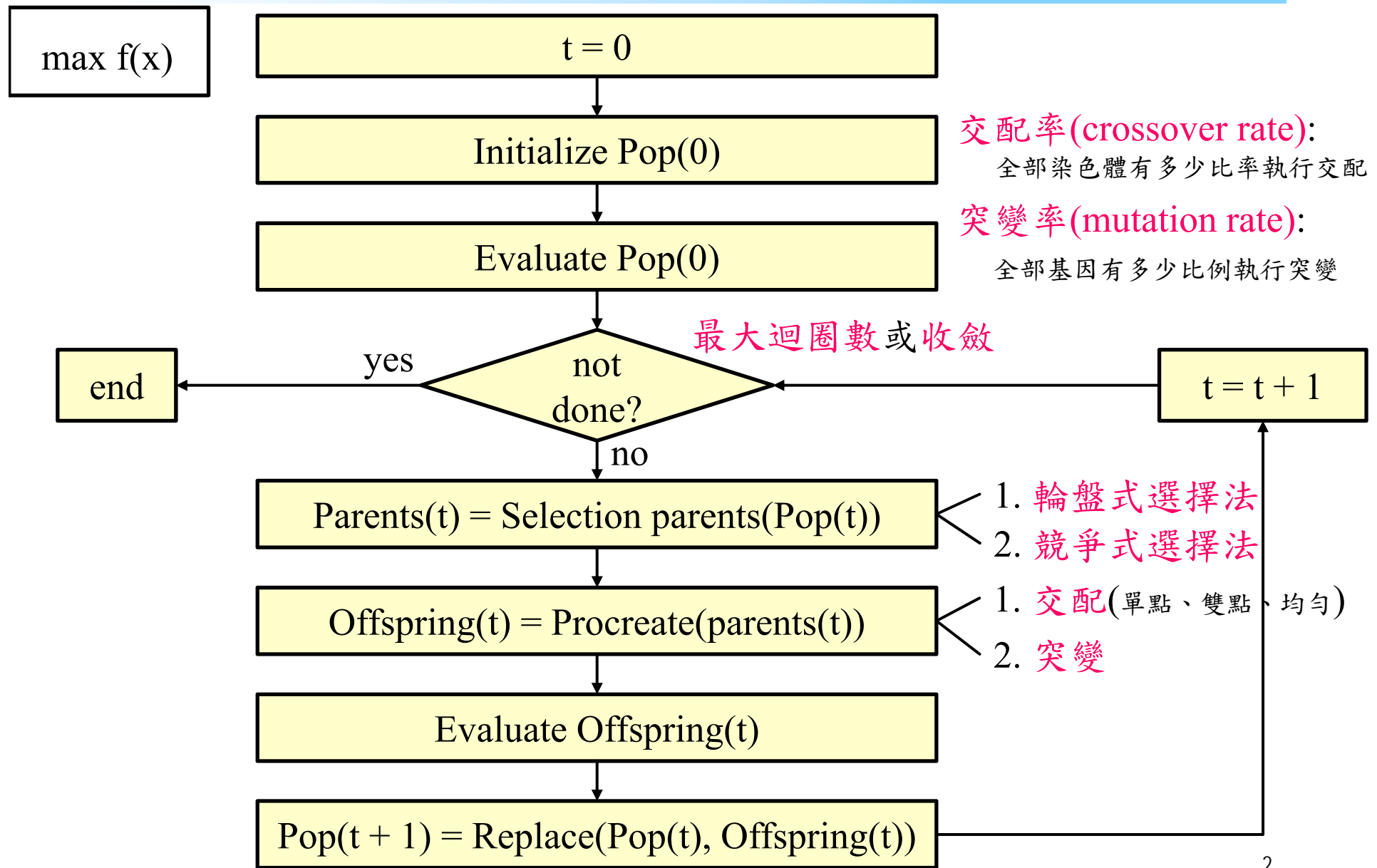


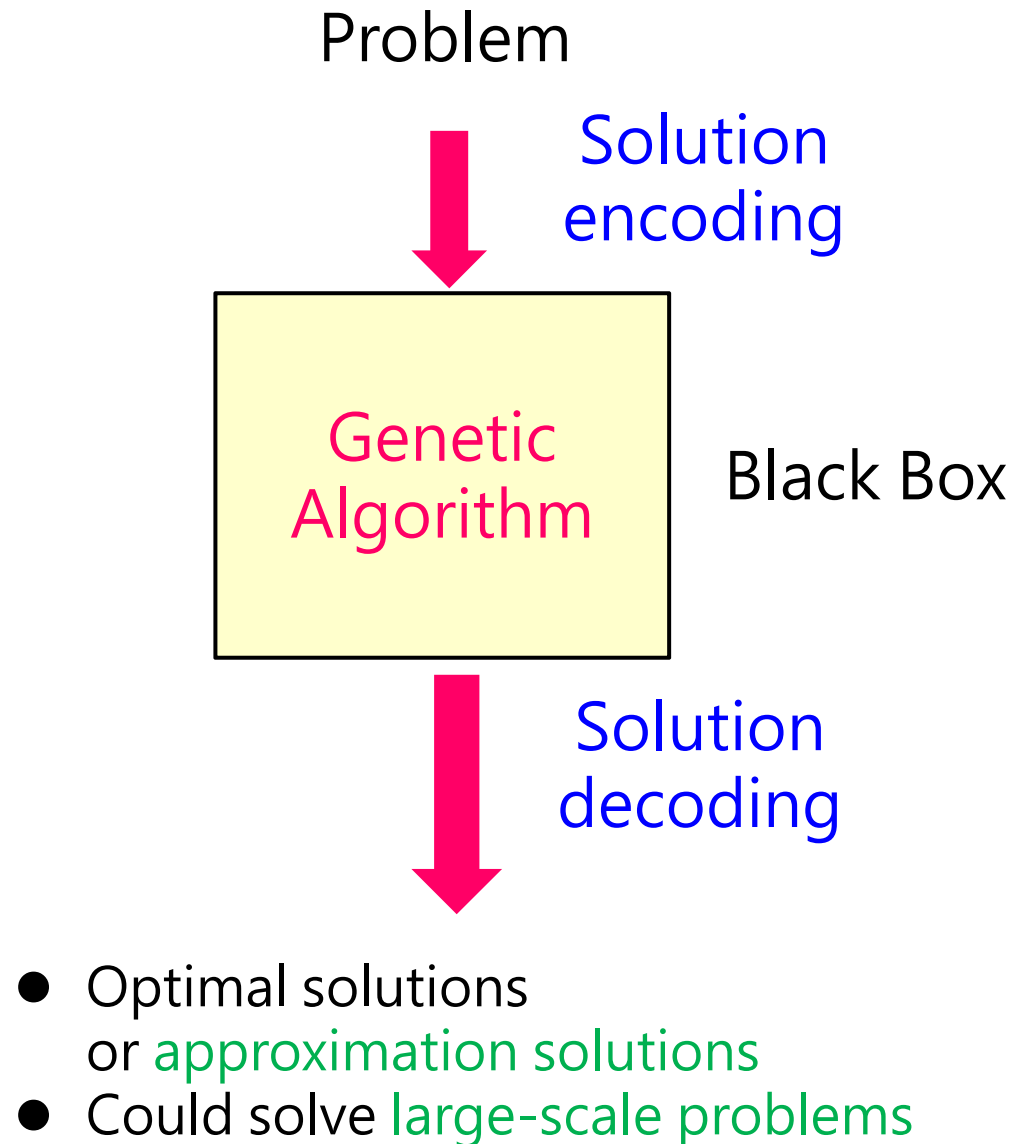


離散決策變數之編碼 與指派問題(Assignment Problem)

基因演算法流程圖



Framework of using the GA



Solution encoding/decoding

- Encoding continuous decision variables

3.6	7.2	4.9	1.3	2.9
-----	-----	-----	-----	-----

- Encoding discrete decision variables

1	0	0	1	1
---	---	---	---	---

3	7	4	3	2
---	---	---	---	---

- Encoding permutation solutions

3	1	5	4	2
---	---	---	---	---

- Mixed encoding

3	1	5	4	2	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Handling constraints

- Repairing method

- Always keep the feasibility of each chromosome (never violating any constraint in each iteration)

- Penalty method (noting positive/negative numbers)

