

# Capítulo 10

## Splines

### Resumen

La teoría de los splines tiene aplicaciones en dos direcciones importantes de la matemática: la una en los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, particularmente los problemas de valor inicial y los problemas de valores en la frontera; las ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones integrales; la otra dirección lo constituye la computación gráfica, particularmente los modelos geométricos con splines, y el objetivo de este capítulo es dar una introducción a esta teoría. Se abordan dos clases de splines: los de interpolación y se da más énfasis a los splines cúbicos; los B-splines y particularmente los de interpolación cúbicos. En este capítulo se ha limitado los ejercicios. Al final del capítulo se incluye una amplia bibliografía.

### 10.1. Introducción

Una spline es una función definida a trozos sobre intervalos de  $\mathbb{R}$  que se unen entre si obedeciendo a ciertas condiciones de regularidad. La terminología fue introducida por I. J. Schoenberg (1946).

El nombre de spline proviene del nombre del instrumento mecánico del mismo nombre que consiste en un alambre flexible que puede ser utilizado para dibujar curvas suaves a través de puntos asignados. Esta clase de instrumentos fueron utilizados para dibujo técnico en las industrias aeronáuticas, automotriz, naval, etc.

Como aplicaciones simples de splines podemos citar el método de Euler para construir una aproximación polinomial a trozos para la solución de problemas de valor inicial de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Este tipo de aproximación es a menudo utilizada para establecer el teorema de Peano para la existencia de soluciones de tales problemas. Con este punto de vista podemos citar también los artículos de C. Runge (1901), W. Quade y L. Collatz (1938), J. Favord (1940), R. Curant (1943). Entre los textos sobre splines, publicados recientemente, podemos citar: C. de Boor (1978); A Practical Guide to splines; L. L. Schumaker (1981): Spline Functions: Basic Theory.

En la actualidad, las funciones splines se aplican fundamentalmente en grafismo en las industrias automotriz, aeronáutica, naval; en diseño y arquitectura; en métodos numéricos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales con valores iniciales y/o valores ligados a los métodos de Rayleigh-Ritz-Galerkin y Petrov-Galerkin; y se cuentan miles de artículos de splines y de sus aplicaciones.

### 10.2. Espacio de funciones splines

Sean  $n \in \mathbb{N}$ . Se llama conjunto de nodos un conjunto de puntos  $\tau(n) = \{x_j\}_{j=0,\dots,n}$ , donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Estos nodos forman una partición del intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  en subintervalos  $[x_{j-1}, x_j]$ ,

$j = 1, \dots, n$ . Los puntos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  se llaman nodos interiores, y los puntos  $x_0 = a$  y  $x_n = b$  se llaman nodos frontera.

Un conjunto de puntos  $S_n = \{(x_i, y_i) \mid x_i \in \tau(n), y_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n\}$ , se llama conjunto de puntos de base.

Notamos con  $P_m$  el espacio de polinomios de grado  $\leq m$ . Se designa con  $C_{-1}([a, b])$  el espacio de funciones continuas a trozos en  $[a, b]$ . Se denota con  $C_{k-1}([a, b])$ ,  $a \leq k \leq m$ , el espacio de funciones que poseen derivadas continuas hasta el orden  $k - 1$  en  $[a, b]$  ( $C_0([a, b]) = C([a, b])$  es el espacio de las funciones en  $[a, b]$ ).

**Definición 1** Sea  $m \in \mathbb{N}$ . Una función  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se llama función spline polinomial de grado  $m$  si ella posee las propiedades siguientes:

- i)  $S \in C_{m-1}([a, b])$ ;
- ii)  $S \in P_m$  para  $x \in [x_{j-1}, x_j[$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Denotamos con  $S_m(\tau(n))$  el conjunto de todas las funciones splines polinomiales de grado  $m$  asociadas a la subdivisión  $\tau(n)$  de  $[a, b]$ .

En lo sucesivo nos limitaremos a los splines polinomiales y nos referiremos a ellas simplemente como splines.

### Ejemplos

1. En la figura siguiente se ilustra la gráfica de una función spline de grado 0.

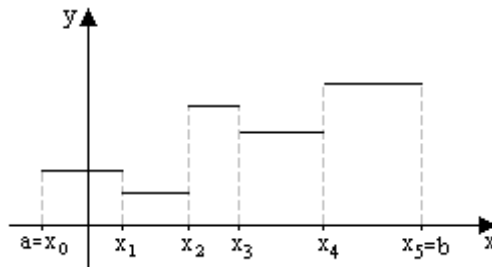


Figura 89

2. Sean  $S_n$  un conjunto de puntos de base. La línea poligonal que consiste en los segmentos de recta que unen puntos sucesivos de  $S_n$  es un ejemplo de función spline de grado 1. En la figura que a continuación se indica se traza una spline de grado 1.

