Capítulo 3

Aproximación de series de funciones. Aplicaciones.

Resumen

Muchos problemas en matemáticas conducen a soluciones expresadas mediante series convergentes de funciones, particularmente interesan las series de potencias, que suponemos convergen uniformemente en un cierto intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Las series de Fourier se tratarán en el capítulo de mínimos cuadrados. En muy pocos casos se conocen resultados exactos y en la generalidad de los mismos se conocen resultados de convergencia puntual y uniforme. Tanto en el caso de conocer la función suma como en el que se desconoce, interesa calcular valores aproximados de dichas sumas, las mismas que deben ser aproximadas numéricamente.

Este capítulo se inicia con la aproximación de series numéricas. A continuación se tratan las series de potencias a las que se dan mayor atención. Particular interés se da al cálculo aproximado de algunas funciones usuales representadas como series de potencias como son $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\text{arcsen}(x)$, $\ln(x)$, $\exp(x)$. Se presentan algunas aplicaciones de las series de potencias como en el caso de la función error, las integrales elípticas. Se pone mucho énfasis en la aplicación de resultados de la consistencia y la estabilidad numérica que nos permitan elaborar algoritmos simples de cálculo.

3.1. Resultados fundamentales de series numéricas convergentes.

Esta sección está destinada a introducir algunos conceptos básicos sobre las series numéricas reales así como presentar algunos resultados importantes sobre los criterios de convergencia. Estos resultados serán de gran utilidad en el cálculo aproximado de series numéricas y series de funciones, y particularmente en las series de potencias y las series de Fourier. El lector que está familiarizado con las series numéricas puede pasar inmediatamente a los métodos de cálculo, aquel que no está familiarizado tendrá la ocasión de tratar este tema en forma resumida. Al final del capítulo se dan algunas observaciones, comentarios y se sugiere una bibliografía especializada para estudios más profundos.

3.1.1. Series numéricas convergentes.

Sea (a_n) una sucesión numérica. A menos que se indique lo contrario, suponemos que las sucesiones numéricas (a_n) están definidas en todo $n \in \mathbb{N}$. La suma $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + \cdots$, que se escribe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y que se lee suma desde $n = 0$ hasta infinito de a_n, se llama serie numérica. En la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, a_n se llama término general. En el caso de que la sucesión numérica (a_n) está definida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq n_0 \geq 1$, la suma $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots$, se escribirá $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ y se denomina suma parcial de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. También se escribirá a la suma parcial $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. La sucesión (S_n) se llama sucesión de sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definición 1 *i) Se dice que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales (S_n) es convergente, es decir que existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Escribimos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$ y diremos que S es la suma de la serie.*
ii) Diremos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente si y solo si la sucesión de sumas parciales (S_n) es divergente.

Se verifica inmediatamente que si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. El recíproco, en general, no es cierto como se muestra más adelante con el ejemplo de la serie armónica.

Ejemplos

1. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Observemos primeramente que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. En consecuencia; si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ denota la suma parcial, se tiene
$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}, \qquad , S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$
Resulta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, con lo cual la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y converge a 1, esto es, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, o sea el término general de la serie es convergente.

2. Sea $x \in \mathbb{R},\ \ x \neq 0$. Consideramos la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Esta serie se llama serie geométrica. Para $n \in \mathbb{N}$ se define la suma parcial $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n$. Multipliquemos a S_n por x. Tenemos
$$xS_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = x + x^2 + ... + x^{n+1},$$
luego
$$(x-1)\,S_n = xS_n - S_n = x + x^2 + ... + x^{n+1} - (1 + x + ... + x^n) = x^{n+1} - 1.$$
de donde
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{si} \ \ x \neq 1, \\ S_n &= n+1 \quad \text{si} \ \ x = 1. \end{aligned}$$
Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ si y solo si $|x| < 1$, se sigue que
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x},$$
y en consecuencia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad$ si $\quad |x| < 1, \quad x \neq 0$. Si $|x| \geq 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ es divergente, pués la sucesión (S_n) es divergente y $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe.

3. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Esta serie se llama serie armónica. Para cada $n \in \mathbb{Z}^{+}$ se define la suma parcial $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Observe las siguientes sumas parciales:

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1+\frac{1}{2}, \\
S_{2^2} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{2}{2}, \\
S_{2^3} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{3}{2}, \\
S_{2^4} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{16} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} > 1+\frac{4}{2}, \\
&\vdots \\
S_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n} > 1+\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} \geq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right) = \infty$, que muestra que la serie armónica es divergente. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, o sea el término general de la serie es convergente pero la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Definición 2 *Sea* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie numérica.*

i. Se dice que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente si la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

ii. Se dice que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge condicionalmente si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge pero* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *diverge.*

1. De la definición de convergencia absoluta se deduce que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. En efecto, sean $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ y $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. Como

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \widetilde{S}_{n+1},$$

la sucesión $\left(\widetilde{S}_n\right)$ es creciente. Además, por hipótesis la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n$ existe y sea $\widetilde{S} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Así, $\left(\widetilde{S}_n\right)$ es creciente y acotada superiormente, y $\widetilde{S} = \lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} \widetilde{S}_n$. Puesto que

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \widetilde{S}_n \leq \widetilde{S} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{+},$$

luego $\operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} |S_n| \leq \widetilde{S}$, o sea $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \widetilde{S}$, es decir que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Ejemplos

1. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge condicionalmente. Más adelante, en las series de potencias se demuestra que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

2. La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge absolutamente. En efecto, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge al número $e \simeq$ 2,71828182... base de los logaritmos naturales. Luego $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge absolutamente pués para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene $\mid \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \mid \leq \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Además, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$.

De la definición de serie convergente, se sigue que si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y (S_n) denota la sucesión de sumas parciales de dicha serie, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ si y solo si se verifica la condición

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon.$$

Tomando en consideración que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n = 0, 1, \ldots$, y $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, entonces

$$S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Luego, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente si y solo si se verifica la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que } \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon.$$

Se denota con $\mathcal{S}_c$ al conjunto de todas las series convergentes. Sean $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \in \mathcal{S}_c$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define la adición de series convergentes y el producto de escalares por series convergentes como sigue:

Adición: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$,

Producto por escalares: $\lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$.

Se demuestra fácilmente las dos implicaciones siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \in \mathcal{S}_c \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \in \mathcal{S}_c,$$

y

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in S_c \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n \in S_c;$$

es decir que el conjunto $\mathcal{S}_c$ con las operaciones de adición y producto por escalares de series convergentes, es un espacio vectorial denominado espacio de series convergentes.

3.1.2. Criterios de convergencia.

Dada una serie numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, se debe determinar si esta es o no convergente. Para el efecto, es preciso familiarizarse con algumos resultados fundamentales que nos permitan decidir si la serie es convergente, divergente o simplemente con un determinado criterio no es posible decidir la convergencia o divergencia y que se requiere de un análisis más fino para deducir la convergencia o divergencia de una serie dada. En esta parte enunciamos sin demostración algunos criterios de convergencia más utilizados y se da un ejemplo en el que se aplique el teorema. Al final del capítulo se cita una amplia bibliografía en la que puede encontrarse las demostraciones de los resultados que damos a continuación (Calculus de Apostol, Volumen 1, Cálculo Avanzado de Fulks, Calculus de Spivak, y otros).

Teorema 1 *(criterio de Leibniz)*
Sea (a_n) *una sucesión numérica decreciente tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Entonces, la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *converge.*

Ejemplo

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3^n}$ es convergente, pués la sucesión (a_n) cuyo término general está definido como $a_n = \frac{1}{n!3^n}$ es decreciente y se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!3^n} = 0$. Por el criterio de Leibniz, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3^n}$ converge. Se muestra inmediatamente que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3^n}$ converge absolutamente y $e^{-\frac{1}{3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3^n}$.

Teorema 2 *(criterio de Cauchy)*
Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie numérica. Entonces,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ *tal que* $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ *con* $m > n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| < \varepsilon$.

Ejemplo

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente. En efecto, de la definición del factorial de k, esto es $k! = 1 \times 2 \times ... \times k$, se tiene

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \times 2 \times ... \times k} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times ... \times \frac{1}{k} < 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

de donde para m, $n \in \mathbb{Z}^+$ con $m < n$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k!} \right| &= \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{(k+n+1)-1}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \left(2 - 2 \times 2^{-m}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - 2^m\right) < \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Así, para $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, y en consecuencia $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k!} \right| < \varepsilon$ si $n > m > n_0$, y por el criterio de Cauchy, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge.

Nota**:** Más adelante se tratará la serie de potencias $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$. Para $x = 1$, se tiene $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$; para $x = -\frac{1}{3}$, se tiene $e^{-\frac{1}{3}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!3^k}$ que se indicó arriba.

Teorema 3 *(comparación por paso al límite)*
Sean $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos.*

i) Si $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, *entonces ambas series convergen o ambas series divergen.*

ii) Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *es convergente y* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, *entonces* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

iii) Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *es divergente y* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, *entonces* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *es divergente.*

Ejemplos

1. Estudiemos la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n!}$. Primeramente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Apliquemos el criterio de

comparación por paso al límite, ponemos $a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n!}$, $b_n = \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n!}}{\frac{1}{n!}} = e^{\frac{1}{n}} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 1,$$

luego, por la parte i) del teorema precedente, la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ implica la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n!}$. Así, resulta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n!}$ es convergente.

2. Las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergen. Ponemos $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por la parte iii) del teorema de conparación por paso al límite, la divergencia de la serie armónica implica la divergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Teorema 4 *(criterio de la integral)*
Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números positivos, donde (a_n) es decreciente. Sea f una función de $[1, \infty[$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, ...$ Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se define $I_n = \int_1^n f(x)\, dx$. Entonces, la sucesión (I_n) converge si y solo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o (I_n) diverge si y solo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo

Sea $p \in \mathbb{R}$ y consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Estudiemos la convergencia de esta serie. Para ello aplicamos el criterio de la integral. Definimos la función f como sigue: $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \geq 1$. Entonces, para $n = 1, 2, ...,$

$$I_n = \int_1^n f(x)\, dx = \int_1^n \frac{dx}{x^p}.$$

Para $p = 1$, se tiene

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(x)\ |_1^n = \ln(n) - \ln 1 = \ln(n).$$

Resulta $\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n) = \infty$, y por el criterio de la integral, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Supongamos $p \neq 1$. Entonces

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{-p+1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p}\left(n^{-p+1} - 1\right).$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-p+1} = 0 \Leftrightarrow p > 1$, se deduce

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \frac{1}{1-p} \lim_{n \to \infty}\left(n^{-p+1} - 1\right) = \frac{1}{p-1} \Leftrightarrow p > 1.$$

Conclusión**:** por el criterio de la integral, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge si y solo si $p \leq 1$.

Teorema 5 ***(criterio del cociente)***

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de números positivos y supongamos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Entonces*

i) Si $0 \leq L < 1$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

ii) Si $L = 1$, *el criterio no decide.*

iii) Si $L > 1$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Ejemplos

1. Sea $a > 1$. Estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{a^n}$. Apliquemos el criterio del cociente. Para el efecto, ponemos $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n n}{a^n}\right| \quad n \in \mathbb{Z}^+$. Luego

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{a^{n+1}} \times \frac{a^n}{(-1)^n n}\right| = \frac{n+1}{na} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a},$$

y como $a > 1$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{a} < 1.$$

Por el criterio del cociente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ converge. Mas aún, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{a^n}$ converge absolutamente.

2. Consideremos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$. Apliquemos el criterio del cociente. Sea $a_n = \frac{1}{\ln(n)} \quad n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, el criterio del cociente no decide. Sabemos que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Sea $b_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{Z}^+$. Apliquemos el criterio de comparación por paso al límite. Tenemos

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(n)}} = \frac{\ln(n)}{n} \qquad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Para calcular el límite apliquemos la regla de L'Hôpital a la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Se tiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Así, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ y la divergencia de la serie armónica implica la divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$.

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^3}$ con $\alpha > 1$ es divergente, pués si $a_n = \frac{\alpha^n}{n^3} \quad n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{\alpha^n} = \alpha\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^3 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \alpha,$$

luego $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha > 1$, y por el criterio del cociente, la serie diverge.

Teorema 6 *(criterio de la raíz)*
Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de números no negativos y supongamos que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = L$. *Entonces*

i) Si $0 \leq L < 1$, *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

ii) Si $L = 1$, *el criterio no decide.*

iii) Si $L > 1$, *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Ejemplos

1. Sea $x \in \left]-1,1\right[$. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ es convergente y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Verifiquemos la convergencia utilizando el criterio de la raíz. Sea $a_n = |x|^n \quad n \in \mathbb{Z}^+$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(|x|^n\right)^{\frac{1}{n}} = |x| < 1.$$
Así, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ es convergente cuando $|x| < 1$.

2. Consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$. Sea $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \quad n \in \mathbb{Z}^+$, por el criterio de la raíz, tenemos
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3n}}} = 1.$$
Este criterio no decide la convergencia o divergencia de la serie.
Notemos que $n^{\frac{1}{3n}} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{3n}\right)$ y en consecuencia
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(n)}{3n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} \ln(n)\right) = e^0 = 1.$$
Hemos utilizado el resultado siguiente: la función dada por $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$ es continua y (x_n) una sucesión real convergente. Entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.
Aplicando el criterio de la integral, resulta que la serie propuesta es divergente.

3.1.3. Cálculo aproximado de series numéricas.

Sean $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie absolutamente convergente de números reales, $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ y $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \quad n \geq 1$. Por definición de serie convergente, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|S - S_n| < \epsilon$, $\forall n \geq N$. Desde el punto de vista numérico es importante determinar el más pequeño entero positivo N tal que $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_k < \epsilon$, pués reduce el número de téminos a utilizar en el cálculo de la suma S_N que aproxima a S con la precisión fijada ϵ. Por otro lado, resulta difícil determinar dicho entero N. Sin embargo, para las series numéricas absolutamente convergentes resulta útil aplicar los criterios de convergencia (por ejemplo: de la integral, del cociente, de la raíz, de comparación, entre otros), que permiten determinar tal entero N.

Para fijar las ideas, sean $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie convergente de números positivos, (b_k) una sucesión real de números positivos tal que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = 1$ y supongamos que se verfica $\frac{a_k}{b_k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, lo que muestra que la sucesión del numerador converge a cero mucho más rápidamente que la del denominador. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_k}{b_k} < \epsilon \quad \forall k \geq N$. De esta desigualdad se sigue que $a_k < \epsilon b_k \quad \forall k \geq N$, luego

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \epsilon \sum_{k=N+1}^{\infty} b_n < \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_n = \epsilon.$$

Sea $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k$, entonces $| \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - S_N| =| \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k |< \epsilon$.

Según este criterio si seleccionamos una sucesión positiva (b_k) tal que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = 1$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 0$, resulta fácil hallar $N \in \mathbb{Z}^+$ que satisfaga la desigualdad $\dfrac{a_k}{b_k} < \epsilon \quad \forall k \geq N$. Elegimos tal N como el más pequeño entero positivo que verifique $\dfrac{a_N}{b_N} < \epsilon$. Note que N no es el óptimo, pués depende de la sucesión elegida (b_k). En el caso general, hallar el óptimo N:

$$Min\{N \in \mathbb{N} \,|\, \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \epsilon\}$$

resulta una tarea difícil.

Para una clase de series numéricas rápidamente convergentes se tendrá N pequeño, para las series numéricas que convergen muy lentamente, el entero positivo N será muy grande con lo que este procedimiento no es muy adecuado para esta clase de series numéricas, pués los errores de redondeo y de truncamiento afectarán seriamente en el resultado.

Para series numéricas rápidamente convergentes, se propone el siguiente algoritmo que permite determinar el más pequeño entero N que verifica la condición $\dfrac{a_k}{b_k} < \epsilon \quad \forall k \geq N$.

Algoritmo

Datos de entrada: $\epsilon > 0$, sucesiones (a_n), (b_n).

Datos de salida: N.

1. Hacer $k = 1$
2. Si $\dfrac{a_k}{b_k} < \epsilon$. Continuar en 4).
3. Si $\dfrac{a_k}{b_k} \geq \epsilon$, hacer $k = k + 1$. Continuar en 2).
4. Imprimir N.
5. Fin.

Determinado el número de términos de S_N, la etapa siguiente es la elaboración de un algoritmo para el cálculo de S_N de modo que se conserven las normas establecidas de condicionamiento y estabilidad numérica.

Ejemplos

1. La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 1$ es convergente, más aún, esta serie converge muy lentamente. Sea $\epsilon > 0$ y apliquemos el criterio de la integral:

$$\int_N^{\infty} \frac{dt}{t^p} = \frac{t^{1-p}}{1-p} \Big|_N^{\infty} = \frac{1}{(p-1)N^{p-1}} < \epsilon,$$

que implica $N > \left[\frac{1}{(p-1)\epsilon}\right]^{\frac{1}{p-1}}$, donde $[\cdot]$ denota la función mayor entero menor o igual que. Así por ejemplo, para $p = 2$ se tiene que $N > \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$. Note que

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{N}.$$

Elegido $N > \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, se define la suma $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ que aproxima a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ con una precisión ϵ. Para $\epsilon = 10^{-8}$ se tendrá $N > 10^8$ que es un número muy grande de términos y los errores de redondeo y de truncamiento influirán en el cálculo de S_N, lo que muestra las deficiencias del método. Utilizando las series de Fourier, se prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Consideremos la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!(2k+1)}$. Este es un ejemplo de una serie numérica rápidamente convergente. En efecto, apliquemos el criterio del cociente y pongamos $a_k = \frac{2^k}{k!(2k+1)}$, entonces

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2(2k+1)}{(k+1)(2k+3)} < \frac{2}{k+1} \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

La serie es convergente. Sea $\epsilon = 10^{-10}$ y $b_k = \frac{1}{2^k}$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$. Luego

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{4^k}{k!(2k+1)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

El más pequeño entero positivo N tal que $\frac{a_k}{b_k} < 10^{-10} \quad \forall k \geq N$ es $N = 23$. Por lo tanto $\sum_{k=24}^{\infty} \frac{2^k}{k!(2k+1)} < 10^{-10}$, con lo que $S_N = \sum_{k=0}^{23} \frac{2^k}{k!(2k+1)}$ aproxima a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!(2k+1)}$ con una precisión de 10^{-10}. La suma S_N se evalúa del modo siguiente:

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{7} + \cdots + \frac{2}{22}\left(\frac{1}{2\times 22+1} + \frac{2}{23\times(2\times 23+1)}\right)\right)\right)\right) \\ &= 2{,}3644538928\cdots, \end{aligned}$$

resultado en el que están incluidos los errores de redondeo y de truncamiento.

3.2. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme.

Iniciamos esta sección con la convergencia de sucesiones de funciones, tratamos básicamente la convergencia puntual y la convergencia uniforme e introducimos los resultados importantes (sin demostración) sobre la convergencia uniforme y la continuidad, integrabilidad y derivabilidad que serán aplicados en el estudio de las series de funciones, particularmente en las series de potencias y las series de Fourier. El lector que está familiarizado con las sucesiones y series de funciones puede pasar inmediatamente a la aproximación numérica de las series de funciones, aquel que no está familiarizado tendrá la ocasión de tratar este tema en forma resumida. Al final del capítulo se sugiere una bibliografía especializada en estos tópicos.

3.2.1. Sucesiones de funciones

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se denota con $\mathcal{F}(A)$ el espacio vectorial de funciones reales definidas en A.

Definición 3 *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $I \subset \mathbb{N}$ con $I \neq \emptyset$. A toda función φ de I en $\mathcal{F}(A)$ se le llama sucesión de funciones.*

Notación**:** si φ es una sucesión de funciones, se tiene $\varphi : \begin{cases} I \to \mathcal{F}(A) \\ n \to \varphi(n) = f_n, \end{cases}$ donde para cada $n \in I$, f_n es una función real definida en A. A la sucesión φ la notaremos (f_n) y diremos sucesión de funciones definida en el conjunto A. El conjunto I se llama conjunto de índices, $f_n(x)$ con $x \in A$ se llama término general de la sucesión (f_n).