- Problem: Minimize $c(x)$



Minimize Fitness = $c(x) + \text{penalty cost} \times \#(\text{violations})$

or Maximize Fitness = $1/(c(x) + \text{penalty cost} \times \#(\text{violations}))$

- Problem: Maximize $f(x)$



Maximize Fitness = $f(x) - \text{penalty cost} \times \#(\text{violations})$

範例1

- A100型與B200型零件的每組利潤分別為2百萬元與1百萬元，
- A100型與B200型機器上的處理時間分別為3小時與2小時
- 若此種機器總共有40小時可用以處理此兩型零件
- 且由於政策上的考量，此兩型零件至少各必須生產4組

► Max $2X + Y$

s.t.

$3X + 2Y \leq 40$ 機器處理時間不得超過40小時

$X \geq 4$ A100型零件至少須生產4組

$Y \geq 4$ B200型零件至少須生產4組

$X, Y \geq 0$ 且為整數

Integer Programming is NP-complete

使用GA求解

1. Coding a chromosome

- (X, Y)
- 初始化(X,Y)：X用隨機從[4,13]之間產生，Y用隨機從[4,20]之間產生
- 修復不可行解：把X或Y減少至滿足所有限制式

2. Fitness function

- $\text{Fit}(X, Y) = 2X + Y$

3. Selection

- 用競爭式選擇法或輪盤式選擇法選出

4. Reproduction

- 交配：用單點交配、雙點交配、或均勻交配產生子代
- 突變：任選某一染色體中的某一基因，給其於範圍內之隨機值
- 修復不可行解：把X或Y減少至滿足所有限制式

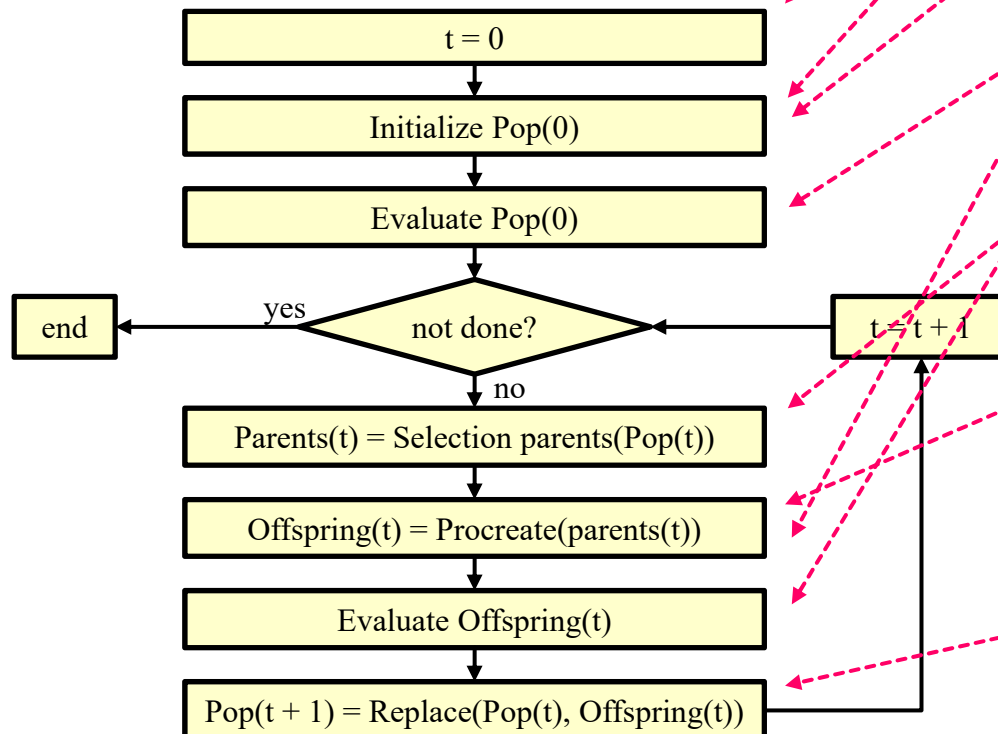
5. Replacement

- $\text{Pop}(t+1) = \{\text{Pop}(t) \cup \{\text{kids}\}\} - \{\text{worsts}\}$

基因演算法流程圖

$\max f(x)$

► Max $2X + Y$
s.t.
 $3X + 2Y \leq 40$
 $X \geq 4, Y \geq 4$
 $X, Y \geq 0$ 且為整數



1. 編碼 : (X, Y)