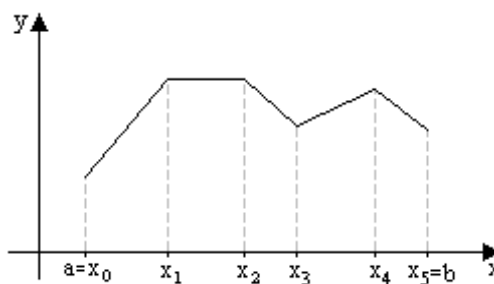


Figura 90

3. Sean  $\tau(n)$  una subdivisión del intervalo  $[a, b]$  y  $m \in \mathbb{N}$ . La familia de funciones  $\{q_{m,j} \mid j = 0, \dots, n-1\}$  definidas como sigue

$$q_{m,j}(x) = \begin{cases} (x - x_j)^m, & \text{si } x \in [x_j, b], \\ 0, & \text{si } x \in [a, x_j[, \end{cases}$$

son splines de grado  $m$  asociadas a la subdivisión  $\tau(n)$ . En la figura siguiente se ilustran estas funciones.

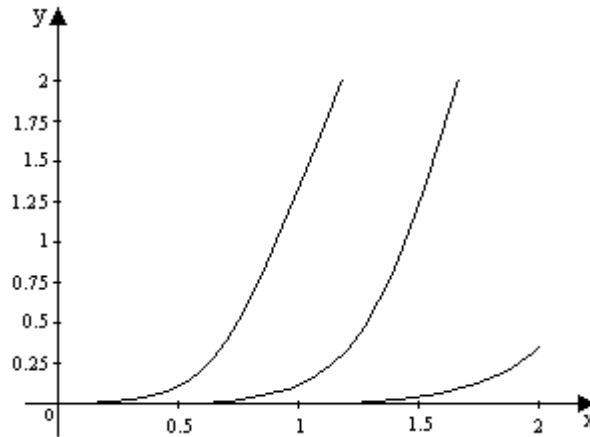


Figura 91

Las funciones  $q_{m,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se llaman splines de un solo lado.

#### Base de $S_m(\tau(n))$

El conjunto  $S_m(\tau(n))$  provisto de las operaciones habituales entre funciones (adición y producto de un número real por una función) es un espacio vectorial real de dimensión  $m+n$  y una base de dicho espacio es el conjunto de funciones

$$\{p_0, p_1, \dots, p_m, q_{m,1}, \dots, q_{m,n-1}\},$$

donde

$$p_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

y las funciones  $q_{m,j}$  están definidas en el ejercicio 3).

Se puede probar que toda función  $S \in S_m(\tau(n))$  se escribe de manera única en la forma

$$S(x) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j q_{m,j}(x) \quad x \in [a, b],$$

donde  $a_0, a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

### 10.3. Interpolación mediante splines

Centraremos nuestra atención en la interpolación mediante splines de grado uno y tres que son las más utilizadas en las aplicaciones.

La ventaja del método de interpolación mediante splines es el uso de polinomios de grado bajo para producir globalmente interpolantes suaves, al tiempo que evita la desventaja del uso de polinomios de interpolación de grado alto.

#### Splines de interpolación de grado 1

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en  $[a, b]$  y  $\tau(n)$  una subdivisión de  $[a, b]$ .

Sea  $S_n = \{(x_i, f(x_i)) \mid x_i \in \tau(n), i = 0, 1, \dots, n\}$  un conjunto de puntos de base. El ejemplo más simple de splines de grado 1 es el spline lineal que consiste en segmentos de recta que unen puntos sucesivos de  $S_n$ ; de este modo se obtiene una línea poligonal.

La spline interpolante de grado 1 está definida de manera única en cada subintervalo  $[x_{j-1}, x_j]$   $j = 1, \dots, n$ , como una función afín definida en dicho subintervalo y que globalmente es la única línea poligonal obtenida al juntar todos los segmentos de recta.

Buscamos una función real  $S$  definida en  $[a, b]$  que verifique las propiedades siguientes:

- i)  $S \in C([a, b])$ ;
- ii)  $S \in P_1$  para  $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
- iii)  $S(x_j) = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Para construir una tal función  $S$ , determinemos  $\alpha_j, \beta_j$  constantes tales que

$$\begin{aligned} S(x) &= \alpha_j + \beta_j x, & x \in [x_{j-1}, x_j], & j = 1, \dots, n, \\ S(x_{j-1}) &= f(x_{j-1}), \\ S(x_j) &= f(x_j). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S(x_{j-1}) &= \alpha_j + \beta_j x_{j-1} = f(x_{j-1}), \\ S(x_j) &= \alpha_j + \beta_j x_j = f(x_j). \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_j &= f(x_{j-1}) - \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} x_{j-1}, \\ \beta_j &= \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función  $S$  se escribe

$$S(x) = f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} (x - x_{j-1}), \quad x \in [x_{j-1}, x_j] \quad j = 1, \dots, n,$$

que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$  y  $(x_j, f(x_j))$  restringida al intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$ , la misma que se escribe

$$S(x) = \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} f(x_j) + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} f(x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n.$$

### Estimación del error

Definimos

$$p_{j,1}(x) = \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j}, \quad p_{j,2}(x) = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} p_{j,1}(x) &\geq 0, \quad p_{j,2}(x) \geq 0, \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j], \\ p_{j,1}(x) + p_{j,2}(x) &= 1, \quad \forall x \in [a, b], \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

de donde  $f(x) = p_{j,1}(x) f(x_j) + p_{j,2}(x) f(x_{j-1})$  y

$$|f(x) - S(x)| \leq \text{Max} \{|f(x) - f(x_{j-1})|, |f(x) - f(x_j)|\}.$$

El módulo de continuidad de  $f$  relativo al intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$  se define por

$$w_f(\delta) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leq \delta \\ t_1, t_2 \in [x_{j-1}, x_j]}} |f(t_1) - f(t_2)|,$$

donde  $\delta > 0$ .