En el estudio de las sucesiones de funciones tienen especial interés las sucesiones convergentes y particularmente la convergencia uniforme y sus propiedades.

Convergencia puntual.

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales definidas en A. Para cada $x \in A$, $(f_n(x))$ es una sucesión numérica real. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, esto es, existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, diremos que $(f_n(x))$ converge a $f(x)$. A este tipo de convergencia la llamaremos convergencia puntual.

Para los puntos $x \in A$ en los que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, se define una función real f mediante la relación $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Se tiene $\mathrm{Dom}(f) \subset A$. Escribiremos $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ con $x \in A$. En lo que sigue, supondremos que $\mathrm{Dom}(f) = A$. Tenemos la siguiente definición de convergencia puntual.

Definición 4 *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales definidas en A, $f \in \mathcal{F}(A)$. Se dice que (f_n) converge puntualmente a f si y solo si se cumple la siguiente condición:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \quad \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Si la sucesión de funciones (f_n) converge a la función f en el conjunto A, escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ o de forma equivalente $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in A$.

Si para algún $x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ no existe, diremos que la sucesión $(f_n(x))$ diverge y que la sucesión (f_n) no es convergente en el conjunto A.

En el estudio de sucesiones de funciones, la primera tarea es el análisis de la convergencia puntual. Más adelante veremos la convergencia uniforme y daremos más atención a este tipo de convergencia.

En la convergencia puntual, el elemento $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ depende de ε, y de cada punto $x \in A$. En este tipo de convergencia no es posible hallar un $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ dependiente únicamente de $\varepsilon > 0$.

Convergencia uniforme.

Definición 5 *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales definidas en A, $f \in \mathcal{F}(A)$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a f si y solo si se cumple la siguiente condición:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente o también $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente.

Es preciso establecer la diferencia que existe entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme. En la convergencia uniforme, el elemento n_0 de $\mathbb{Z}^+$ depende de ε, en general del conjunto A y no de $x \in A$, el número $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ es global para todo $x \in A$, mientras que en la convergencia puntual $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ depende de ε y de cada $x \in A$, y, no es posible hallar un $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ global para todos los elementos del conjunto A. La convergencia uniforme implica la convergencia puntual, pero el recíproco, en general, no es cierto.

Teorema 7 *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en el conjunto A que converge puntualmente a la función f definida en A. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se define*

$$M_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Entonces, (f_n) converge uniformemente a f si y solo si (M_n) converge a 0.

Del criterio establecido en el teorema precedente, se sigue que (f_n) no converge uniformemente a f si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$.

En el siguiente teorema se establece el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.

Teorema 8 *Sean $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, (f_n) una sucesión de funciones definidas en A. Enconces (f_n) converge uniformemente en A a alguna función f si y solo si para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall x \in A$*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{si } m,n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{con } m,n \geq n_0.$$

Teorema 9 *Sean $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, (f_n) y (g_n) sucesiones de funciones reales definidas en A, $f,g \in \mathcal{F}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ uniformemente, entonces*

i) $(f_n + g_n)$ converge uniformemente a $f+g$.

ii) (λf_n) converge uniformement a λf.

iii) $(| f_n |)$ converge uniformemente a $| f |$.

iv) Si existen $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ tales que $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} \sup\limits_{x\in\mathbb{A}} | f_n(x) | \leq M_1$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} \sup\limits_{x\in\mathbb{A}} | g_n(x) | \leq M_2$, entonces $(f_n g_n)$ converge uniformement a fg.

v) Si existe $M > 0$ tal que $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} \inf\limits_{x\in\mathbb{A}} | f_n(x) | \geq M$ y $f \neq 0$, entonces $(\frac{1}{f_n})$ converge uniformemente a $\frac{1}{f}$.

Convergencia uniforme y continuidad.

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, (f_n) una sucesión de funciones reales definidas en A que converge a una función f definida en A, esto es $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in A$. Adicionalmente, suponemos que cada función f_n es continua en todo punto $x \in A$, la pregunta que surge es: ¿la función límite f hereda la continuidad de la sucesión (f_n)?

Sea $x, x_0 \in A$. Si fuese f continua, se tendría $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, que en términos del límite de la sucesión de funciones (f_n) la igualdad precedente se expresaría como

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Lastimosamente esta igualdad no siempre se cumple. Para responder a la pregunta, examinemos la sucesión de funciones (f_n) definida como $\quad f_n(x) = \exp(-nx^2) \quad x \in \mathbb{R}, \ n = 1,2,\ldots$.

Para $x = 0$, $f_n(0) = 1$ consecuentemente $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$, y para $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 0$.
La función límite f está definida como $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$. Esta función no es continua en $x = 0$.

Cada función f_n es continua en todo $\mathbb{R}$. Resulta

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} e^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

mientras que si $x \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Claramente $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{n\to 0} f_n(x) \neq \lim\limits_{n\to 0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Este y otros ejemplos muestran que si la sucesión de funciones continuas (f_n) converge puntualmente a una función f, en general, f no hereda la continuidad de cada función f_n. En el siguiente teorema se da una condición para que la función límite f sea continua.

Teorema 10 *Sean $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ y (f_n) una sucesión de funciones continuas en todo punto $x \in A$. Si (f_n) converge uniformemente a una función límite f definida en A, entonces f es continua en todo punto $x \in A$.*

Este resultado se sintetiza en el siguiente esquema:

$$\left\{\begin{array}{l} f_n \text{ continua en } A,\ n = 1, 2, \ldots, \\ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{uniformemente,} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f \text{ continua en A,} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0). \end{array}\right.$$

Convergencia uniforme e integración.

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Se considera una sucesión de funciones reales (f_n) definida en $[a, b]$ que converge a una función f definida en el mismo intervalo $[a, b]$. Supongamos que se tiene la convergencia puntual, esto es

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad x \in [a, b].$$

Adicionalmente, supongamos que cada función f_n es integrable en $[a, b]$, ¿es la función límite f integrable en $[a, b]$? ¿se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$? En definitiva, se desea saber las condiciones que se deben verificar para que se cumpla la igualdad siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx,$$

es decir que podamos intercambiar el símbolo de integral con el del límite, o también que una sucesión convergente se pueda integrar término a término.

La convergencia de (f_n) a f así como la integrabilidad de cada función f_n no garantiza, en general, que se verifique la igualdad anterior, como se puede comprobar con el siguiente ejemplo.

Sea (f_n) la sucesión de funciones definida como $f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} n, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0, & \text{si } x \in [0, 2] \setminus \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \end{array}\right.$ $n = 1, 2, \ldots$.Cada función f_n es integrable en $[0, 2]$ (f_n es una función escalonada), y,

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f_n(x)\,dx + \int_{\frac{2}{n}}^2 f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n dx = 1.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$. Por otro lado, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x \in [0, 2]$. Se pone $f(x) = 0 \quad x \in [0, 2]$, y se tiene

$$\int_0^2 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^2 f(x)\,dx = 0.$$

Tenemos para este ejemplo se tiene $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx \neq \int_0^2 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$.

Antes de enunciar el teorema relativo a la convergencia uniforme y la integración revisamos las condiciones que verifican las funciones integrables en $[a, b]$.

Sea u una función acotada en $[a, b]$. Se dice que u es integrable (Riemann integrable) en $[a, b]$ si y solo si

$$\underline{I}(u) = \sup_{\varphi \leq u} \int_a^b \varphi(x)\,dx = \inf_{u \leq \theta} \int_a^b \theta(x)\,dx = \overline{I}(u),$$

donde φ y θ son funciones escalonadas en $[a,b]$ tales que $\varphi \leq u \leq \theta$.

Los números reales $\underline{I}(u)$ y $\overline{I}(u)$ se llaman integrales inferior y superior, respectivamente. Se verifica, además que para toda función acotada u definida en $[a,b]$,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \underline{I}(u) \leq \overline{I}(u) \leq \int_a^b \theta(x)\,dx,$$

donde φ, θ son funciones escalonadas definidas en $[a,b]$ tales que $\varphi \leq u \leq \theta$.

Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) u es integrable en $[a,b]$.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existen dos funciones escalonadas θ, φ definidas en $[a,b]$ tales que $\varphi \leq u \leq \theta$ y $\int_a^b (\theta - \varphi)\,dx < \varepsilon$.

Teorema 11 *Sea (f_n) una sucesión real de funciones integrables en $[a,b]$. Supongamos que (f_n) converge uniformemente a una función f definida en $[a,b]$. Entonces,*

i) f es integrable en $[a,b]$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$.

El resultado del teorema se sintetiza en el siguiente esquema:

$$\left\{\begin{array}{l} f_n \text{ integrable en } [a,b],\ n = 1,2,\ldots, \\ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{uniformemente,} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ integrable en } [a,b], \\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \end{array}\right.$$

En este esquema puede verse que la convergencia uniforme es una condición suficiente para que f sea integrable en $[a,b]$.

Teorema 12 *Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que converge uniformemente a f. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Convergencia uniforme y derivación.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, A abierto $A \neq \emptyset$, (f_n) una sucesión de funciones reales definidas en A que converge puntualmente a una función f definida en A, esto es $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in A$. Supongamos que cada función es derivable en todo punto $x \in A$, ¿la función límite f es derivable en $x \in A$? De ser así, tendríamos

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x) \qquad x \in A,$$

o sea

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x) \qquad x \in A,$$

es decir que la sucesión (f_n) puede derivarse término a término. Lamentablemente esta igualdad no siempre se cumple como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Sea (f_n) la sucesión de funciones reales definidas como $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}(nx) \quad x \in \mathbb{R},\ n = 1,2,\ldots$.Cada función f_n es derivable y $\dfrac{df_n}{dx}(x) = \sqrt{n}\cos(nx) \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1,2,\ldots$. Para $x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$f_n(2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}(2nk\pi) = 0, \qquad \frac{df_n}{dx}(2k\pi) = \sqrt{n}\cos(2kn\pi) = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\operatorname{sen}(nx)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, se pone $f(x)=0 \quad x\in\mathbb{R}$ y se tiene que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente. Además $\frac{df}{dx}(x)=0$ y en particular $\frac{df}{dx}(2k\pi)=0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$. Resulta, para todo $k\in\mathbb{Z}$,

$$0=\frac{df}{dx}(2k\pi)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(2k\pi)\right)\neq \lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(2k\pi)=\infty.$$

Es este ejemplo se muestra que inclusive la convergencia uniforme de la sucesión (f_n) no basta, debemos tener algo más sobre la sucesión $\left(\frac{df_n}{dx}\right)$. En el siguiente teorema se proponen las condiciones bajo las cuales se puede derivar término a término.

Teorema 13 *Sean $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ un conjunto abierto, (f_n) una sucesión real de funciones derivables en cada punto $x\in A$ y tales que $\left|\frac{df_n}{dx}(x)\right|<\infty$, $\quad n=1,2,\ldots$. Supongamos que $(f_n(x_0))$ converge para algún punto $x_0\in A$ y que la sucesión (f_n') converge uniformemente a una función g. Entonces,*

i) Existe una función real f definida en A tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente.

ii) Para cada $x\in A$, $\frac{df}{dx}(x)=g(x)$.

Este resultado se sintetiza en el siguiente esquema:

$$\begin{cases} \left|\frac{df_n}{dx}(x)\right|<\infty \quad \forall x\in A,\ n=1,2,\ldots, \\ x_0\in A, \quad (f_n(x_0)) \quad \text{convergente}, \\ \frac{df_n}{dx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{uniformemente}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{uniformemente}, \\ \frac{df}{dx}(x)=g(x) \quad \forall x\in A. \end{cases}$$

3.2.2. Series de funciones.

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$. La suma $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ se llama serie de funciones. Para $n\in\mathbb{N}$, se define $\quad S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k \quad$,y, $\quad S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad x\in A$. La función f_n se llama término general de la serie y S_n se denomina suma parcial de la misma. Además, S_n es una función definida en el conjunto A, y (S_n) es una sucesión de funciones definida sobre A. Para cada $x\in A$, $(S_n(x))$ es una sucesión numérica. Si $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ existe, denotamos al mismo con $S(x)$, esto es, $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x) \quad x\in A$, y decimos la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ tiene como suma $S(x)$. Escribimos $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)=S(x) \quad x\in A$. Se define una función real S en todos los puntos $x\in A$ en los que $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ existe mediante la relación:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x\in A,$$

y diremos que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge puntualmente a S. Se tiene $\operatorname{Dom}(S)\subset A$.

Note que el estudio de la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ se le ha conducido al estudio de la sucesión de funciones (S_n). La primera tarea es analizar su convergencia puntual, a continuación se debe estudiar la convergencia uniforme así como sus consecuencias, esto es, la convergencia uniforme y continuidad, convergencia uniforme e integración, convergencia uniforme y derivabilidad de dicha serie de funciones.

La convergencia uniforme de la serie y la continuidad tiene que ver con la cuestión relativa al intercambio entre el símbolo de sumatorio con el de límite:

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to a} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a) \quad a \in A,$$

resultado que.no siempre es verdadero. La convergencia uniforme de la serie y la integración está relacionada con el intercambio entre el símbolo de sumatorio con el de integración:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx \quad a, b \in A \text{ tales que } a < b,$$

intercambio que no siempre es posible. La convergencia uniforme de la serie y la derivabilidad está relacionada, tal como en los casos anteriores, con el intercambio del símbolo de derivación con el de sumatorio:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{df_k}{dx}(x) \quad x \in A,$$

este resultado no siempre es verdadero. ¿Cuáles son las condiciones suplementarias a la convergencia uniforme que debemos imponer al término general f_k de la serie de funciones para que cada una de las cuestiones citadas siempre sea posible? Estas cuestiones las abordaremos en esta sección.

A continuación proponemos algunos resultados de convergencia puntual y uniforme de series de funciones.

Teorema 14 *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones definidas en A. Entonces*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge si y solo si se satisface la siguiente condición:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A, \quad \exists p \in \mathbb{Z}^+ \ \text{tal que}\ \forall m \in \mathbb{Z}^+, \qquad |f_{p+1}(x) + \cdots + f_{p+m}(x)| < \varepsilon.$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente si y solo si satisface la siguiente condición:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ p \in \mathbb{Z}^+ \ \text{tal que}\ \forall x \in A,\ \forall m \in \mathbb{Z}^+, \qquad |f_{p+1}(x) + \cdots + f_{p+m}(x)| < \varepsilon.$$

En el siguiente teorema se propone la conocida prueba de Weierstrass de la convergencia uniforme de series de funciones.

Teorema 15 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ y (u_n) una sucesión de funciones reales definidas en A. Supongamos que existe $M_n > 0$ tal que $|u_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A,\ n = 1, 2, \ldots$. Si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en A.*

Ejemplos

1. Consideremos la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \quad x \in \mathbb{R}$. Mostremos que esta serie es convergente. Para ello apliquemos el criterio de Weierstrass. Tenemos

$$\left| \frac{1}{(k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{(k+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots$$

Aplicando el criterio de la integral se prueba que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ es convergente, por la prueba de Weierstrass se sigue que las serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$ converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$, lo que define una función S en todo $\mathbb{R}$ dada como

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. La serie geométrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ converge si y solo si $|x| < 1$, en cuyo caso escribimos $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1.$

   Sea $0 < a < 1$. Para todo $x \in [-a,a] \subset \left]-1,1\right[$ se tiene $\left|x^k\right| \leq a^k \quad k = 0,1,\ldots,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, por la prueba de Weierstrass resulta que la sucesión (S_n) definida como $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ converge uniformemente a

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad x \in [-a,a].$$

   La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k \quad x \in \left]-1,1\right[$ no converge uniformemente, únicamente se tiene convergencia puntual; esto es, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1.$

Teorema 16 *Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.*

i) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge, y, $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

ii) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge uniformemente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente, y, $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Ejemplo

Consideremos la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+5)!} \quad x \in \mathbb{R}$. Probemos que converge uniformemente sobre cada intervalo $[-r,r]$ con $r > 0$. En efecto, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+5)!}\right| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+5)!}$ converge, pués por el criterio del cociente, para $x \neq 0$ se tiene

$$\frac{|x|^{2(k+1)}}{(2(k+1)+5)!} \times \frac{(2k+5)!}{|x|^{2k}} = \frac{x^2}{(2k+6)(2k+7)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sea $r > 0$. Entonces $\frac{x^{2k}}{(2k+5)!} \leq \frac{r^{2k}}{(2k+5)!} \quad \forall x \in [-r,r],\ k = 0,1,\ldots$.El criterio del cociente muestra que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(2k+5)!}$ converge. Por la prueba de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+5)!}$ converge. Mostremos que la convergencia es uniforme. Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy,

$$\exists p \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } \forall m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{p+m} \frac{r^{2k}}{(2k+5)!} < \varepsilon,$$

de donde

$$\left|\sum_{k=p+1}^{p+m} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+5)!}\right| \leq \sum_{k=p+1}^{p+m} \frac{|x|^{2k}}{(2k+5)!} \leq \sum_{k=p+1}^{p+m} \frac{r^{2k}}{(2k+5)!} < \varepsilon \quad \forall x \in [-r,r]$$

que prueba la convergencia uniforme de la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+5)!} \quad \forall x \in [-r,r]$.

Escribamos estos resultados en términos de sucesiones. Denotamos con (u_n), (v_n) las sucesiones definidas por

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+5)!}, \quad v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k+5)!} \quad x \in [-r,r],\ n = 1,2,\ldots.$$

Se tiene $|u_n(x)| \leq v_n(x) \quad x \in [-r,r],\ n = 1,2,\ldots$La convergencia de la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k+5)!} \quad x \in \mathbb{R}$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$ existe para todo $x \in [-r,r]$ y por el criterio de Cauchy,

$$\exists p \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } \forall m,n \in \mathbb{Z}^+ \text{ con } \quad m,n \geq p \Rightarrow |v_m(x) - v_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-r,r].$$

Para $m,n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n > m \geq p$, se tiene $v_n(x) - v_m(x) = \sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k+5)!} < \varepsilon \quad \forall x \in [-r,r]$, y de la desigualdad $|u_n(x) - u_m(x)| \leq v_n(x) - v_m(x) < \varepsilon$ si $n > m \geq p$, se deduce $\left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+5)!} \right| < \varepsilon$ si $n > m \geq p,\ x \in [-r,r]$, que son los resultados que hemos obtenido anteriormente.

Tal como en el estudio de las sucesiones de funciones nos interesamos en los problemas de la convergencia uniforme y la continuidad, derivación e integración, esto es, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ es una serie de funciones definidas en A que converge uniformemente a una función suma S, se tiene $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in A$. Los resultados precedentes obtenidos en esta sección y los de la sección anterior son aplicados a la sucesión de sumas parciales (S_n) con $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \quad n = 1,2,\cdots$, y se obtienen los siguientes relativos a la continuidad, integrabilidad y derivabilidad. Así, si f_n es continua en $x_0 \in A$, $n = 1,2,\ldots$, se tiene

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = S(x_0).$$

Si f_n es integrable en $A = [a,b]$, $n = 1,2,\ldots$, se tiene

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Si A es abierto, $x_0 \in A$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge, (f_n) es derivable en todo punto de A, y, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{df_n}{dx}$ converge uniformemente a una función g, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, y, $\dfrac{dS}{dx}(x) = g(x) \quad x \in A$, es decir, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x) \quad x \in A.$$

Teorema 17 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, (f_n) una sucesión de funciones continuas en todo punto $x \in A$. Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a una función S definida en A, entonces S es continua en A, y*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = S(x_0).$$

Teorema 18 *Sean* (f_n) *una sucesión de funciones integrables en* $[a,b]$, (S_n) *la sucesión de sumas parciales de la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, *esto es,* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \quad n = 1, 2, \ldots$. *Si* (S_n) *converge uniformemente en* $[a,b]$ *a* $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$, *entonces* S *es integrable, y se tiene*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Para la convergencia uniforme y la derivación de series de funciones consideramos el siguiente ejemplo debido a Weierstrass. La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n} \quad x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Además cada función $u_n(x) = \frac{1}{2^n}\cos(3^n x) \quad n = 1, 2, \ldots,$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto continua en todo $\mathbb{R}$. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Resulta que f es continua en todo $\mathbb{R}$. Por otro lado,

$$\frac{du_n}{dx}(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \operatorname{sen}(3^n x) \quad n = 1, 2, \ldots, \text{ y, } \quad \left|\frac{du_n}{dx}(x)\right| = \left(\frac{3}{2}\right)^n |\operatorname{sen}(3^n x)| \le \left(\frac{3}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

No se cumple con la hipótesis de la prueba deWeierstrass. Si $x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\frac{du_n}{dx}(2k\pi) = \operatorname{sen}(3^n \times 2k\pi) = 0 \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y, $\dfrac{df}{dx}(2k\pi) = 0$. Para $x \neq 2k\pi$, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \operatorname{sen}(3^n x)$ diverge, luego $\dfrac{df}{dx}(x)$ no existe.

