

# Compensación IQ de modulaciones digitales

1<sup>st</sup> Nicolas G. Cotti

Departamento de Ingeniería Electrónica

UTN - FRBA

Buenos Aires, Argentina

ncotti@frba.utn.edu.ar

**Abstract**—En este trabajo se modelizan los desbalances presentes en un receptor *IQ* analógico usado en comunicaciones digitales, a la vez que se presenta un algoritmo para su corrección, el cual es implementado usando el software GNU Radio.

**Index Terms**—Comunicaciones digitales, Compensación *IQ*, GNU Radio

## I. INTRODUCCIÓN

Las comunicaciones digitales utilizan los diagramas de constelación complejos y los moduladores y demoduladores *IQ* para transmitir la información por un canal real [1]. Sin embargo, defectos en el transmisor o en el receptor pueden generar errores sistemáticos en las señales que reduzcan el rendimiento del sistema de comunicación.

El objetivo de este trabajo es el de presentar un algoritmo para la corrección de desbalances *IQ* en las comunicaciones digitales [7] e implementarlo con el software de GNU Radio.

Este documento se estructura como sigue: en la sección II se explican los principios de las comunicaciones digitales y se modeliza el transmisor y receptor *IQ* ideales, así como el canal de transmisión; en la sección III se modelizan los errores en los dispositivos fruto de las diferencias entre los caminos analógicos de las señales, a la vez que se obtienen los parámetros necesarios para describir las características de la señal desbalanceada; en la sección IV se muestran las ecuaciones necesarias para una implementación digital del algoritmo; finalmente, se presentan las conclusiones y resultados en GNU Radio.

## II. PRINCIPIOS DE LAS COMUNICACIONES DIGITALES

Un modulador M-QAM convierte una trama binaria con información a transmitir en  $M$  posibles símbolos complejos, representados en el plano *IQ*, donde la parte real se corresponde con la componente en fase *I*, mientras que la parte real se corresponde con la componente en cuadratura *Q*.

Dependiendo de la distribución de los puntos de la constelación en el plano complejo, se obtienen los distintos tipos de modulaciones digitales. En la Fig. 1 se muestran las constelaciones 4-PAM, la cual ubica todos sus puntos sobre el eje real; 8-PSK, con sus puntos sobre una circunferencia de radio constante; y 16-QAM, la cual ubica sus puntos en cualquier otra configuración [3]. A su vez, cada símbolo complejo tiene asociado una cantidad de  $\log_2(M)$  bits, siendo  $M$  un múltiplo de dos.

Debido a que no se pueden transmitir valores complejos por canales de comunicación reales, el modulador *IQ* convierte la

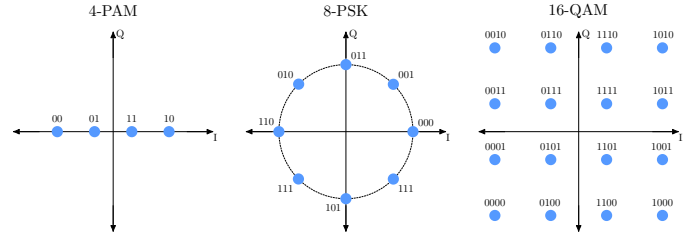


Fig. 1: Diagrama del modulador *IQ*, canal AWGN y demodulador *IQ*.

señal compleja  $C(t) = C_I + i \cdot C_Q$  en una señal real  $s(t)$  al obtener la parte real de su multiplicación con una exponencial compleja de frecuencia de portadora  $f_c$ , según la ecuación (1). Al expandir la exponencial compleja de (1) utilizando la fórmula de Euler [4], se obtiene la ecuación (2)

$$s(t) = \mathcal{R}\{c(t) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot f_c \cdot t}\} \quad (1)$$

$$s(t) = c_I \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) - c_Q \cdot \sin(2\pi \cdot f_c \cdot t) \quad (2)$$

La señal  $s(t)$  viaja por un canal de comunicación, el cual se modeliza como un canal de ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN), y se obtiene la señal recibida  $r(t)$  según la ecuación (3). La señal  $n(t)$  representa ruido blanco gaussiano, el cual es una variable aleatoria que se distribuye con media cero y desvío estándar  $\sigma$  [9].

$$r(t) = s(t) + n(t); \quad n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (3)$$