El módulo de continuidad verifica las propiedades siguientes:

- i)  $w_f(\delta_1) \leq w_f(\delta_2)$  para  $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ ,
- ii)  $w_f(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ .

Utilizando el módulo de continuidad, tenemos

$$\max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - S(x)| \leq w_f(|x_j - x_{j-1}|), \quad j = 1, \dots, n.$$

Sea  $h = \max_{j=1, \dots, n} |x_j - x_{j-1}|$ . Se tiene entonces la siguiente estimación del error:

$$\|f - S\|_{L^\infty(a,b)} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - S(x)| \leq w_f(h).$$

De la definición de  $w_f(h)$ , se sigue que

$$\|f - S\|_{L^\infty(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

esto es, las splines de interpolación lineales convergen uniformemente a  $f \in C([a, b])$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Si  $f \in C_1([a, b])$ , se tiene la siguiente estimación de error:

$$\|f - S\|_{L^\infty(a,b)} \leq \frac{h}{4} w_{f'}(h).$$

Si  $f \in C_2([a, b])$ , entonces

$$\|f - S\|_{L^\infty(a,b)} \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{L^\infty(a,b)}.$$

### 10.3.1. Splines cúbicas de interpolación

Consideremos  $f \in C_2([a, b])$ ,  $\tau(n)$  una subdivisión de  $[a, b]$  y

$$S_n = \{(x_i, f(x_i)) \mid x_i \in \tau(n), \quad i = 0, \dots, n\}$$

un conjunto de puntos de base.

Puesto que  $\dim S_3(\tau(n)) = n + 3$ , si se requiere interpolar en cada uno de los  $n + 1$  nodos  $x_0, \dots, x_n$ , entonces quedan 2 parámetros libres que pueden ser utilizados en los tipos de splines siguientes:

a) Interpolación con condiciones de frontera de Hermite

Hallar  $S \in S_3(\tau(n))$  tal que

- i)  $S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$
- ii)  $S'(a) = f'(a);$
- iii)  $S'(b) = f'(b).$

b) Interpolación con condiciones de frontera naturales

Suponemos que  $n \geq 2$ .

Hallar  $S \in S_3(\tau(n))$  tal que

i)  $S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n;$

ii)  $S''(a) = S''(b) = 0.$

c) Interpolación con condiciones de frontera periódicas ( $f(a) = f(b)$  y  $f'(a) = f'(b)$ )

Hallar  $S \in S_3(\tau(n))$  tal que

i)  $S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n;$

ii)  $S'(a) = S'(b);$

iii)  $S''(a) = S''(b).$

Con el propósito de mostrar que los problemas a), b) y c) tienen solución única, enunciamos la propiedad siguiente de las splines cúbicas, conocida como relación integral.

### Relación integral

Sea  $f \in C_2([a, b])$  y  $S \in S_3(\tau(n))$  una función spline de interpolación de  $f$  tal que la diferencia  $E(x) = f(x) - S(x)$   $x \in [a, b]$ , satisface la condición de frontera

$$S''(a)E'(a) = S''(b)E'(b).$$

Entonces

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx + \int_a^b [S''(x)]^2 dx.$$

De esta relación, vemos que

1. Si  $E'(a) = E'(b) = 0$ , entonces se tiene las splines del tipo a).
2. Si  $S''(a) = S''(b) = 0$ , entonces se tiene las splines del tipo b).
3. Si  $S''(a) = S''(b)$  y  $E'(a) = E'(b)$ , corresponden entonces a las splines del tipo c).

Usando la relación integral se prueba que los problemas de interpolación a), b) y c) tienen siempre una única solución  $S \in S_3(\tau(n))$ .

### Construcción

Dada una función  $f \in C_2([a, b])$ , para construir la función spline de interpolación  $S$ , aplicamos las condiciones de las funciones splines y de las splines cúbicas al polinomio cúbico siguiente:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$S(x) = S_j(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Por i) de los tipos de splines a), b) y c), se tiene

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

y ponemos  $a_n = f(x_n)$ .

De la definición de función spline (continuidad en cada nodo), se obtiene

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3, \end{aligned}$$

para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Notamos con  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Entonces la relación precedente se escribe

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3.$$

La derivada de  $S_j(x)$  es la función

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

de donde

$$S'_j(x_j) = b_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definimos  $b_n = S'(x_n)$ .