初始化 : X 用隨機從 $[4,13]$ 間產生, Y 用隨機從 $[4,20]$ 間產生

修復不可行解 : 把 X 或 Y 減少至滿足所有限制式

2. 適應度 : $\text{Fit}(X, Y) = 2X + Y$

3. 選擇 : 用競爭式選擇法或輪盤式選擇法選出

4. 繁衍 :

- 交配 : 用單點交配、雙點交配、或均勻交配產生子代
- 突變 : 任選某一染色體中的某一基因, 給其於範圍內之隨機值

5. 取代 :

$\text{Pop}(t+1)$
 $= \{\text{Pop}(t) \cup \{\text{kids}\}\} - \{\text{worsts}\}$

Python code for solution representation

- 編碼與初始化：

- (X, Y) 表為 $(X[0], X[1])$,
X 用隨機從 $[4, 13]$ 間產生，Y 用隨機從 $[4, 20]$ 間產生

- $$\text{pop} = \begin{bmatrix} X_0[0] & X_0[1] \\ X_1[0] & X_1[1] \\ \vdots & \vdots \\ X_n[0] & X_n[1] \end{bmatrix},$$

當中 $X_i[j]$ 是第 i 個染色體的第 j 個基因，

$X_i[0]$ 用隨機從 $[4, 13]$ 間產生， $X_i[1]$ 用隨機從 $[4, 20]$ 間產生

```
def initPop():  
    # 初始化群體  
    p = []  
    for i in range(NUM_CHROME):  
        # ==== 產生 2 個介於[下界, 上界]的隨機整數 ====  
        p.append([np.random.choice(4, 13), np.random.choice(4, 20)])  
  
    return p
```

NUM_CHROME 即為上述公式的 n

範例2：固定成本問題

- 每種元件均可由三型機器加工：機器A、B與C；
- 該公司應如何生產，以使得利潤為最大。
- 各元件的產能限制為各10,000個。

表 7.2			
加工時間（分），利潤（元）		機器	
元件	A	B	C
1	5, 12	2, 10	3, 13
2	6, 10	4, 12	5, 10
3	4, 15	3, 19	6, 16
機器可用小時數	100	120	80
固定成本（元）	20000	10000	15000

模型

- 決策變數

- X_{ij} = 元件 i (=1, 2, 3)在機器 j (=A, B, C) 產量
- $Y_j = 1$, 若機器 j (=A, B, C)有被運用來生產元件 ; 否則為0

- 模型 :

$$\text{Max } 12X_{1A} + 10X_{1B} + 13X_{1C} + 10X_{2A} + 12X_{2B} + 10X_{2C} + 15X_{3A} + 19X_{3B} + 16X_{3C} - 20000Y_A - 10000Y_B - 15000Y_C$$

s.t.

$$5X_{1A} + 6X_{2A} + 4X_{3A} \leq 6000Y_A$$

!=100小時*60分/小時

$$2X_{1B} + 4X_{2B} + 3X_{3B} \leq 7200Y_B$$

!=120小時*60分/小時

$$3X_{1C} + 5X_{2C} + 6X_{3C} \leq 4800Y_C$$

!=80小時*60分/小時

Y_A, Y_B, Y_C 均為整數

表 7.2			
加工時間 (分) , 利潤 (元)		機器	
元件	A	B	C
1	5, 12	2, 10	3, 13
2	6, 10	4, 12	5, 10
3	4, 15	3, 19	6, 16
機器可用小時數	100	120	80
固定成本 (元)	20000	10000	15000

使用GA求解

1. Coding a chromosome

- $(X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}, X_{1B}, X_{2B}, X_{3B}, X_{1C}, X_{2C}, X_{3C}, Y_A, Y_B, Y_C)$, 當中X是整數;Y是0-1變數
- 初始化(X,Y) : X用隨機從[0,上界]之間產生, Y用隨機設為0或1

