1}{p_3} \vec{y}_3 = \frac{9}{25} \begin{bmatrix} \frac{25}{9} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{19}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{14}{25} \\ \frac{19}{25} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Cuarta iteración: calculamos } \vec{y}_4 = A\vec{z}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{14}{25} \\ \frac{19}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{69}{25} \\ \frac{38}{25} \\ \frac{33}{25} \end{bmatrix},$$

$$p_4 = \|\vec{y}_4\|_\infty = \frac{69}{25} = 2,76,$$

$$\vec{z}_4 = \frac{1}{p_4} \vec{y}_4 = \frac{25}{69} \begin{bmatrix} \frac{69}{25} \\ \frac{38}{25} \\ \frac{33}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{38}{69} \\ \frac{33}{69} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Quinta iteración: calculamos } \vec{y}_5 = A\vec{z}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{38}{69} \\ \frac{33}{69} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{171}{69} \\ \frac{76}{69} \\ \frac{61}{69} \end{bmatrix},$$

$$p_5 = \|\vec{y}_5\|_\infty = \frac{171}{69} = 2,47826087,$$

$$\vec{z}_5 = \frac{1}{p_5} \vec{y}_5 = \frac{69}{171} \begin{bmatrix} \frac{69}{25} \\ \frac{14}{33} \\ \frac{171}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{171}{33} \\ \frac{171}{171} \end{bmatrix}.$$

Note que a medida que se realizan más iteraciones los valores de  $p_m$  se aproximan al valor propio dominante  $\lambda_1 = 2$ . Igualmente,  $\vec{z}_m$  se aproxima al vector propio  $\vec{x}_1$  asociado a  $\lambda_1$ .

2. Consideremos la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ .

Esta matriz  $A$  es simétrica, por lo tanto tiene tres valores propios reales. Apliquemos el procedimiento arriba descrito.

Sea  $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Primera iteración: calculamos  $\vec{y}_1 = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}$ ,

$$p_1 = \|\vec{y}_1\|_\infty = 20,$$

$$\vec{z}_1 = \frac{1}{p_1} \vec{y}_1 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Segunda iteración: calculamos  $\vec{y}_2 = A\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,95 \\ 12,45 \\ 18,65 \end{bmatrix}$ ,

$$p_2 = \|\vec{y}_2\|_\infty = 18,65,$$

$$\vec{z}_2 = \frac{1}{p_2} \vec{y}_2 = \frac{1}{18,65} \begin{bmatrix} 16,75 \\ 12,45 \\ 18,65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8981233244 \\ 0,6675603217 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tercera iteración: calculamos

$$\vec{y}_3 = A\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,36729223 \\ 11,95710456 \\ 18,08579089 \end{bmatrix},$$

$$p_3 = \|\vec{y}_3\|_\infty = 18,08579089.$$

En la tercera iteración, una aproximación del valor propio dominante  $\lambda_1 \simeq 18,085$ . En 10 iteraciones

se obtiene  $\lambda_1 \simeq 18,0138$  y una aproximación del vector propio  $\vec{x}_1 \simeq \begin{bmatrix} 0,90217 \\ 0,66059 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

### Cálculo del más pequeño valor propio en valor absoluto.

El método de las potencias se emplea directamente para calcular el más pequeño valor propio en valor absoluto de una matriz invertible.

Sean  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$  matriz invertible,  $\lambda \in \mathbb{R}$  un valor propio de  $A$  y  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  un vector propio asociado a  $\lambda$ . Entonces  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . Multiplicando por la matriz inversa  $A^{-1}$  y considerando que  $A^{-1}A = I$ , se tiene

$$\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \iff A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x},$$

es decir que  $\frac{1}{\lambda}$  es el valor propio de la matriz  $A^{-1}$ .

Ponemos  $B = A^{-1}$  y  $\xi = \frac{1}{\lambda}$ . El método de la potencia se aplica a  $B\vec{x} = \xi\vec{x}$  lo que permite aproximar al valor propio dominante  $\xi_1 = \frac{1}{\lambda_n}$  y de esta relación se tiene  $\lambda_n = \frac{1}{\xi_1}$ .

Lastimosamente, la aplicación de este método requiere del cálculo de la matriz inversa  $A^{-1}$  de  $A$ , y cuando la dimensión de la matriz  $A$  es grande, los cálculos que se realizan en el método de la potencia son muy grandes lo que hace que este método no sea muy práctico.

## 8.5. Ejercicios

1. En cada ítem se define un subconjunto  $C \in \mathbb{R}^2$ . Realice una transformación de coordenadas para representar  $C$  en un nuevo sistema de modo que no aparezca el término  $xy$ .

Determine que conjunto representa  $C$  ( $\emptyset$ , un punto, recta o rectas, cónicas). Represente  $C$  si  $C \neq \emptyset$ . Estime el número de operaciones elementales.

**a)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 2xy + 2y^2 = -3\}$ .    **b)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - xy + 4y^2 = 5\}$ .

**c)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2xy + 2y^2 = 2\}$ .    **d)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy + 3y^2 = 0\}$ .

**e)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 2xy = -1\}$ .    **f)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 6xy + 2y^2 = 1\}$ .

**g)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 1\}$ .    **h)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 4xy - 5y^2 = 1\}$ .

**i)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x^2 + 6xy + y^2 = 1\}$ .    **j)**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 + 4xy - 2y^2 = 1\}$ .

