4.2. Численные методы решение краевой задачи для ОДУ

Примером краевой задачи является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

$$y''=f(x,y,y') \tag{4.28}$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка $[a,b]$.

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y(b) &= y_1 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Следует найти такое решение $y(x)$ на этом отрезке, которое принимает на концах отрезка значения y_0, y_1. Если функция $f(x,y,y')$ линейна по аргументам y, y', то задача (4.28),(4.29) - линейная краевая задача, в противном случае – нелинейная.

Кроме граничных условий (4.29) называемых граничными условиями первого рода, используются еще условия на производные от решения на концах - граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} y'(a) &= \hat{y}_0 \\ y'(b) &= \hat{y}_1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

или линейная комбинация решений и производных - граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \alpha y(a)+\beta y'(a) &= \hat{y}_0 \\ \delta y(b)+\gamma y'(b) &= \hat{y}_1 \end{aligned}, \tag{4.31}$$

где $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ - такие числа, что $|\alpha|+|\beta|\neq 0, |\delta|+|\gamma|\neq 0$.

Возможно на разных концах отрезка использовать условия различных типов.

В данном пособии рассматриваются два приближенных метода решения краевой задачи:

- метод стрельбы (пристрелки);
- конечно-разностный метод.

4.2.1. Метод стрельбы

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи.

Пусть надо решить краевую задачу (4.28), (4.29) на отрезке $[a,b]$. Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с уравнением (4.28) и с начальными условиями

$$\begin{matrix} y(a) = y_0 \\ y'(b) = \eta \end{matrix}, \qquad (4.32)$$

где η - некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = a$.

Положим сначала некоторое начальное значение параметру $\eta = \eta_0$, после чего решим каким либо методом задачу Коши (4.28),(4.32). Пусть $y = y_0(x, y_0, \eta_0)$ решение этой задачи на интервале $[a,b]$, тогда сравнивая значение функции $y_0(b, y_0, \eta_0)$ со значением y_1 в правом конце отрезка можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению в левом конце отрезка. Решая задачу Коши для нового значения $\eta = \eta_1$, получим другое решение со значением $y_1(b, y_0, \eta_1)$ на правом конце. Таким образом, значение решения на правом конце $y(b, y_0, \eta\ )$ будет являться функцией одной переменной η. Задачу можно сформулировать таким образом: требуется найти такое значение переменной η^*, чтобы решение $y(b, y_0, \eta^*)$ в правом конце отрезка совпало со значением y_1 из (4.29). Другими словами решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\eta) = 0, \qquad (4.33)$$

где $\Phi(\eta) = y(b, y_0, \eta) - y_1$.

Уравнение (4.33) является “алгоритмическим” уравнением, так как левая часть его задается с помощью алгоритма численного решения соответствующей задачи Коши. Но методы решения уравнения (4.33) аналогичны методам решения нелинейных уравнений, изложенным в разделе 2. Следует заметить, что так как невозможно вычислить производную функции $\Phi(\eta)$, то вместо метода

Ньютона следует использовать метод секущих, в котором производная от функции заменена ее разностным аналогом. Данный разностный аналог легко вычисляется по двум приближениям, например η_k и η_{k+1}. Следующее значение искомого корня определяется по соотношению

$$\eta_{j+2} = \eta_{j+1} - \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\Phi(\eta_{j+1}) - \Phi(\eta_j)} \Phi(\eta_{j+1}) \qquad (4.34)$$

Итерации по формуле (4.34) выполняются до удовлетворения заданной точности.

Пример 4.9. Методом стрельбы решить краевую задачу $y'' = e^x + \sin y$ с граничными условиями 1-го рода $y(0) = 1, y(1) = 2$ на отрезке $[0,1]$.

Решение

Заменой переменных $z = y'$ сведем дифференциальное уравнение второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = e^x + \sin y \end{cases}$$

Задачу Коши для системы с начальными условиями на левом конце $y(0) = 1, y'(0) = \eta$ будем решать методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0.1$ до удовлетворения условия на правом конце $|y(1.0,1.0,\eta_k) - 2.0| = |\Phi(\eta_k)| \le \varepsilon$, где $\varepsilon = 0.0001$, и $y(1.0,1.0,\eta_k)$ - значение решения задачи Коши в правом конце отрезка при $b = 1.0, y(0) = y_0 = 1.0$, η_k - значение первой производной к решению в левом конце отрезка на k – ой итерации.

Примем в качестве первых двух значений параметра η следующие: η_0 =1.0, η_1 =0.8. Дважды решим задачу Коши с этими параметрами методом Рунге-Кутта с шагом h =0.1, получим два решения $y(1.0,1.0,\eta_0) =$ 3.168894836, $y(1.0,1.0,\eta_1) =$ 2.97483325. Вычислим новое приближение параметра η по формуле (4.34)

$$\eta_2 = 0.8 - \frac{0.8 - 1.0}{2.97483325 - 3.168894836}(2.97483325 - 2.0) = -0.204663797;$$

Решая задачу Коши с параметром η_2, получим решение $y(1.0, 1.0, \eta_2) =$ 1.953759449 и так далее.

$$\eta_3 = -0.204663797 - \frac{-0.204663797 - 0.8}{1.953759449 - 2.97483325}(1.953759449 - 2.0) = -0.159166393;$$

$y(1.0, 1.0, \eta_3) =$ 2.001790565; $|\Phi(\eta_3)| = 0.001790565 \ge \varepsilon$;

$$\eta_4 = -0.159166393 - \frac{-0.159166393 - (-0.204663797)}{2.001790565 - 1.953759449}(2.001790565 - 2.0) = -0.160862503;$$