2. Fitness function

- $\text{Fit}(X, Y) = \text{目標式} - \text{懲罰值} * \text{解違反幾個限制式}$

3. Selection

- 用競爭式選擇法或輪盤式選擇法選出

4. Reproduction

- 交配 : 用單點交配、雙點交配、或均勻交配產生子代
- 突變 : 任選某一染色體中的某一基因, 給其於範圍內之隨機值

5. Replacement

- $\text{Pop}(t+1) = \{\text{Pop}(t) \cup \{\text{kids}\}\} - \{\text{worsts}\}$

max $f(x)$

基因演算法流程圖

Max $12X_{1A} + 10X_{1B} + 13X_{1C} + 10X_{2A} + 12X_{2B} + 10X_{2C} + 15X_{3A} + 19X_{3B} + 16X_{3C} - 20000Y_A - 10000Y_B - 15000Y_C$
s.t.
 $5X_{1A} + 6X_{2A} + 4X_{3A} \leq 6000Y_A$
 $2X_{1B} + 4X_{2B} + 3X_{3B} \leq 7200Y_B$
 $3X_{1C} + 5X_{2C} + 6X_{3C} \leq 4800Y_C$
 Y_A, Y_B, Y_C 均為整數

1. 編碼：($X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}, X_{1B}, X_{2B}, X_{3B}, X_{1C}, X_{2C}, X_{3C}, Y_A, Y_B, Y_C$), 當中X是整數; Y是0-1變數

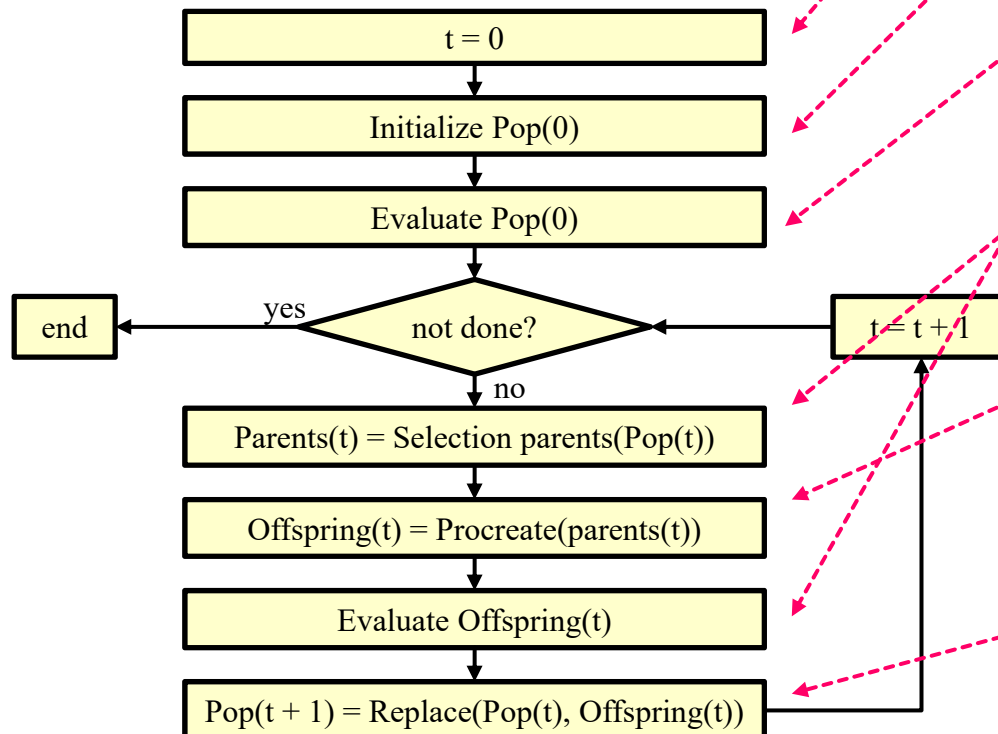
初始化：X隨機從[0,上界]間產生，Y隨機為0或1

2. 適應度：設為目標式 - 懲罰值 * 解違反限制式的個數

3. 選擇：用競爭式選擇法或輪盤式選擇法選出

4. 繁衍：
• 交配：用單點交配、雙點交配、或均勻交配產生子代
• 突變：任選某一染色體中的某一基因，給其於範圍內之隨機值

5. 取代：
 $Pop(t+1) = \{Pop(t) \cup \{kids\} - \{worsts\}$



Python code for solution representation

- 編碼與初始化：

- $(X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}, X_{1B}, X_{2B}, X_{3B}, X_{1C}, X_{2C}, X_{3C}, Y_A, Y_B, Y_C)$,
表為 $(X[0], \dots, X[8], X[9], \dots, X[11])$,
前9個X隨機從[0,上界]間產生，後3個X隨機為0或1