2. Con cada matriz triangular superior invertible  $A$  que se propone, determine los valores y vectores propios

**a)**  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ .    **b)**  $A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .    **c)**  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

**d)**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ .    **e)**  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ .

3. Determine los valores y vectores propios de cada una de las matrices que se dan.

**a)**  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ .    **b)**  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ .    **c)**  $A = \begin{bmatrix} 2,3 & 0 & 0 \\ 1,5 & -2 & 0 \\ 0 & 3,2 & -0,8 \end{bmatrix}$ .

**d)**  $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ 5 & -2,3 & -1 & 4,5 \end{bmatrix}$ .    **e)**  $A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2,3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

4. Determine los valores y vectores propios de cada una de las matrices simétricas que se dan. Aplique el método de Newton para el cálculo de las raíces del polinomio característico. Determine también los discos de Gershgorin.

**a)**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .    **b)**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .    **c)**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{e) } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{f) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{g) } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}. \quad \text{h) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1,5 & 0 \\ 1,5 & -2 & 3,2 \\ 0 & 3,2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{i) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Aplique el método de la potencia para aproximar los valores y vectores propios de cada una de las matrices que se dan. Realice 5 iteraciones y compare con el valor propio dominante exacto. Determine en cada caso los discos de Gershgorin.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{e) } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{f) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{g) } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}. \quad \text{h) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1,5 & 0 \\ 1,5 & -2 & 3,2 \\ 0 & 3,2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{i) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

## 8.6. Lecturas complementarias y bibliografía

1. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 2, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.
2. Owe Axelsson, Iterative Solution Methods, Editorial Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
3. N. Bakhvalov, Metodos Numéricos, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
4. Jérôme Bastien, Jean-Noël Martin, Introduction à L' Analyse Numérique, Editorial Dunod, París, 2003.
5. E. K. Blum, Numerical Analysis and Computation. Theory and Practice, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1972.
6. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México, 2002.
7. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.
8. P. G. Ciarlet, Introduction à L' Analyse Numérique Matricielle et à L' Optimisation, Editorial Masson, París, 1990.
9. S. D. Conte, Carl de Boor, Análisis Numérico, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México, 1981.
10. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. Cálculo Numérico Fundamental, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.
11. B. P. Demidowitsch, I. A. Maron, E. S. Schuwalowa, Métodos Numéricos de Análisis, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.
12. James W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.
13. V. N. Faddeva, Métodos de Cálculo de Algebra Lineal, Editorial Paraninfo, Madrid, 1967.

14. Francis G. Florey, Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1980.
15. Ferruccio Fontanella, Aldo Pasquali, Calcolo Numerico. Metodi e Algoritmi, Volumi I, II Pitagora Editrice Bologna, 1983.
16. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, Algebra Lineal, Editorial Publicaciones Cultutal, S. A., México, 1982.
17. Noel Gastinel, Análisis Numérico Lineal, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1975.
18. Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, Análisis Numérico con Aplicaciones, Sexta Edición, Editorial Pearson Educación de México, México, 2000.
19. Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Matrix Computations, Second Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
20. Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, Numerical Mathematics, Editorial Springer-Verlag, New York, 1991.
21. Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
22. Kenneth Hoffman, Ray Kunze, Algebra Lineal, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1987.
23. Franz E. Hohn, Algebra de Matrices, Editorial Trillas, México, 1979.
24. Roger A. Horn, Charles R. Johnson, Matrix Analysis, Editorial Cambridge University Press, Cambrisse, 1999.
25. Robert W. Hornbeck, Numerical Methods, Quantum Publishers, Inc., New York, 1975.
26. David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.
27. Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, Introducción al Algebra Lineal, editorial Limusa, Noriega Editores, México, 1995.
28. P. Lascaux, R. Théodor, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à L' Art de L' Ingénieur, Tome 1, Editorial Masson, París, 1986.
29. P. Lascaux, R. Théodor, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à L' Art de L' Ingénieur, Tome 2, Editorial Masson, París, 1987.
30. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.
31. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.
32. Antonio Nieves, Federico C. Dominguez, Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, Tercera Reimpresión, Compañía Editorial Continental, S. A. De C. V., México, 1998.
33. Ben Noble, James W. Daniel, Algebra Lineal Aplicada, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1989.
34. Beresford N. Parlett, The Symmetric Eigenvalue Problem, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1998.
35. Anthony Ralston, Introducción al Análisis Numérico, Editorial Limusa, México, 1978.
36. Fazlollah Reza, Los Espacios Lineales en la Ingeniería, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1977.

37. Michelle Schatzman, *Analyse Numérique*, Inter Editions, París, 1991.
38. Francis Scheid, *Theory and Problems of Numerical Analysis*, Schaum's Outline Series, Editorial McGraw-Hill, New York, 1968.
39. M. Sibony, J. Cl. Mardon, *Analyse Numérique I, Systèmes Linéaires et non Linéaires*, Editorial Hermann, París, 1984.
40. G. W. Stewart, *Matrix Algorithms, Volume II: Eigensystems*, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1998.
41. J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Editorial Springer-Verlag, 1980.
42. Gilbert Strang, *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*, editorial Fondo Educativo Interamericano, México, 1982.
43. V. Voïévodine, *Principes Numériques D' Algèbre Linéaire*, Editions Mir, Moscú, 1976.