El demodulador *IQ* reconvierte la señal real en su expresión compleja, utilizando un oscilador sincronizado a la misma frecuencia de portadora  $f_c$  que el transmisor. La componente en fase  $Z_I$  se obtiene al multiplicar la señal recibida  $r(t)$  por un coseno y utilizando un filtro pasabajos para atenuar la señal imagen en el doble de frecuencia de portadora  $f_c$ . A su vez, la componente en cuadratura  $Z_Q$  se obtiene al multiplicar por un seno, según las ecuaciones (4) y (5).

$$Z_I = 2 \cdot \text{LPF}\{r(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t)\} \quad (4)$$

$$Z_Q = -2 \cdot \text{LPF}\{r(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_c \cdot t)\} \quad (5)$$

En la Fig. 2 se muestra un esquema completo del modulador *IQ*, el canal AWGN y el demodulador *IQ*; incluyendo los

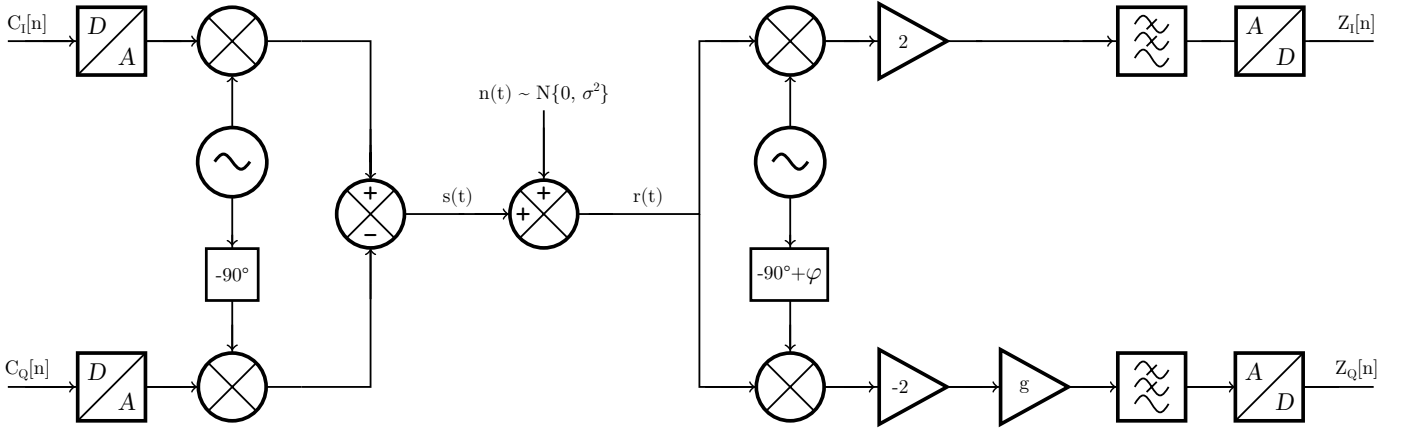


Fig. 2: Diagrama del modulador IQ, canal AWGN y demodulador IQ.

errores de fase  $\phi$  y de ganancia  $g$ , los cuales se discuten en la sección III.

Finalmente, para recibir un símbolo M-QAM por decisión fuerte se asocia el valor recibido con el punto de la constelación  $k$ -ésimo  $C_k$  de menor distancia euclidiana, según (6) [9].

$$Z[n] = \min_{k \in [0; M-1]} \sqrt{(C_{Ik} - Z_I[n])^2 + (C_{Qk} - Z_Q[n])^2} \quad (6)$$

### III. MODELIZACIÓN DE ERRORES EN LA RECEPCIÓN

Los símbolos recibidos  $Z[n]$  no coinciden exactamente con los transmitidos  $C[n]$  debido principalmente a tres fenómenos: ruido en el canal, offset de continua o DC, y desbalances en el modulador o demodulador IQ. De estas tres causas, las últimas dos constituyen errores sistemáticos que pueden ser corregidos.

El offset de DC se representa en la Fig. 3 como un corrimiento de los puntos en el plano  $IQ$ , según la ecuación (7)

$$z_{offset-DC} = (r_I + dc_I) + i \cdot (r_Q + dc_Q) \quad (7)$$

Para compensar este defecto, se le resta a la señal recibida la diferencia entre su valor medio  $E\{r\}$  y el valor medio de la constelación  $E\{C\}$ .

$$Z = r - (E\{r\} - E\{C\}) \quad (8)$$

El otro error sistemático es el que se presenta cuando hay una diferencia  $g$  entre la ganancia de la rama en fase  $I$  y en cuadratura  $Q$ , así como un corrimiento de fase  $\phi$  al querer desfasar  $-90^\circ$  el oscilador para obtener un seno a partir del coseno. Los efectos de estos errores en la señal recibida respecto a la constelación de referencia se muestra en la Fig. 4.