- $$\text{pop} = \begin{bmatrix} X_0[0] & X_0[1] & \dots & X_0[11] \\ X_1[0] & X_1[0] & \dots & X_1[11] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n[0] & X_n[0] & \dots & X_n[11] \end{bmatrix},$$

當中 X_{ij} 是第i個染色體的第j個基因
，前9個隨機從[0,上界]間產生，後個X隨機為0或1

```
X_UB = [1200, 1000, 1500, 3600, 1800, 2400, 1600, 960, 800, 1, 1, 1]

def initPop():                                # 初始化群體
    p = []
    for i in range(NUM_CHROME) :
        # ==== 產生 NUM_BIT 個介於[0, UB[j]]的隨機整數 ====
        p.append([np.random.choice(0, X_UB[j]) for j in range(NUM_BIT)])

    return p
```

NUM_CHROME即為上述公式的n, NUM_BIT = 12

範例3：指派問題(Assignment Problems)

- 各種挖土機完成各個專案所需的時間估計值(日)

	建築專案		
挖土機	1	2	3
A	10	9	13
B	14	12	11
C	12	15	16

- 專案經理必須決定該如何指派這三部挖土機來執行這三個專案，使得完成的時間最短。

0-1整數規劃模型

決策變數：

$X_{ij} = 1$ ，若機器 $i(=A, B, C)$ 被分配來執行專案 $j(=1, 2, 3)$ ；否則為0

模型：

$$\text{Min } 10X_{A1} + 9X_{A2} + 13X_{A3} + 14X_{B1} + 12X_{B2} + 11X_{B3} + 12X_{C1} + 15X_{C2} + 16X_{C3}$$

s.t.

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 1$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 1$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} \leq 1$$

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 1$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 1$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 1$$

$$X_{ij} \geq 0$$

	建築專案		
挖土機	1	2	3
A	10	9	13
B	14	12	11
C	12	15	16

使用GA求解

1. Coding a chromosome

- $(X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C3})$, 當中Y是0-1變數
- 初始化(X,Y) : X用隨機設為0或1

2. Fitness function

- $\text{Fit}(X, Y) = 1/(\text{目標式} + \text{懲罰值} * \text{解違反幾個限制式})$

3. Selection

- 用競爭式選擇法或輪盤式選擇法選出

4. Reproduction

- 交配 : 用單點交配、雙點交配、或均勻交配產生子代
- 突變 : 任選某一染色體的某一基因，若是0，換成1；否則換成0

5. Replacement

- $\text{Pop}(t+1) = \{\text{Pop}(t) \cup \{\text{kids}\}\} - \{\text{worsts}\}$

max f(x)

基因演算法流程圖

Min $10X_{A1} + 9X_{A2} + 13X_{A3} + 14X_{B2} + 12X_{B2} + 11X_{B3} + 12X_{C1} + 15X_{C2} + 16X_{C3}$
s.t.
 $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 1$; $X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 1$; $X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} \leq 1$
 $X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 1$; $X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 1$; $X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 1$
 $X_{ij} \geq 0$