3.3. Series de potencias.

Las series de potencias son series de funciones cuyas sumas parciales $S_n(x) \quad x \in \mathbb{R}$ y $n = 1, 2, \cdots$, son polinomios de grado n, y estos constituyen las funciones con las que se pueden calcularse valores numéricos en forma relativamente simple. Iniciamos esta sección con la convergencia puntual de las series de potencias que se convierte en la determinación del radio de convergencia. A continuación se trata las propiedades de las funciones representadas como series de potencias y relacionamos con la convergencia uniforme y la continuidad, integrabilidad y derivabilidad. Concluimos esta sección con la revisión de algunos resultados de una parte importante de las series de potencias que lo constituyen las series de Taylor.

3.3.1. Series de potencias.

Las series de potencias son series de la forma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, donde (a_k) es una sucesión numérica real, x,$x_0 \in \mathbb{R}$ con x_0 fijo. El cambio de variable $t = x - x_0$, conduce a la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, por lo que basta estudiar las series de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Además, toda serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge por lo menos para $x = 0$.

Comenzamos con la convergencia puntual, la convergencia absoluta y la existencia del radio de convergencia de las series de potencias.

Teorema 19 *Sean* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *una serie de potencias,* $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ *con* $\beta \neq 0,\ \lambda \neq 0.$

i) Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta^k$ *converge, entonces* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *converge absolutamente sobre* $]-|\beta|, |\beta|[$.

ii) Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$ *diverge, entonces* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *diverge para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x| > |\lambda|$.

Radio de convergencia

A continuación se define el radio de convergencia R que es muy importante en el análisis de la convergencia de las series de potencias.

Definición 6 *Sea* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *una serie de potencias. Se define el conjunto* A *como sigue:*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, |x|^k \ \text{converge} \right\}.$$

Se llama radio de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *a un número real* $R \geq 0$ *o* $R = \infty$ *que se define como sigue:*

i) Si $A = \{0\}, \quad R = 0.$

ii) Si $A = \mathbb{R}, \quad R = \infty.$

iii) Si $A \neq \{0\}$ *y* $A \neq \mathbb{R}, \quad R = \operatorname{Sup}_{x \in A} |x| > 0.$ *El intervalo* $]-R, R[$ *se llama intervalo de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Teorema 20 *Sean* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *una serie de potencias y* $R > 0$ *o* $R = \infty$.

i) Si $R = \infty$*, la serie de potencias converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.

ii) Si $R > 0$*, la serie de potencias converge absolutamente sobre* $]-R, R[$ *y diverge para* $x \in \mathbb{R}$ *con* $|x| > R$.

En la figura siguiente se ilustra el intervalo de convergencia $]-R, R[$ cuando $0 < R < \infty$, de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad x \in]-R, R[$.

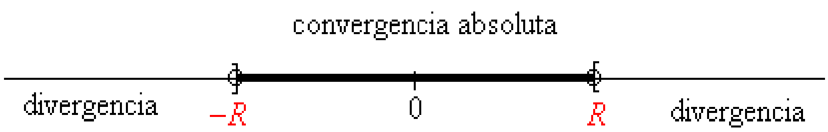

Figura 29

Cabe mencionar que para $x = -R$ o $x = R$, eventualmente se puede tener convergencia absoluta, convergencia condicional, o simplemente la serie puede ser divergente. Más adelante se exhibirá un caso concreto de esta situación.

Para la determinación del radio de convergencia se aplican usualmente los clásicos criterios del cociente y la raíz Consideremos la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y supongamos que $L = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Para $x \neq 0$, apliquemos el criterio del cociente. Tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |x| = L\,|x|\,.$$

El radio de convergencia R se elige como sigue: $\begin{cases} i) \text{ si } \; L = 0, \; R = \infty, \\ ii) \text{ si } \; L > 0, \; R = \dfrac{1}{L}, \\ iii) \text{ si } \; L = \infty, \; R = 0. \end{cases}$

Supongamos $L = \lim\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$. Apliquemos el criterio de la raíz:

$$\lim_{k\to\infty} \left(|a_k|\,|x|^k\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} |x|\,|a_k|^{\frac{1}{k}} = |x|\,L.$$

El radio de convergencia R se elige en forma similar al caso precedente: $\begin{cases} i) \text{ si } \; L = 0, \; R = \infty, \\ ii) \text{ si } L > 0, \; R = \dfrac{1}{L}, \\ iii) \text{ si } \; L = \infty, \; R = 0. \end{cases}$

Ejemplos

1. Consideremos la serie geométrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Se demostró anteriormente que la serie converge si y solo si $|x| < 1$. En tal caso $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$. Es claro que el radio de convergencia es $R = 1$. Los criterios del cociente y de la raíz confirman que el radio de convergencia es $R = 1$.

2. Más adelante se prueba que $\arctan(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, cuyo intervalo de convergencia es $]-1, 1[$. En este ejemplo, para $x = 1$, se obtiene el siguiente resultado: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, que muestra que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge condiciolnalmente a $\dfrac{\pi}{4}$.

3. La serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{k! 2^k}$ tiene como radio de convergencia $R = \infty$. En efecto, por el criterio del cociente se tiene

$$L_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)! 2^{k+1}} \times \left(k! 2^k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\,(k+1)} = 0,$$

   luego $R = \infty$. He aquí algunas series numéricas absolutamente convergentes: para $x = 3$ se tiene $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 3^{2k}}{k! 2^k} = e^{-4{,}5}$, para $x = \sqrt{5}$ se obtiene la serie numérica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!} \left(\dfrac{5}{2}\right)^k = e^{-2{,}5}$, para $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ se tiene $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k! 4^k} = e^{-0{,}25}$. Se tiene $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{k! 2^k} = \exp(-\dfrac{x^2}{2}) \quad x \in \mathbb{R}$.

4. La serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} x^{k+2}$ tiene como radio de convergencia $R = 1$, pués

$$L_2 = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{k}}} = 1,$$

   de donde $R = \dfrac{1}{L_2} = 1$. Observe que para $x = 1$ se tiene la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$ que converge absolutamente,y para $x = -1$ la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ también converge absolutamente.

Propiedades de las series de potencias.

Ahora nos interesamos en los problemas de la convergencia uniforme, la continuidad, la derivabilidad e integrabilidad de las funciones que se representan como series de potencias. Más precisamente, consideremos la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y supongamos que el radio de convergencia es $R > 0$ o $R = \infty$.

Consideramos en caso $R > 0$. La serie converge sobre el intervalo $]-R, R[$, por lo tanto define una función f de $]-R, R[$ en $\mathbb{R}$ dada por $\quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad x \in]-R, R[$. Analicemos la convergencia uniforme de la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sobre $]-R, R[$. Se define $\quad S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \quad x \in]-R, R[\,,\ n = 1, 2, \ldots$,y sea $0 < \lambda < R$. Apliquemos los resultados obtenidos anteriormente sobre la convergencia uniforme, continuidad, integrabilidad y derivabilidad de sucesiones de funciones reales.

Primeramente, $\lim\limits_{k\to\infty} S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) \quad x \in]-R, R[$, y como $R > 0$, se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 0$, y por la definición del radio de convergencia se tiene $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}$, de modo que $\lambda \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\lambda}{R} < 1$. Cada función $S_n,\ n = 1, 2, \ldots$, es continua, derivable e integrable sobre $[-\lambda, \lambda]$. Seguidamente, aplicamos la prueba de Weierstrass de la convergencia uniforme. Para $x \in [-\lambda, \lambda]$, se tiene $\left|a_k x^k\right| \le |a_k|\,\lambda^k = M_k \quad k = 1, 2, \ldots$.La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\,\lambda^k$ converge, pués por el criterio de cociente se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}\lambda^{k+1}}{a_k\lambda^k}\right| = \lambda \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\lambda}{R} < 1.$$

La prueba de Weierstrass muestra que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge uniformemente sobre $[-\lambda, \lambda]$. En consecuencia

$$a_k = \operatorname*{Sup}_{x\in[-\lambda,\lambda]} |S_n(x) - f(x)| = \operatorname*{Sup}_{x\in[-\lambda,\lambda]} \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right| \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir, (S_n) converge uniformemente a f sobre $[-\lambda, \lambda]$. Además, f es continua y por lo tanto integrable en $[-\lambda, \lambda]$. Resulta, para $x_0 \in [-\lambda, \lambda]$,

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a \lim_{x\to x_0 k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k.$$

Para todo $t \in [-\lambda, \lambda]$,

$$\begin{aligned}\int_{-\lambda}^{t} f(x)\,dx &= \int_{-\lambda}^{t} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-\lambda}^{t} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\left(t^{k+1} - (-\lambda)^{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k+1} \lambda^{k+1},\end{aligned}$$

ya que las series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}$ y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k+1} \lambda^{k+1}$ son convergentes. Así, por el criterio del cociente, para todo $t \in [-\lambda, \lambda]$, $t \neq 0$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{a_{k+1}}{k+2} t^{k+2}}{\frac{a_k}{k+1} t^{k+1}}\right| = |t| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)}{(k+2)}\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |t| \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k+2}\right) \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |t| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le \lambda\frac{1}{R} < 1,$$

que muestra que la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}$ converge sobre $[-\lambda, \lambda]$. En consecuencia

$$\int_{-\lambda}^{t} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k+1} \lambda^{k+1} \quad t \in [-\lambda, \lambda],$$

está bien definida.

Veamos la derivabilidad de f. Tenemos

$$\frac{dS_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad x \in [-\lambda, \lambda].$$

Verifiquemos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge uniformemente sobre $[-\lambda, \lambda]$. Primeramente verifiquemos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge sobre $[-\lambda, \lambda]$. En efecto, por el criterio del cociente, se tiene para $x \in [-\lambda, \lambda]$, $x \neq 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1) a_{k+1} x^k}{k a_k x^{k-1}} \right| = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{k} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \frac{\lambda}{R} < 1,$$

que prueba la convergencia de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad x \in [-\lambda, \lambda]$. A continuación verificamos que la convergencia es uniforme. Tenemos

$$\left| k a_k x^{k-1} \right| = k |a_k| |x|^{k-1} \leq k |a_k| \lambda^{k-1} \quad x \in [-\lambda, \lambda], \quad k = 1, 2, \ldots$$

y la serie numérica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k |a_k| \lambda^{k-1}$ converge. Por la prueba de Weierstrass se concluye que la serie de potencias $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge uniformemente sobre $[-\lambda, \lambda]$. Adicionalmente $S_n(0) = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$. Por el teorema de la convergencia uniforme y la derivación se deduce: $\frac{df}{dx}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad x \in [-\lambda, \lambda]$.

Ejemplo

Si $|x| < 1$, se tiene $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. El radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ es $R = 1$. Si remplazamos x por $-x$ en la serie geométrica, obtenemos $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ cuyo radio de convergencia es también $R = 1$, o sea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ si $|x| < 1$. Con este ejemplo construimos algunas funciones que se dan a continuación.

1. Para $0 < a < 1$, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k$ converge y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k = \dfrac{1}{1+a}$, por la prueba de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ con $|x| \leq a$, converge uniformemente. Aplicando el teorema de convergencia uniforme e integración, deducimos el resultado siguiente:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad |x| < 1,$$

cuyo radio de convergencia es $R = 1$. Además, para $x = 1$ se obtiene la serie numérica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ la misma que converge condicionalmente a $\ln(2)$.

2. Si en el resultado siguiente $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ se remplaza x por x^2, obtenemos la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$, y nuevamente, aplicamos el teorema de la convergencia uniforme y la integración sobre el intervalo $[0,x]\subset]-1,1[$ si $x\geq 0$, y, $[x,0]\subset]-1,1[$ si $x\leq 0$. Obtenemos

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1},$$

resultado que es válido para $|x|<1$, y, para $x=1$, se obtiene el siguiente resultado: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Por otro lado, del teorema de la convergencia uniforme y la integración aplicado a la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ en un intervalo $[-a,a]\subset]-1,1[$, obtenemos

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-x} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \text{si} \quad |x|<1.$$

Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

o sea $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ para $|x|<1$.

4. Puesto que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\forall x\in]-1,1[$, y por otro lado $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$. Como $\sum_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{1}{1-x}$ para $x\in]-1,1[$, por el teorema de convergencia uniforme y derivación, tenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} \text{ para } \quad |x|<1,$$

luego, $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad |x|<1$.

5. Procediendo en forma similar a la del ejemplo precedente, la función definida como $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ es válida para $|x|<1$. Derivando miembro a miembro, se obtiene

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2kx^{2k-1}.$$

Así, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2kx^{2k-1} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ para $|x|<1$.

Consideremos el caso $R=\infty$. La serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ converge en todo $\mathbb{R}$ y se define una función g dada por $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ $\quad x\in\mathbb{R}$. Nuevamente la sucesión de funciones (S_n) definida como $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ $\quad x\in\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$, es continua, derivable e integrable sobre todo intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Analicemos la convergencia uniforme de (S_n) en $[0,\lambda]$ con $\lambda>0$. Como $R=\infty$, se tiene

$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$ y en consecuencia, $\left|a_k x^k\right| \leq |a_k|\,\lambda^k \quad k = 1,2,\ldots,\ x \in [0,\lambda]$, y la serie numérica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\,\lambda^k$ converge, pués

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}\lambda^{k+1}}{a_k\lambda^k}\right| = \lambda\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0.$$

Por la prueba de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge uniformemente sobre $|0,\lambda|$. Luego g es continua, derivable e integrable, y se tienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= \lim_{x\to x_0} g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \quad \text{para } x_0 \in [0,\lambda],\\
\int_0^t g(x)\,dx &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} \quad \text{para } t \in [0,\lambda],\\
\frac{dg}{dx}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad x \in [0,\lambda].
\end{aligned}$$

La convergencia uniforme de (S_n) sobre $[a,b]$ se deduce inmediatamente de la convergencia uniforme sobre $[0,\lambda]$ con $\lambda = Max\{|a|,|b|\}$.

Ejemplo

Considérese la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!(k+1)^2} x^k \quad x \in \mathbb{R}$. Determinemos el radio de convergencia R. Para el efecto, aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{(k+1)!\,(k+2)^2} k!\,(k+1)^2\right] = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{(k+2)^2} = 0,$$

entonces $R = \infty$, esto es, la serie converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Se define

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)^2} x^k \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calculemos $\dfrac{df}{dx}(x)$ e $\int_0^t f(x)\,dx$ para $x,t \in \mathbb{R}$. Para todo $\lambda > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)^2}x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!\,(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} x^k}{k!\,(k+1)^2} \quad x \in [-\lambda,\lambda],\\
\int_0^t f(x)\,dx &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!\,(k+1)^2}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)^2}x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!\,(k+1)^2}t^{k+1} \quad t \in [-\lambda,\lambda].
\end{aligned}$$

Calculemos una aproximación de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. Tenemos $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\,(k+1)^2\,2^k}$, y sea $a_k = \dfrac{1}{k!\,(k+1)^2\,2^k} \quad k = 0,1,\ldots$.La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\,(k+1)}$ converge a 1. Tenemos $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\,(k+1)} = 1$, y sea $b_k = \dfrac{1}{k\,(k+1)} \quad k = 1,2,\ldots$Por el criterio de comparación, se tiene

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k\,(k+1)}{k!\,(k+1)^2\,2^k} = \frac{k}{(k+1)!2^k} < 10^{-3} \quad \text{si } k \geq 6.$$

Entonces

$$\sum_{k=7}^{\infty} a_k < \sum_{k=7}^{\infty} 10^{-3} b_k = 10^{-3}\sum_{k=7}^{\infty} b_k < 10^{-3}\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 10^{-3}.$$

Luego, si $f_7\left(\frac{1}{2}\right)$ denota una aproximación de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con una precisión ε, se tiene

$$\begin{aligned}
f_7\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)^2\,2^k} \\
&= 1 - \frac{1}{1\times 4\times 2} + \frac{1}{2\times 9\times 4} - \frac{1}{6\times 16\times 8} + \frac{1}{24\times 25\times 16} - \frac{1}{120\times 36\times 32} \\
&\quad + \frac{1}{720\times 49\times 64} - \frac{1}{5040\times 64\times 128} \\
&= 1 + \frac{1}{2\times 9\times 4} + \frac{1}{24\times 25\times 16} + \frac{1}{720\times 49\times 64} \\
&\quad - \left(\frac{1}{1\times 4\times 2} + \frac{1}{6\times 16\times 8} + \frac{1}{120\times 36\times 32} + \frac{1}{5040\times 64\times 128}\right) \\
&\simeq 0{,}8886.
\end{aligned}$$

Así, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f_7\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon = 10^{-3}$.

3.3.2. Series de Taylor.

Las series de Taylor son series de potencias de la forma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, donde los coeficientes a_k están definidos como $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $k = 0, 1, \ldots$, con f una función que posee derivadas de todos los órdenes en $x = a$. Se dice que la serie de Taylor es generada por f en $x = a$. Nos interesamos primeramente en las funciones f que se representan como series de potencias, esto es, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y determínamos los coeficientes a_k $k = 1, 2, \cdots$; a continuación nos interesa las funciones f que se representan como series de potencias. Asumiremos que $a = 0$, si $a \neq 0$, el cambio de variable $t = x - a$ conduce al caso anterior.

Consideremos la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Se define la función f de $]-R, R[$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $x \in\,]-R, R[$. Determinemos los coeficientes a_k $k = 1, 2, \cdots$ Se tiene $f(0) = a_0$. Sea $0 < \lambda < R$. Hemos visto que $f'(x)$ existe y es continua en todo punto $x \in [-\lambda, \lambda]$, y $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ luego $f'(0) = a_1$. La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge uniformemente en el intervalo $[-\lambda, \lambda]$. A continuación calculamos la derivada segunda de la función f, tenemos $f''(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$ y de esta obtenemos $f''(0) = 2!a_2$. Nuevamente la serie $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$ converge uniformemente en el intervalo $[-\lambda, \lambda]$, entonces $f'''(x) = \sum\limits_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}$ y $f'''(0) = 3!a_3$. Continuando con este proceso, obtenemos $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} k(k-1) \times \ldots \times (k-n+1) a_k x^{k-n}$, y $f^n(0) = n!a_n$. Resulta $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$, y la función f queda representada como la serie de potencias siguiente $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ $x \in\,]-R, R[$, que se conoce como serie de Taylor de f en un entorno de $x = 0$. Es claro que $f \in C^{\infty}(]-R, R[)$.

Cuando $R = \infty$, la situación es muy similar al caso que acabamos de analizar, esto es, si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $x \in \mathbb{R}$, entonces $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, y esta función f se representa como la serie de potencias siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sea $R > 0$ y $f \in C^{\infty}(]-R, R[)$. Consideramos el problema siguiente: expresar f (siempre que sea posible) como una serie de Taylor en el entorno de 0; es decir, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ $x \in\,]-R, R[$. Si

$f^{(k)}(0) = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f(x) = 0 \quad \forall x \in \left]-R, R\right[$ y la función f no se representa como una serie de Taylor. Esto se evidencia con el siguiente ejemplo: $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Se demuestra que $f^{(k)}(0) = 0$ existe para $k = 1, 2, \ldots$, luego la función f que se desea representar como una serie de potencias es cero, pero la función f es nula solo en $x = 0$. Se concluye que f no se representa como una serie de potencias.

