管理數學

1.2 矩陣

終版

班級:四資二甲

第一組

組員:3B032049 鄭哲丞

3B032130 蔡易達

3A932035 陳柏融

3A932045 曾翊晴

2023/3/24

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

6.如可能的話，計算

(e)

$2A^T + B$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 3 & 2\times 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+1 & 4+0 \\ 4+2 & 2+1 \\ 6+3 & 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

6.如可能的話，計算

(f)

$(3D - 2F)^T$

$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\left(3\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^T$

$= \left(\begin{bmatrix} 3\times 3 & -2\times 3 \\ 2\times 3 & 4\times 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\times -2 & 5\times -2 \\ 2\times -2 & 3\times -2 \end{bmatrix}\right)^T$

$= \left(\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\right)^T$

$= \left(\begin{bmatrix} 17 & -16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 17 & 2 \\ -16 & 6 \end{bmatrix}$

7.如可能的話，計算

(d)

$3A^T+5B^T$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}，A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\quad B^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times1 & 3\times2\\ 3\times2 & 3\times1\\ 3\times3 & 3\times4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\times1 & 5\times2 & 5\times3\\ 5\times0 & 5\times1 & 5\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 3\\ 9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 10 & 15\\ 0 & 5 & 10\end{bmatrix}$$

根據矩陣的加法定義，因為兩矩陣大小不同，所以無法做矩陣的加法計算。

7.如可能的話，計算

(f)

$(C+E+F^T)^T$

$$C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\right)^T，F^T=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}3+2 & -1+(-4) & 3+5\\ 4+0 & 1+1 & 5+4\\ 2+3 & 1+2 & 3+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\right)^T$$

$$=\left(\begin{bmatrix}5 & -5 & 8\\ 4 & 2 & 9\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\right)^T$$

根據矩陣的加法定義，因為兩矩陣大小不同，所以無法做矩陣的加法計算。

8.矩陣$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$是否為矩陣$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$的線性組合?試驗之。

假設 r_1, r_2 為實數

假設$r_1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+r_2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1\times 1 & r_1\times 0\\r_1\times 0 & r_1\times 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_2\times 1 & r_2\times 0\\r_2\times 0 & r_2\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1 & 0\\0 & r_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1+r_2 & 0\\0 & r_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

根據矩陣相等定義中的兩矩陣相對應元素相等，所以r_1+r_2=3, r_1=2，故假設 r_1=2、 r_2=1 代入：

$\begin{bmatrix}2+1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ 與題目矩陣$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$相等

故$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$為此矩陣線性組合。

9.矩陣$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$是否為矩陣$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$的線性組合?試驗之。

假設 r_1, r_2 為實數

假設$r_1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+r_2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1\times 1 & r_1\times 0\\r_1\times 0 & r_1\times 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_2\times 1 & r_2\times 0\\r_2\times 0 & r_2\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1 & 0\\0 & r_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1+r_2 & 0\\0 & r_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}r_1+r_2 & 0\\0 & r_1\end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$相對應的元素不相等，由此得證，矩陣$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$不是矩陣$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$及矩陣$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$的線性組合。

10.令$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{bmatrix}$，$I_3 \ =\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ λ為一實數，試求$\lambda I_3 - A$。

$$\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\left(-1\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ -6 & 2 & -3\\ -5 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -6 & \lambda+2 & -3\\ -5 & -2 & \lambda-4\end{bmatrix}$$