Por la cotinuidad de  $S'_j$  en cada nodo  $x_j$ , tenemos

$$b_{j+1} = S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}) = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

La derivada segunda de  $S_j(x)$  está dada por

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

de donde

$$S''_j(x_j) = 2c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

y definimos  $c_n = \frac{1}{2}S''(x_n)$ ,

Nuevamente, utilizando la continuidad de  $S''_j(x)$  en cada nodo  $x_j$ , tenemos:

$$C_{j+1} = \frac{1}{2}S''_{j+1}(x_{j+1}) = \frac{1}{2}S''_j(x_{j+1}) = \frac{1}{2}(2c_j + 6d_j h_j) = c_j + 3d_j h_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Obtengamos relaciones que ligen los coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$  en términos de los datos  $a_j = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Resulta

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^3 = a_j + b_j h_j + \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1}) h_j^2, \\ b_{j+1} &= b_j + 2c_j h_j + 3 \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^2 = b_j + (c_j + c_{j+1}) h_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Para obtener la relación final entre los coeficientes, de la igualdad

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1}) h_j^2,$$

obtenemos

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

y para  $j = 0, 1, \dots, n$ :

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j),$$

con lo cual la relación

$$b_{j+1} = b_j + (c_j + c_{j+1}) h_j$$

se expresa en la forma

$$b_j = b_{j-1} + (c_{j-1} + c_j) h_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

y

$$\frac{1}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}) = \frac{1}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3} (2c_{j-1} + c_j) + (c_{j-1} + c_j) h_{j-1},$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}) &= \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}) - \frac{h_{j-1}}{3} (2c_{j-1} + c_j) + (c_{j-1} + c_j) h_{j-1} \\ &= \frac{1}{3} h_{j-1} c_{j-1} + \frac{2}{3} (h_{j-1} + h_j) c_j + \frac{1}{3} h_j c_{j+1}, \end{aligned}$$

o bien

$$(h_{j-1}, 2(h_{j-1} + h_j), h_j) \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ c_j \\ c_{j+1} \end{pmatrix} = \frac{3}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ponemos  $\vec{c}^t = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ . El sistema de ecuaciones precedente involucra únicamente el vector  $\vec{c}$ , las longitudes de los subintervalos  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$  y los valores de  $f$  en los puntos  $\tau(n) = \{x_j\}_{j=1, \dots, n}$  de la subdivisión de  $[a, b]$ .

### 10.3.2. Interpolación con condiciones de frontera de Hermite

Sea  $f \in C^{(4)}([a, b])$ ,  $f$  tiene una única spline cúbica de interpolación  $S \in S_3(\tau(n))$  que satisface las condiciones de frontera de hermite  $S'(a) = f'(a)$  y  $S'(b) = f'(b)$ .

En efecto,

$$S'(a) = S'(x_0) = b_0 = f'(a),$$

y para  $j = 0$ ,  $b_0$  está dado por

$$b_0 = \frac{1}{h_0} (a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3} (2c_0 + c_1),$$

resulta que

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = -3f'(a) + \frac{3}{h_0} (a_1 - a_0).$$

De manera similar, tenemos

$$S'(b) = S'(x_n) = b_n = f'(b).$$

Como

$$b_n = b_{n-1} + h_{n-1} (c_{n-1} + c_n),$$

y

$$b_{n-1} = \frac{1}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1}) - \frac{h_{n-1}}{3} (2c_{n-1} + c_n),$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{1}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1}) - \frac{h_{n-1}}{3} (2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1} (c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{1}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{3} (c_{n-1} + 2c_n), \end{aligned}$$

con lo cual

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1}).$$

En resumen, tenemos que

$$\begin{aligned} 2h_0c_0 + h_0c_1 &= -3f'(a) + \frac{3}{h_0} (a_1 - a_0), \\ (h_{j-1}, 2(h_{j-1} + h_j), h_j) \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ c_j \\ c_{j+1} \end{pmatrix} &= \frac{3}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j+1}} (a_j - a_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n &= 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$



que puede expresarse en forma compacta como un sistema de ecuaciones

$$A\vec{C} = \vec{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3f'(a) + \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{pmatrix}$$

La matriz  $A$  es simétrica, estrictamente diagonal dominante, por lo tanto el sistema de ecuaciones precedente tiene solución única.

El método de resolución numérica que puede utilizarse es el de factorización LU de Crout o de Doolittle.

Una vez calculados los coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , los coeficientes  $b_j$  se calculan usando la relación

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

y los coeficientes  $d_j$  por

$$d_j = \frac{c_{j+1} + c_j}{3h_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Finalmente, se define  $S(x) = S_j(x)$ ,  $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

El error de interpolación en la norma  $L^\infty(a, b)$  satisface la desigualdad siguiente;

$$\|f - S\|_{L^\infty(a, b)} \leq \frac{5}{384} M h^4,$$

donde  $M = \|f^{(4)}\|_{L^\infty(a, b)}$ ,  $h = \max_{j=0,1,\dots,n} h_j$ .