Sea $f \in C^\infty(\left]-R, R\right[)$, el polinomio de Taylor de f en un entorno de $x = 0$ se expresa como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x) \quad \forall x \in]-R, R[,$$

donde $E_n(x)$ denota el error de aproximación de $f(x)$ en $x = 0$, que se expresa como

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad x \in]-R, R[.$$

Si $f^{(n+1)}$ es acotada en un entorno de 0, $|E_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!} |x|^{n+1}$, donde $M_n = \sup\limits_{t \in [a-r,\, a+r]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ con $r > 0$.

Teorema 21 *Sean $f \in C^\infty(\left]-R, R\right[)$, $0 < r < R$. Si existe una constante $M > 0$ tal que $|\, f^{(n+1)}(x) \,| \leq M^n$, $\quad n = 1, 2, \ldots, x \in [-r, r]$, entonces la serie de Taylor generada por f converge hacia $f(x)$.*

Ejemplos

1. La serie de Taylor $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R}$ es generada por e^x en $x = 0$. Esta serie converge absolutamente en todo punto $x \in \mathbb{R}$. El radio de convergencia es $R = \infty$. Se tiene $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Observe las siguientes series numéricas, todas son absolutamente convergentes:

$$e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k}, \qquad e^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}, \qquad e^{\sqrt{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!}.$$

Puesto que $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y como la serie de potencias $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ converge uniformemente sobre todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, se sigue que

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, si se remplaza x por $-x$ en el desarrollo de Taylor de e^x, se tiene la serie de Taylor siguiente: $e^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. De manera similar, si se remplaza x por $-x^2$ en el desarrollo de e^x, se tiene la serie siguiente: $e^{-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Igualmente $e^{\sqrt{x}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{\frac{k}{2}}}{k!} \quad \forall x \in [0, \infty[, \qquad e^{-\frac{x^3}{3}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{3k}}{k! 3^k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La integral de e^{-x^2} no puede calcularse con funciones elementales, sin embargo, si utilizamos el desarrollo de Taylor de dicha función, y los resultados de la convergencia uniforme y la integración, obtenemos la siguiente serie de potencias:

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{k!(2k+1)} \quad \forall t \in [0, \infty[,$$

que es absolutamente convergente. En la siguiente sección mostramos como obtener valores aproximados de series de potencias, particularmente de la función error que se estudia en estadística y en ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

2. La serie de Taylor $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ es generada por $\operatorname{sen}(x)$ en un entorno de $x = 0$. Esta serie es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ y su radio de convergencia es $R = \infty$. Tenemos

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De manera similar, la serie de Taylor de $\cos(x)$ en un entorno de $x = 0$, es la siguiente:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in \mathbb{R}.$$

que converge absolutamente en todo $\mathbb{R}$, y es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado y acotado.

Puesto que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, aplicando el resultado de la convergencia uniforme y la derivación para sucesiones de funciones, y, tomando en consideración la convergencia absoluta de dichas series, se sigue que

$$(\operatorname{sen}(x))' = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, si se remplaza x por x^2 en los desarrollos de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, se obtienen las series de potencias siguientes:

$$\operatorname{sen}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}, \quad \text{y} \qquad \cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Igualmente, el desarrollo en serie de potencias de la función real dada por $g(x) = x\operatorname{sen}(\sqrt{x})$ $\forall x \in [0, \infty[$, se obtiene del desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$. Tenemos

$$g(x) = x\operatorname{sen}(\sqrt{x}) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\frac{2k+3}{2}}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in [0, \infty[.$$

Esta serie de potencias converge absolutamente para todo $x \geq 0$. Además, esta serie converge uniformemente sobre todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ de $[0, \infty[$, particularmente sobre $[0, t]$; y, si se aplica el teorema de la convergencia uniforme y la integración se obtiene la siguiente serie de potencias absolutamente convergente sobre el intervalo $[0, \infty[$:

$$\int_0^t x\operatorname{sen}(\sqrt{x})dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\frac{2k+3}{2}}}{(2k+1)!}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^t x^{\frac{2k+3}{2}}dx = 2t^{\frac{5}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(2k+1)!(2k+5)}.$$

3.4. Aproximación numérica de series de potencias.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ con $k = 0, 1, \ldots, n$. Como ya se ha dicho anteriormente una función real P de la forma $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \quad x \in \mathbb{R}$ se llama función polinomial o simplemete polinomio real P. En la práctica interesan los polinomios de grado mayor o igual que 1. Del punto de vista numérico, son estas funciones las más simples de evaluarse.

Por otro lado algunas funciones como $\exp(x)$, con $x \in \mathbb{R}$, solo conocemos sus valores para algunos puntos $x \in \mathbb{R}$. En muchas situaciones nos es difícil calcular valores de estas funciones fuera de esos datos conocidos

x. La idea fundamental es aproximar $\exp(x)$ mediante polinomios elegidos de modo que el error es un punto dado $x \in \mathbb{R}$, sea tan pequeño como se quiera. Estos polinomios son los denominados polinomios de Taylor de $\exp(x)$. Estos polinomios fueron utilizados para la construcción de algoritmos que actualmente se usan en las calculadoras de bosillo. Otros ejemplos similares a los de la función exponencial son, por ejemplo la función seno, coseno, función error, distribución normal, funciones elípticas, funciones de Bessel, etc.

En general, si f es una función que posee derivadas hasta el orden $n+1$ inclusive en $x = a$ el polinomio de Taylor de f en un entorno de a se escribe como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

y $f(x) = P(x) + E_n(x)$, donde $E_n(x)$ denota el error de aproximación de $f(x)$ mediante $P(x)$, dado por

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Si $f^{(n+1)}$ es acotada en un entorno de $x = a$, se tiene

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x \in [-r+a, r+a].$$

donde $M = \underset{t\in[a-r,\, a+r]}{\text{Sup}} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$ con $r > 0$. La serie de Taylor de la función f en un entorno del punto $x = a$ se define como $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, y se desea calcular valores de $f(x)$.

En muy pocos casos se puede calcular $f(x)$ exactamente, en la generalidad debemos recurrir a cálculos aproximados.

Sea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una serie de potencias que converge en el intervalo $]-R, R[$, donde $R > 0$ designa el radio de convergencia de la serie. Se define la función f de $]-R,R[$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad x \in]-R, R[$. Sea $0 < r < R$, suponemos que la serie de potencias converge uniformemente el intervalo $[-r, r]$ y sea $x \in [-r, r]$, queremos calcular un valor aproximado de $f(x)$ con una precisión $\varepsilon > 0$.

Los cálculos y los resultados que se obtienen en una calculadora de bolsillo o en computador personal, son en general con 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-16}, 10^{-25} cifras de precisión, por esta razón, las estimaciones y cálculos que realizaremos en lo sucesivo con series de potencias son con precisiones como las citadas.

Diremos que una serie de potencias es rápidamente convergente si para un número razonable de términos de la sucesión de sumas parciales se alcanza la exactitud y precisión establecida $\epsilon > 0$ (con fines prácticos $\epsilon = 10^{-9}$, 10^{-10}, etc.).

Consideramos como número razonable de términos $n < 100$ para ϵ del orden 10^{-16}. Es claro que si se aumenta considerablemente la precisión a alcanzar, se requerirán de un número de términos mucho mayor, si por ejemplo ϵ es del orden 10^{-40}, el concepto de número razonable de términos cambiará. Para alcanzar precisiones muy altas del orden 10^{-1000}, 10^{-2000}, etc. se requieren de la elaboración de algoritmos y programas especiales de cálculo que no lo abordaremos en este libro.

Diremos que la serie de potencias converge lentamente si el número de términos de la serie que se requieren para alcanzar la exactitud y precisión deseadas es grande. Lastimosamente, la acumulación de los errores debidos al truncamiento y redondeo influenciarán seriamente y modificarán los resultados. Esto obliga a enfrentar el problema con otro enfoque, es decir, buscar otras representaciones en series de potencias que que converjan rápidamente o en su defecto, obtener la mayor información posible de las propiedades de las funciones que puedan ser aplicadas para simplificar los cálculos aproximados. En este capítulo no utilizaremos los polinomios de Chebyshev y los de Legendre para reducir el número de términos a utilizar.

Con fines prácticos suponemos que ϵ es del orden 10^{-16} o mayor, particularmente 10^{-10}, y para esta precisión supondremos que la serie de potencias es rápidamente convergente en todo el intervalo $[-r, r]$. Ilutremos en este caso, el procedimiento a seguir.

Primeramente, elegimos la serie numérica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ tal que $b_k > 0 \quad k = 1, 2, \cdots$, y que tiene como suma 1, esto es $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = 1$. Denotamos con $S_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$ debe determinarse como el más pequeño entero positivo para el que se verifica la condición siguiente:

$$| f(x) - S_m(x) |= \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x^k \right| < \varepsilon.$$

Sea $c_k = \dfrac{| a_k | r^k}{b_k} \quad k = 1, 2, \cdots$, y suponemos que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} c_k = 0$, esto significa que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} | a_k | r^k$ converge más rápidamente que la serie elegida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. De la hipótesis $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} c_k = 0$, se sigue que existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\left| \dfrac{a_k r^k}{b_k} \right| < \varepsilon$ si $k \geq m$. Luego $| a_k | r^k < \varepsilon b_k \quad k \geq m$, de donde

$$| f(x) - S_m(x) |= \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} | a_k | r^k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon b_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \varepsilon \quad \text{si } k \geq m,$$

que muestra que $S_m(x)$ aproxima a $f(x)$ con una precisión $\varepsilon > 0$. Obviamente el entero m depende de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = 1$ con la que se compara. Algunas de las series usadas son por ejemplo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1$. La primera converge lentamente, mientras que la segunda converge mucho más rápidamente que la primera.

Ejemplos

1. Consideremos la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{(2k)!\,(3k+1)}$. Determinemos el radio de convergencia. Aplicando el criterio del cociente resulta para $x \neq 0$,

$$\frac{|x|^{k+1}}{(2\,(k+1))!\,(3k+4)} \frac{(2k)!\,(3k+1)}{|x|^k} = \frac{3k+1}{(2k+2)\,(2k+1)\,(3k+4)} |x| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir que la serie converge absolutamente en todo $\mathbb{R}$. Definimos la función f como sigue:

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!\,(3k+1)} x^k \quad x \in \mathbb{R}.$$

Queremos visualizar la gráfica de f en el intervalo $[-5, 10]$. Lastimosamente nos es difícil calcular cada $f\,(x) \quad x \in [-5, 10]$ y lo haremos en forma aproximada.

Sea $\varepsilon = 10^{-3}$. Determinemos $m \in \mathbb{Z}^+$ el más pequeño posible tal que $S_m\,(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{1}{(2k)!\,(3k+1)} x^k$, y,

$$|f\,(x) - S_m\,(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!\,(3k+1)} x^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{10^k}{(2k)!\,(3k+1)} < \varepsilon.$$

Para determinar m aplicamos el criterio de comparación con la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\,(k+1)} = 1$. Ponemos $a_k = \dfrac{10^k}{(2k)!\,(3k+1)}$, $b_k = \dfrac{1}{k\,(k+1)} \quad k = 1, 2, \ldots$, y determinamos $k \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k\,(k+1)\,10^k}{(2k)!\,(3k+1)} < \varepsilon = 10^{-3}.$$

Para $k=5$ se tiene $\frac{a_5}{b_5}\simeq 5{,}167\times 10^{-2}$; para $k=6$ se tiene $\frac{a_6}{b_6}\simeq 4{,}615\times 10^{-3}$; para $k=7$, $\frac{a_7}{b_7}\simeq 2{,}919\times 10^{-4}<10^{-3}$. Elegimos $m=7$ y $S_7(x)=\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{(2k)!\,(3k+1)}\quad x\in[-5,10]$.

Para $-5\leq x<0$, $S_7(x)$ se escribe como:

$$\begin{aligned} S_7(x) &= 1+\frac{x^2}{4!\times 7}+\frac{x^4}{8!\times 13}+\frac{x^6}{12!\times 19}+\frac{x}{2!\times 4}+\frac{x^3}{6!\times 10}+\frac{x^5}{10!\times 16}+\frac{x^7}{14!\times 22}\\ &= 1+\frac{x^2}{24}\left(\frac{1}{7}+\frac{x^2}{1680}\left(\frac{1}{13}+\frac{x^2}{225720}\right)\right)+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{x^2}{360}\left(\frac{1}{10}+\frac{x^2}{5040}\left(\frac{1}{16}+\frac{x^2}{528528}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Ponemos $y=x^2$, entonces $S_7(x)$ se escribe como sigue:

$$S_7(x)=1+\frac{y}{24}\left(\frac{1}{7}+\frac{y}{1680}\left(\frac{1}{13}+\frac{y}{225720}\right)\right)+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{360}\left(\frac{1}{10}+\frac{y}{5040}\left(\frac{1}{16}+\frac{y}{528528}\right)\right)\right).$$

Ponemos

$$\begin{aligned} y_1 &= 1+\frac{y}{24}\left(\frac{1}{7}+\frac{y}{1680}\left(\frac{1}{13}+\frac{y}{225720}\right)\right),\\ y_2 &= \frac{x}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{360}\left(\frac{1}{10}+\frac{y}{5040}\left(\frac{1}{16}+\frac{y}{528528}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

luego $S_7(x)=y_1+y_2$.

Para $0\leq x\leq 10$, $S_7(x)$ se expresa en forma explícita como

$$\begin{aligned} S_7(x) &= 1+\frac{x}{2!\times 4}+\frac{x^2}{4!\times 7}+\frac{x^3}{6!\times 10}+\frac{x^4}{8!\times 13}+\frac{x^5}{10!\times 16}+\frac{x^6}{12!\times 19}+\frac{x^7}{14!\times 22}\\ &= 1+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{12}\left(\frac{1}{7}+\frac{x}{30}\left(\frac{1}{10}+\frac{x}{56}\left(\frac{1}{13}+\frac{x}{90}\left(\frac{1}{16}+\frac{x}{132}\left(\frac{1}{19}+\frac{x}{4004}\right)\right)\right)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Sea $m\in\mathbb{Z}^+$, $h=\frac{10-(-5)}{m}=\frac{15}{m}$ y $x_j=-5+jh\quad j=0,1,\ldots,m$ puntos igualmente espaciados del intervalo $[-5,10]$. El algoritmo para el cálculo aproximado de $S_7(x_j)\quad j=0,1,\ldots,m$, con una precisión $\varepsilon=10^{-3}$ se presenta a continuación.

Algoritmo

Datos de entrada: $m\in\mathbb{Z}^+$.

Datos de salida: x_j, $S_7(x_j)\quad j=0,1,\ldots,m$.

1. Leer m.
2. $h=\frac{15}{m}$.
3. Para $j=0,1,\ldots,m$

    $x_j=-5+jh$

    Si $x_j<0$

    $y=x_j*x_j$

    $y_1=1+\frac{y}{24}\left(\frac{1}{7}+\frac{y}{1680}\left(\frac{1}{13}+\frac{y}{225720}\right)\right)$

    $y_2=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{360}\left(\frac{1}{10}+\frac{y}{5040}\left(\frac{1}{16}+\frac{y}{528528}\right)\right)\right)$

    $S_7(x_j)=y_1+y2$.

    Si $x_j>0$

    $$S_7(x_j)=1+\frac{x_j}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{x_j}{12}\left(\frac{1}{7}+\frac{x_j}{30}\left(\frac{1}{10}+\frac{x_j}{56}\left(\frac{1}{13}+\frac{x_j}{90}\left(\frac{1}{16}+\frac{x_j}{132}\left(\frac{1}{9}+\frac{x_j}{4004}\right)\right)\right)\right)\right)\right).$$

Imprimir x_j, $S_7(x_j)$.

Fin de bucle j.

4. Fin.

Para $x = -2$, se tiene $y = 4$, y

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{4}{24}\left(\frac{1}{7} + \frac{4}{1680}\left(\frac{1}{13} + \frac{4}{225720}\right)\right) \simeq 1{,}0238, \\ y_2 &= \frac{-2}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{360}\left(\frac{1}{10} + \frac{4}{5040}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{528528}\right)\right)\right) \simeq -0{,}2511, \end{aligned}$$

luego $S_7(-2) = y_1 + y_2 \simeq 1{,}0238 - 0{,}2511 = 0{,}7727$.

Para $x = 3$, se tiene

$$\begin{aligned} S_7(3) &= 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{12}\left(\frac{1}{7} + \frac{3}{30}\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{56}\left(\frac{1}{13} + \frac{3}{90}\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{132}\left(\frac{1}{19} + \frac{3}{4004}\right)\right)\right)\right)\right)\right) \\ &\simeq 1{,}4325. \end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestran 31 puntos de la gráfica de $S_7(x)$ $\quad x \in [-5, 10]$ aproximación de $f(x)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. El conjunto de puntos utilizado para trazar dicha gráfica es calculado con el algoritmo que acabamos de describir.

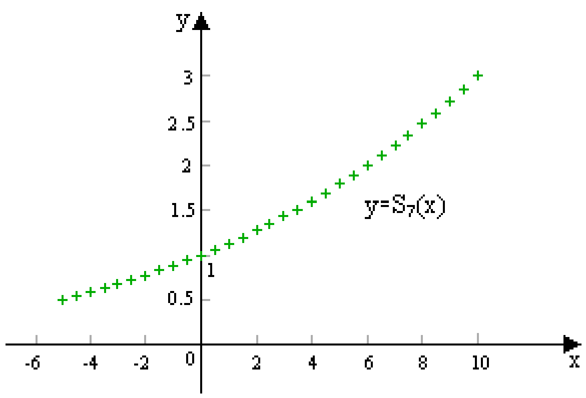

Figura 30

2. Consideramos la serie de potencias:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad |x| < 1$$

Esta serie no es la adecuada para el cálculo de $\ln(a)$ con $a > 0$, sin embargo no será de utilidad para explicar algunas dificultades que se presenta.

Supongamos que deseamos calcular el valor aproximado de $\ln(1{,}5)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$. Tenemos $x = 0{,}5$. Luego

$$\ln(1{,}5) = \ln(1 + 0{,}5) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\, 2^k}.$$

Sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$. Ponemos $a_k = \dfrac{1}{(k+1)\,2^k}$, $\; b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Entonces

$$c_k = \frac{a_k}{b_k} = \frac{k(k+1)}{(k+1)\,2^k} = \frac{k}{2^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon$ si $k \geq m$.

Para $m = 40$ se tiene $\dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon = 10^{-10}$ si $k \geq 40$. Se define $S_{40} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{40} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)\,2^k}$ y $|\ln(1{,}5) - S_{40}| < \varepsilon = 10^{-10}$.

Si $x = 0{,}8$, se tiene $\ln(1{,}8) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (0{,}8)^{k+1}}{k+1}$, y aplicando el mismo criterio de comparación, se tiene que $\dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon = 10^{-10}$ si $k \geq 125$, donde $a_k = \dfrac{(0{,}8)^{k+1}}{k+1}$ y $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$. Se define $S_{125} = \sum\limits_{k=0}^{125} \dfrac{(-1)^k (0{,}8)^{k+1}}{k+1}$ y $|\ln(1{,}8) - S_{125}| < \varepsilon = 10^{-10}$.

Cuando $x < 1$ se aproxima a 1, observamos que el número de términos crece enormemente, lo que por una parte dificulta la determinación del número adecuado de términos, por otra parte, se deben calcular sumas con un número muy grande de términos. Estos elementos dificultan la elaboración de un algoritmo de cálculo de $\ln(1+x)$.

3.5. Aproximación de las funciones trigonométricas

Cuando utilizamos un instrumento de cálculo tal como una calculadora de bolsillo o un computador, podemos obtener inmediatamente valores de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente; pero de esto, la pregunta que nos hacemos es ¿cómo con estos instrumentos se calculan valores de estas funciones trigonométricas?, ¿qué método se utiliza para garantizar la precisión de cálculo requerido? Esta sección está destinada a analizar el uso de la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ que nos permitan calcular aproximaciones de esta y de las funciones trigonométricas coseno y tangente.