$y(1.0, 1.0, \eta_4) =$ 2.000003115; $|\Phi(\eta_4)| = 0.000003115 \le \varepsilon$;

Вычисления заносим в таблицу 4.15

Таблица 4. 15

j	η_j	$y(1.0, 1.0, \eta_j)$	$\|\Phi(\eta_j)\|$
0	+1.000000000	3.168894836	1.168894836
1	+0.800000000	2.974483325	0.974483325
2	-0.204663797	1.953759449	0.046240551
3	-0.159166393	2.001790565	0.001790565
4	-0.160862503	2.000003115	0.000003115

Приближенным решением краевой задачи будем считать табличную функцию, полученную в результате решения задачи Коши с параметром η_4 и приведенную в таблице 4.16.

Таблица 4.16

x_k	0.0	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.000
y_k	1.0	0.99328	1.00601	1.03942	1.09497	1.17434	1.27944	1.41236	1.57528	1.77045	2.000

4.2.2. Конечно-разностный метод решения краевой задачи

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a,b]$

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) \tag{4.35}$$

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1 \ . \tag{4.36}$$

Введем разностную сетку на отрезке $[a,b]$ $\Omega^{(h)} = \{x_k = x_0 + hk\}$, $k = 0,1,\ldots, N$, $h = |b-a|/N$. Решение задачи (4.35),(4.36) будем искать в виде сеточной функции $y^{(h)} = \{y_k, k = 0,1,\ldots, N\}$, предлагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных следующим образом:

$$y_k' = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2)\,;$$

$$y_k'' = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2)\,; \tag{4.37}$$

Подставляя аппроксимации производных из (4.37) в (4.35),(4.36) получим систему уравнений для нахождения y_k:

$$\begin{cases} y_0 = y_a \\ \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p(x_k)\dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q(x_k)y_k = f(x_k), k = \overline{1, N-1} \\ y_N = y_b \end{cases} \tag{4.38}$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода два неизвестных y_0, y_N уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$\begin{cases} (-2+h^2q(x_1)y_1+(1+\dfrac{p(x_1)h}{2})y_2=h^2f(x_1)-(1-\dfrac{p(x_1)h}{2})y_a \\ (1-\dfrac{p(x_k)h}{2})y_{k-1}+(-2+h^2q(x_k))y_k+(1+\dfrac{p(x_k)h}{2})y_{k+1}=h^2f(x_k) \qquad ,k=2,\dots,N\text{-}2 \\ (1-\dfrac{p(x_{N-1})h}{2})y_{N-1}+(-2+h^2q(x_{N-1}))y_{N-1}=h^2f(x_{N-1})-(1+\dfrac{p(x_{N-1})h}{2})y_b \end{cases}$$

(4.39)

Для системы (4.39) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k)<0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\left|-2+h^2q(x_k)\right|>\left|1-\frac{p(x_k)h}{2}\right|+\left|1+\frac{p(x_k)h}{2}\right|, \qquad (4.39)$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого и второго порядков.

$$y_0' = \frac{y_1-y_0}{h}+O(h);$$

$$y_N' = \frac{y_N-y_{N-1}}{h}+O(h) \qquad (4.40)$$

$$y_0' = \frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}+O(h^2);$$

$$y_N' = \frac{y_{N-2}-4y_{N-1}+3y_N}{2h}+O(h^2); \qquad (4.41)$$

В случае использования формул (4.40) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трех диагональная структура матрицы коэффициентов. В случае использования формул (4.41) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трехдиагональная.

Пример 4.10. Решить краевую задачу $\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) + 2y(1) = 0 \end{cases}$ с шагом $h = 0.2$.

Здесь $p(x) = x$, $q(x) = 1$, $f(x) = 0$, $N = 5$, $x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6,$ $x_4 = 0.8, x_5 = 1.0$

Во всех внутренних узлах отрезка $[0,1]$ после замены производных их разностными аналогами получим

$(1 - 0.1x_k)y_{k-1} + (-2.04)y_k + (1 + 0.1x_k)y_{k+1} = 0$, $k = 1,...,4$

На левой границе $y_0 = 1$, на правой границе аппроксимируем производную односторонней разностью 1-го порядка:

$$\frac{y_5 - y_4}{0.2} + 2y_5 = 0.$$

С помощью группировки слагаемых, приведения подобных членов и подстановки значений x_k и с учетом $y_0 = 1$ получим систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} -2.04y_1 + 1.02y_2 = -0.98 \\ 0.96y_1 - 2.04y_2 + 1.04y_3 = 0 \\ 0.94y_2 - 2.04y_3 + 1.06y_4 = 0 \\ 0.92y_3 - 2.04y_4 + 1.08y_5 = 0 \\ + y_4 - 1.4y_5 = 0 \end{cases}$$

В данной трехдиагональной системе выполнено условие преобладания диагональных элементов и можно использовать метод прогонки (раздел 1.1.2).

В результате решения системы методом прогонки получим следующие значения: $y_5 = 0.2233205, y_4 = 0.31265, y_3 = 0.43111, y_2 = 0.58303, y_1 = 0.77191$.

Решением краевой задачи является табличная функция

Таблица 4.17

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_k	1.0	0.77191	0.58303	0.43111	0.31265	0.22332

Найдите больше информации на сайте **Учитесь.ру** (www.uchites.ru)!