Es claro que  $\|f - S\|_{L^\infty(a, b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ; es decir que  $S$  converge uniformemente a  $f$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

### 10.3.3. Interpolación con condiciones de frontera naturales

Sea  $f \in C^{(4)}([a, b])$ ,  $f$  tiene una única spline cúbica de interpolación  $S \in S_3(\tau(n))$  que satisface las condiciones de frontera naturales  $S''(a) = S''(b) = 0$ . Efectivamente,

$$0 = S''9a = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0),$$

de donde  $c_0 = 0$ ,

$$c_n = \frac{S''(x_n)}{2} = \frac{S''(b)}{2} = 0.$$

Así,  $c_0 = 0$ ,  $c_n = 0$ . Para  $j = 1, \dots, n-1$ , tenemos

$$(h_{j-1}, 2(h_{j-1} + h_j), h_j) \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ c_j \\ c_{j+1} \end{pmatrix} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}),$$

que podemos escribir como un sistema de ecuaciones lineales

$$A\vec{C} = \vec{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz  $A$  es estrictamente diagonalmente dominante. Esto implica que el sistema de ecuaciones precedente tiene solución única. El método numérico de resolución de tal sistema es el de factorización de Crout o de Doolittle.

Sea  $\vec{C}^t = (c_0, c_1, \dots, c_n)$  la solución del sistema de ecuaciones  $A\vec{C} = \vec{b}$ . Los coeficientes  $b_j$  y  $d_j$  se calculan usando las fórmulas siguientes:

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(c_{j+1} + 2c_j) \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Note que  $b_n = S'(b)$  y  $d_n = 0$ .

Definimos  $S(x) = S_j(x)$   $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Se tiene entonces la siguiente estimación de error

$$\|f - S\|_{L^\infty(a,b)} \leq C \|f^{(4)}\|_{L^\infty(a,b)} h^4,$$

donde  $C > 0$  es una constante independiente de  $n$  y  $h = \max_{j=1, \dots, n} h_j$ .

#### 10.3.4. Interpolación con condiciones de frontera periódicas

Sea  $f \in C^4([a, b])$ .  $f$  tiene una única spline cúbica de interpolación  $S \in S_3(\tau(n))$  que satisface las condiciones de frontera  $S'(a) = S'(b)$ ,  $S''(a) = S''(b)$ .

Mediante un razonamiento similar a los dos casos a) y b), se obtiene el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\vec{C} = \vec{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0 - h_{n-1}) & h_0 & 0 & 0 & \dots & -h_{n-1} & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & h_0 & \dots & \dots & 0 & -h_{n-1} & 2(h_0 - h_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \end{pmatrix}$$

El valor de  $S(x)$  para  $x \in [a, b]$  se obtiene de manera análoga a los casos a) y b).

El error de interpolación es idéntico al caso b)

## 10.4. Splines cuadráticas

El espacio  $S_2(\tau(n))$  de las splines cuadráticas correspondientes a la subdivisión  $\tau(n) = \{x_j\}_{j=0,\dots,n}$  tiene dimensión  $n+2$ . Si deseamos construir una función spline  $S$  de interpolación en cada nodo, nos queda entonces exactamente un parámetro libre, y por lo tanto es imposible imponer condiciones de frontera simétricas como en el caso de splines de grado impar discutidas en la sección precedente.

A continuación proponemos dos problemas de interpolación que conducen a definir de manera única splines cuadráticas y que tienen condiciones simétricas de frontera. Para lograr esto, introducimos las subdivisiones de  $[a, b]$  siguientes:

$$\tau_1(n-1) = \{y_j\}_{j=0,1,\dots,n-1}, \quad \tau(n) = \{x_j\}_{j=0,1,\dots,n}$$

tales que

$$a = x_0 = y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} = k_n = b.$$

Entonces el espacio  $S_2(\tau_1(n-1))$  tiene dimensión  $n+1$ , mientras que  $S_2(\tau(n))$  tiene dimensión  $n+2$ .

a) Hallar  $S \in S_3(\tau_1(n-1))$  tal que

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

donde  $f$  es una función dada definida en  $[a, b]$ .

b) Sea  $f \in C_1([a, b])$ . Hallar  $S \in S_2(\tau(n))$  tal que

$$\begin{aligned} S(y_j) &= f(y_j), & j &= 0, 1, \dots, n-1, \\ S'(y_0) &= f'(a), \\ S'(y_{n-1}) &= f'(b). \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Rolle se demuestra que los problemas a) y b) tienen solución única.

### Interpolación cuadrática para el problema a)

Sea  $f$  una función definida en  $[a, b]$ . Consideremos las subdivisiones  $\tau_1(n-1)$  y  $\tau(n)$  de  $[a, b]$  arriba definidas. Buscamos una función  $S \in S_2(\tau_1(n-1))$  tal que

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

De la definición de función spline,  $S$  es un polinomio de grado 2 en cada subintervalo  $[y_{j-1}, y_j]$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ .

Definimos

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

y determinemos las constantes  $a_j$ ,  $b_j$  y  $c_j$ . Tenemos

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

De la continuidad de  $S$  en  $y_j$ , tenemos

$$S_{j+1}(y_{j+1}) = S_j(y_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n-2,$$

de donde

$$a_{j+1} + b_{j+1}(y_{j+1} - x_{j+1}) + c_{j+1}(y_{j+1} - x_{j+1})^2 = a_j + b_j(y_{j+1} - x_j) + c_j(y_{j+1} - x_j)^2.$$

La derivada de  $S_j$  es la función definida por

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

La continuidad de  $S'$  en  $y_j$  nos permite obtener la relación siguiente:

$$b_{j+1} + 2c_{j+1}(y_{j+1} - x_{j+1}) = b_j + 2c_j(y_{j+1} - x_j), \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Para determinar los coeficientes  $b_j$  y  $c_j$ , imponemos la condición  $S'(x_j) = 0$ . Entonces

$$0 = S'(x_j) = S'_j(x_j) = b_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Luego

$$c_{j+1} = c_j \frac{y_{j+1} - x_j}{y_{j+1} - x_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Puesto que

$$a_{j+1} + c_{j+1}(y_{j+1} - x_{j+1})^2 = a_j + c_j(y_{j+1} - x_j)^2, \quad j = 1, \dots, n-2,$$

pues  $b_j = 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, n-2$ . Resulta que

$$a_{j+1} + c_j \frac{y_{j+1} - x_j}{y_{j+1} - x_{j+1}} (y_{j+1} - x_j)^2 = a_j + c_j (y_{j+1} - x_j)^2,$$

de donde

$$c_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{(y_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_j)} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{(y_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_j)}.$$

Así,

$$S_j(x) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{(y_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_j)} (x - x_j)^2, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definimos

$$S(x) = S_j(x), \quad x \in [y_{j-1}, y_j], \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Con frecuencia la subdivisión  $\tau_1(n-1)$  se selecciona de la manera siguiente:

$$y_0 = a, \quad y_{n-1} = b \quad \text{y} \quad y_j = x_j + t_j(x_{j+1} - x_j), \quad j = 1, \dots, n-2,$$

donde  $t_j \in ]0, 1[$ .

Si  $t_j = \frac{1}{2}$ , entonces  $y_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$ ,  $j = 1, \dots, n-2$  que corresponden a los puntos medios de los subintervalos  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, n-2$ .

### Interpolación cuadrática para el problema b)

Definimos

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - y_j) + c_j(x - y_j)^2, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Entonces

$$S_j(y_j) = a_j + f(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

La continuidad de  $S$  en cada nodo  $x_j$  nos conduce a la siguiente relación:

$$a_{j+1} + b_{j+1} (x_{j+1} - y_j) + c_{j+1} (x_{j+1} - y_j)^2 = a_j + b_j (x_{j+1} - y_j) + c_j (x_{j+1} - y_j)^2, \quad j = 0, 1, \dots, n-2,$$

y la continuidad de  $S'$  en cada nodo  $x_j$ , nos da la igualdad siguiente:

$$b_{j+1} + 2c_{j+1} (x_{j+1} - y_j) = b_j + 2c_j (x_{j+1} - y_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-2.$$

Por otro lado,  $S'_0(x) = b_0 + 2c_0(x - a)$ , entonces

$$S'_0(a) = b_0 = f'(a).$$

Además

$$S'_{n-1}(x) = b_{n-1} + 2c_{n-1}(x - y_{n-1}),$$

con lo cual

$$S'_{n-1}(b) = b_{n-1} = f'(b).$$

Combinando las relaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{a_j - a_{j+1}}{(x_{j+1} - y_j)^2} = \frac{f(y_j) - f(y_{j+1})}{(x_{j+1} - y_j)^2}, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \\ b_{j+1} &= b_j + 2(x_{j+1} - y_j)(c_j - c_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-3. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f(a) - f(y_1)}{(x_1 - a)^2}(x - a)^2, \\ S_{n-1}(x) &= f(b) + f'(b)(x - b) + \frac{f(y_{n-2}) - f(b)}{(b - y_{n-2})^2}(x - b)^2. \end{aligned}$$

Finalmente

$$S_j(x) = f(y_j) + b_j(x - y_j) + c_j(x - y_j)^2, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, n-2.$$

## 10.5. B - Splines

En las secciones precedentes construimos los espacios de splines  $S_m(\tau(n))$  para una subdivisión dada  $\tau(n) = \{x_j\}_{j=0, \dots, n}$ . Estos espacios tienen dimensión  $m + n$  y una base de  $S_m(\tau(n))$  en la familia de funciones

$$\{p_0, p_1, \dots, p_m, q_{m,1}, \dots, q_{m,n}\}.$$

En esta sección discutiremos bases alternativas para espacios de splines mejor adaptadas a los aspectos numéricos. Estas funciones fueron introducidas por Schoenberg y las denominó "Curvas básicas de Splines" que en la actualidad se conocen simplemente como B - Splines.

Notamos con  $\tau_\infty = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  una subdivisión de  $\mathbb{R}$  tal que  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} -\infty$ ,  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$ , y  $x_j < x_{j+1}$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 2** Sea  $\tau_\infty$  una subdivisión de  $\mathbb{R}$ . Se nota con  $B_{m,j}$  la función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  tal que

- i)  $B_{m,j}(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{R} - [x_j, x_{j+m+1}[$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ;
- ii)  $B_{m,j} \in P_m$  sobre cada subintervalo  $[x_i, x_{j+1}]$ ,  $i = j, \dots, j + m + 1$ ;
- iii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} B_{m,j}(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+m+1}} B_{m,j}(x) dx = 1$

Las funciones  $B_{m,j}$  se llaman B - Splines. La condición iii) se conoce con el nombre de condición de normalización. Se puede probar que existe una única función  $B_{m,j}$  que verifica i), ii) y iii).