Aproximación de $\operatorname{sen}(x)$

La serie de Taylor de $sen(x) \quad x \in \mathbb{R}$, viene dada por $\operatorname{sen}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Esta serie es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, además, es rápidamente convergente. Por otro lado, el número de condicionamiento de $\operatorname{sen}(x)$ está definido por $c(x) = \dfrac{x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \quad x \neq 0$, y se probó en el capítulo 1 que $|c(x)| \leq 1$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, con lo que la serie de Taylor será utilizada para aproximar $sen(x) \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, mediante una suma finita $S_N(x)$. Determinemos el número entero positivo N, el más pequeño posible, tal que si $\epsilon > 0$, $\quad |\operatorname{sen} x - S_N(x)| < \epsilon \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Para el efecto, primeramente establecemos la siguiente mayoración:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

y la convergencia de la última serie es absoluta. A continuación aplicamos el criterio del cociente, ponemos $a_k = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad k =, 1, \cdots$ y consideramos una serie numérica convergente de suma 1, elegimos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, ponemos $b_k = \dfrac{1}{2^k} \quad k =, 1, \cdots$ y consideramos la sucesión $\left(\dfrac{a_k}{b_k}\right)$, esto es

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{2^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

De la convergencia se sigue que si $\epsilon = 10^{-10}$, se verifica que $\dfrac{a_k}{b_k} < 10^{-10} \quad \forall k \geq 9$. Para $\epsilon = 10^{-32}$ se verifica que $\dfrac{a_k}{b_k} < 10^{-32} \quad \forall k \geq 20$. Para fijar las ideas, elegimos $\epsilon = 10^{-12}$ y el correspondiente N es $N = 11$. Luego

$$S_{11}(x) = \sum_{k=0}^{11} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{5} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{5} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} = P_1(x) - P_2(x),$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \sum_{k=0}^{5}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} = x\left(1+\frac{x^4}{5!}\left(1+\frac{x^4}{6\times 7\times 8\times 9}\left(1+\frac{x^4}{10\times 11\times 12\times 13}\right.\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left.\left(1+\frac{x^4}{14\times 15\times 16\times 17}\left(1+\frac{x^4}{18\times 19\times 20\times 21}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&= x\left(1+\frac{x^4}{120}\left(1+\frac{x^4}{3024}\left(1+\frac{x^4}{17160}\left(1+\frac{x^4}{57120}\left(1+\frac{x^4}{143640}\right)\right)\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \sum_{k=0}^{5}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} = \frac{x^3}{3!}\left(1+\frac{x^4}{4\times 5\times 6\times 7}\left(1+\frac{x^4}{8\times 9\times 10\times 11}\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left(1+\tfrac{x^4}{12\times 13\times 14\times 15}\left(1+\frac{x^4}{16\times 17\times 18\times 19}\left(1+\frac{x^4}{20\times 21\times 22\times 23}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&= \frac{x^3}{6}\left(1+\frac{x^4}{840}\left(1+\frac{x^4}{7920}\left(1+\tfrac{x^4}{32760}\left(1+\frac{x^4}{93024}\left(1+\frac{x^4}{212520}\right)\right)\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Con esta información podemos construir un algoritmo para el cálculo aproximado de $\operatorname{sen}(x) \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ con una precisión $\epsilon = 10^{-12}$. Requerimos adicionalmente aproximaciones de π. Consideramos las siguientes: con 12 cifras de precisión $\pi\simeq 3{,}14159265359$ por exceso y por defecto $\pi\simeq 3{,}141592653589$, y con 32 cifras de precisión $\pi\simeq 3{,}1415926535897932384626433832795$0.

<u>Algoritmo</u>

Dato de entrada: x.

Datos de salida: $x, \operatorname{sen}(x)$.

1. $y_1 = x^2 * x$,
2. $y = y_1 * x$
3. $a_1 = x\left(1+\frac{y}{120}\left(1+\frac{y}{3024}\left(1+\frac{y}{17160}\left(1+\frac{y}{57120}\left(1+\frac{y}{143640}\right)\right)\right)\right)\right)$.
4. $a_2 = \dfrac{y_1}{6}\left(1+\frac{y}{840}\left(1+\frac{y}{7920}\left(1+\frac{y}{32760}\left(1+\frac{y}{93024}\left(1+\frac{y}{212520}\right)\right)\right)\right)\right)$.
5. $S_{11}(x) = a_1 - a_2$.
6. Imprimir x, $S_{11}(x)$.
7. Fin

Para el cálculo de un solo valor de $\operatorname{sen}(x)$ con $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ se requieren de 36 operaciones elementales y de 5 asignaciones. En los ejercicios se propone elaborar un algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x) \quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ y $\epsilon = 10^{-32}$ con el número de términos $N = 21$.

Al algoritmo descrito precedentemente los denominaremos como algoritmo de aproximación o también método de aproximación de $\operatorname{sen}(x)$ con $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Lo notaremos $\operatorname{sen}_*(x)$

Para $x\in\mathbb{R}\setminus\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, consideramos los tres casos siguientes: i) $x\in]\frac{\pi}{2},\pi]$, ii) $x>\pi$, iii) $x<0$. Para calcular $\operatorname{sen}(x)$ aplicaremos las propiedades de la función $\operatorname{sen}(x)$ de modo que el algoritmo que acabamos de proponer se aplique con ligeras modificaciones.

a) Puesto que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$; en particular para $x\in]\dfrac{\pi}{2},\pi]$ se sigue que $\pi - x\in]0,\dfrac{\pi}{2}]$, lo que nos permite aproximar $\operatorname{sen}(x)$ mediante la suma $S_{11}(\pi - x) \quad x\in]\dfrac{\pi}{2},\pi]$, utilizando el algoritmo arriba descrito.

b) Si $x > \pi$ entonces $y = x - n\pi \in [0, \pi]$, donde $n = [\frac{x}{\pi}]$ y $[\cdot]$ denota la función mayor entero $\leq \frac{x}{\pi}$. Luego

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y + n\pi) = \operatorname{sen}(y)\cos(n\pi) + \operatorname{sen}(n\pi)\cos(y) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(y), & \text{si } n \text{ impar}, \\ \operatorname{sen}(y), & \text{si } n \text{ par}. \end{cases}$$

Así, para $x > \pi$, $\operatorname{sen}(x)$ se aproxima utilizando el algoritmo y la parte a) precedente con $y = x - n\pi$; y $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(y)$ si n es impar, $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y)$ si n es par.

c) Si $x < 0$, como la función seno es impar, esto es, $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, basta cambiar x por $-x$ y utilizar el algoritmo y los resultados de las partes a) y b) precedentes.

Se propone al lector la elaboración completa del algoritmo que permite aproximar $\operatorname{sen}(x) \quad x \in \mathbb{R}$.

Al algoritmo descrito precedentemente así como los resultados obtenidos en a), b) y c) los denominaremos como algoritmo o método de aproximación de $\operatorname{sen}(x) \quad x \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Tomando en consideración $pi = 3{,}1415926536$ aproximación de π, calcular una aproximación de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-4}$. Para el efecto aplicamos el algoritmo. Ponemos $x = \frac{\pi}{10} \simeq \frac{pi}{10} = 0{,}3141592654$, $y = x^4 \simeq 0{,}009740909109$. Luego,

$$\begin{aligned} a_1 &= x\left(1 + \frac{y}{120}\left(1 + \frac{y}{3024}\left(1 + \frac{y}{17160}\left(1 + \frac{y}{57120}\left(1 + \frac{y}{143640}\right)\right)\right)\right)\right) \\ &= 0{,}3141847673, \\ a_2 &= \frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{y}{780}\left(1 + \frac{y}{7920}\left(1 + \frac{y}{32760}\left(1 + \frac{y}{93024}\left(1 + \frac{y}{212520}\right)\right)\right)\right)\right) \\ &= 0{,}005167772705, \end{aligned}$$

de donde $S_{11}\left(\frac{\pi}{10}\right) = a_1 - a_2 \simeq 0{,}3090169946$.

El valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)$ obtenido en una calculadora de bolsillo es $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) \simeq 0{,}3090169944$.

2. Calculemos $\operatorname{sen}(10)$. Para el efecto apliquemos los resultados arriba obtenidos. Ponemos $x = 10$. Se tiene $x > \pi$ entonces $x = 3\pi + 10 - 3\pi$. Ponemos $a = 10 - 3\pi \simeq 0{,}57522220393 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Luego, $\operatorname{sen}(10) = \operatorname{sen}(3\pi + a) = \operatorname{sen}(3\pi)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(3\pi) = -\operatorname{sen}(a)$. Calculemos una aproximación de $\operatorname{sen}(a)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$.

   Sea $y = a^4 \simeq 0{,}1094818355$ y $a^3 \simeq 0{,}1903296953$. Entonces

$$\begin{aligned} a_1 &= a\left(1 + \frac{y}{120}\left(1 + \frac{y}{3024}\left(1 + \frac{y}{17160}\left(1 + \frac{y}{57120}\left(1 + \frac{y}{143640}\right)\right)\right)\right)\right) \\ &= 0{,}5757468615, \\ a_2 &= \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{y}{840}\left(1 + \frac{y}{7920}\left(1 + \frac{y}{32760}\left(1 + \frac{y}{93024}\left(1 + \frac{y}{212520}\right)\right)\right)\right)\right) \\ &= 0{,}03172575038, \\ \operatorname{sen}_*(a) &= a_1 - a_2 = 0{,}5440211111. \end{aligned}$$

   Así, $\operatorname{sen}(10) = -\operatorname{sen}(a) \simeq -0{,}5440211111$.

   El valor $\operatorname{sen}(10)$ obtenido en una calculadora de bolsillo es $\operatorname{sen}(10) \simeq -0{,}5440211109$.

Aproximación de $\cos(x)$

Para aproximar $\cos(x) \quad x \in \mathbb{R}$, utilizamos la siguiente relación: $\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y aplicamos el método de aproximación de $\operatorname{sen}(x)$ a condición de cambiar x por $\frac{\pi}{2} - x$. Se propone elaborar el algoritmo correspondiente.

Ejemplo

Es conocido que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}8660254038$. Apliquemos el algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(a)$ con $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para calcular una aproximación de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Sea $a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \simeq 1{,}047197551$. Entonces $y = a^4 \simeq 1{,}20258137$, $a^3 = 1{,}148380617$. Luego

$$\begin{aligned}
a_1 &= x\left(1+\frac{y}{120}\left(1+\frac{y}{3024}\left(1+\frac{y}{17160}\left(1+\frac{y}{57120}\left(1+\frac{y}{143640}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&\simeq 1{,}057696227,\\
a_2 &= \frac{a^3}{6}\left(1+\frac{y}{840}\left(1+\frac{y}{7920}\left(1+\frac{y}{32760}\left(1+\frac{y}{93024}\left(1+\frac{y}{212520}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&\simeq 0{,}1916708232,\\
\operatorname{sen}(a) &\simeq a_1 - a_2 = 1{,}057696227 - 0{,}1916708232 = 0{,}8660254038.
\end{aligned}$$

En consecuencia $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}(a) \simeq 0{,}8660254038$ que es la aproximación obtenida de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. En una calculadora de bolsillo se obtiene el siguiente valor $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}8660254038$.

Aproximación de $\tan(x)$

De la definición de la función tangente, se tiene

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

luego los valores de $\tan(x) \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ pueden aproximarse utilizando esta relación y los métodos de aproximación de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ arriba tratados.

Ejemplos

1. Es conocido que $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Apliquemos el algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x)$ para aproximar $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y así aproximar $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

   Consideremos $\pi \simeq 3{,}141592653$, $x = 0{,}5235987755$, $x^3 \simeq 0{,}1435475771$, $y = x^4 \simeq 0{,}0751613356$. Aplicando el algoritmo de cálculo para aproximar $\operatorname{sen}(x)$, tenemos

$$\begin{aligned}
a_1 &= x\left(1+\frac{y}{120}\left(1+\frac{y}{3024}\left(1+\frac{y}{17160}\left(1+\frac{y}{57120}\left(1+\frac{y}{143640}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&\simeq 0{,}5239267369,\\
a_2 &= \frac{x^3}{6}\left(1+\frac{y}{840}\left(1+\frac{y}{7920}\left(1+\frac{y}{32760}\left(1+\frac{y}{93024}\left(1+\frac{y}{212520}\right)\right)\right)\right)\right)\\
&\simeq 0{,}02392673695.
\end{aligned}$$

   En consecuencia

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \simeq a_1 - a_2 = 0{,}5239267369 - 0{,}02392673695 = 0{,}5.$$

   Con la misma precisión, calculamos una aproximación de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Ponemos $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \simeq 1{,}047197551$, $x^3 \simeq 1{,}148380617$, $x^4 = 1{,}20258137$. Aplicando nuevamente los desarrollos a_1, a_2 precedentes, se obtiene $a_1 = 1{,}057696227$, $a_2 = 0{,}1916708232$. Luego

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \simeq a_1 - a_2 = 0{,}8660254038.$$

   Por lo tanto,

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \simeq \frac{0{,}5}{0{,}8660254038} \simeq 0{,}577350269.$$

Valor obtenido en una calculadora de bolsillo $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5773502692$.

2. Para $0 < \varepsilon < 10^{-2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ se puede hacer tan grande como se quiera conforme ε se aproxima a cero.

   Si aproximamos $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, con el algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x)$, es crítico para $x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Veamos esta situación con el siguiente ejemplo: aproximar $\tan(89{,}9995°)$.

   En radianes $89{,}9995\,° = 1{,}5707876\,\text{rad}$. Ponemos $x = 1{,}5707876$, entonces $x^3 \simeq 3{,}875719987$, $y = x^4 \simeq 6{,}087932897$. Calculemos $\operatorname{sen}(89{,}9995\,°) = \operatorname{sen}(1{,}5707876)$ con el algoritmo arriba desarrollado. Tenemos

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x\left(1 + \frac{y}{120}\left(1 + \frac{y}{3024}\left(1 + \frac{y}{17160}\left(1 + \frac{y}{57120}\left(1 + \frac{y}{143640}\right)\right)\right)\right)\right) \\
&\simeq 1{,}650628503, \\
a_2 &= \frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{y}{840}\left(1 + \frac{y}{7920}\left(1 + \frac{y}{32760}\left(1 + \frac{y}{93024}\left(1 + \frac{y}{212520}\right)\right)\right)\right)\right) \\
&\simeq 0{,}6506385023,
\end{aligned}
$$

   luego

$$
\operatorname{sen}(1{,}5707876) \simeq a_1 - a_2 = 1{,}000000000.
$$

   Calculemos $\cos(89{,}9995\,°) = \cos(1{,}5707876)$. Para el efecto, ponemos $x = \frac{\pi}{2} - 1{,}5707876 \simeq 0{,}000008727$. Se obtiene $x^3 \simeq 6{,}646529367 \times 10^{-16}$, $x^4 \simeq 5{,}800426178 \times 10^{-21}$ y aplicando el algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x)$ se obtiene: $a_1 \simeq 0{,}000008727$, $a_2 \simeq 1{,}107754895 \times 10^{-16}$. Luego $\cos(1{,}5707876) \simeq 0{,}000008727$ y en consecuencia

$$
\tan(1{,}5707876) = \frac{\operatorname{sen}(1{,}5707876)}{\cos(1{,}5707876)} \simeq \frac{1{,}0}{0{,}000008727} \simeq 114586{,}9142.
$$

   El valor obtenido en una calculadora de bolsillo es $\tan(1{,}5707876) = 114589{,}7256$. Esta pequeña diferencia se debe a que hemos operado con una precisión de 10^{-9} mientras que en la calculadora, internamente se opera con una precisión de 10^{-12}. Con la versión de Fortran 77, se obtiene en doble precisión el siguiente valor: $\tan(1{,}5707876) = 113924{,}073226171$.

Aproximación de $\operatorname{arcsen}(y)$.

Recordemos que la función f de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[-1, 1]$ definida como $y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es biyectiva y su función inversa g está definida como $x = g(y) = \operatorname{arcsen}(y) \quad y \in [-1, 1]$. Se tiene $(g \circ f)(x) = x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Además, f y g son derivables, luego

$$
1 = (g \circ f)'(x) = g'(y)\, f'(x) \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[
$$

de donde $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ con $y = f(x)$. Se tiene

$$
f'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)} = \sqrt{1 - y^2},
$$

luego

$$
(\operatorname{arcsen}(y))' = g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad y \in \left]-1, 1\right[,
$$

e integrando, resulta

$$
\operatorname{arcsen}(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad y \in \left]-1, 1\right[.
$$

Por el binomio de Newton:

$$\begin{aligned}
\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-t^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-t^2\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-t^2\right)^3+\cdots \\
&= 1+\frac{t^2}{2}+\frac{1\times 3}{2!\times 2^2}t^4+\frac{1\times 3\times 5}{3!\times 2^3}t^6+\cdots \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k}t^{2k} \qquad t\in\left]-1,1\right[.
\end{aligned}$$

Luego, por el teorema de la convergencia uniforme y la integración, se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsen}(y) &= \int_0^y\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k}t^{2k}\right)dt \\
&= y+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k(2k+1)}y^{2k+1} \qquad y\in\left]-1,1\right[.
\end{aligned}$$

Para $\varepsilon=10^{-10}$, mediante el criterio de comparación con la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$, se obtiene $m=25$ y en consecuencia $|\operatorname{arcsen}(y)-S_{25}(y)|<\varepsilon=10^{-10}$ si $y\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, donde

$$S_{25}(y)=y\left(1+\sum_{k=1}^{25}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k(2k+1)}y^{2k}\right).$$

Si $y\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$, para aproximar $\operatorname{arcsen}(y)$ se requiere de un número mayor de términos. Esto podemos controlarlo del modo siguiente. Sea $x=\operatorname{arcsen}(y)$, entonces

$$y=\operatorname{sen}(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

de donde $1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=y^2$ con lo que $x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Como $y\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$ se sigue que $\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

Ponemos $v=\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y $|\operatorname{arcsen}(v)-S_{17}(v)|<\varepsilon=10^{-10}$ con

$$S_{17}(v)=v\left(1+\sum_{k=1}^{17}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k(2k+1)}v^{2k}\right).$$

Se define S_ε como sigue:

$$S_\varepsilon=\begin{cases} y\left(1+\sum\limits_{k=1}^{25}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k(2k+1)}y^{2k}\right) & \text{si } y\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2}-v\left(1+\sum\limits_{k=1}^{17}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k(2k+1)}v^{2k}\right) & \text{si } v\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\end{cases}$$

con $v=\sqrt{1-y^2}\quad y\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$.

Ejemplo

Sabemos que $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \simeq 0{,}5235987756$.

Apliquemos los resultados obtenidos precedentemente. Ponemos $y = 0{,}5$ y $\varepsilon = 10^{-10}$. Entonces

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= y\left(1+\sum_{k=1}^{25}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{k!2^k\,(2k+1)}y^{2k}\right)\\ &= y\left(1+\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{3y^2}{y}\left(\frac{1}{5}+\frac{5y^2}{6}\left(\frac{1}{7}+\frac{7y^2}{8}\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{47y^2}{48}\left(\frac{1}{49}+\frac{49y^2}{50\times 51}\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)\\ &= 0{,}5235987755. \end{aligned}$$

Aproximación de $\arccos(x)$

Se propone como ejercicio

Aproximación de $\arctan(y)$

Sea $x = \arctan(y)$. Entonces

$$y = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

de donde $sen(x) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ y por lo tanto $x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)$. Consecuentemente, $\arctan(y)$ se aproxima utilizando el algoritmo de $\operatorname{arcsen}(z)$, con $z = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$.

Nota: Se recomienda al lector elaborar un programa computacional que permita aproximar las funciones trigonométricas utilizando los algoritmos descritos y comparar los resultados con los proporcionados con los de las calculadoras de bolsillo.

3.6. Aproximación de $\exp(x)$

Sea $x \in \mathbb{R}$, en el primer capítulo se mostró que el número de condicionamiento de $\exp(x)$ es $c(x) = x$, por lo tanto $\exp(x)$ está bien condicionado si $|x| \leq 1$. Por otro lado, en un entorno de $x = 0$, $\exp(x)$ se representa mediante el siguiente desarrollo en serie de potencias $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R}$. Esta serie es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ (radio de convergencia $r = +\infty$).