Partiendo de las ecuaciones (4) y (5), se modeliza el error solamente en la rama en cuadratura, según se muestra en la Fig. 2, de modo que la señal recibida  $Z$  se corresponde con la ecuación (9).

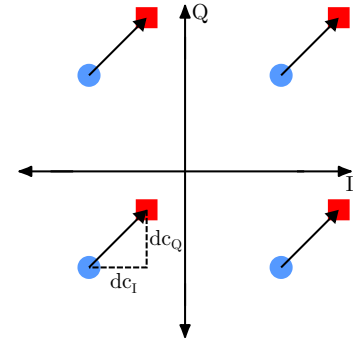


Fig. 3: Efecto del offset de continua (cuadrados rojos) en la constelación compleja (círculos azules).

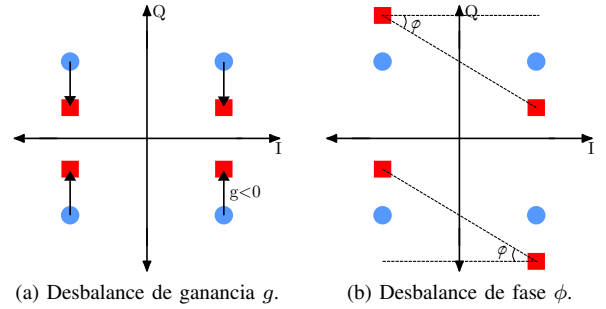


Fig. 4: Efecto de los desbalances de ganancia  $g$  y de fase  $\phi$  sobre los puntos de la constelación recibidos (cuadrados rojos), respecto a la constelación original (círculos azules).

$$\begin{bmatrix} Z_I \\ Z_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -g \cdot \sin(\phi) & g \cdot \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_I \\ r_Q \end{bmatrix} \quad (9)$$

El objetivo es recuperar la señal recibida  $r$  sin las distorsiones causadas por el demodulador IQ. Por lo tanto, al reordenar la ecuación (9), es posible obtener las señales de entrada en función de las señales recibidas en (10) y (11):

$$r_I = Z_I \quad (10)$$

$$r_Q = \frac{Z_Q + g \cdot \sin(\phi) \cdot Z_I}{g \cdot \cos(\phi)} \quad (11)$$

Al definir los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  según (12) y (13) y reemplazarlos en la ecuación (11), se obtiene la expresión de la señal recibida (14). Por lo tanto, es posible reconstruir la señal sin los errores del demodulador obteniendo los valores de los coeficientes.

$$C_1 = g \cdot \sin(\phi) \quad (12)$$

$$C_2 = g \cdot \cos(\phi) \quad (13)$$

$$r_Q = \frac{Z_Q + C_1 \cdot Z_I}{C_2} \quad (14)$$

#### A. Obtención de los coeficientes

Es posible hallar los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  a partir de los siguientes tres parámetros  $\theta$  [7], donde  $\text{sgn}(x)$  es la función signo y  $E\{x\}$  es el operador esperanza de una variable aleatoria:

$$\theta_1 = -E\{\text{sgn}(Z_I) \cdot Z_Q\} \quad (15)$$

$$\theta_2 = E\{|Z_I|\} \quad (16)$$

$$\theta_3 = E\{|Z_Q|\} \quad (17)$$

Si el canal es AWGN, entonces  $Z_I$  y  $Z_Q$  son variables aleatorias con distribución normal, cuya función densidad de probabilidad  $\text{pdf}(z)$  queda definida en función de su valor medio  $\mu$  y su desvío estándar  $\sigma$ , según la ecuación (18).

$$\text{pdf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}; \quad z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (18)$$

Si se elimina el offset de continua, de modo que el valor medio de ambas señales sea cero, y considerando que la señal  $Z_Q$  se ve multiplicada por el error de ganancia  $g$ , entonces  $Z_I$  se distribuye con una distribución normal de media cero y desvío estándar  $\sigma$ ,  $Z_I \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , mientras que  $Z_Q$  se distribuye con el mismo desvío, pero multiplicado por el error de ganancia  $Z_Q \sim \mathcal{N}(0, g^2 \cdot \sigma^2)$ .