1. 編碼：($X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C3}$), 當中X是0-1變數

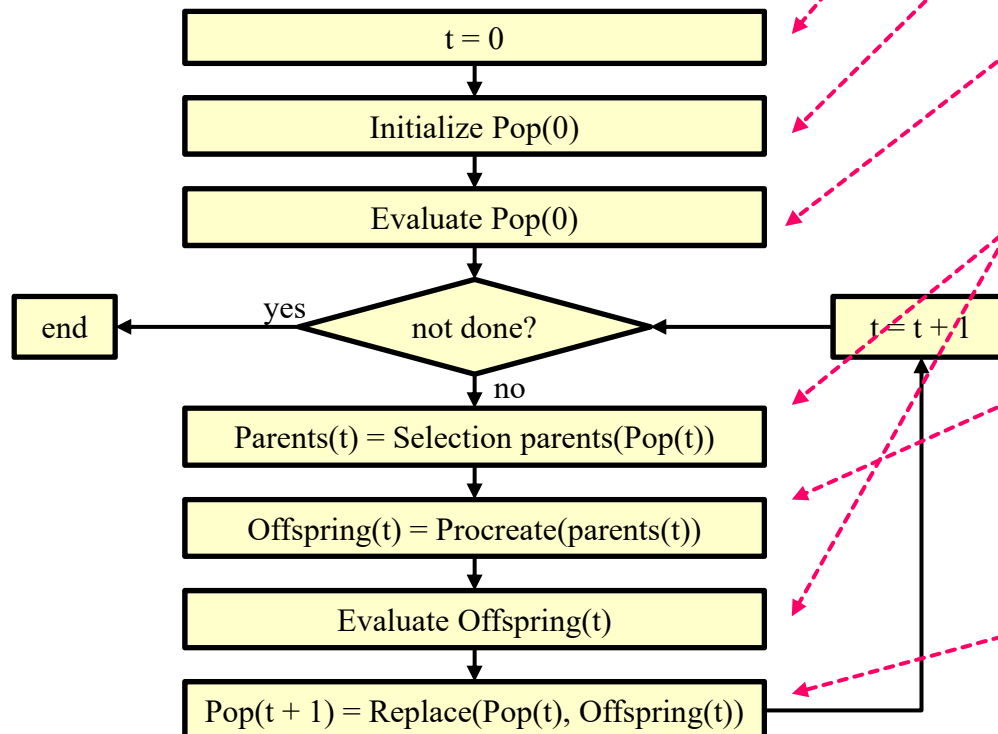
初始化：X隨機為0或1

2. 適應度：設為 $1/(\text{目標式} + \text{懲罰值} * \text{解違反幾個限制式})$

3. 選擇：用競爭式選擇法或輪盤式選擇法選出

4. 繁衍：
• 交配：用單點交配、雙點交配、或均勻交配產生子代
• 突變：任選某一染色體中的某一基因，給其於範圍內之隨機值

5. 取代：
 $\text{Pop}(t+1) = \{\text{Pop}(t) \cup \{\text{kids}\} - \{\text{worsts}\}$



Python code for solution representation

- 編碼與初始化：

- $(X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C3})$
表為 $(X[0], X[1], X[3], X[4], X[5], X[6], X[7], X[8], X[9])$,
每個 $X[j]$ 隨機為 0 或 1

- $$\text{pop} = \begin{bmatrix} X_0[0] & X_0[1] & \dots & X_0[9] \\ X_1[0] & X_1[0] & \dots & X_1[9] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n[0] & X_n[0] & \dots & X_n[9] \end{bmatrix},$$

當中 $X_i[j]$ 是第 i 個染色體的第 j 個基因，是個隨機二元數

```
def initPop():  
    # 初始化群體  
    # 產生 NUM_CHROME 個二元編碼  
    return np.random.randint(2, size=(NUM_CHROME, NUM_BIT))
```

NUM_CHROME 即為上述公式的 n
NUM_BIT = 9

Exercise

- Use the sample code of the last week (i.e., "GA05-GA-basic-2.py")

to implement the above assignment problem.

- Hint:

- 1. (編碼) 設定成9個bit
- 2. (解碼) 設定懲罰成本成一大數
- 3. (解碼) 改適應度函數
 - ✓ 輸入參數是 $x[0], x[1], \dots, x[8]$
 - ✓ 計算違反了幾條限制式
 - ✓ 計算 $1/\text{cost} = 1 / (f(x) + \text{懲罰值} * \text{幾條違反})$
- 4. (印出) 把 y 印成 $\%f$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 10X_{A1} + 9X_{A2} + 13X_{A3} \\ & + 14X_{B2} + 12X_{B2} + 11X_{B3} \\ & + 12X_{C1} + 15X_{C2} + 16X_{C3} \\ \text{s.t.} \quad & X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 1; \\ & X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 1; \\ & X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} \leq 1; \\ & X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 1; \\ & X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 1; \\ & X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 1; \\ & X_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$