Las funciones  $\{B_{m,j} \mid j \in \mathbb{Z}\}$  forman una base del espacio de splines  $S_m(\tau_\infty)$ .

### Ejemplos

#### 1. B - spline de grado 0.

Se nota con  $B_{0,j}$  a las B-splines de grado cero. En la figura siguiente se muestra la gráfica de  $B_{0,j}$ .

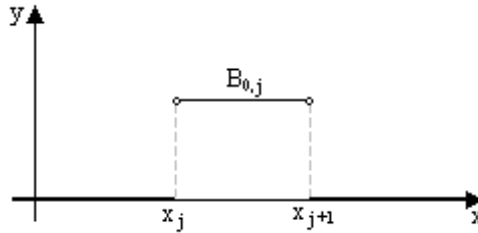


Figura 92

De la definición de B-splines, se tiene que

$$B_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - [x_i, x_{j+1}[ , \\ \frac{1}{x_{j+1} - x_j}, & \text{si } x \in [x_i, x_{j+1}[ . \end{cases}$$

Note que  $B_{0,j} \in P_0$  sobre  $[x_i, x_{j+1}[$ , e  $\int_{-\infty}^{+\infty} B_{0,j}(x) dx = 1$ .

Se tiene las siguientes propiedades:

i)  $\text{Sup}(B_{0,j}) = [x_i, x_{j+1}[$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .

ii)  $B_{0,j}(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .

iii)  $B_{0,j}$  es continua por la derecha en todo  $\mathbb{R}$ .

iv)  $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{0,j}(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

v) La familia  $\{B_{0,j} \mid j \in \mathbb{Z}\}$  es una base de  $S_0(\tau_\infty)$ , pues si  $S \in S_0(\tau_\infty)$ , entonces  $S(x) = c_j$  si  $x \in [x_j, x_{j+1}[$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Resulta que  $S(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{0,j}(x) \cdot c_j$ .

#### 2. B-spline de grado 1.

Notamos con  $B_{1,j}$  a las B-splines de grado uno y que se definen como sigue:

$$B_{1,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - [x_j, x_{j+2}[ , \\ \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}[ , \\ \frac{x_{j+2} - x}{x_{j+2} - x_{j+1}}, & \text{si } x \in [x_{j+1}, x_{j+2}[ , \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En la figura siguiente se ilustra la gráfica de esta función.

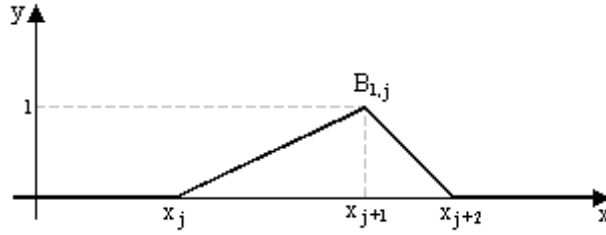


Figura 93

A estas funciones se les denomina también funciones techo. Se tienen las propiedades siguientes:

- i)  $\text{Sup}(B_{1,j}) = [x_j, x_{j+2}]$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .
- ii)  $B_{1,j}(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .
- iii)  $B_{1,j} \in C_1(\mathbb{R})$ .
- iv)  $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{1,j}(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- v)  $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j B_{1,j} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [c_j v_{1,j} + c_{j-1}(1 - v_{1,j})] B_{0,j}$ , donde  $\{v_{1,j} \mid j \in \mathbb{Z}\}$  es la familia de funciones definidas por

$$v_{1,j}(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Note que  $B_{1,j} = v_{1,j}B_{0,j} + (1 - v_{1,j+1})B_{0,j+1}$ .

vi) Para cada  $S \in S_1(\tau(n))$  en el intervalo  $[x_0, x_n]$ , se tiene una única representación en términos de B-splines:

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n-1} \alpha_i B_{1,i}(x), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

### B - splines cuadráticos.

3. Sean  $h > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos ahora splines en puntos igualmente espaciados  $\tau_\infty = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Una B-spline cuadrática de grado 2 con respecto de  $\tau_\infty$  se nota con  $B_{2,j}$  y se define por

$$B_{2,j}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2} (x - x_j)^2, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}[ , \\ \frac{1}{2h^2} [h^2 + 2h(x - x_{j+1}) - 2(x - x_{j+1})^2], & \text{si } x \in [x_{j+1}, x_{j+2}[ , \\ \frac{1}{2h^2} (x_{j+1} - x)^2, & \text{si } x \in [x_{j+2}, x_{j+3}[ , \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - [x_j, x_{j+3}], \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

### 4. B - splines cúbicas

Tal como en el caso de B-splines cuadráticas, consideramos  $\tau_\infty = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  una subdivisión en puntos igualmente espaciados.