Para $x \in [0,1]$, definimos $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad n = 1, 2, \ldots$. Sea $\epsilon > 0$. Determinemos $n \in \mathbb{N}$ el más pequeño posible tal que $|\exp(x) - S_n(x)| < \epsilon, \ \forall x \in [0,1]$, es decir que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} < \epsilon$. Se tiene

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \epsilon \qquad \forall x \in [0,1].$$

Para determinar $n \in \mathbb{N}$ aplicamos el criterio del cociente. Ponemos $a_k = \dfrac{1}{k!} \quad k = 0, 1, \cdots$, y elegimos la serie convergente $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$ con $1 < p < 2$. Ponemos $b_k = \dfrac{1}{k^p} \quad k = 0, 1, \cdots$, luego

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^{p-1}}{(k-1)!} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Particularmente, para $p = 2$, el criterio para determinar n es el siguiente: $n \in \mathbb{N}$ el más pequeño posible tal que $\frac{n}{(n-1)!} < \epsilon$. Para $\epsilon = 10^{-10}$ se obtiene $n = 16$, para $\epsilon = 10^{-20}$ se obtiene $n = 24$, para $\epsilon = 10^{-32}$ se obtiene $n = 32$.

Para $\epsilon > 0$ dado, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ aproxima a e^xcon una precisión ϵ para todo $x \in [0,1]$.

Con el propósito de obtener un algoritmo numéricamente estable, escribimos $S_n(x)$ en una forma anidada:

$$S_n(x) = 1 + x\left(1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{n-1}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\cdots\right)\right),$$

cuyo algoritmo es el siguiente:

Algoritmo

Datos de entrada; n, x.

Datos de salida : x, $\exp(x)$.

1. $b = 1$.
2. $k = 0, \ldots, n-1$

   $$b = 1 + \frac{b * x}{n-k}$$

   Fin de bucle k.
3. Imprimir $\exp(x) = b$.
4. Fin.

Para cada $x \in [0,1]$, la aproximación de $\exp(x)$ dado en el algoritmo requiere de $4 \times n$ operaciones elementales y n asignaciones.

Puesto que $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$, entonces para $x \in [-1, 0[$, $\exp(x)$ se aproxima mediante $\dfrac{1}{S_n(-x)}$ y $S_n(-x)$ se calcula usando el algoritmo precedente.

Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, $\exp(x)$ está mal condicionado. Dado $\epsilon > 0$, si determinamos n tal que $\dfrac{|x|^n}{(n-1)!} < \epsilon$, resulta que tal n aumenta considerablemente según $|x|$, lo que hace que $S_n(x)$ sea numéricamente costoso y por otro lado, el algoritmo es inestable numéricamente. El remedio a este problema consiste en hacer $y = x - [x]$, donde $[\cdot]$ denota la función mayor entero menor o igual que x. Resulta $y \in]0,1[$, y $\exp(x) = \exp(y)\exp([x])$. Aproximamos $\exp(y)$ mediante $S_n(y)$ si $y > 0$ y $\frac{1}{S_n(y)}$ si $y < 0$. Como el número e base de los logaritmos naturales está dado como la serie $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, se aplica el algoritmo precedente con $x = 1$ y luego $\exp([x])$ se evalúa como una potencia entera. Para $\epsilon = 10^{-10}$, se tiene $S_{16}(1) = \sum\limits_{k=0}^{k=16} \dfrac{1}{k!} = 2{,}7182818284$.

Así, $\exp(x)$ se aproxima como $\begin{cases} S_n(y)\exp([x]), & \text{si } \ x > 1, \\ \dfrac{1}{S_n(-y)\exp(-[x])}, & \text{si } \ x < -1. \end{cases}$ Se recomienda al lector elaborar el algoritmo completo para aproximar $\exp(x)$ así como su respectivo programa computacional.

Ejemplos

1. Aplique el algoritmo para calcular una aproximación de $\exp(0{,}4)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$. Se tiene $0 < x < 1$ y en consecuencia

   $$S_{16}(x) = \sum_{k=0}^{16} \frac{x^k}{k!} = 1 + x\left(1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\left(1 + \ldots + \frac{x}{15}\left(1 + \frac{x}{16}\right)\ldots\right)\right)\right)$$

   en particular para $x = 0{,}4$, se obtiene

   $$S_{16}(x) = 1 + 0{,}4\left(1 + \frac{0{,}4}{2}\left(1 + \frac{0{,}4}{3}\left(1 + \ldots + \frac{0{,}4}{15}\left(1 + \frac{0{,}4}{16}\right)\ldots\right)\right)\right) = 1{,}491824698\ldots$$

El valor de $\exp(0{,}4)$ obtenido en doble precisión es $\exp(0{,}4) \simeq 1{,}491824706533238$ y en una calculadora de bolsillo $\exp(0{,}4) \simeq 1{,}491824698$.

2. Calculemos el valor aproximado de $\exp(22{,}4)$. Tenemos $x = 22{,}4 > 1$, en consecuencia $x = (x - [x]) + [x] = y + [x]$ con $y = x - [x] \in [0,1]$. Resulta $[22{,}4] = 22$. Luego

$$\exp(22{,}4) = \exp(0{,}4)\exp(22).$$

En el ejemplo 1) previo se calculó el valor aproximado de $\exp(0{,}4)$. Queda por calcular $\exp(22)$. Primeramente $\exp(1) = 2{,}7182818284$. Luego

$$\exp(22) = (2{,}7182818284)^{22} = 3584912833 = 3{,}584912833 \times 10^9,$$

de donde

$$\begin{aligned}\exp(22{,}4) &= \exp(0{,}4)\exp(22) \simeq 1{,}491824698 \times 3{,}584912833 \times 10^9 \\ &= 5{,}348061504 \times 10^9.\end{aligned}$$

El valor de $\exp(22{,}4)$ obtenido en una calculadora de bolsillo es $\exp(22{,}4) \simeq 5{,}348061523 \times 10^9$, y en doble precisión $\exp(22{,}4) \simeq 5{,}34805948262739 \times 10^9$. Note que $\exp(22) \simeq 3{,}584912846131592 \times 10^9$. Debido a que en la calculadora de bolsillo se representan los números en punto fijo, donde se produce mayor error es en el cálculo de $\exp(22) \simeq (2{,}7182818284)^{22}$.

3. Calculemos el valor aproximado de $\exp(-0{,}9)$. Puesto que $\exp(-0{,}9) = \dfrac{1}{\exp(0{,}9)}$, calculamos el valor aproximado de $\exp(0{,}9)$. Aplicando el algoritmo, tenemos

$$S_{16}(x) = \sum_{k=0}^{16} \frac{(0{,}9)^k}{k!} = 1 + 0{,}9\left(1 + \frac{0{,}9}{2}\left(1 + \cdots \frac{0{,}9}{15}\left(1 + \frac{0{,}9}{16}\right)\cdots\right)\right) = 2{,}459603112,$$

de donde

$$S_{16}(0{,}9) = \frac{1}{S_{16}(0{,}9)} = \frac{1}{2{,}459603112} = 0{,}4065696598.$$

El valor obtenido en una calculadora de bolsillo es $\exp(-0{,}9) \simeq 0{,}4065696597$.

3.7. Aproximación de $\ln(x)$

Antes de abordar el problema de la aproximación numérica de $\ln(a)$ con $a > 0$, recordemos algunas propiedades de la función logaritmo.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

2. Si $a \in \mathbb{R}^+$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

3. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$ y $\ln\left(\dfrac{1}{a^n}\right) = -n\ln(a)$.

Por otro lado, sea $a > e$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1 \leq \dfrac{a}{e^n} < e$, donde $a = e^n \times \dfrac{a}{e^n}$, luego

$$\ln(a) = \ln\left[e^n \times \frac{a}{e^n}\right] = \ln e^n + \ln\left(\frac{a}{e^n}\right) = n + \ln(x),$$

con $x = \dfrac{a}{e^n} \in [1, e]$.

Si $a < 1$ y $n \in \mathbb{Z}^-$ tal que $1 \leq ae^{-n} < e$, entonces $a = e^n \times (ae^{-n})$, de donde

$$\ln(a) = n + \ln\left(ae^{-n}\right) = n + \ln(x),$$

con $x = ae^{-n} \in [1, e]$.

Ejemplos

1. $a = 20{,}11 = e^3 \times \dfrac{20{,}11}{e^3}$ con $x = \dfrac{20{,}11}{e^3} \simeq 1{,}001217945 \in [1, e]$.

2. $a = 145{,}41 = e^4 \times \dfrac{145{,}41}{e^4}$ con $x = \dfrac{145{,}41}{e^4} \simeq 2{,}663277051 \in [1, e]$.

3. $a = 6{,}81 \times 10^{-3} = e^{-5} \times \left(e^5 \times 6{,}81 \times 10^{-3}\right)$, donde $x = e^5 \times 6{,}81 \times 10^{-3} \simeq 1{,}010693613 \in [1, e]$.

De las dos últimas relaciones, si $a > 0$ basta determinar $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x = ae^n \in [1, e]$ si $a < \dfrac{1}{e}$, $x = \dfrac{a}{e^n} \in [1, e]$ si $a > e$. En cualquiera de los casos, queda calcular $\ln(x)$. Para el efecto, utilizamos el siguiente desarrollo en series de potencias:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \quad \text{si } |x| < 1.$$

Sea $a > 0$. Ponemos $a = \dfrac{1+x}{1-x}$, entonces $x = \dfrac{a-1}{a+1}$ y en consecuencia

$$\ln(a) = 2\frac{a-1}{a+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2k}.$$

Para $a = 1$, obviamente $\ln(1) = 0$. Para $a \in [1, e]$, sea $m \in \mathbb{Z}^+$ y $S_m(a) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{1}{2k+1} \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^{2k}$.

Con fines prácticos elegimos $\varepsilon = 10^{-10}$. Determinemos $m \in \mathbb{Z}^+$ el más pequeño posible tal que

$$\left|\ln(a) - 2\frac{a-1}{a+1} S_m(a)\right| < \varepsilon = 10^{-10},$$

lo que conduce a determinar $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2k} - S_m(a)\right| &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2k} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^{2k} \\
&< \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{4^k} < \varepsilon = 10^{-10}.
\end{aligned}$$

La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$. Ponemos $a_k = \dfrac{1}{2k+1}\dfrac{1}{4^k}$, $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $k = 1, 2, \ldots$, $C_k = \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{k(k+1)}{(2k+1)4^k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, luego, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $C_k = \dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon$ si $k \geq m$. Para $k = 15$ obtenemos $C_{15} = \dfrac{15 \times 16}{31 \times 4^{15}} \simeq 7{,}21 \times 10^{-9}$, para $k = 19$, $C_{19} = \dfrac{19 \times 20}{39 \times 4^{19}} \simeq 3{,}545 \times 10^{-11}$. Elegimos $m = 19$ y definimos

$$\varphi_{19}(a) = \frac{2(a-1)}{a+1} \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \qquad a \in [1, e].$$

Note que si $1 < a \leq \dfrac{e+1}{2}$ entonces $0 < \dfrac{a-1}{a+1} \leq \dfrac{e-1}{e+3}$ de donde $0 < \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2 \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)^2 < 0{,}1$. En tal caso, ponemos $a_k = \dfrac{1}{2k+1}\dfrac{1}{10^k}$, $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $k = 1, 2, \ldots$, luego

$$C_k = \frac{a_k}{b_k} = \frac{k(k+1)}{(2k+1)10^k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

y existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $C_k = \dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon = 10^{-10}$ si $k \geq m$.

Para $m = 11$, se tiene $C_{11} = \dfrac{11 \times 12}{23 \times 10^{11}} \simeq 5{,}74 \times 10^{-11}$. Definimos

$$\varphi_{11}(a) = \frac{2(a-1)}{a+1} \sum_{k=0}^{11} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{2k} \qquad a \in \left] 1, \frac{e+1}{2} \right].$$

Así,

$$\begin{cases} \varphi_{11}(a) = \dfrac{2(a-1)}{a+1} \sum\limits_{k=0}^{11} \dfrac{1}{2k+1} \left(\dfrac{a-1}{a+1} \right)^{2k} & a \in \left] 1, \dfrac{e+1}{2} \right], \\ \varphi_{19}(a) = \dfrac{2(a-1)}{a+1} \sum\limits_{k=0}^{19} \dfrac{1}{2k+1} \left(\dfrac{a-1}{a+1} \right)^{2k} & a \in \left] \dfrac{e+1}{2}, e \right]. \end{cases}$$

Sea $b_1 = \dfrac{a-1}{a+1}$ y $b = b_1^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(a) &= 2b_1 \sum_{k=0}^{11} \frac{1}{2k+1} b^k = 2b_1 \left(1 + \frac{b}{3} + \frac{b^2}{5} + \cdots + \frac{b^{10}}{21} + \frac{b^{11}}{23} \right) \\ &= 2b_1 \left(1 + b \left(\frac{1}{3} + b \left(\frac{1}{5} + \cdots + b \left(\frac{1}{21} + \frac{b}{23} \right) \cdots \right) \right) \right). \end{aligned}$$

En forma similar se escribe $\varphi_{19}(a)$.

Un algoritmo para el cálculo de $\ln(a)$ con $a \in [1, e]$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$ se propone a continuación

Algoritmo

Datos de entrada: $a \in \left]1, e\right[$.

Datos de salida: $\ln(a)$.

1. Si $1 \leq a \leq \dfrac{1+e}{2}$, asignar $n = 11$.
2. 2i $\dfrac{1+e}{2} < a < e$, asignar $n = 19$.
3. $b_1 = \dfrac{a-1}{a+1}$.
4. $b = b_1^2$.
5. $y = \dfrac{1}{2n+1}$.
6. Para $j = 1, \ldots, n$

   $k = n - j$

   $y = \dfrac{1}{2k+1} + b \times y$

   Fin bucle j.
7. $y = 2 \times b_1 \times y$.
8. Imprimir $\ln(a) = y$.
9. Fin.

Ejemplos

1. Calculemos $\ln(2)$. Para el efecto, aplicamos el algoritmo descrito. Ponemos $a = 2$, $b_1 = \dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{1}{3}$, $b = b_1^2 = \dfrac{1}{9}$. Entonces

$$\ln(2) \simeq \varphi_{19}(2) = \frac{2}{3} \left(1 + b \left(\frac{1}{3} + b \left(\frac{1}{5} + \cdots + b \left(\frac{1}{37} + \frac{b}{39} \right) \cdots \right) \right) \right) = 0{,}6931471806.$$

En una calculadora de bolsillo, $\ln(2) = 0{,}6931471806$.

2. Calculemos $\ln(535{,}2)$. Tenemos $\dfrac{535{,}2}{e^6} \simeq 1{,}326628165 \in [1,e]$, luego $535{,}2 = e^6 \dfrac{535{,}2}{e^6}$, de donde

$$\ln(535{,}2) = 6 + \ln \frac{535{,}2}{e^6} = 6 + \ln 1{,}326628165.$$

Sea $a = 1{,}326628165$ entonces $b_1 = \dfrac{a-1}{a+1} = 0{,}1403869213$, $b = b_1^2 = 0{,}01970848767$, luego

$$\varphi_{11}(a) = 2b_1\left(1 + b\left(\frac{1}{3} + b\left(\frac{1}{5} + \cdots + b\left(\frac{1}{21} + \frac{b}{23}\right)\cdots\right)\right)\right) = 0{,}2826405088.$$

En consecuencia

$$\ln(535{,}2) = 6 + 0{,}2826405088 = 6{,}2826405088.$$

En una calculadora de bolsillo, $\ln(535{,}2) = 6{,}282640509$.

3. Apliquemos el algoritmo y los resultados precedentes para calcular $\ln(0{,}01234)$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $0{,}01234 \times e^n \in [1,e]$. Para $n = 5$ se tiene $x = 0{,}01234 \times e^5 \simeq 1{,}831418383 \in [1,e]$. Luego

$$a = 0{,}01234 = e^{-5} \times \left(0{,}01234 \times e^5\right) \simeq e^{-5} \times 1{,}831419383,$$

y $\ln(0{,}01234) = -5 + \ln(1{,}83141838)$. Tenemos $x = 1{,}831418383$, $b_1 = \dfrac{x-1}{x+1} = 0{,}2936402433$, $b = b_1^2 = 0{,}08622459249$. Aplicando el algoritmo obtenemos $\ln(x) = 0{,}6050907394$, con lo que

$$\ln(0{,}01234) = -5 + 0{,}605090739 = -4{,}394909261.$$

En una calculadora de bolsillo $\ln(0{,}01234) = -4{,}394909261$.

3.8. Integración de funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R})$

Se denota con $C^\infty(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de las funciones reales que poseen derivadas de todos los órdenes continuas en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ se representa mediante una serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y se desea calcular $I(f) = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$, con $a > 0$.

El polinomio de Taylor de f en un entorno de cero viene dado como $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Entonces $f(x) = P(x) + E_m(x)$, donde $E_m(x)$ es el error de aproximación en x. Resulta que

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^a f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^a x^k dx + \int_0^a E_m(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} a^{k+1} + \int_0^a E_m(x)dx, \quad m = 1,2,3,\ldots,. \end{aligned}$$

Además $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, entonces $I(f) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!}a^{k+1}$. Sea

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} a^{k+1} \qquad m = 1,2,\ldots,.$$

Cada $I_m(f)$ es una aproximación de $I(f)$ por truncamiento. Sea $\epsilon > 0$ la precisión con la que se aproxima $I_m(f)$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\left|\int_0^a E_m(x)dx\right| < \epsilon$, entonces $I(f)$ puede ser aproximado por $I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!}a^{k+1}$ con una precisión $\epsilon > 0$. La condición $\left|\int_0^a E_m(x)dx\right| < \epsilon$ permite controlar el error de truncamiento.

Ejemplos

1. Sea f la función real definida por: $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^p}dt \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad p < 3$. Construyamos un algoritmo para calcular los valores aproximados de $f(x)$ y apliquemos a $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$ para $p = -1$. Para el efecto apliquemos el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen}(\alpha)$, tenemos $\operatorname{sen}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$, y para $\alpha = t^2$ se tiene $\operatorname{sen}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^p}dt = \int_0^x \left(t^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}\right)dt \\ &= \int_0^x \left(t^{-p+2}dt + t^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}dt\right) \\ &= \int_0^x t^{-p+2}dt + \int_0^x t^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}dt. \end{aligned}$$

Calculemos el primer término de la última igualdad, tenemos

$$\int_0^x t^{-p+2}dt = \left.\frac{t^{-p+3}}{-p+3}\right|_0^x = \frac{x^{-p+3}}{3-p},$$

de donde $-p+3 > 0$ con lo cual $p < 3$. Por otra parte, la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ converge uniformemente sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, podemos entonces intercambiar el símbolo de sumatoria con el de integral, se tiene

$$f(x) = \frac{x^{3-p}}{3-p} + \sum_{k+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^x t^{4k+2-p}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(4k+3-p)}x^{4k+3-p}.$$

Observe que si $k = 0$, se debe tener $3 - p > 0$ que implica $p < 3$. Si $p \geq 3$, la integral no es convergente para $x > 0$.