Al aplicar módulo y con valor medio nulo, la distribución normal se convierte en una distribución normal plegada [8], representada en la ecuación (19).

$$\text{pdf}(|Z|) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{Z^2}{2 \cdot \sigma^2}}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Según la definición de la esperanza matemática de una función distribución de probabilidad de la ecuación (20), al reemplazar (19) en (20) y resolviendo la integral, se obtienen los valores de los coeficientes  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en (21) y (22) respectivamente.

$$E\{\text{pdf}(Z)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{pdf}(Z) \cdot Z \cdot dZ \quad (20)$$

$$\theta_2 = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (21)$$

$$\theta_3 = g \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (22)$$

Para hallar el parámetro  $\theta_1$ , es necesario hallar la función densidad de probabilidad conjunta entre la componente en fase y en cuadratura  $\text{pdf}(Z_I, Z_Q)$ , la cual puede representarse por el teorema de Bayes [6] según (23).

$$\text{pdf}(z_I, z_Q) = \text{pdf}(z_Q|z_I) \cdot \text{pdf}(z_I) \quad (23)$$

Dado que se recibe  $Z_I$  y viendo la ecuación (9), se puede hallar el valor medio y la esperanza de esa distribución considerando que  $Z_I$  es un valor conocido, y que  $r_Q$  es una variable aleatoria.

$$\mu_{Z_Q|Z_I} = -g \cdot \sin(\phi) \cdot Z_I \quad (24)$$

$$\sigma_{Z_Q|Z_I} = g \cdot \cos(\phi) \cdot \sigma \quad (25)$$

Reemplazando estos valores en la distribución normal de (18), se obtiene en (26) la función densidad de probabilidad condicional  $\text{pdf}(Z_Q|Z_I)$ .

$$\text{pdf}(Z_I|Z_Q) = \frac{1}{g \cdot \cos(\phi) \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(Z_Q + g \cdot \sin(\phi) \cdot Z_I)^2}{2 \cdot g^2 \cdot \cos^2(\phi) \cdot \sigma^2}} \quad (26)$$

Multiplicando las funciones densidad de probabilidad de (26) y (18) según el teorema de Bayes en (23), sabiendo que la distribución de  $Z_I$  es una normal de media cero y varianza  $\sigma^2$ , se obtiene la distribución de probabilidad conjunta  $\text{pdf}(Z_I, Z_Q)$  en (27), y al resolver la integral de la esperanza matemática, el valor del parámetro  $\theta_1$  se obtiene en (28).

$$\text{pdf}(Z_I, Z_Q) = \frac{1}{2\pi \cdot g \cdot \cos(\phi) \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{(Z_Q + 2 \cdot g \cdot \sin(\phi) \cdot Z_Q \cdot Z_I + g \cdot \sin(\phi) \cdot Z_I)^2}{2 \cdot g^2 \cdot \cos^2(\phi) \cdot \sigma^2}} \quad (27)$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot C_1 \cdot \sigma \quad (28)$$

#### IV. IMPLEMENTACIÓN DISCRETA

Dada una muestra de  $N$  elementos de las señales  $Z_I$  y  $Z_Q$ , es posible estimar los parámetros  $\theta$  reemplazando el operador esperanza por sumatorias finitas:

$$\hat{\theta}_1 = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{sgn}(Z_I[n]) \cdot Z_Q[n] \quad (29)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |Z_I[n]| \quad (30)$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |Z_Q[n]| \quad (31)$$

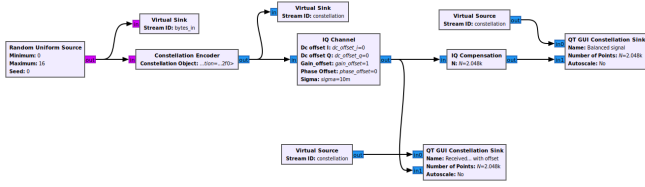


Fig. 5: Diagrama en bloques de GNU Radio del algoritmo de compensación IQ, usando los bloques jerárquicos "IQ Channel" e "IQ Compensation".