Una B-spline cúbica de grado 3 se define por

$$B_{3,j}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_j)^3, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}[ , \\ h^3 + 3h^2(x - x_{j+1}) + 3h(x - x_{j+1})^2 - 3(x - x_{j+1})^3, & \text{si } x \in [x_{j+1}, x_{j+2}[ , \\ h^3 + 3h^2(x_{j+3} - x) + 3h(x_{j+3} - x)^2 - 3(x_{j+3} - x)^3, & \text{si } x \in [x_{j+2}, x_{j+3}[ , \\ (x_{j+4})^3, & \text{si } x \in [x_{j+3}, x_{j+4}[ , \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - [x_j, x_{j+4}], \end{cases}$$

Las funciones B-splines descritas en los ejemplos 1) a 4) son ampliamente utilizadas en el método de elementos finitos para la resolución numérica de problemas de valores de frontera y/o de condiciones iniciales.

### 10.5.1. Interpolaciones mediante B-splines cúbicas

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en  $[a, b]$ . Buscamos una función  $S \in S_3(\tau(n))$  tal que

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

donde  $\tau(n)$  es una subdivisión en puntos igualmente espaciados.

Para lograrlo, necesitamos los valores de los B-splines  $B_{3,j}$ ,  $j = -3, \dots, n-1$  en los nodos  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ , así como los valores de las derivadas  $B'_{3,j}$  o  $B''_{3,j}$  en  $x_0 = a$  para  $j = -3, -2, -1$  y en  $x_n = b$  para  $j = n-3, n-2, n-1$ .

En la tabla siguiente se ilustran estos valores:

	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$	$x_{j+4}$
$B_{3,j}(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
$B'_{3,j}(x)$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0
$B''_{3,j}(x)$	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0

Sea  $S \in S_3(\tau(n))$ . Supongamos que

$$S(x) = \sum_{j=-3}^{n-1} \alpha_j B_{3,j}(x), \quad x \in [a, b].$$

Los problemas a), b) y c) discutidos en la sección de interpolación mediante splines cúbicas se escriben como sigue:

$$\sum_{j=-3}^{n-1} \alpha_j B_{3,j}(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Condiciones de frontera:

$$\text{a) } \sum_{j=k-3}^{k-1} \alpha_j B'_{3,j}(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, n;$$

$$\text{b) } \sum_{j=-3}^{-1} \alpha_j B''_{3,j}(x_k) = 0, \quad k = 0, n;$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{j=3}^{-1} \alpha_j B'_{3,j}(a) &= \sum_{j=n-3}^{n-1} \alpha_j B'_{3,j}(b); \\ \sum_{j=-3}^{-1} \alpha_j B''_{3,j}(a) &= \sum_{j=n-3}^{n-1} \alpha_j B''_{3,j}(b). \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones resultante

$$A\vec{C} = \vec{b},$$

para los tres problemas, tiene las formas siguientes:



a) **Condiciones de frontera de Hermite**

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}^t = (f'(a), f(x_0), \dots, f(x_n), f'(b)).$$

b) **Splines naturales**

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}^t = (0, f(x_0), \dots, f(x_n), 0).$$

c) **Splines periódicas**

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & 0 & \cdots & 0 & \frac{3}{h} & 0 & -\frac{3}{h} \\ \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{6}{h^2} & \frac{12}{h^2} & -\frac{6}{h^2} \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}^t = (0, 0, f(x_0), \dots, f(x_{n-1}), f(a)).$$

**10.6. Ejercicios**

1. Construir la gráfica de  $B_{2,j}$  y construir sus propiedades.
2. Proponemos como ejercicios construir la gráfica de  $B_{3,j}$  así como enunciar sus propiedades.

**10.7. Lecturas complementarias y bibliografía**

1. Richard H. Bartels, John C. Beatty, Brian A. Barsky, An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Medeling, Editorial Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Mateo, California, 1987.

2. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México, 2002.
3. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.
4. Elaine Cohen, Richard F. Riesenfeld, Gershon Elber, *Geometric Modeling with Splines*, Editorial A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2001.
5. Gerald Farin, *Curves and Surfaces for CAGD*, Fifth Edition, Editorial Morgan Kaufmann Publishing, San Francisco, 2002.
6. James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John F. Hughes, *Computer Graphics, Principles and Practice*, Second Edition in C, Editorial Addison-Ewsey, Boston , 1997.
7. Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, *Análisis Numérico con Aplicaciones*, Sexta Edición, Editorial Pearson Educación de México, México, 2000.
8. Günther Håmmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, *Numerical Mathematics*, Editorial Springer-Verlag, New York, 1991.
9. David Kincaid, Ward Cheney, *Análisis Numérico*, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.
10. Melvin J. Maron, Robert J. López, *Análisis Numérico*, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.
11. H. Prautzsch, W. Boehm, M Paluszny, *Bézier and B-Spline Techniques*, Editorial Springer-Verlag, Berlín, 2000.
12. Helmuth Späth, *One Dimensional Spline Interpolation algorithms*, Editorial A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.
13. J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Editorial Springer-Verlag, 1980.
14. Grace Wahba, *Spline Models for Observational Data*, Editorial Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM); Philadelphia, 1990.