La representación de la función f en serie de potencias no puede ser usada para calcular $f(x)$ en el computador. Necesitamos aproximarle con una suma finita:

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k x^{4k+3-p}}{(2k+1)!(4k+3-p)} \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Para $\epsilon = 10^{-6}$ se muestra que $|f(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y $m \geq 7$. Para $m = 7$, definimos $f_7(x) = x^{3-p}(p_1(x) - p_2(x)) \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donde $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son los polinomios obtenidos de f_m con los índices pares e impares, respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{3-p} + \frac{x^8}{5!}\left(\frac{1}{11-p} + \frac{x^8}{6\times7\times8\times9}\left(\frac{1}{19-p} + \frac{x^8}{10\times11\times12\times13(27-p)}\right)\right), \\ p_2(x) &= \frac{x^4}{3!}\left(\frac{1}{7-p} + \frac{x^8}{4\times5\times6\times7}\left(\frac{1}{15-p} + \frac{x^8}{8\times9\times10\times11}\left(\frac{1}{23-p} + \frac{x^8}{12\times13\times14\times15(31-p)}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Apliquemos este algoritmo para aproximar $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$ para $p = -1$. Primeramente, notemos que para $p = -1$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t^{-1}}dt = \int_0^x t\operatorname{sen} t^2 dt = \frac{1}{2}(1 - \cos x^2).$$

En consecuencia:

$$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)\simeq 0{,}0669873.$$

Apliquemos el algoritmo. Tomemos en consideración que $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}\simeq 0{,}7236012$, luego

$$p_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)\simeq 0{,}2500522,\qquad p_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)\simeq 0{,}00571183,$$

entonces

$$f_7\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^4\left(p_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)-p_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)\right)\simeq 0{,}0669873.$$

3.9. Función error

Definición 7 *La función error se nota* err *y se define como sigue:*

$$\text{err}:\begin{cases}[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}\\ \qquad x\longmapsto \text{err}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.\end{cases}$$

Se sabe que la integral $\int_0^x e^{-t^2}dt \quad x\geq 0$, no puede calcularse con funciones elementales por lo que se debe recurrir a la aproximación numérica de la misma. Por otro lado se demuestra (véase en el siguiente capítulo la función gama de Euler) que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ con lo que

$$\text{err}\,(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

Además, se prueba que la función real u definida como

$$u\,(x,t)=\text{err}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}e^{-v^2}dv,$$

donde $a>0$ constante, $x\geq 0$, $t>0$, es solución de la ecuación en derivadas parciales del tipo parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0\quad x>0,\ t>0.$$

Esta ecuación aparece en los problemas de transferencia de calor tales como los de conducción inestable; en mecánica de fluidos en los problemas de capa límite térmica, la ecuación de Navier-Stokes para corrientes laminares no estacionarias donde la presión es constante en todo el campo; en los problemas de difusión de contaminantes en el aire así como en los problemas de filtración de contaminantes en el suelo. Es por esto que dedicamos esta sección a la aproximación numérica de la función error.

Sea $\varepsilon>0$. Con fines prácticos elegimos $\varepsilon=10^{-10}$. Determinemos $r>0$ tal que

$$\left|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\right|<\varepsilon\ \text{ si }\ x>r,$$

es decir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt<\varepsilon\ \text{ si }\ x>r.$$

Apliquemos el criterio de comparación para integrales impropias (este criterio es muy similar al de comparación de series numéricas). Sea $f\,(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t^2\right)\quad t\geq 0$. Puesto que $\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}=1$, elegimos $g\,(t)=\frac{1}{t^2}\quad t\geq 1$, y definimos $h\,(t)=\frac{f\,(t)}{g\,(t)}\quad t\geq 1$. Tenemos,

$$h\,(t)=\frac{f\,(t)}{g\,(t)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^2\exp\left(-t^2\right)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

luego, existe $r > 0$ tal que $\dfrac{f(t)}{g(t)} < \varepsilon$ si $t \geq r$ y de esta desigualdad se sigue que

$$\int_x^\infty f(f)\,dt < \varepsilon \int_x^\infty g(t)\,dt \leq \varepsilon \int_1^\infty g(t)\,dt = \varepsilon \quad \text{si} \quad x \geq r.$$

De la condición $h(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} t^2 \exp\left(-t^2\right) < \varepsilon = 10^{-10}$ determinemos $r > 1$. Para $t = 4$ se tiene $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \times 16 \exp(-16) \simeq 2{,}032 \times 10^{-6}$, para $t = 5$, se tiene $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \times 25 \exp(-25) \simeq 3{,}92 \times 10^{-10}$, para $t = 5{,}5$ resulta $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \times (5{,}5)^2 \exp(-30{,}25) \simeq 2{,}49 \times 10^{-12} < \varepsilon = 10^{-10}$.

Elegimos $r = 5{,}5$. Tenemos $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt < \varepsilon$ si $x \geq r = 5{,}5$. Así, la aproximación de la función error se reduce al intervalo $[0, 5{,}5]$. Note que para $t = 6$ se tiene $h(6) \simeq 9{,}42 \times 10^{-15}$, $t = 8$ se tiene $h(8) \simeq 1{,}16 \times 10^{-26}$, $t = 10$ se tiene $h(10) \simeq 4{,}2 \times 10^{-42}$.

Adicionalmente, para $a > 1$ calculemos $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2} dt$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$. Tenemos

$$1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^a e^{-t^2} dt + \int_a^\infty e^{-t^2} dt \right),$$

de donde $\operatorname{err}(a) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2} dt.$

Apliquemos el método de integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty e^{-t^2} dt &= \int_a^\infty \frac{-2te^{-t^2}}{-2t} dt = -\left.\frac{e^{-t^2}}{2t}\right|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \\
&= -\left.\frac{e^{-t^2}}{2t}\right|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{-2te^{-t^2}}{-4t^3} dt \\
&= -\left.\frac{e^{-t^2}}{2t}\right|_a^\infty - \left(-\left.\frac{e^{-t^2}}{4t^3}\right|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{3e^{-t^2}}{4t^4} dt \right) \\
&= -\left.\frac{e^{-t^2}}{2t}\right|_a^\infty + \left.\frac{e^{-t^2}}{4t^3}\right|_a^\infty + \frac{3}{4} \int_a^\infty \frac{-2te^{-t^2}}{-2t^5} dt \\
&= -\left.\frac{e^{-t^2}}{2t}\right|_a^\infty + \left.\frac{e^{-t^2}}{4t^3}\right|_a^\infty - \left.\frac{3e^{-t^2}}{8t^5}\right|_a^\infty - \frac{15}{8} \int_a^x \frac{e^{-t^2}}{t^6} dt.
\end{aligned}$$

Continuando con este procedimiento n veces, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty e^{-t^2} dt &= -\left.\frac{e^{-t^2}}{2t}\right|_a^\infty + \left.\frac{e^{-t^2}}{2^2 t^3}\right|_a^\infty - \left.\frac{1 \times 3 \times e^{-t^2}}{2^3 t^5}\right|_a^\infty + \left.\frac{1 \times 3 \times 5 \times e^{-t^2}}{2^4 t^7}\right|_a^\infty + \cdots + \\
&\quad \left.\frac{(-1)^n \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)\, e^{-t^2}}{2^n t^{2n}}\right|_a^\infty + \varepsilon_n(a),
\end{aligned}$$

con

$$\varepsilon_n(a) = \frac{(-1)^n \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2^n} \int_a^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}} dt.$$

Como para $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\left.\frac{e^{-t^2}}{t^{2k}}\right|_a^\infty = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^{2k} e^{t^2}} - \frac{1}{a^{2k} e^{a^2}} = -\frac{1}{a^{2k} e^{a^2}},$$

entonces

$$\int_a^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-a^2}}{2a}\left(1-\frac{1}{2a^2}+\frac{1\times 3}{2^2a^4}-\frac{1\times 3\times 5}{2^3a^6}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^na^{2n}}\right)+\varepsilon_n(a)$$

Estimemos $|\varepsilon_n(a)|$. Tenemos

$$\begin{aligned}|\varepsilon_n(a)| &= \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2^n}\left|\int_a^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}dt\right| \le \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2^n}e^{-a^2}\int_a^{\infty}\frac{dt}{t^{2n}}\\ &= \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2^n}e^{-a^2}\left[\left.\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1}\right|_a^{\infty}\right] = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2^n(2n-1)a^{2n+1}e^{a^2}}.\end{aligned}$$

Definimos $\theta_n(a) = \dfrac{e^{-a^2}}{2a}\left(1-\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1\times 3}{2^2a^4}-\dfrac{1\times 3\times 5}{2^3a^6}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^na^{2n}}\right)$.

Puesto que:

$$\begin{aligned}\operatorname{err}(a) &= 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^{\infty}e^{-t^2}dt = 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\theta_n(a)+\varepsilon(a)\right]\\ &= 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta_n(a)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\varepsilon_n(a) \qquad a>1.\end{aligned}$$

Determinemos un apropiado $n\in\mathbb{Z}^+$ y $a>1$ tal que $|\varepsilon_n(a)|<\varepsilon=10^{-10}$. Lo hacemos por tanteo.

Para $a=3$, tenemos

$$\begin{aligned}|\varepsilon_3(3)| &\le \frac{1\times 3\times 5\times 7}{2^3\times 5\times 3^7e^9}\simeq 1{,}48\times 10^{-7},\\ |\varepsilon_6(3)| &\le \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11}{2^6\times 11\times 3^{13}e^9}\simeq 1{,}443\times 10^{-9},\\ |\varepsilon_{10}(3)| &\le \frac{1\times 3\times\cdots\times 19}{2^{10}\times 19\times 3^{21}e^9}\simeq 3{,}6\times 10^{-10}.\end{aligned}$$

Como vemos, para $a=3$ no se logra la precisión deseada. Elegimos $a=3{,}5$. Entonces

$$|\varepsilon_6(3{,}5)| \le \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11\times 13}{2^6\times 11\times(3{,}5)^{13}e^{12{,}25}}\simeq 7{,}77\times 10^{-11}.$$

Note qie si $a=4$,

$$|\varepsilon_6(4)| \le \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11\times 13}{2^6\times 11\times 4^{13}e^{16}}\simeq 3{,}22\times 10^{-13}.$$

Se prueba que $|\varepsilon_6(a)|<\varepsilon=10^{-10}$ para $a\ge 3{,}5$. Los resultados anteriores nos permiten definir la función φ_r siguiente:

$$\varphi_r(x) = \begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, & \text{si } 0\le x\le 3{,}5,\\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\theta_6(x), & \text{si } 3{,}5<x\le 6,\\ 1, & \text{si } x>6.\end{cases}$$

Nos queda aproximar $\int_0^x e^{-t^2}dt \quad x\in[0,3{,}5]$. Para el efecto, utilizamos el desarrollo de Taylor de $\exp(\alpha)$. Tenemos $\exp(\alpha)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\alpha^k}{k!}$, haciendo $\alpha=-t^2$ se obtiene $\exp(-t^2)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!}t^{2k}$. Aplicando el teorema de la convergencia uniforme y la integración, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2}dt &= \int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^x t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{k!(2k+1)}\\ &= t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}t^{2k}.\end{aligned}$$

Sera $m \in \mathbb{Z}^+$ y $S_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{k!\,(2k+1)} \quad x \in [0, 3{,}5]$.

Para obtener un algoritmo de cálculo de $\operatorname{err}(x) \quad x \in [0, 3{,}5]$, con la precisión fijada $\varepsilon = 10^{-10}$, determinemos $m \in \mathbb{Z}^+$ el más pequeño posible tal que

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!\,(2k+1)} - S_m(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!\,(2k+1)} < \varepsilon.$$

Es claro que si $x \in [0,1]$ se requiere menos términos que si $x \in [3, 3{,}5]$. Por esta razón consideramos los intervalos $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, $]3, 3{,}5]$.

Apliquemos el criterio de comparación. Para $a \in [0, 3{,}5]$, ponemos $a_k = \dfrac{a^{2k}}{k!\,(2k+1)}$ y elegimos $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ que como es conocido $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$. Definimos $C_k = \dfrac{a_k}{b_k} \quad k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$C_k = \frac{k(k+1)}{k!\,(2k+1)} a^{2k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon$ si $k \geq m$, y de esta relación se obtiene

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} x^{2k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!\,(2k+1)} < \varepsilon \;\text{ si }\; x \leq a.$$

El más pequeño $m \in \mathbb{Z}^+$ (no óptimo) se obtiene de la desigualdad $\dfrac{k(k+1)}{k!\,(2k+1)} a^{2k} < \varepsilon = 10^{-10}$.

Para $a = 1$, se obtiene $m = 15$, para $a = 2$ resulta $m = 27$, para $a = 3$ se tiene $m = 43$ y para $a = 3{,}5$ es $m = 55$.

Con todos estos resultados, definimos la función φ como sigue:

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=0}^{15} \dfrac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} x^{2k}, & \text{si } \; x \in [0,1], \\ \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=0}^{27} \dfrac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} x^{2k}, & \text{si } \; x \in \,]1,2], \\ \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=0}^{43} \dfrac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} x^{2k}, & \text{si } \; x \in \,]2,3], \\ \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=0}^{55} \dfrac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} x^{2k}, & \text{si } \; x \in \,]3, 3{,}5], \\ 1 - \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \theta_6(x), \quad \text{si } \; x \in \,]3{,}5, 6], \\ 1, \quad \text{si } \; x > 6. \end{cases}$$

Esta función φ_ϵ aproxima a la función error con una precisión $\varepsilon = 10^{-10}$, tenemos

$$\|\varphi_\epsilon - \operatorname{err}\|_\infty = \max_{x \in [0,\infty[} |\varphi_\epsilon(x) - \operatorname{err}(x)| < \varepsilon,$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma de Chebyshev (véase en el apéndice los espacios normados).

Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ impar. Se pone $n = \dfrac{m-1}{2}$. Para escribir un algoritmo simple de cálculo asociamos los términos con signo positivo y aquellos con signo negativo. Tenemos

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} x^{2k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{4k}}{(2k)!\,(4k+1)} - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2(2k+1)}}{(2k+1)!\,(4k+3)}$$

y definimos ψ_1, ψ_2, ψ_3 como sigue:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{4k}}{(2k)!\,(4k+1)} = 1 + \frac{x^4}{2!\times 5} + \frac{x^8}{4!\times 9} + \frac{x^{12}}{6!\times 13} + \cdots + \frac{x^{4p}}{(2p)!\,(4p+1)} \\ &= 1 + \frac{x^4}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{x^4}{3\times 4}\left(\frac{1}{9} + \frac{x^4}{5\times 6}\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{x^4}{(2p-3)\,(2p-2)}\left(\frac{1}{4p-3} + \right.\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\left. + \frac{x^4}{(2p-1)\,(2p)\,(4p+1)}\right)\cdots\right)\right)\right),\end{aligned}$$

$\psi_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{x^{4k+2}}{(2k+1)!\,(4k+1)}$ y se escribe en forma similar a $\psi_1(x)$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\psi_3(x) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta_6(x) \\ &= 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left[1 + \frac{1}{x^4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{x^4}\left(\frac{105}{16} + \frac{10395}{64x^4}\right)\right) - \frac{1}{2x^2}\left(1 + \frac{1}{x^4}\left(\frac{15}{4} + \frac{945}{16x^4}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

Ejemplo

En la tabla siguiente se dan algunos valores aproximados de $\mathrm{err}(x)$ para los valores x que se indican calculados con la función $\varphi_\epsilon(x)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0
$\mathrm{err}(x)$	0,223	0,428	0,604	0,742	0,843	0,910	0,966	0,995

3.10. Aproximación numérica de una integral elíptica

En esta sección consideramos la aproximación numérica de una clase de integrales elípticas, más exactamente la aproximación numérica de la integral elíptica incompleta de segunda especie que es a su vez conocida como forma de Legendre para la integral elíptica de segunda especie. Esta integral se define como sigue:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)}dt \qquad \text{para } 0 \leq k \leq 1,$$

y se presenta en el cálculo de la longitud de un arco de la elipse, también aparece en la solución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. El interés de la aproximación numérica de esta clase de integrales es la de proporcionar de una metodología que puede ser implementada para la aproximación numérica de otros tipos de integrales elípticas, que como se ha dicho aparecen en algunas aplicaciones. Cabe señalar que la integral elíptica incompleta de segunda especie no puede calcularse mediante funciones elementales cuando $k \in]0,1[$.

La función real g definida sobre $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$ como $g(k,t) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)}$ $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $k \in [0,1]$, es continua, y la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(k,t)dt$ es dependiente del parámetro $k \in [0,1]$. Por el teorema de la continuidad de integrales dependientes de un parámetro, resulta que la función E definida sobre $[0,1]$ como $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(k,t)dt$ es continua sobre $[0,1]$.

Nos interesamos en el cálculo de $E(k)$ cuando $k \in]0,1[$. Para el efecto, representaremos $E(k)$ como una serie de potencias. Primeramente utilizaremos la serie binómica y el teorema de la convergencia uniforme y la integración. La serie de potencias será utilizada para elaborar un algoritmo para aproximar $E(k)$ con una precisión $\epsilon = 10^{-6}$ de modo que se adapte a la estabilidad numérica, y, finalmente aplicaremos el algoritmo para aproximar $E(0{,}5)$.

Para $|x| < 1$ y $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, la serie binómica está definida como la serie:

$$(1-x)^{\alpha} = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots ,$$

y para $\alpha = \frac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned}(1-x)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1\times 3}{2^3}\right)x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Esta serie es absolutamente convergente para todo $x \in]-1,1[$, por lo que se aplica el teorema de la convergencia uniforme y la integración. Haciendo $x = k^2\operatorname{sen}^2(t)$, se deduce que

$$\begin{aligned}E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2(t) - \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}\left(k^2\operatorname{sen}^2(t)\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1\times 3}{2^3}\right)\left(k^2\operatorname{sen}^2(t)\right)^3 + \cdots\right)dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2(t)dt - \frac{1}{2!}\frac{k^4}{2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^4(t)dt - \frac{1}{3!}\frac{1\times 3}{2^3}k^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^6(t)dt + \cdots .\end{aligned}$$

Sea $I(j) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2j}(t)dt$, $j = 1, 2, \ldots$. Apliquemos el método de integración por partes. Tenemos

$$\begin{aligned}I(j) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2j}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(t)\ \operatorname{sen}^{2j-1}(t)dt \\ &= -\cos(t)\ \operatorname{sen}^{2j-1}(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2j-2}(t)\cos^2(t)dt \\ &= (2j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^{2j-2}(t))\ (1-\operatorname{sen}^2(t))dt = (2j-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2j-2}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2j}(t)dt\right] \\ &= (2j-1)\left[I(j-1) - I(j)\right],\end{aligned}$$

y de este resultado obtenemos la siguiente fórmula de recursividad

$$I(j) = \frac{2j-1}{2j}I(j-1) \quad j = 1, 2, \ldots$$

Utilizando esta fórmula de recursividad, se obienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}I(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}, \quad I(1) = \frac{1}{2}I(0) = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, \quad I(2) = \frac{3}{4}I(1) = \frac{1\times 3}{2^2\times 1\times 2}\frac{\pi}{2}, \\ I(3) &= \frac{5}{6}I(2) = \frac{1\times 3\times 5}{2^3\times 1\times 2\times 3}\frac{\pi}{2}, \cdots , \quad I(j) = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2j-1)}{2^j\times j!}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Remplazando cada uno de estos resultados en la representación de $E(k)$, obtenemos la serie de potencias

$$\begin{aligned}E(k) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}k^2\left(\frac{1}{1\times 2}\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2!}\frac{k^4}{2^2}\left(\frac{1\times 3}{2^2\times 2!}\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{1\times 3}{2^3}\right)k^6\left(\frac{1\times 3\times 5}{2^3\times 3!}\frac{\pi}{2}\right) - \cdots \\ &= \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{k^2}{2^2} - \frac{1}{2!}\frac{1\times 3}{2^2\times 2^2}k^4 - \frac{1\times 3}{2^3\times 3!}\frac{1\times 3\times 5}{2^3\times 3!}k^6 - \ldots\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{k^2}{2^2} - \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 3\times 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \ldots\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1\times 3\times\ldots\times(2j-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2j}\right)^2\frac{k^{2j}}{2j-1}\right].\end{aligned}$$

En conclusión, la integral elíptica incompleta de segunda especie se representa como la siguiente serie de potencias:

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1\times 3\times\ldots\times(2j-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2j}\right)^2 \frac{k^{2j}}{2j-1}\right] \qquad \text{k} \in]0,1[.$$

Para $\varepsilon > 0$, determinemos si es posible, el más pequeño número de términos n tal que $| E(k) - E_n(k) | < \varepsilon$. Para el efecto aplicamos el criterio de comparación de series. Sean $a_j(k) = \left(\frac{1\times 3\times\ldots\times(2j-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2j}\right)^2 \frac{k^{2j}}{2j-1}$, $b_j = \frac{1}{j(j+1)}$. Se tiene que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$ y para $0 < k < 1$,

$$\frac{a_j(k)}{b_j} = \frac{j(j+1)}{2j-1}\left(\frac{1\times 3\times\ldots\times(2j-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2j}\right)^2 k^{2j} \underset{j\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_j(k)}{b_j} < \epsilon$ si $j \geq n > 1$, de donde

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(k) - \sum_{j=1}^{n} a_j(k)\right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(k) < \epsilon.$$

Sea $E_n(k) = \frac{\pi}{2}(1 - S_n(k))$, con

$$\begin{aligned}
S_n(k) &= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1\times 3\times\ldots\times(2j-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2j}\right)^2 \frac{k^{2j}}{2j-1}\\
&= \frac{k^2}{2^2} + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2\frac{k^4}{3} + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^2\frac{k^6}{5} + \cdots + \left(\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\\
&= \frac{k^2}{2^2} + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2 k^4\left(\frac{1}{3} + \left(\frac{5k}{6}\right)^2\left(\frac{1}{5} + \left(\frac{7k}{8}\right)^2\left(\frac{1}{7} + \cdots +\right.\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left.\left(\frac{(2n-3)k}{2(n-1)}\right)^2\left(\frac{1}{2n-3} + \left(\frac{2n-1}{2n}k\right)^2\frac{1}{2n-1}\right)\cdots\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

La escritura de $Sn(k)$ evita el cálculo directo de los coeficientes del sumatorio así como el cálculo directo de las potencias y con esto se reduce significativamente el número de operaciones elementales a realizar. Por otro lado facilita la elaboración de un algoritmo numérico, como el que se propone a continuación.