Una vez hallado el valor numérico de los parámetros  $\theta$ , es posible utilizar sus expresiones de cálculo, las cuales fueron deducidas en (28), (21) y (22), para obtener el valor numérico de los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , como se muestra en las ecuaciones (32) y (33); a la vez que se pueden obtener los valores del error de ganancia  $g$  (34) y de fase  $\phi$  (35).

$$C_1 = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (32)$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{\theta_3^2 - \theta_1^2}}{\theta_2} \quad (33)$$

$$g = \frac{\theta_3}{\theta_2} \quad (34)$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right) \quad (35)$$

Finalmente, al reemplazar los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  en la ecuaciones (10) y (14), se obtienen los puntos de la constelación compleja balanceados  $(r_I, r_Q)$ , sin los defectos del receptor IQ presentes en los símbolos recibidos  $(Z_I, Z_Q)$ .

## V. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El algoritmo para la compensación IQ fue implementado en GNU Radio [5], donde se pudo comprobar la efectividad del mismo ante los defectos del receptor IQ usando la modelización presentada en la Fig. 2. En la Fig. 5 se muestra el diagrama en bloques de GNU Radio, en el cual se incluyó la modelización de los errores del receptor y el canal AWGN en el bloque jerárquico "IQ Channel", mientras que el algoritmo de compensación se encapsula en el bloque jerárquico "IQ Compensation" cuyo código fuente se encuentra disponible en [2]. A su vez, en la Fig. 6 se muestra la interfaz gráfica del diagrama en bloques construido.

A pesar de que GNU Radio ya posee un par de bloques que permiten compensar los defectos del receptor IQ llamados "IQ Bal Fix" e "IQ Bal Optimize", estos no poseen documentación, lo que los hace complejos de implementar. En su lugar, en este trabajo se explicaron los conceptos y fórmulas de cálculo necesarios para realizar la compensación IQ y se demostró su correcto funcionamiento en GNU Radio [2].

## REFERENCES

[1] A. Bruce Carlson and Paul B Crilly. *Communication Systems*. McGraw-Hill Companies, 2009.

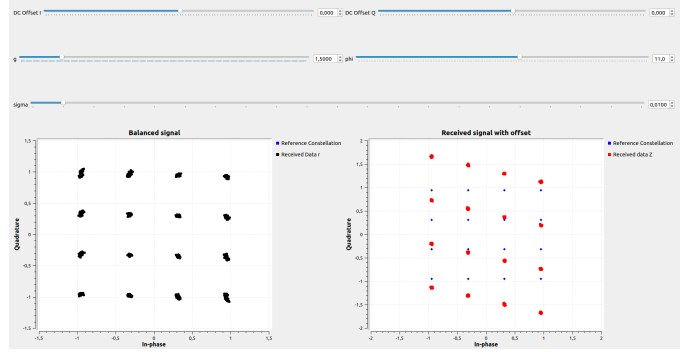


Fig. 6: Interfaz gráfica del diagrama de GNU Radio.

- [2] Nicolas G. Cotti. *GNU Radio diagram for iq compensation*. Nov. 2024. URL: [https://github.com/ncotti/gnu\\_radio](https://github.com/ncotti/gnu_radio).
- [3] Leon W Couch. *Sistemas de comunicación digitales y analógicos 7ED*. Pearson, 2008. ISBN: 9702612160.
- [4] Damián Oscar Craiem and Ricardo Armentano. *Análisis de sistemas lineales*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Centro de Estudiantes de Ingeniería Tecnológica - CEIT, 2006. ISBN: 978-987-1063-25-3.
- [5] *GNU Radio - the free & open source radio ecosystem*. URL: <https://www.gnuradio.org/>.
- [6] Peter M Lee. *Bayesian Statistics*. Wiley, 2009. ISBN: 9780340814055.
- [7] Niels A Moseley and Cornelis H Slump. "A Low-complexity Feed-forward I/Q Imbalance Compensation Algorithm". In: *Computational Statistics & Data Analysis* (2006).
- [8] Michail Tsagris, Christina Beneki, and Hossein Hassani. "On the folded normal distribution". en. In: *Mathematics* 2.1 (Feb. 2014). arXiv:1402.3559 [stat], pp. 12–28. ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math2010012.
- [9] Mathuranathan Viswanathan. *Wireless Communication Systems in Matlab*. Independent, 2020. ISBN: 979-8648350779. URL: <https://www.gaussianwaves.com/wireless-communication-systems-in-matlab/>.