<u>Algoritmo</u>

Datos de entrada: k, n

Datos de salida: $E_n(k)$.

1. Poner $b = \frac{1}{2n-1}$.

2. $j = 1, \ldots, n-2$

   $m = n + 1 - j$

   $b = \frac{1}{2m-3} + b * \left(\frac{2m-1}{2m}k\right)^2$

   Fin de bucle j.

3. $S_n(k) = \frac{k^2}{4} + \left(\frac{3k^2}{8}\right)^2 * b$.

4. $E_n(k) = \frac{\pi}{2}(1 - S_n(k))$.

5. Imprimir $E_n(k)$.

6. Fin.

Apliquemos el procedimiento arriba descrito para aproximar $E(0{,}5)$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-6}$. Para el efecto, ponemos $k = \dfrac{1}{2}$, entonces

$$\frac{a_j\left(\frac{1}{2}\right)}{b_j} = \frac{j(j+1)}{2j-1}\left(\frac{1\times 3\times\cdots\times(2j-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2j}\right)^2\frac{1}{2^{2j}} < 10^{-6} \qquad \text{si } j\geq 10.$$

Por lo tanto, $S_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} S_{10}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{16}+\frac{9}{1024}\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{7}{16}\right)^2\left(\frac{1}{7}+\left(\frac{9}{20}\right)^2\left(\frac{1}{9}+\right.\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.\left.\left(\frac{11}{24}\right)^2\left(\frac{1}{11}+\left(\frac{13}{28}\right)^2\left(\frac{1}{13}+\left(\frac{15}{32}\right)^2\left(\frac{1}{15}+\left(\frac{17}{36}\right)^2\left(\frac{1}{17}+\left(\frac{19}{40}\right)^2\frac{1}{19}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Realizando estos cálculos elementales, se obtiene $S_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + 0{,}003284541926$ y el consecuencia

$$E_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{16}-0{,}003284541926\right) = 1{,}46746221.$$

3.11. Ejercicios

1. Determinar el radio de convergencia de cada una de las series que se proponen en cada item.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$. **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$. **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,(n-1)}$. **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$. **f)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}x^n$.

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)3^n}x^n$. **h)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$. **i)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!2^n}$. **j)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n}$. **k)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n+1)(n+2)(2n+3)}$.

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n!)(3n+1)}$. **n)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}x^n$. **o)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n-2)2^n}x^{3n}$. **p)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)}x^{\frac{n}{3}}$.

2. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\operatorname{senh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. **b)** $\cosh(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

c) $(1+x)^{\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (serie binómica), $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ $k = 1,2,\ldots$.

d) $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k$. **e)** $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$.

f) $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots$

Utilice d) para obtener e) y f).

Sean $m\in\mathbb{Z}^+$ y $S_m(x)$ una suma finita con m términos de cada serie. Escriba un algoritmo para calcular $S_m(x)$ de modo que se adapte a la estabilidad numérica, $x\in I$, donde I es el más grande subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que la serie converge absolutamente.

3. Se sabe que $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$, $\quad\operatorname{sen}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}t^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\quad\cos(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$, $\quad t\in\mathbb{R}$. Aplique el teorema de la convergencia uniforme y la integración para expresar las siguientes integrales en series de potencias, $x>0$.

Para cada función f que se define a continuación, calcular una aproximación $\widetilde{f}(x)$ de $f(x)$ para el punto x que se precisa de modo que $\left|f(x)-\widetilde{f}(x)\right|<10^{-5}$ y el número de operaciones elementales que se requiere en el cálculo de $\widetilde{f}(x)$ sea el más pequeño posible (evite el cálculo directo de los factoriales y las potencias).

a) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt,\quad x=0{,}2.$ **b)** $f(x)=\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)dt,\quad x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}.$

c) $f(x)=\int_0^x \cos\left(\sqrt{t}\right)dt,\quad x=\dfrac{\pi}{9}.$ **d)** $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{e^t-1}{t},\quad x=0{,}1.$

e) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt,\quad x=0{,}1.$ **f)** $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{t}-\operatorname{sen}(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}dt,\quad x=0{,}3.$

g) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}(e^{-t^3}-e^{-t^2}+e^{-\sqrt{5}t})dt,\quad x=0{,}2.$

4. Aproximar, en cada caso, la integral con una precisión de 10^{-8}.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x^{\frac{1}{4}}\right)dx.$ **b)** $\int_0^1 t^{\frac{1}{3}}e^{-t^2}dt.$ **c)** $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\left(t^{1/2}\right)dt,\ \operatorname{sen}^2(\alpha)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\alpha^{2n},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)}}.$ **e)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1+x^4)^{1/4}}.$

5. Considerar la integral $I(p)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+px^4}}$ donde $p\geq 0$.

a) Utilice el binomio de Newton con exponente fraccionario para representar $I(p)$ como una serie de potencias de p.

b) Determine para que valores de $p\geq 0$ la serie de potencias es absolutamente convergente.

c) Para $p\geq 0{,}2$, determine el número más pequeño de términos que se requieren para aproximar $I(p)$ con una precisión de 10^{-4} y aproxime $I(0{,}4)$.

6. Utilice la serie $\dfrac{1}{1-\alpha}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k,\ |\alpha|<1$, para elaborar un algoritmo numéricamente estable que permita aproximar $I(p)=\int_0^p\frac{dx}{1+x^4}\quad 0\leq p\leq\frac{1}{2}$, con una precisión $\varepsilon=10^{-10}$.

7. Sea $\alpha\in\mathbb{R}^+$. La función de Bessel de orden α se define mediante la serie

$$f_\alpha(x)=|x|^\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}\right).$$

a) Estudie la convergencia de la serie.

b) Elabore un algoritmo que permita aproximar $f_\alpha(x)$ con una precisión $\varepsilon>0$.

8. Sean $a\geq 0,\ \ p\in\mathbb{Q}$. El binomio de Newton con exponente fraccionario se expresa mediante el siguiente desarrollo en serie de potencias:

$$(1+a)^p=1+pa+\frac{p(p-1)}{2!}a^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}a^3+\cdots$$

Aplique este desarrollo para calcular un valor aproximado $\widetilde{f}(x)$ de $f(x)$ que se define en cada caso, de modo que $\left|f(x)-\widetilde{f}(x)\right|<10^{-4}$ y el número de operaciones elementales para el cálculo de $\widetilde{f}(x)$ sea el más pequeño posible.

a) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{1}{2}t^4}}\quad x=0{,}1.$ **b)** $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\left(1-\frac{1}{4}t^4\right)^{\frac{1}{3}}}\quad x=0{,}5.$

c) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\left(1-\tfrac{1}{4}t^4\right)^{\frac{3}{4}}dt\quad x=0{,}2.$ **d)** $f(x)=\displaystyle\int_0^x\left(1+\tfrac{1}{5}t^3\right)^{-\frac{2}{3}}dt\quad x=0{,}3.$

e) $f(x) = \int_0^x \left(1+0{,}5t^2\right)^{-\frac{1}{3}} dt \quad x \in [0,1], \quad x = 0{,}5.$ **f)** $f(x) = \int_0^x \left(1+\frac{1}{2}t^3\right)^{\frac{2}{3}} dt \quad x \in [0,1],$ $x = 0{,}5.$

g) $f(x) = \int_0^x \left(1+t^3\right)^{\frac{1}{3}} dt \quad x \geq 0, \ x = 0{,}2.$ **h)** $f(x) = \int_0^x \left(1-0{,}2t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad x \in [0,1[, \ x = 0{,}3.$

9. Sea $\varepsilon = 10^{-5}$. Aplique el algoritmo para la aproximación de la integral elíptica incompleta de segunda especie en el punto $k = \dfrac{1}{3}$ y $k = 0{,}6$.

10. Aplique el algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x)$ en los siguientes casos y una preccisión $\varepsilon = 10^{-9}$.

    a) $\operatorname{sen}(-15{,}2)$. **b)** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. **c)** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$. **d)** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{20}{3}\pi\right)$. **e)** $\operatorname{sen}(125)$.

    Compare con los resultados obtenidos directamente de una calculadora de bolsillo

11. Para $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ se ha propuesto un algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x)$. Elabore un algoritmo de cálculo de $\operatorname{sen}(x) \quad x \in \mathbb{R}$ que incluya los siguientes casos: $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $x > \pi$ y $x < 0$.

12. Aplique el algoritmo de cálculo de $\exp(x)$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-9}$, en los siguientes casos:

    a) $\exp(0{,}2)$. **b)** $\exp(2{,}5)$. **c)** $\exp(25{,}2)$. **d)** $\exp(-0{,}3)$. **e)** $\exp(-5{,}2)$.

    Compare con los resultados obtenidos directamente de una calculadora de bolsillo.

13. Sean $a > 1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Elabore un algoritmo de cálculo de $y = a^n$ y verifique en los siguientes casos.

    a) $a = 3{,}14159265$ y $n = 4$. **b)** $a = 2{,}71828184$ y $n = 9$. **c)** $a = \sqrt{2} \simeq 1{,}414213562$ y $n = 10$.

14. Sea f la función real definida como $f(x) = \tan(x) \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. El cálculo de $f^{(k)}(0)$ para $k = 0, 1, \ldots, 11$ da lugar al siguiente desarrollo de Taylor.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{2}{3!}x^2 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + \frac{7936}{9!}x^9 + \frac{353792}{11!}x^{11} + \cdots \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \cdots \end{aligned}$$

    Para $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{10}\right]$ elabore unalgoritmo de cálculo de $\tan(x)$ usando el desarrollo precedente y calcule los siguientes valores:

    a) $\tan(0{,}1)$. **b)** $\tan\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$. **c)** $\tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ y compare con los obtenidos en una calculadora de bolsillo. Estime el error de aproximación.

    Calcule $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ con el polinomio de grado 11 y compare con el valor obtenido en una calculadora de bolsillo.

15. La integral elíptica incompleta de primera especie se define como $F(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2(\theta)}} d\theta$ $p \in [0,1[$. Esta integral no se calcula con funciones elementales, por lo que se le representa mediante una serie de potencias.

    a) Estudie la continuidad de la función F sobre el intervalo $[0,1[$.

    b) Represente $F(p) \quad p \in]0,1[$, mediante serie de potencias.

    c) Sea $\varepsilon = 10^{-5}$. Construya un algoritmo para la aproximación de la integral elíptica incompleta de primera especie de modo que el número de operaciones elementales sea el más pequeño posible y aplique dichoa algoritmo en los puntos $k = \dfrac{1}{4}$ y $k = 0{,}6$.

16. Se considera la función real h definida como $h(p,x) = \int_0^x \dfrac{1}{(1+p^4t^4)^{\frac{1}{3}}} dt$, donde $p \geq 0$, $x \in [0,1]$. Estudie la función h. Utilice la serie binómica para representar la función h como una serie de potencias. Para $\varepsilon = 10^{-4}$, elabore un algoritmo para la aproximación de $h(p,x)$ de modo el número

de operaciones elemenetales sea el más pequeño entero posible. Aplique el algoritmo para calcular valores aproximados de $h(0{,}5, 0{,}2)$, $h(0{,}5, 0{,}5)$, y, $h(1, 0{,}2)$, $h(1, 1)$.

17. Considerar la integral $I = \int_0^x f(t)dt$, $x > 0$, donde f es la función representada en serie de potencias que en cada caso se define. Calcule I_n aproximación de I para el valor de x que se da de modo que $|I - I_n| < 10^{-4}$.

    a) $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{(k+1)k2^k}$, $\quad x = 1$. **b)** $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k+1}}{k!(3k+5)}$, $\quad x = 2$.

    c) $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k t^k}{(2k)!}$, $\quad x = 3$. **d)** $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^{2k}}{(2k+1)(k+1)5^k}$, $\quad x = 2$.

18. En el siguiente ejercicio

    a) Utilice la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, para aproximar la integral $I = \int_0^1 x^{1/2}\operatorname{sen}(x)dx$, mediante sumas finitas con $5, 7, 9, 11$ términos.

    b) Aplique el método de los trapecios para aproximar I con $n = 5, 7, 9, 11$.

    c) Aplique el método de Euler explícito (véase el capítulo 1) para aproximar $u(1)$ solución de la ecución diferencial $\begin{cases} u'(t) = t^{1/2}\operatorname{sen}(t), t \in]0,1[, \\ u(0) = 0, \end{cases}$ con $n = 5, 7, 9, 11$. Compare los resultados de a), b) precedentes con c).

19. Proceda de manera análoga al ejercicio precedente para aproximar la integral $I = \int_0^1 \cos(x^{1/2})dx$.

20. Considere la integral $I(p) = \int_0^1 x^{-p}e^x dx$, $p > 1$.

    a) Pruebe que $I(p) < \infty$, $\quad \forall p > 1$.

    b) Utilice la serie de Taylor de e^x y elabore un algoritmo para aproximar $I(p)$ con una precisión $\epsilon = 10^{-6}$.

    c) Aplique el algoritmo para aproximar $I(1{,}1)$, $I(1{,}5)$. ¿Cuántas operaciones elementales se requieren?.

21. La solución en serie de potencias de x de la ecuación de Airy: $y'' = xy$, $x \in \mathbb{R}$, viene dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\times\cdots\times 3\times 2}\right] \\ &\quad + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\times\cdots\times 4\times 3}\right], \end{aligned}$$

    donde a_0, a_1 son constantes reales.

    a) Elaborar un algoritmo que permite aproximar $y(x)$, $x \in [0, 1]$.

    b) Si $a_0 = a_1 = 1$, bosqueje la gráfica de la solución $y(x)$ en puntos igualmente espaciados (tómese por ejemplo $x_k = kh$, con $h = 0{,}2$, $k = 0, 1, \ldots, 5$).

22. La ecuación diferencial de Bessel de orden λ es la ecuación: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$. La función de Bessel de orden cero de primera clase se representa por

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

    La función de Bessel de orden cero de segunda clase se representa por

$$K_0(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + (\ln(x))\, J_0(x).$$

    Se demuestra que estas dos funciones son soluciones de la ecuación de Bessel.

    a) Elaborar un algoritmo que permita aproximar $J_0(x)$ y $K_0(x), x \in]0, 2]$.

    b) Bosquejar las gráficas de $J_0(x)$ y $K_0(x)$, $x \in]0, 2]$ en puntos igualmente espaciados $x_k = 0{,}2k$ $k = 1, \ldots, 10$.

23. Se prueba que la solución de la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \text{ sobre }]0,T[\times]0,L[, \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \forall t \in [0,T], \end{aligned}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 < x < \frac{L}{2}, \\ L - x, \text{ si } \frac{L}{2} \leq x \leq L, \end{cases}$$

donde $c > 0$, $T > 0$, $L > 0$, x es la variable espacial, t es la variable temporal y u es la temperatura; viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k^2 t} \operatorname{sen}(\frac{\pi k x}{L}) \qquad (x,t) \in [0,T] \times [0,L],$$

donde $\lambda_k = \dfrac{\pi c k}{L}$, $k = 1, 2 \ldots$, y a_k está definido por $a_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es par}, \\ \dfrac{4L}{\pi^2 k^2}, & \text{si } k = 1, 5, 9, \ldots \\ -\dfrac{4L}{\pi^2 k^2}, & \text{si } k = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$

a) Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{L}{m}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $I = \frac{T}{n}$, $t_j = T_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Elabore un algoritmo para aproximar la solución de $u(x_i, t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

b) Supóngase que $c = L = 1$, $T = 2$, $m = 10$, $n = 4$. Trace las gráficas de las soluciones aproximadas a cada instante t_j con $3, 4$ y 5 términos de la serie.

24. En cada uno de los items siguientes se da una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$ que se indica y $n \in \mathbb{Z}^+$. Represente $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ como serie de potencias y aproxime dicha integral con el número de términos que se da, ¿qué precisión logra?

a) $f(x) = e^{x^2}$ $\quad x \in [0,1]$, $n = 5$. **b)** $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ $\quad x \in [-1,1]$, $n = 4$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ $\quad x \in [1,2]$, $n = 5$. **d)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad x \in [1,4]$, $n = 5$.

3.12. Lecturas complementarias y bibliografía

1. Tom M. Apostol, Análisis Matemático, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.

2. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 1, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1977.

3. Tom M. Apostol, Calculus, Volumen 2, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.

4. N. Bakhvalov, Métodos Numéricos, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.

5. R. M. Barbolla, M. García, J. Margalef, E. Outerelo, J. L. Pinilla. J. M. Sánchez, Introducción al Análisis Real, Editorial Alambra Universidad, Madrid, 1981.

6. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, International Thomson Editores, S. A., México, 2002.

7. Alan W. Bush, Perturbation Methods for Engineers and Scientists, CRC Press, Boca Raton, 1992.

8. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Third Edition, Editorial McGraw-Hill, Boston, 1998.

9. S. D. Conte, Carl de Boor, Análisis Numérico, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México, 1981.

10. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. Cálculo Numérico Fundamental, Editorial Paraninfo, Madrid, 1977.

11. B. P. Demidovich, I. A. Maron, E. S. Schuwalowa, Métodos Numéricos de Análisis, Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.

12. C. H. Edwards, Jr., David E. Penney, Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera, Tercera Edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1993.

13. Ferruccio Fontanella, Aldo Pasquali, Calcolo Numerico. Metodi e Algoritmi, Volumi I, II Pitagora Editrice Bologna, 1983.

14. Waltson Fulks, Cálculo Avanzado, Editorial Limusa, México, 1973.

15. Wilfred Kaplan, Donald J. Lewis, Cálculo y Algebra Lineal, Volumen I, Primera Reimpresión, Editorial Limusa, México, 1978.

16. E. J. Hinch, Perturbation Methods, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

17. Robert W. Hornbeck, Numerical Methods, Quantum Publishers, Inc., New York, 1975.

18. R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, Tercera Edición, Editorial Pearson Educación, México, 2001.

19. David Kincaid, Ward Cheney, Análisis Numérico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.

20. Melvin J. Maron, Robert J. López, Análisis Numérico, Tercera Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1995.

21. Shoichiro Nakamura, Métodos Numérico Aplicados con Software, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1992.

22. Anthony Ralston, Introducción al Análisis Numérico, Editorial Limusa, México, 1978.

23. Francis Scheid, Theory and Problems of Numerical Analysis, Schaum's Outline Series, Editorial McGraw-Hill, New York, 1968.

24. Bhimsen K. Shivamoggi, Perturbation Methods for Differential Equations, Editorial Birkhäuser, Boston, 2003.

25. Michael Spivak, Calculus, Segunda Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1996.

26. Ferdinand Verhulst, Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics, Editorial Springer, New York, 2005.